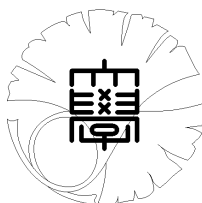


数理科学実践研究レター 2019-5 November 28, 2019

時間依存する画像の位相的解析について.

by

谷口 正樹



UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

時間依存する画像の位相的解析について.

谷口正樹¹ (東京大学大学院数理科学研究科)

Masaki Taniguchi (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

離散 Morse 理論を用いた先行研究 [5] を解説する. [5] の手法で必要であった, 離散 Morse 関数を選ぶ議論を必要としない時間依存する画像解析の定式化を与え, 例の計算を行う.

1 背景

現代医療において, CT スキャンや, 肝シンチグラフィと呼ばれる画像診断法がある. それらの手法で得られる画像から病気を特定することを試みる, 様々な考察がある ([8], [9]). 本研究の目的は, 時間依存する画像の位相的解析の手法を考察することである. 展望として, 人が行っていた病気を特定する作業を自動化する, という応用が考えられる. 本論文では, 脳の CT スキャンの画像列を時間依存する画像として捉え, 脳内の穴を捉えうる装置について考察した.

2 離散 Morse 関数に関する先行研究

[5] において Henry-Kevin-Neža は, 離散 Morse 理論における birth-death 族を考えることによって, 時間依存する画像解析の手法を考察した. この先行研究について説明する. 離散 Morse 理論とは, Forman[1] によって導入された CW 複体に対する Morse 理論である. (Morse 理論については, [6] を参照されたい.) 離散 Morse 理論は, Morse 理論で行われていた臨界点の消去に関する議論を, CW 複体²の cell に対して行うものである. まず, 離散 Morse 関数の定義を述べる. M を正則な有限 CW 複体とする. 正則な CW 複体とは, 接着写像が全て埋め込みとなっているような CW 複体のことである. $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, p -cell を α^p と書く. また, M の p -cell 全体の集合を $C^p(M)$ と表記する. さらに $C(M) := \bigcup_{p \in \mathbb{N} \cup \{0\}} C^p(M)$ とする.

定義 1 (Forman による離散 Morse 関数, [1]) $f : C(M) \rightarrow \mathbb{R}$ が離散 Morse 関数であるとは, 任意の $\alpha^p \in C(M)$ に対して次の二つの条件が成り立つこととする.

- $\#\{\beta^{p+1} > \alpha \mid f(\beta) \leq f(\alpha)\} \leq 1$
- $\#\{\beta^{p-1} < \alpha \mid f(\gamma) \geq f(\alpha)\} \leq 1$

ただし, $\beta > \alpha$ は, $\partial(\beta)$ が α を含む時をいい, $\partial(\beta)$ は cell β の接着写像の像とする.

この定義は, cell の包含関係があると, f の値は, その包含に対しておおよそ狭義単調増加であり, そうでない場合, 狭義単調増加でない関係に対する個数に制約を与える, ということの意味する.

定義 2 ([1]) M を正則な有限 CW 複体, $f : C(M) \rightarrow \mathbb{R}$ を離散 Morse 関数とする. $\alpha^p \in C(M)$ が *critical* であるとは, 次の 2 つの性質が成り立つ時をいう.

- $\#\{\beta^{p+1} > \alpha \mid f(\beta) \leq f(\alpha)\} = 0$
- $\#\{\gamma^{p-1} < \alpha \mid f(\gamma) \geq f(\alpha)\} = 0$

critical でない $C(M)$ の元のことを *regular* と呼ぶ.

¹ masait@ms.u-tokyo.ac.jp

²CW 複体とは, 次元の異なるディスク連をある方法で張り合わせて得られる位相空間のことである. 厳密な定義は, [2] を参照されたい.

critical cell と, regular cell は通常の Morse 理論に現れる critical point と regular point にそれぞれ対応している. Morse 理論を用いて多様体を考察するとき, critical point を超えると微分同相型が変化し, そうでない場合は, 微分同相型の変化はなかった. 離散 Morse 理論においても, このことと似た性質が成り立つ. それは次のように定式化される.

定理 3 (Forman, [1]) M を正則な有限 CW 複体, $f : C(M) \rightarrow \mathbb{R}$ を離散 Morse 関数とする. M は, cell の個数が, $\#\{\text{critical cells}\}$ であるような CW 複体 M' に単純ホモトピー同値である.

