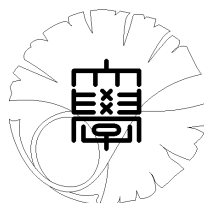


数理科学実践研究レター 2020-14 September 28, 2020

時系列画像データの大規模相互作用系によるモデル化

by

須田 颯



UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

時系列画像データの大規模相互作用系によるモデル化

須田 颯¹ (東京大学大学院数理科学研究科)

Hayate Suda (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

本稿では、細胞集団の時系列画像データに対する異常検知問題への確率論的アプローチとして、色付けされた画像データの色の濃さを粒子の存在確率とみなすことにより、膨大な数の粒子からなる大規模相互作用系として定式化することを提案する。また、Glauber-Kawasaki dynamics と呼ばれる時間発展法則が与えられた粒子系について知られている結果を紹介する。

1 Introduction

ある現象に対して大量のデータが存在し、そのデータに適合する数理モデルを選択して現象を説明しようとする場合、モデル選択に数学的な根拠があると一概には言えず、また微分積分や線形代数、数理統計の手法を超えた数学が用いられることはあまりない。数学的な根拠を与えるためには、少なくとも現象を抽象化した数理モデルである必要があり、このようなモデルを考察する際にはより様々な数学が用いられる。

本稿では、細胞集団の時系列画像データについて、正常な成長をしている集団と、細胞のがん化などにより異常な成長をしている集団を判別する異常検知問題への、確率論的アプローチを考察する。問題設定は次のように行う：仮定として、密度などに基づき色づけされた画像データは十分な量を得られており、ある規模(ある細胞数)の細胞集団の平均的な姿は二次元平面上の関数 $m: \mathbb{R}^2 \rightarrow [-1, 1]$ として表されているとする。そして異常検知の問題とは、この平均的な姿に対する“揺らぎ”を求めること、また一定時間経過後の平均的な姿を理論的に予想し、そこからの揺らぎを求めると解釈する。ここでいう揺らぎを求めるとは、確率論でいう中心極限定理を導出することに相当する。上記の問題設定では暗に平均的な姿に近いものを正常とし、平均から大きくずれた姿を異常とみなしていることになるが、本稿では“正常”や“異常”の数学的定義については考察しない。

この問題設定のもとで、細胞集団の平均的な姿を小さな格子状に分割し、その中点における色の濃さを粒子の存在確率とみなすことで、画像データを膨大な数の粒子からなる系とみなすことを考える。これを数式で表すと次のようになる： \mathbb{Z} は整数全体から成る集合とし、 $\mathcal{X} := \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ とおく。 \mathcal{X} は \mathbb{Z}^2 上の粒子配置全体から成る集合である。すなわち、 $\eta \in \mathcal{X}$ に対し、 $\eta(\mathbf{x}) = 1, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$ ならば \mathbf{x} 上に粒子が存在し、 $\eta(\mathbf{x}) = -1$ ならば \mathbf{x} 上には粒子がない。自然数 $N \in \mathbb{N}$ と細胞集団の平均的な姿 $m: \mathbb{R}^2 \rightarrow [-1, 1]$ に対して、 \mathcal{X} 上の確率測度列 $(\mu_N^m)_{N \in \mathbb{N}}$ は、

$$\int_{\mathcal{X}} d\mu_N^m(\eta) \eta(\mathbf{x}) = m\left(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N}\right) \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \quad (1.1)$$

を満たすとする。さらに、 $(\mu_N^m)_{N \in \mathbb{N}}$ には次のような独立性の仮定をする：自然数 $N \in \mathbb{N}$ 、関数 m によらない定数 $L > 0$ が存在して、任意の有限集合 $A, B \subset \mathbb{Z}^2$ に対し $\min_{\mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > L$ 、 $\|x\| := \max_{i=1,2} |x_i|$ ならば、

$$\mu_N^m\left(\left\{\eta \in \mathcal{X}; \prod_{\mathbf{x} \in A} \eta(\mathbf{x}) = 1, \prod_{\mathbf{y} \in B} \eta(\mathbf{y}) = 1\right\}\right) = \mu_N^m\left(\left\{\eta \in \mathcal{X}; \prod_{\mathbf{x} \in A} \eta(\mathbf{x}) = 1\right\}\right) \mu_N^m\left(\left\{\eta \in \mathcal{X}; \prod_{\mathbf{y} \in B} \eta(\mathbf{y}) = 1\right\}\right). \quad (1.2)$$

