

数理科学実践研究レター 2020-3 March 24, 2020

**WKB** 近似の適用可能範囲に対する数値的考察

by

中井 拳吾



**UNIVERSITY OF TOKYO**  
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES  
KOMABA, TOKYO, JAPAN

# WKB 近似の適用可能範囲に対する数値的考察

中井拳吾<sup>\*1</sup> (東京大学大学院数理科学研究科)

Kengo Nakai (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

## 概要

WKB 近似には適用条件があり, その条件下では WKB 近似により得た近似解は厳密解の良い近似になる. しかし実用上, 適用条件から外れた場合でも解を知ることが必要になることがある. ここでは, 特に WKB 近似について具体的にどこまで近似計算がうまくいっているかという範囲をある指標に注目して考察する.

## 1 はじめに

微分方程式の厳密解を求めることは困難であることは多々ある. そのため微分方程式の近似解を求める方法がある. ただし, その近似法には多くの場合何らかの適用条件を課される. しかし, 現実の現象を考察する場合, この近似の適用条件を満たさないことがある. そこで, 適用条件外での近似法の近似能力を考察することは重要である. 本論文では適用条件から外れた場合において WKB 近似の近似能力がどのように落ちていくか数値的に考察する.

## 2 WKB 近似

浅水領域での波の高さを記述するモデルとして用いられる次の常微分方程式 [1] の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dx^2} = -w * m^2(x) & x > 0 \\ w(0) = 1, \quad w'(0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

係数  $m(x)$  が定数の場合は厳密解を得ることができる. 係数  $m(x)$  が定数以外の場合は厳密解を求めることは困難であることが多い. そこで,  $\delta$  を次で定義する.

$$\delta_m(x) := \frac{1}{m(x)\sqrt{m(x)}} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \right).$$

$\max_{x>0} |\delta_m(x)| \ll 1$  が成り立つとき, Liouville 法を用いると式 (1) の近似解  $w^*(x)$  は,

$$w^*(x) := \frac{\sqrt{m(0)}}{\sqrt{m(x)}} \cos \left( \int_0^x m(\tau) d\tau \right) \quad x > 0,$$

とかけることが知られている [2].

## 3 様々な $m(x)$ に対する近似

定数以外の  $m(x)$  について, 近似解  $w^*(x)$  が式 (1) の解としてどの程度有効かをいくつかの例を考察する. ただし, この章では厳密解の代わりとして 4 次 4 精度 Runge-Kutta 法で時間積分した数値解  $w$  と近似解  $w^*$  との比較をする.

<sup>\*1</sup> knakai@ms.u-tokyo.ac.jp

### 3.1 $m(x) = (\alpha x^2 + 1)^{-1/2}$ の場合

$\delta_{\{(\alpha x^2 + 1)^{-1/2}\}}(x) = \frac{2\alpha - \alpha^2 x^2}{4(\alpha x^2 + 1)}$  であり, 特に  $\delta(0) = \frac{\alpha}{2}$  である.  $\alpha > 0$  について  $\delta(0)$  が十分小さい場合, 近似解は

$$w^*(x) := (\alpha x^2 + 1)^{1/4} \cos\left(\int_0^x (\alpha \tau^2 + 1)^{-1/2} d\tau\right) \quad x > 0, \quad (2)$$

と書くことができる.  $\alpha = 0.01, 0.1$  について, 数値解  $w$  と近似解  $w^*$  の比較をした.

