研　究　速　報
特　集　13　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　UDC 532.517.4：533.16

回転系における乱流の非等方渦粘性

Anisotropic eddy viscosity of turbulence in a rotating system

下　村　　裕*・吉　澤　　徴*
Yutaka SHIMOMURA and Akira YOSHIZAWA

本報告で用いる主な記号の意味を以下に列記する．

- $\boldsymbol{x}$：空間座標
- t：時間座標
- $\boldsymbol{X}$：スケール分離された大スケール空間座標
- T：スケール分離された大スケール時間座標
- $\delta^{\alpha\beta}$：クロネッカーのデルタ記号
- $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$：レビ・チビタの完全反対称テンソル
- $\boldsymbol{\omega}$：角速度ベクトル
- δ：スケールパラメータ
- $\boldsymbol{k}$：波数ベクトル
- $\boldsymbol{u}$：速度場ベクトル
- p：圧力場
- $\mathbf{U}$：平均速度場ベクトル
- P：平均圧力場
- $\boldsymbol{u}'$：擾乱速度場ベクトル
- p'：擾乱圧力場
- $R^{\alpha\beta}$：レイノルズ応力
- ν_e：等方渦粘性
- $\nu_e^{\alpha\beta\gamma\delta}$：非等方渦粘性
- Γ：乱流エネルギー
- K：回転系における乱流エネルギー
- $e^{\alpha\beta}$：変形テンソル
- f：任意の場の量
- $\langle\ \rangle$：アンサンブル平均
- ν：分子粘性

ただし2度繰り返し現れた添字については，すべての成分の和をとるものと約束する．

1. は じ め に

乱流の渦粘性という概念は，剪断乱流を解析する際に多用され，また有益なものであることが知られている．渦粘性は，いわゆるレイノルズ応力 $R^{\alpha\beta}$ に関連している．

$$R^{\alpha\beta} \equiv -\langle u'^{\alpha} u'^{\beta}\rangle \tag{1}$$

$$= -2/3\Gamma\delta^{\alpha\beta} + \nu_e\left(\frac{\partial U^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial U^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right) \tag{2}$$

ここで

$$\Gamma = 1/2\langle u'^{a} u'^{a}\rangle \tag{3}$$

（1）式はレイノルズ応力の定義式であり，（2）式はレイノルズ応力の渦粘性表現と呼ばれるもので，ν_e が問題の渦粘性である．

通常の，非回転系における乱流では，（2）式は統計理論からもある程度正当化され，ν_e は添字を持っていない．すなわち渦粘性は等方的である．ところが，海洋や気象等に現れる乱流では，（2）式は，必ずしも支持されていない．海洋や気象などの地球流体の特徴は，地球の自転によって，回転しているということである．そこで本研究では，回転系におけるレイノルズ応力がいかに表現されるか，言い換えれば渦粘性が回転による非等方性をどのように反映するかを統計理論的に解析した．

2. 回転系における基礎方程式

解析する方程式系は，回転系におけるナヴィエ・ストークス方程式（4）と，連続の方程式（5）である．

$$\frac{\partial u^{a}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^{a}}(u^{a}u^{a}) + 2\epsilon^{aab}\omega^{a}u^{b} = -\frac{\partial p}{\partial x^{a}} + \nu\frac{\partial^2 u^{a}}{\partial x^{a}\partial x^{a}} \tag{4}$$

$$\frac{\partial u^{a}}{\partial x^{a}} = 0 \tag{5}$$

（4）式の左辺第3項が，回転によるコリオリ力を表している．ただし系は，$\boldsymbol{\omega}$ で回転しているとした．また，p は圧力を流体密度で除したものに，遠心力ポテンシャルを加えた量を表しており，以下圧力場と呼ぶ．