(1.2) は、ある細胞の状態と、その細胞から離れた場所にある細胞の状態は独立しているということを意味している。セクション 2 では、 $N \rightarrow \infty$ の極限を取ることにより、 $(\mu_N^m)_{N \in \mathbb{N}}$ の下での粒子の経験分布は $m(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ 、 $d\mathbf{y} = dy_1 dy_2$ に収束すること、すなわち“大数の法則”と、これに対応した中心極限定理について紹介する。

ここまでの粒子系によるモデル化は、ある規模の細胞集団についてのものである。時系列データについての考察を行うため、粒子らに相互作用する時間発展法則を与える。このような粒子系は、大規模

¹hayates@ms.u-tokyo.ac.jp

相互作用系と呼ばれる。どのような大規模相互作用系を採用するかについては様々な選択肢があるが、本稿では Glauber-Kawasaki dynamics という粒子の移動、生成消滅が起きるモデルを採用する。セクション 3 ではこれについて知られている結果として、時間経過した後の粒子の経験分布の極限(大数の法則)と、これに対応した揺らぎの結果を紹介する。これらの結果は、ある規模の細胞集団が時間経過後、平均的にどのような姿になるか、またそこからの揺らぎはどのようなものであるかを述べており、本稿で設定した問題に答えるものである。

2 粒子配置に対する極限定理

定理に先立ち、記号の定義をする。 $\mathbb{S}(\mathbb{R}^2)$ を \mathbb{R}^2 上のシュワルツ空間とし、 $\mathbb{S}'(\mathbb{R}^2)$ をその双対とする。 $\delta_{(\cdot)}$ は \mathbb{R}^2 上のディラックのデルタ関数とする。

2.1 大数の法則

粒子配置 $\eta \in \mathcal{X}$ に対し、粒子の経験分布 $X_N(\eta) \in \mathbb{S}'(\mathbb{R}^2)$, $N \in \mathbb{N}$ を次式で定める:

$$X_N(\eta) := \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2} \eta(\mathbf{x}) \delta_{\frac{\mathbf{x}}{N}}. \quad (2.1)$$

定理 1. $m \in C_0(\mathbb{R}^2)$, $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} |m(\mathbf{x})| \leq 1$ とし、 $(\mu_N^m)_{N \in \mathbb{N}}$ は (1.1), (1.2) を満たすとする。この時、任意の $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^2)$, $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N^m \left(\left| \langle X_N(\eta), f \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{y} m(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \right| > \varepsilon \right) = 0. \quad (2.2)$$

Proof. 簡単のため、 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ の場合に証明の概略を述べる。(2.2) を示すには、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N^m \left(\left| \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{x}=(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2} [\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})] f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N}) \right| > \varepsilon \right) = 0$$

を示せば十分である。 $\text{supp}(f) \subset [-(M-1), M-1]$ を満たすような $M > 1$ をとる。ここで、(1.2) における $L > 0$ は自然数であり、また $M \in \mathbb{N}$ を十分大きく取り直すことで、 $M = M_1 L$, $M_1 \in \mathbb{N}$ であると仮定しても一般性は失われない。この時、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{x}=(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2} [\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})] f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N}) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{x} \in [-NM_1L, NM_1L-1]^2} [\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})] f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N}) \end{aligned}$$

である。次に、 $B^{i,j} \subset [-NM_1L, NM_1L-1]$, $i, j = 0, 1, \dots, 2NM_1-1$ は $[-NM_1L, NM_1L-1]^2$ の箱状分割であり、

$$B^{i,j} := \{-NM_1L + iL, \dots, -NM_1L + (i+1)L - 1\} \times \{-NM_1L + jL, \dots, -NM_1L + (j+1)L - 1\}$$