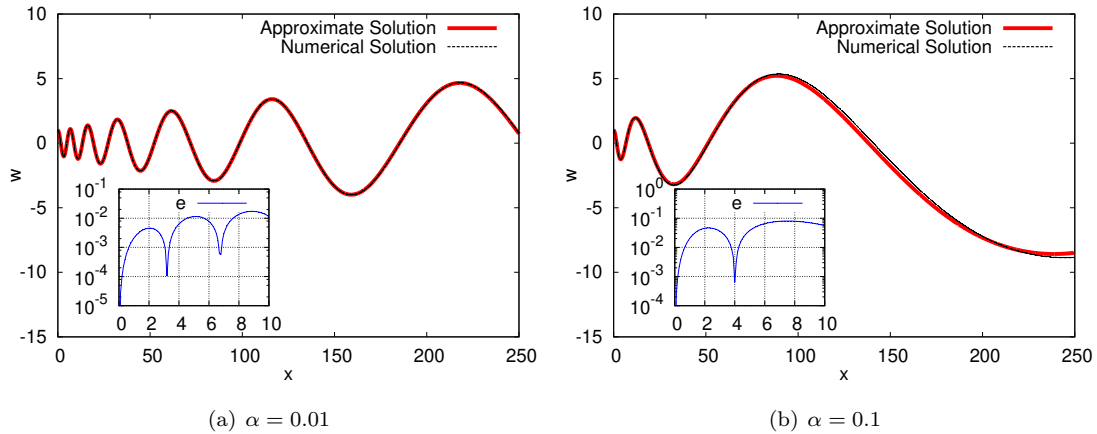


図1  $m(x) = (\alpha x^2 + 1)^{-1/2}$  の場合について, (a)  $\alpha = 0.01$ , (b)  $\alpha = 0.1$  として式 (1) の数値解  $w$  と近似解  $w^*$  とを比較した. また, 近似誤差  $e(x) = |w(x) - w^*(x)|$  も合わせて書き出した.

図1について,  $x \in [0, 10]$  におけるエラー  $e$  の大きさを見ると, 図1 (b) よりも図1 (a) のほうが良い近似をしていることが見て取れる. 更に,  $x \in [0, 250]$  までをみても図1 (b) よりも図1 (a) のほうが良い近似をしていることが見て取れる.

更に,  $\max_{x>0} |\delta_m(x)|$  が1付近の場合について考察するため,  $\alpha = 1.0, 2.0$  について数値解  $w$  と近似解  $w^*$  の比較をした.

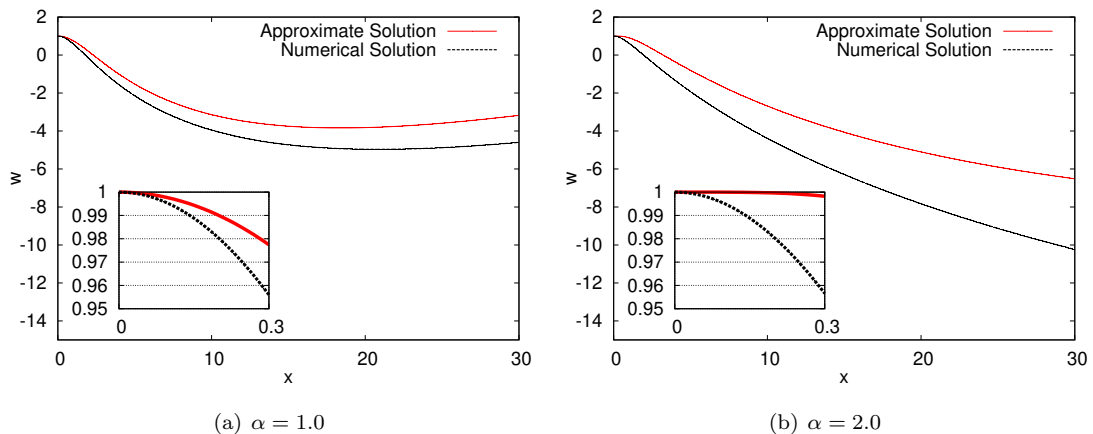


図2  $m(x) = (\alpha x^2 + 1)^{-1/2}$  の場合について, (a)  $\alpha = 1.0$ , (b)  $\alpha = 2.0$  として式 (1) の数値解  $w$  と近似解  $w^*$  とを比較した.  $x \in [0, 0.3]$  について拡大図も合わせて書きだした.