速度場 $\boldsymbol{u}$，圧力場 p を平均部分と擾乱部分に分解する．

$$u^{a} = U^{a} + u'^{a},\quad U^{a} = \langle u^{a}\rangle \tag{6}$$

$$p^{a} = P^{a} + p'^{a},\quad P^{a} = \langle p^{a}\rangle \tag{7}$$

すると平均場の支配方程式は（8），（9）になる．

$$\frac{\partial U^{a}}{\partial t} + U^{a}\frac{\partial}{\partial x^{a}}U^{a} + 2\epsilon^{aab}\omega^{a}U^{b} = -\frac{\partial P}{\partial x^{a}} + \frac{\partial}{\partial x^{a}}\left(R^{aa} + \nu\frac{\partial U^{a}}{\partial x^{a}}\right) \tag{8}$$

$$\frac{\partial U^{a}}{\partial x^{a}} = 0 \tag{9}$$

ただし R^{aa} はレイノルズ応力である．もし，レイノルズ

* 東京大学生産技術研究所　第1部

応力 R^{aa} が平均場で表現されれば，平均場の方程式系は閉じることになる．

一方擾乱場の方程式系は，(10)，(11) になる．

$$\frac{\partial u'^{a}}{\partial t}+U^{a}\frac{\partial u'^{a}}{\partial x^{a}}+u'^{a}\frac{\partial U^{a}}{\partial x^{a}}+\frac{\partial}{\partial x^{a}}(u'^{a}u'^{a}+R^{aa})$$
$$+2\epsilon^{aab}\omega^{a}u'^{b}=-\frac{\partial p}{\partial x^{a}}+\nu\frac{\partial^2 u'^{a}}{\partial x^{a}\partial x^{a}} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u'^{a}}{\partial x^{a}}=0 \quad (11)$$

3. 定　式　化

本研究では，レイノルズ応力の平均場による表現を導出する．その方法は，2スケールのDIA(プロパゲーター繰り込み近似)を用いる．さらに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を摂動パラメーターと見なし，レイノルズ応力を $\boldsymbol{\omega}$ の1次まで展開する．定式化の詳細は，文献1)等を参照していただきたいが，以下簡単にその概略を説明する．

A. 2スケールの導入

ゆっくり大きく変動する成分と，速く小さく変動する部分を分離するために2つのスケールを導入する．

$$X^{a}=\delta x^{a} \quad (12)$$
$$T=\delta t \quad (13)$$
$$x^{a}=x^{a} \quad (14)$$
$$t=t \quad (15)$$

さらに，任意の場 $f(\boldsymbol{x},t)$ を以下のように分ける．

$$f(\boldsymbol{x},t)=F(\boldsymbol{X},T)+f'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{X};t,\mathrm{T}) \quad (16)$$

B. $\boldsymbol{x}$ に関するフーリエ変換

速く変動する部分 f' を $\boldsymbol{x}$ に関してフーリエ変換する．

$$f'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{X};t,\mathrm{T})\equiv\iiint\tilde{f}'(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,\mathrm{T})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{k} \quad (17)$$

C. 移流項の除去

A,Bの手続きによって導出される，$\tilde{u}'^{a}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,T)$ の発展方程式には，

$$ik^{a}U^{a}\tilde{u}'^{a}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};s,T) \quad (18)$$

という形の移流項が現れる．この項は，次の変数変換によって，除去できる．

$$u^{a}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,T)=\exp(-ik^{a}U^{a}t)\tilde{u}'^{a}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,T) \quad (19)$$

D. スケールパラメーター展開

圧力場，速度場を δ で展開する．

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,T)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta^{n}f_{n}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,T) \quad (20)$$

E. $\boldsymbol{\omega}$ 展開

Dで導出した各展開項をさらに $\boldsymbol{\omega}$ で展開する．

すなわち

$$u_{0}^{a}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,T)=u_{00}^{a}(\boldsymbol{k};t)+u_{01}^{a}(\boldsymbol{k};t)+u_{02}^{a}(\boldsymbol{k};t)+\cdots \quad (21)$$

$$u_{1}^{a}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,T)=u_{10}^{a}(\boldsymbol{k};t)+u_{11}^{a}(\boldsymbol{k};t)+u_{12}^{a}(\boldsymbol{k};t)+\cdots \quad (22)$$