証明方法は, f の値の大小と cell の包含関係が逆転しているという関係で cell たちをペアにして cancel することで M' を得る, というものである. この定理によって, critical cell の少ない離散 Morse 関数を与えることで, cell の個数を減らすことにつながる. この事実は, 画像解析において現れる CW 複体のホモロジーの計算量を軽くする目的で用いられてきた. 他にも離散 Morse 理論には, 様々な応用が知られている. ([3])

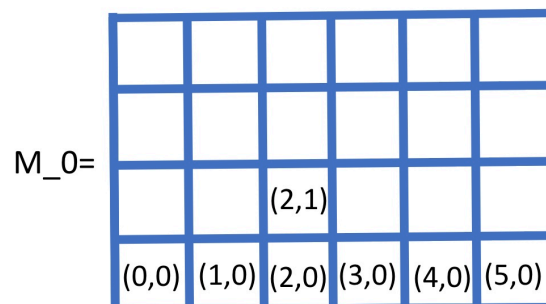
次に臨界点の birth-death について説明する. 多様体に対する Morse 理論において, 臨界点の birth-death とは, $f(x, t) = x^3 + tx$ の $t < 0$ の場合に存在した 2 つの臨界点が, $t = 0$ においてぶつかり, $t > 0$ において消滅する, もしくはこの逆の現象を指す. この現象のアナロジーとなるように, 離散 Morse 関数の族に対して臨界点の birth-death が定義される. 詳しい定義は, [5] を参照されたい. [5] についての説明する. インputは, 白黒画像の有限個の族である.

- 1) 与えられた画像をモノクロ, ドット画像に変換する.
- 2) 画像の族を $[0, 1]^2$ に定まるある cubical complex の 0-cell 上の関数の族とみなす. その色の濃さに対応して各 0-cell に対して実数を与える.
- 3) その関数を 1-cell と 2-cell に拡張することによって, ある cubical complex 上の離散 Morse 関数の族を得る. この時, 離散 Morse 関数を得るために [4] や [7] における離散 Morse 関数を構成するアルゴリズムを用いている. 色が同じところは, 適切に複体を reduce する.
- 4) critical cell の birth-death を観察することにより, 前後の穴のつながりの情報をアウトプットとして得る.

この方法の一つの大きな特徴は, アウトプットが人工的に与えた離散 Morse 関数に依存していることである. また, 0, 1, 2-cell の情報を全て用いているので扱うデータが多い.

3 簡略化した装置

本章では, 離散 Morse 関数を用いない, 時間依存する画像の解析方法の一つを導入する. そのメリットは, 結果が離散 Morse 関数に依存しないこと, 扱うデータの削減できることである. 以降, 色のデータはモノクロとし, \mathbb{Z} で表すことにする. インputデータを時間依存する画像, 動きを追いたい色 $a \in \mathbb{Z}$ を固定する. 次の図で与えられる 2 次元 CW 複体 M_0 を考える.



0-cell は、辺と辺の交わりとし、1-cell は、小四角形のそれぞれの4辺とする。2-cell は小四角形たちとする。それぞれの2-cell D に対して図のように $(a(D), b(D)) \in \{0, \dots, m_1\} \times \{0, \dots, m_2\}$ の座標を与える。白黒画像のデータから画像をモノクロ、ドット画像にすることによって、関数

$$f_i : C^2(M_0) \rightarrow \mathbb{Z}, i \in \{1, \dots, n\}$$

が定まる。これは、各2-cell に対して色を返す関数である。 $C^2(M_0)$ の元に対する同値関係 \sim_a^i を次のように定める。

定義 4 $A, B \in C^2(M_0)$ とする。 $A \sim_a^i B$ であるとは、列、 $D_1, \dots, D_k \in f_i^{-1}(a)$ が存在して、

$$|a(D_i) - a(D_{i-1})| + |b(D_i) - b(D_{i-1})| \leq 1$$

が成り立つ時をいう。

これは同値関係となる。 $f_i^{-1}(a) / \sim_a^i = \{\mathbb{D}_i^1, \dots, \mathbb{D}_i^{j_i}\}$ と表記する。 \mathbb{D}_i^k たちは、画像の中の色 a の穴として認識する。よって前後のつながりを知るために次のような関係性を定義する。