図2について, 図1の場合に比べて近似精度が大きく落ちている.  $x \in [0, 30]$  について, 凸性など概形は近似できているが  $x \in [0, 0.3]$  の拡大図を見ると大きくずれていることが見て取れる.

さらに,  $\alpha = 0.01, 0.1, 1.0, 2.0$  について  $\max_{0 < x < 1} |\delta_m(x)| (= |\delta_m(0)|)$  が 1 に近づくにしたがって近似精度は落ちていく傾向が見て取れる. そこで, パラメータ  $\alpha$  を変えて,  $\delta$  の違いによる数値解  $w$  と近似解  $w^*$  の差を書きだした (図 3).

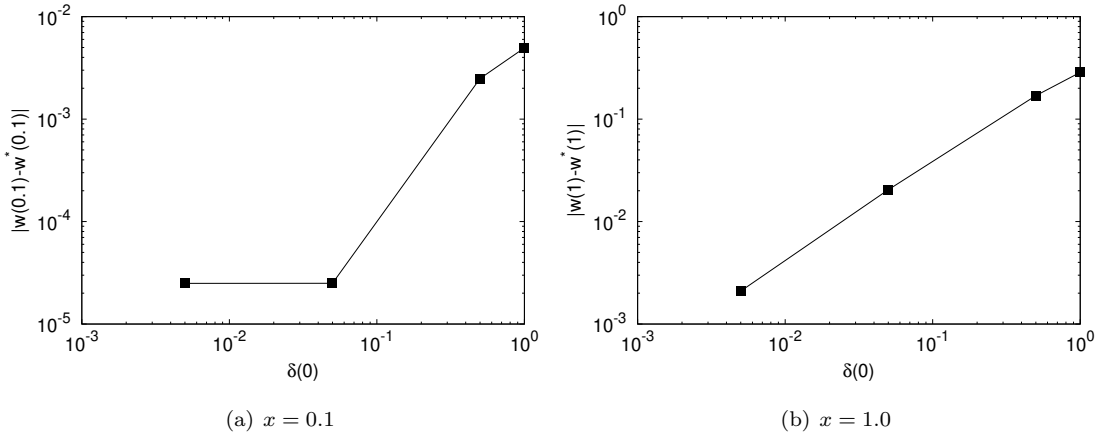


図 3  $m(x) = (\alpha x^2 + 1)^{-1/2}$  の  $\alpha = 0.01, 0.1, 1.0, 2.0$  場合について,  $\delta(0)$  を横軸,  $x = 0.1$ (左図),  $x = 1.0$ (右図) における数値解  $w$  と近似解  $w^*$  の差をそれぞれ書きだした.

$x = 0$  近傍における, 数値解  $w(x)$  と近似解  $w^*(x)$  の差は  $\max_{0 < x < 1} |\delta_m(x)| (= |\delta_m(0)|)$  が大きくなるに従い大きくなることが見て取れる.

### 3.2 $m(x) = x + \alpha$ の場合

$\delta_{\{x+\alpha\}}(x) = \frac{3}{4(x+\alpha)^4}$  であり, 特に  $\max_{0 < x} |\delta_m(x)| (= \delta_m(0)) = \frac{3}{4\alpha^4}$  である.  $\alpha > 0$  について  $\max_{0 < x} |\delta_m(x)|$  が十分小さい場合, 近似解は

$$w^*(x) := \alpha^{1/2} * (x + \alpha)^{-1/2} \cos\left(\alpha x + \frac{x^2}{2}\right) \quad x > 0, \quad (3)$$

と書くことができる.  $\alpha = 10, 1$  について, 数値解と近似解  $w^*$  の比較をした.