等である．

ただし，$u_{nm}^{a}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,T)$ を，$u_{nm}^{a}(\boldsymbol{k};t)$ と，略記した．

F. 応答関数，基本的統計量の導入

u_{00}^{a} 場に関する，2種類の応答関数，$\hat{G}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{k};t,t')$，$\hat{F}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{k};t,t')$ を導入すれば，$u_{nm}{}^{a}$ 場を形式的には u_{00}^{a} 場で表現できる．そこで u_{00} 場の統計的性質を，DIAを用いて調べる．その際，次の量を定義する．

$$Q^{\alpha\beta}(\boldsymbol{k};t,t')\equiv\langle u_{00}^{\alpha}(\boldsymbol{k};t)u_{00}^{\beta}(-\boldsymbol{k};t')\rangle/\delta(0) \quad (23)$$

$$G^{\alpha\beta}(\boldsymbol{k};t,t')\equiv\langle\hat{G}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{k};t,t')\rangle \quad (24)$$

$$F^{\alpha\beta}(\boldsymbol{k};t,t')\equiv\langle\hat{F}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{k};t,t')\rangle \quad (25)$$

なお，計算実行可能性のために，u_{00}^{a} 場は，等方的であるとする．すなわち

$$Q^{\alpha\beta}=D^{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})Q(k;t,t') \quad (26)$$
$$G^{\alpha\beta}=D^{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})G(k;t,t') \quad (27)$$
$$F^{\alpha\beta}=\delta^{\alpha\beta}F(k;t,t') \quad (28)$$

ただし，

$$D^{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})\equiv\delta^{\alpha\beta}-\frac{k^{\alpha}k^{\beta}}{k^{2}} \quad (29)$$

G. レイノルズ応力の計算

レイノルズ応力も，δ と $\boldsymbol{\omega}$ で展開する．すなわち，$R^{\alpha\beta}$ を $\boldsymbol{u}_{nm}$(n, m は0な正の整数)で展開する．

なお本報告では，δ の1次，$\boldsymbol{\omega}$ の1次まで考える．

式でいえば，

$$R^{\alpha\beta}(X;T)=-\iiint\frac{d\boldsymbol{k}}{\delta(0)}\langle u^{\alpha}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,T)\times u^{\beta}(-\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,T)\rangle \quad (30)$$

において，

$$\begin{aligned}&\langle u^{\alpha}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,T)u^{\beta}(-\boldsymbol{k},\boldsymbol{X};t,T)\rangle\\&=\langle(u_{0}^{\alpha}+\delta u_{1}^{\alpha}+\delta^{2}u_{2}^{\alpha}+\cdots)(u_{0}^{\beta}+\delta u_{1}^{\beta}+\delta^{2}u_{2}^{\beta}+\cdots)\rangle\\&=\langle u_{0}^{\alpha}u_{0}^{\beta}\rangle+\delta(\langle u_{0}^{\alpha}u_{1}^{\beta}\rangle+\langle u_{1}^{\alpha}u_{0}^{\beta}\rangle)+\delta^{2}(\cdots)+\cdots\\&=(u_{00}^{\alpha}u_{00}^{\beta}\rangle+\langle u_{01}^{\alpha}u_{00}^{\beta}\rangle+\langle u_{00}^{\alpha}u_{01}^{\beta}\rangle+\cdots+\\&\quad+\delta(\langle u_{00}^{\alpha}u_{10}^{\beta}\rangle+\langle u_{10}^{\alpha}u_{00}{}^{\beta}\rangle+(u_{01}^{\alpha}u_{10}^{\beta}\rangle\\&\quad+\langle u_{10}^{\alpha}u_{01}^{\beta}\rangle+\langle u_{00}^{\alpha}u_{11}^{\beta}\rangle+\langle u_{11}^{\alpha}u_{00}^{\beta}\rangle+\cdots)\\&\quad+\delta^{2}(\cdots\cdots)+\cdots\end{aligned} \quad (31)$$