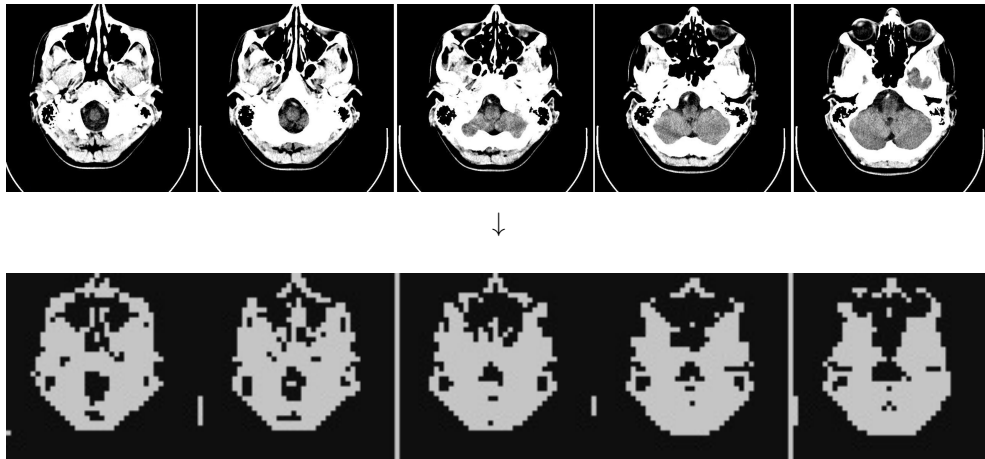
定義 5 \mathbb{D}_i^k と \mathbb{D}_{i+1}^m が繋がっている、とは、 $D_i \in \mathbb{D}_i^k, D_{i+1} \in \mathbb{D}_{i+1}^m$ が存在して、

$$|a(D_i) - a(D_{i+1})| + |b(D_i) - b(D_{i+1})| \leq 1$$

が成立することと定義する。

実際に具体例を用いながら、流れを説明する。

- 1) 画像のモノクロ、ドット化する。



画像の出版および、モノクロ・ドット化のソフトの出版は次である。

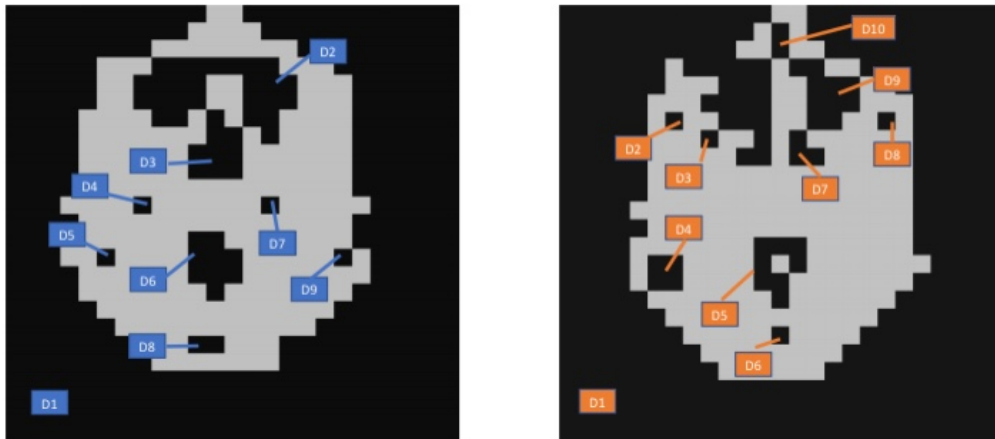
- CT スキャンの画像 :
 Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/Main_Page) における、「Computed tomography of human brain - large.png」という名前のファイル。
 (URL : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Computed_tomography_of_human_brain_-_large.png)³
- モノクロ・ドット化するソフト : <https://gifmagazine.net/converters/teigashitsu>

³このサイトにおいて次の記載がある: This file is made available under the Creative Commons CC0 1.0 Universal Public Domain Dedication. The person who associated a work with this deed has dedicated the work to the public domain by waiving all of their rights to the work worldwide under copyright law, including all related and neighboring rights, to the extent allowed by law. You can copy, modify, distribute and perform the work, even for commercial purposes, all without asking permission.

