

数理科学実践研究レター 2019-7 November 28, 2019

時間依存する階数を持つ時間非整数階微分方程式について

by

平良 晃一



UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

時間依存する階数を持つ時間非整数階微分方程式について

平良晃一¹ (東京大学大学院数理科学研究科)

Kouichi Taira (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

本稿では時間依存する階数を持つ時間非整数階微分を定義し、その性質を解析する。

1 はじめに

地震の震源を点とみなすと、時系列地震発生は、震源(質点)の時空間の運動と解釈できる。この運動を特徴づける重要な物理量として、次の地震が発生するまでの、待ち時間(つまり、震源が、運動しないで、ある物理空間上に静止している時間の長さ)がある。このような、待ち時間を考慮したランダムウォークは、一般に異常拡散と呼ばれている。震源運動のモデル化において、難しい点は、この待ち時間が時系列的に、増大する(つまり、本震から時間が経過するとともに、待ち時間が長くなる)という、時間に依存して待ち時間の性質が変化する点である。加えて、震源の運動は、非マルコフ性を持つものであり、時間記憶を考慮する必要がある。このような震源の質点運動を数学的にモデル化することを目的とし、本稿では時間依存する階数を持つ時間非整数階微分を定義し、その性質を解析する。

2 地震のモデル方程式と時間依存する非整数階微分

2.1 非整数階微分

$0 < \alpha < 1$ を定数としたとき、 α 階の Caputo の意味での非整数階微分は

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad f \in C^1(\mathbb{R})$$

で与えられる。ただし、 Γ はガンマ関数である。このとき、 E_α を Mittag-Leffler 関数：

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

とすると、 $\Psi_\lambda(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha)$ は固有方程式

$${}^c D_t^\alpha \Psi_\lambda(t) = \lambda \Psi_\lambda(t) \tag{1}$$

の解であることがわかる。また、(1) は積分方程式

$$\Psi_\lambda(t) = \Psi_\lambda(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \Psi_\lambda(s) ds \tag{2}$$

と同値である。詳しくは [2] を参照せよ。

2.2 異常拡散方程式とモデルの妥当性

今回のモデルでは、震源が、 (t, x) ($t \geq 0$ は地震が経ってからの時間で $x \in \mathbb{R}^3$ は本震からの位置) に存在する確率を $f(t, x)$ と書くと、 f が満たすべき方程式は異常拡散方程式：

$${}^n D_t^{\alpha(t)} f(t, x) - \Delta_x f(t, x) = 0 \tag{3}$$

¹taira@ms.u-tokyo.ac.jp

で与えられると考える。ここで、 ${}^c D_t^{\alpha(t)}$ は 2.4 節で考える時間依存する非整数階微分である。地震運動の記述の際重要となるのは、1 章で述べたように

- ・待ち時間を考慮すること
 - ・時間に依存して待ち時間の性質が変化すること
- の二点を反映していることである。そこでモデル方程式 (3) の妥当性は
- ・時間非整数階の微分を導入することにより待ち時間を考慮していること
 - ・その階数が時間依存することにより、待ち時間の性質の変化を表していること
- により保証され则认为られる。非整数階 Brown 運動と異常拡散方程式、待ち時間の関係については [1] を見よ。

2.3 1次元方程式への帰着

方程式 (3) を x 変数についてフーリエ変換すれば (もし x が \mathbb{R}^3 の中の有界集合を動く場合には、Dirichlet 境界条件又は Neumann 境界条件をつけて固有関数展開すれば), 方程式 (3) の解析は λ を実数として $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の方程式

$${}^c D_t^{\alpha(t)} f(t, x) = \lambda f(t)$$

の解析に帰着される。つまり数学的に見れば、地震運動の記述のためにはこの方程式を解析すればよいことがわかる。次節にてこの方程式の意味付けと可解性について論ずる。

2.4 時間依存する非整数階微分

次に、 α が時間に依存する場合を考える。愚直に非整数階微分を定義すれば

$${}^c D_t^{\alpha(t)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(s)} f'(s) ds, \quad f \in C^1(\mathbb{R})$$

となる。しかしこのように定義をすると、(1) が (2) のような積分方程式に帰着できるか不明である。すると方程式 (1) の解の存在など、数学的解析が困難である。そこで本稿では (1) を以下のように解釈する。

定義 1 $\alpha \in C^1(\mathbb{R}, (0, 1))$, $T > 0$, $J = [-T, T]$ とする。 $1 - \alpha(t)$ 階の Riemann-Liouville 作用素 $D_t^{1-\alpha(t)}$ を

$$D_t^{1-\alpha(t)} f(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t (t-s)^{-\alpha(s)} f(s) ds \right), \quad f \in C^1(J)$$