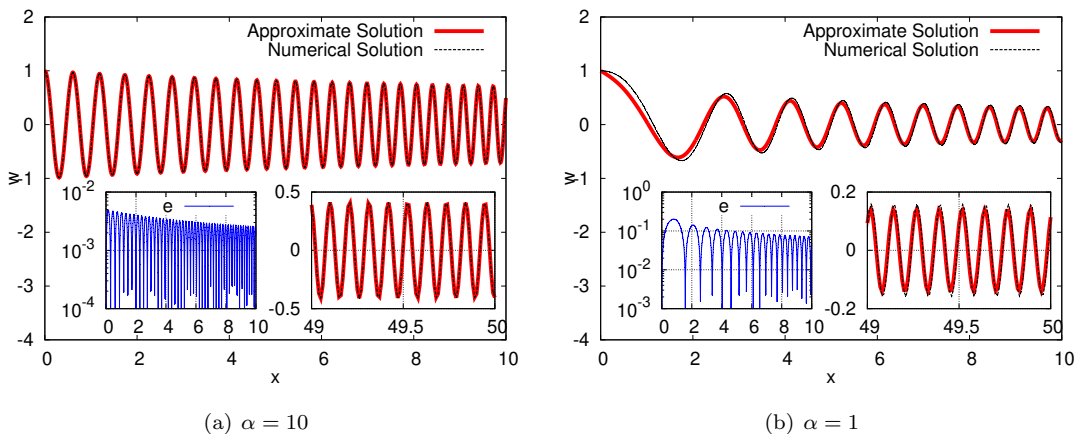


図 4  $m(x) = x + \alpha$  の場合について, (a)  $\alpha = 10$ , (b)  $\alpha = 1$  として式 (1) の数値解  $w$  と近似解  $w^*$  とを比較した. また,  $x \in [49, 50]$  について拡大図も合わせて書きだした. 近似誤差  $e(x) = |w(x) - w^*(x)|$  も合わせて書き出した.

図 4 について,  $x \in [0, 10]$  におけるエラー  $e$  の大きさを見ると,  $\alpha = 1$ (右図) よりも  $\alpha = 10$ (左図) のほうが良い近似をしていることが見て取れる.

更に,  $\max_{x>0} |\delta_m(x)|$  が 1 付近の場合について考察するため,  $\alpha = (3/4)^{1/4}, 0.5$  について数値解  $w$  と近似解  $w^*$  の比較をした.

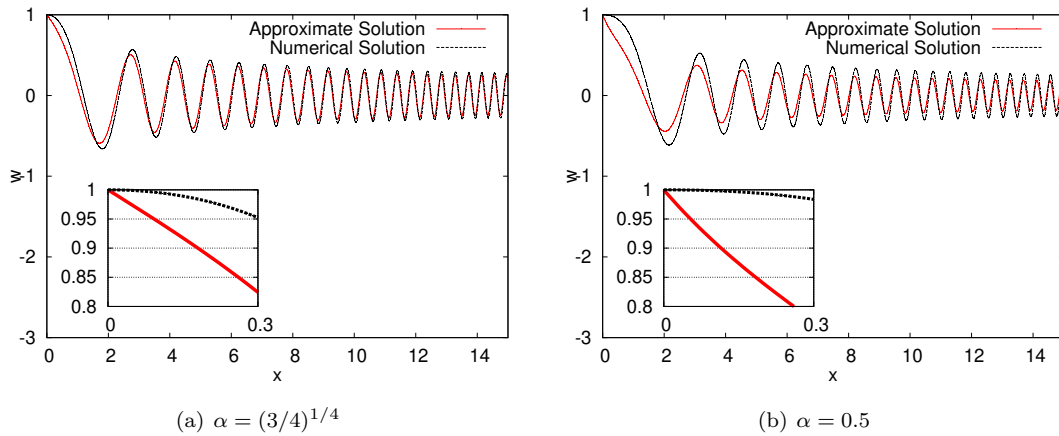


図 5  $m(x) = x + \alpha$  の場合について, (a)  $\alpha = (3/4)^{1/4}$ , (b)  $\alpha = 0.5$  として式 (1) の数値解  $w$  と近似解  $w^*$  とを比較した.  $x \in [0, 0.3]$  について拡大図も合わせて書きだした.

図 5 について, 図 4 の場合に比べて近似精度が大きく落ちている.  $x \in [0, 15]$  について数値解と  $w^*(x)$  はおよそ同期しているように見えるが,  $x \in [0, 0.3]$  の拡大図を見ると大きくずれていることが見て取れる.