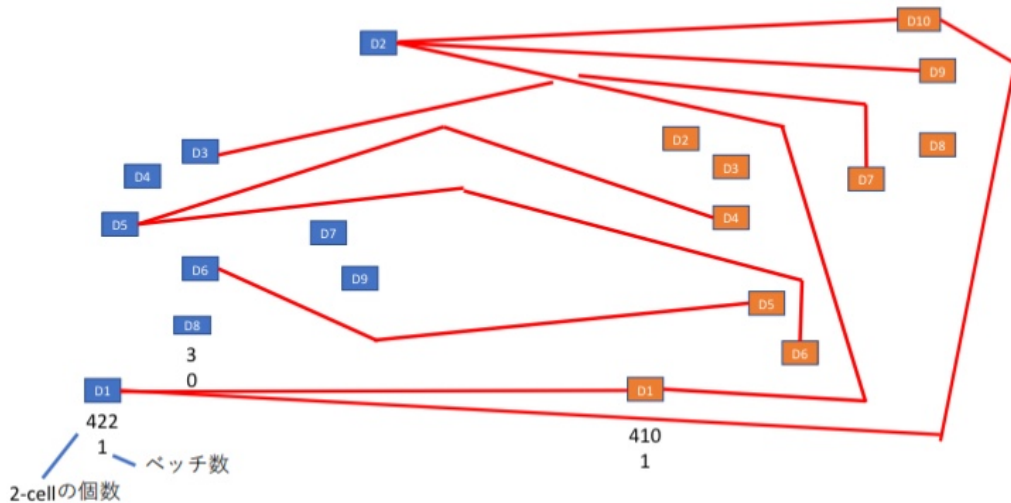
この例では、 $m_1 = m_2 = 24$, $n = 5$ である。また、色は各時刻に対して2色しかなく、グレーと黒のみである。 a は黒色とする。

- 2) \sim_a^i に対する商集合を求める。CT スキャンの画像は全部で、5枚あるが、そのうち、下図の連続する2つの時刻に注目して計算を行う。下図における例では、 $f_1^{-1}(a)/\sim_a^1$ が、9点集合、 $f_2^{-1}(a)/\sim_a^2$ が10点集合となっている。

24×24, 2色, a=黒



- 3) 前後のつながりを計算する。例では、前後のつながりを持つ穴 (D_i たち) を赤い線で結んだ。この赤いラインが穴の前後のつながりを示唆する。さらに穴 (2-cell) の同値類に対して、その同値類の濃度を返すことにより、その穴の大きさが表現される。また、ベッチ数 $\text{rank } H_1(\bigcup_{D_i \in \mathbb{D}} D_i, \mathbb{Z})$ を計算することによって、その穴 (\mathbb{D}) がどのように非自明なトポロジーを持っているかがわかる。



以上、まとめを述べる。我々の方法は、離散 Morse 関数等、additional なデータに依存せず、さらに 2-cell 上の関数のみを用いて計算される。今後の課題として、実際に巨大な画像データを扱う際に、我々の方法と [5] の方法における比較がある。

4 謝辞

多くの有益な助言をくださった宮本敦史様、小池哲也様、担当者の土岡俊介先生、山本昌宏先生に感謝いたします。

参考文献

- [1] Robin Forman. Morse theory for cell complexes. *Adv. Math.*, 134(1):90–145, 1998.
- [2] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [3] Gregor Jerse and Neza Mramor Kosta. Ascending and descending regions of a discrete morse function. 2008.
- [4] Henry King, Kevin Knudson, and Neža Mramor. Generating discrete Morse functions from point data. *Experiment. Math.*, 14(4):435–444, 2005.
- [5] Henry King, Kevin Knudson, and Neža Mramor Kosta. Birth and death in discrete Morse theory. *J. Symbolic Comput.*, 78:41–60, 2017.
- [6] Yukio Matsumoto. *An introduction to Morse theory*, volume 208 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Translated from the 1997 Japanese original by Kiki Hudson and Masahico Saito, Iwanami Series in Modern Mathematics.
- [7] Peter John Wood Vanessa Robins and Adrian P. Sheppard. Theory and algorithms for constructing discrete morse complexes from grayscale digital images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.*, 33(8), 2011.
- [8] 宮坂 佳男, 中山 賢司, 松森 邦昭, 別府 俊男, 倉田 彰, 佐藤 健, 北原 孝雄, 森井誠二, 大和田 隆, and 矢田 賢三. Ct scan にて診断した両側性高血圧性脳出血. *Neurologia medico-chirurgica*, 22(8):661–667, 1982.
- [9] 信一 堀, Motoomi Kiyohara, and Katsuhiko Miyoshi. オリ-ブ油注入法による膀胱 ct scan [英文]. *泌尿器科紀要*, 26(5):p545–549, may 1980.