と展開し，$R^{\alpha\beta}$ を計算する．

4. 結　　　果

回転系におけるレイノルズ応力は，3.の計算によって，以下のように表現できることがわかる．$\tau_{\omega}^{\alpha\beta}$ は，回転による効果である．

$$R^{\alpha\beta}=-2/3K\delta^{\alpha\beta}+\tau^{\alpha\beta} \quad (32)$$

$$\tau^{\alpha\beta}=\nu_{e}e^{\alpha\beta}+\tau_{\omega}^{\alpha\beta} \quad (33)$$

$$\tau_{\omega}^{\alpha\beta}=2/3C_{1}\left(\frac{\partial U^{a}}{\partial x^{b}}\epsilon^{abc}\omega^{c}\right)\delta^{\alpha\beta}$$

$$+\left\{C_2\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}+C_3\frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha}\right\}\epsilon^{\alpha ab}\omega^b$$

$$+\left\{C_2\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\alpha}+C_3\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\alpha}\right\}\epsilon^{\beta ab}\omega^b \tag{34}$$

$$K=\Gamma-C_4\frac{\partial U^a}{\partial x^b}\epsilon^{abc}\omega^c \tag{35}$$

$$e^{\alpha\beta}=\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta}+\frac{\partial U^\beta}{\partial x^\alpha} \tag{36}$$

$$\Gamma=4\pi(g_Q-\dot{g}_{FQ}) \tag{37}$$

$$\nu_e=(16\pi/15)g_{FQ} \tag{38}$$

$$C_1=(8\pi/15)(g_{GFQ}-3g_{FFQ}-g_{FGQ}) \tag{39}$$

$$C_2=(8\pi/15)(2g_{GFQ}-g_{FFQ}-2g_{FGQ}) \tag{40}$$

$$C_3=(8\pi/15)(g_{GFQ}+2g_{FFQ}-g_{FGQ}) \tag{41}$$

$$C_4=(8\pi/3)(g_{GFQ}-g_{FGQ}) \tag{42}$$

ここで

$$g_Q=\int dk\, k^2 Q(k;t,t) \tag{43}$$

$$\dot{g}_{FQ}=\int dk\, k^2\int dt' F(k;t,t')\frac{D}{Dt}Q(k;t,t') \tag{44}$$

$$g_{FQ}=\int dk\, k^2\int dt' F(k;t,t')Q(k;t',t) \tag{45}$$

$$g_{GFQ}=\int dk\, k^2\int dt' G(k;t,t')\int dt'' \times F(k;t,t'')Q(k;t',t'') \tag{46}$$

$$g_{FFQ}=\int dk\, k^2\int dt' F(k;t,t') \times\int dt'' F(k;t',t'')Q(k;t'',t) \tag{47}$$

$$g_{FGQ}=\int dk\, k^2\int dt' F(k;t,t') \times\int dt'' G(k;t',t'')Q(k;t'',t) \tag{48}$$

ただし

$$\frac{D}{Dt}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}+U^a\frac{\partial}{\partial x^a}\right) \tag{49}$$

5. オーダー評価

Q, G, F に，慣性領域での関数形を与えて，以下の量についてのオーダー評価を得る．詳細は，文献2)を参照していただきたい．なお，以下の式で，

l：慣性領域にある空間スケールで，スペクトルを特徴づける長さ．

ϵ：エネルギー散逸量

とする．

$$K=0.664\epsilon^{2/3}l^{2/3}-0.0623\epsilon^{-2/3}l^{4/3}\frac{D\epsilon}{Dt} -0.532\epsilon^{1/3}l^{1/3}\frac{Dl}{Dt}-0.0231l^2\frac{\partial U^a}{\partial x^b}\epsilon^{abc}\omega^c \tag{50}$$