さらに,  $\max_{0 < x < 1} |\delta_m(x)| (= |\delta_m(0)|)$  が 1 に近づくにしたがって近似精度は落ちていく傾向が見て取れる. そこで, パラメータ  $\alpha$  を変えて,  $\delta$  の違いによる数値解  $w$  と近似解  $w^*$  の差を書きだした (図 6).

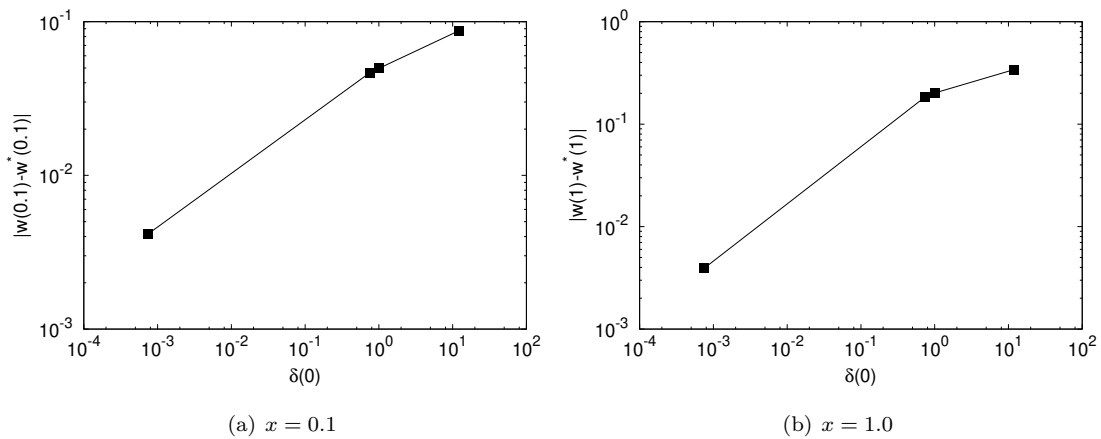


図 6  $m(x) = (\alpha x^2 + 1)^{-1/2}$  の  $\alpha = 10, 1, (3/4)^{1/4}, 0.5$  場合について,  $\delta(0)$  を横軸,  $x = 0.1$  (左図),  $x = 1.0$  (右図) における数値解  $w$  と近似解  $w^*$  の差をそれぞれ書きだした.

$x = 0$  近傍における, 数値解  $w$  と近似解  $w^*$  の差は  $\max_{0 < x < 1} |\delta_m(x)| (= |\delta_m(0)|)$  が大きくなるに従い大きくなるが見て取れる.

#### 4 議論とまとめ

3 章で見たように,  $\max_{0 < x < 1} |\delta_m(x)|$  が大きくなればなるほどエラーが大きくなることが確認できた. ただし, ここでのエラーとは  $x = 0.1, 1.0$  での数値解と近似解の差分をさす. しかし, 関数が異なる場合では  $\max_{0 < x < 1} |\delta_m(x)|$  の値のみでエラーを評価できないことが見て取れる (図 3, 図 6).

異なる関数間に対する厳密解と近似解とのエラーを考察する場合, 位相をどのように定義するか,  $\delta$  のどの値に注目することが妥当かを定める必要がある. これらを一般の関数で考察することも今後考えていきたいことのひとつである.

謝辞 本研究の課題を提供していただいた東京大学大学院理学系研究科地球惑星科学専攻の東塚知己先生に感謝する. また, 東京大学の柏原崇人先生には会合の日程調整など議論全体の統括をしていただき, 東京大学の高橋杏氏, 木戸晶一郎氏には議論を通じて様々な意見をいただいた. ここに感謝の意を表す.

## 参考文献

- [1] O. Bühler. *Waves and mean flows* (cambridge monographs on mechanics). 2014.
- [2] A. E. Gill. *Atmosphere ocean dynamics*. Elsevier, 2016.