と定義する。そこで $\alpha(t)$ 階の Caputo 微分に関する固有方程式

$${}^c D_t^{\alpha(t)} f(t) = \lambda f(t) \tag{4}$$

を

$$f'(t) = \lambda D_t^{1-\alpha(t)} f(t), \quad f \in C^1(J) \tag{5}$$

と定義する。

注意 1 α が定数の時は実際に (5) から (4) が導ける。

定数変化法により、(5) はもし $f \in C^1(J)$ が $f(0) = a \in \mathbb{R}$ を満たしていれば、

$$f(t) = e^{\lambda t} a + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} D_s^{1-\alpha(s)} f(s) ds, \quad t \in J \tag{6}$$

となる。更に計算すると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^t e^{\lambda(t-s)} D_s^{1-\alpha(s)} f(s) ds &= \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha(s))} \int_0^s (s-r)^{-1+\alpha(r)} f(r) dr \right) ds \\
 &= [e^{\lambda(t-s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha(s))} \int_0^s (s-r)^{-1+\alpha(r)} f(r) dr]_{s=0}^{s=t} \\
 &\quad + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha(s))} \int_0^s (s-r)^{-1+\alpha(r)} f(r) dr \\
 &= \frac{e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha(t))} \int_0^t (t-r)^{-1+\alpha(r)} f(r) dr \\
 &\quad + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha(s))} \int_0^s (s-r)^{-1+\alpha(r)} f(r) dr.
 \end{aligned}$$

そこで上式の右辺が $f \in C(J)$ に対して定義できることに注意する。そこで積分方程式

$$\begin{aligned}
 f(t) &= e^{\lambda t} a + \frac{e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha(t))} \int_0^t (t-r)^{-1+\alpha(r)} f(r) dr \\
 &\quad + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha(s))} \int_0^s (s-r)^{-1+\alpha(r)} f(r) dr ds
 \end{aligned} \tag{7}$$

の解の一意存在問題について議論する。ただし、 $a \in \mathbb{R}$ は初期値である。本稿の主定理は以下である。

定理 2 $\alpha \in C^1(\mathbb{R}, (0, 1))$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする。ある $T > 0$ が存在して任意の初期値 $a \in \mathbb{R}$ に対し、(7) の解 $f \in C(J)$ が一意的に存在する。

証明 $0 < T \leq 1$ は後で決める定数とする。 $\alpha_0 = \min_{0 \leq t \leq T} \alpha(t) > 0$ とおく。まず、(7) の $C(J)$ 内の解の存在を示す。 $f_0(t) = e^{\lambda t} a$ において整数 $k > 0$ に対して帰納的に

$$\begin{aligned}
 f_{k+1}(t) &= e^{\lambda t} a + \frac{e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha(t))} \int_0^t (t-r)^{-1+\alpha(r)} f_k(r) dr \\
 &\quad + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha(s))} \int_0^s (s-r)^{-1+\alpha(r)} f_k(r) dr ds
 \end{aligned}$$

と定義する。すると $f_k \in C([-J, J])$ である。 $0 \leq |t| \leq T$ に対して

$$\begin{aligned}
 |f_{k+1}(t) - f_k(t)| &\leq \max_{|t| \leq 1} \left(\frac{e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha(t))} \right) \int_0^{|t|} (|t-r|)^{-1+\alpha_0} d \|f_k(t) - f_{k-1}(t)\|_{C(J)} \\
 &\quad + |\lambda| \max_{|t| \leq 1} \left(\frac{e^{\lambda t}}{\Gamma(\alpha(t))} \right) \int_0^{|t|} \int_0^{|s|} (|s-r|)^{-1+\alpha_0} dr ds \|f_k(t) - f_{k-1}(t)\|_{C(J)}
 \end{aligned}$$

となる。ある定数 $C > 0$ があって

$$\int_0^{|t|} (|t-r|)^{-1+\alpha_0} dr + \int_0^{|s|} (|s-r|)^{-1+\alpha_0} dr ds \leq CT^{\alpha_0}$$

なので、 T を十分小さくにとって

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{C(J)} \leq \frac{1}{2} \|f_k - f_{k-1}\|_{C(J)},$$

となる。縮小写像の原理を用いると (7) の $C(J)$ 内の解の存在がわかる。次に一意性を示す。もし、 $f, g \in C(J)$ が (7) の初期値 a の解とする。上記と同じ議論で、

$$\|f - g\|_{C(J)} \leq \frac{1}{2} \|f - g\|_{C(J)}$$

がわかるので、 $f = g$ である。よって解は一意である。

3 謝辞

本研究の課題を提供していただいた東京海上日動リスクコンサルティング株式会社の矢野良輔様に感謝する。また、会合の日程調整や議論の総括をしていただいた柏原崇人先生，貴重な意見をいただいた山本昌宏先生や，待ち時間の分布関数の数値データを提供してくれた岩井雅崇氏にも感謝の意を表明する。

参考文献

- [1] E. Barkai, R. Metzler, J. Klafer, From continuous time random walks to the fractional Fokker-Plank equation. *Phys. Rev. E* **61**. 132 (2000).
- [2] R. Gorenflo, F. Mainardi Continuous Time Random Walk, Mittag-Leffler Waiting Time and Fractional Diffusion: Mathematical Aspects. *Anomalous Transport: Foundations and Applications* (2007).