$$\nu_e=0.0351\epsilon^{1/3}l^{4/3}\sim0.0797K^2\epsilon^{-1} \tag{51}$$

$$C_1=-0.00925l^2\sim-0.0317K^3\epsilon^{-2} \tag{52}$$

$$C_2=0.00462l^2\sim0.0158K^3\epsilon^{-2} \tag{53}$$

$$C_3=0.0139l^2\sim0.0476K^3\epsilon^{-2} \tag{54}$$

$$C_4=0.0231\sim0.0791K^3\epsilon^{-2} \tag{55}$$

$$l\sim1.85K^{3/2}\epsilon^{-1} \tag{56}$$

(50)式の右辺最後の項が，回転によるエネルギーを表している．

6. 応　用　例

4.，5.の結果を，z 軸の回りに回転している系に適用してみる．

$$\omega^1=\omega^2=0 \tag{57}$$

$$\omega^3=\omega \tag{58}$$

結果は，以下のようになる．

$$R^{\alpha\beta}=-2/3\Gamma\delta^{\alpha\beta}+\tau^{\alpha\beta} \tag{59}$$

$$\tau^{\alpha\beta}=\nu_e{}^{\alpha\beta ab}\frac{\partial U^a}{\partial x^b} \tag{60}$$

$$\nu_e^{\alpha\beta ab}=\nu_e^{\beta\alpha ab} \tag{61}$$

(61) に注意して，0でない $\nu_e^{\alpha\beta ab}$ を成分で列記すると，

$$\nu_e^{xyxy}=\nu_e^{xyyx}=\nu_e^{xzxz}=\nu_e^{xzzx}=\nu_e^{yzyz}=\nu_e^{yzzy}=\nu_e \tag{62}$$

$$\nu_e^{xxxx}=\nu_e^{yyyy}=\nu_e^{zzzz}=2\nu_e \tag{63}$$

$$\nu_e^{xxxy}=-\nu_e^{yyyx}=2(f_2+f_3)\omega\sim0.0370l^2\omega \tag{64}$$

$$\nu_e^{zzxy}=-\nu_e^{zzyx}=2(f_1+f_3)\omega\sim0.00932l^2\omega \tag{65}$$

$$\nu_e^{xyyy}=-\nu_e^{xyxx}=(f_2+f_3)\omega\sim0.0185l^2\omega \tag{66}$$

$$\nu_e^{xzyz}=-\nu_e^{yzxz}=(f_1+f_3)\omega\sim0.00466l^2\omega \tag{67}$$

$$\nu_e^{xzzy}=-\nu_e^{yzzx}=(f_2-f_1)\omega\sim0.0139l^2\omega \tag{68}$$

ただし

$$f_1\equiv(16\pi/5)(g_{GFQ}-g_{FGQ}) \tag{69}$$

$$f_2\equiv(8\pi/5)(g_{GFQ}+2g_{FFQ}-g_{FGQ}) \tag{70}$$

$$f_3\equiv-(8\pi/15)g_{FFQ} \tag{71}$$

ここで回転による影響ではない，ν_e^{xxxx} と，回転の効果である ν_e^{xxxy} の比を評価する．

$$\nu_e^{xxxy}/\nu_e^{xxxx}=\nu_e^{xxxy}/2\nu_e\sim0.527\omega l^{2/3}\epsilon^{-1/3} \sim0.430\omega l/\sqrt{K} \tag{72}$$

地球流体を想定すると

$$\omega\sim7.27\times10^{-5}\ 1/s \tag{73}$$

$$L\sim10^6m\longrightarrow l\sim10^4m \tag{74}$$

$$U\sim20\mathrm{m/s}\longrightarrow\sqrt{K}\sim1\mathrm{m/s} \tag{75}$$

となり，(77) より

$$\nu_e^{xxxy}/\nu_e^{xxxx}\sim0.31 \tag{76}$$

となる．

7. ま　と　め

回転系における乱流の渦粘性は，非等方になることが，統計論から導出された．回転系の渦粘性には，4階の添字を持つ表式が必要となる．

(1985年10月15日受理)

参　考　文　献

1) A. Yoshizawa：*Phys. Fluids.* **27** (1984) 1377
2) A. Yoshizawa：*J. Phys. Soc. Jpn.* **45** (1978) 1734