なるものとする。各 $B^{i,j}$ から代表点の一つずつ選ぶことにより、 $[-NM_1L, NM_1L-1]^2$ の分割 C_k , $k = 1, \dots, L^2$ であって、任意の k に対して

$$\inf_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C_k, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > L$$

なるものが構成できる. この分割と (1.1), (1.2) 及びチェビシエフの不等式を用いると,

$$\begin{aligned}
 & \mu_N^m \left(\left| \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{x} \in [-NM_1L, NM_1L-1]^2} [\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})] f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N}) \right| > \varepsilon \right) \\
 & \leq \sum_{k=1, \dots, L^2} \mu_N^m \left(\left| \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{x} \in C_k} [\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})] f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N}) \right| > \frac{\varepsilon}{L^2} \right) \\
 & \leq \sum_{k=1, \dots, L^2} \left(\frac{L^2}{\varepsilon} \right)^2 \frac{1}{N^4} \sum_{\mathbf{x} \in C_k} \int_{\mathcal{X}} d\mu_N^m [\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})]^2 f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})^2 \\
 & \leq \frac{4\|f\|_{\infty} M_1^2 L^6}{N^2 \varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

よって, (2.2) が成り立つ. \square

この定理により, 粒子系によって画像データをモデル化した場合, 大数の法則によって元の画像データ m が復元されることが分かる.

2.2 中心極限定理

前節の定理を踏まえ, 揺動場 $Y_N(\eta) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ を次式で定める:

$$Y_N(\eta) := \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2} [\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})] \delta_{\frac{\mathbf{x}}{N}}.$$

定理 2. $m \in C_0(\mathbb{R}^2)$, $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} |m(\mathbf{x})| \leq 1$ とし, $(\mu_N^m)_{N \in \mathbb{N}}$ は (1.1), (1.2) を満たすとする. この時, 任意の $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ に対して, $\langle Y_N(\eta), f \rangle$ は $N \rightarrow \infty$ で平均 0, 分散 $\int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{y} (1 - m(\mathbf{y})^2) f(\mathbf{y})^2$ の正規分布へ弱収束し, また次の共分散極限

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} d\mu_N^m \langle Y_N(\eta), f \rangle \langle Y_N(\eta), g \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{y} (1 - m(\mathbf{y})^2) f(\mathbf{y}) g(\mathbf{y})$$

が得られる.

Proof. 簡単のため, $f, g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, $L < 1$ の場合の証明の概略を述べる. $L \geq 1$ の場合は, 前節の定理の証明で用いた分割を導入する. また, $\text{supp}(f), \text{supp}(g) \subset [-M, M]$ を満たすような $M \in \mathbb{N}$ をとる. $\langle Y_N(\eta), f \rangle$ の特性関数の対数を取ることににより, $\theta \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}
 & \log \left(\int_{\mathcal{X}} d\mu_N^m \exp(\sqrt{-1}\theta \langle Y_N(\eta), f \rangle) \right) \\
 & = \sum_{\mathbf{x} \in [-MN, MN]} \log \left(\int_{\mathcal{X}} d\mu_N^m \exp\left(\frac{\sqrt{-1}\theta}{N} [\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})] f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})\right) \right) \\
 & = \sum_{\mathbf{x} \in [-MN, MN]} \log \left(1 - \frac{\theta^2}{2N^2} (1 - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})^2) f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})^2 + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \right) \\
 & = \left(\sum_{\mathbf{x} \in [-MN, MN]} -\frac{\theta^2}{2N^2} (1 - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})^2) f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})^2 \right) + o(1) \\
 & \rightarrow -\frac{\theta^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{y} (1 - m(\mathbf{y})^2) f(\mathbf{y})^2 \quad N \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

ここで, 二行目では (1.2), 三行目の等式では

$$\int_{\mathcal{X}} d\mu_N^m [\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})]^2 = 1 - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})^2,$$

であること, 及び $|e^{\sqrt{-1}\theta y} - 1 - \sqrt{-1}\theta y + \frac{\theta^2 y^2}{2}| \leq \min\{y^2, \frac{|\theta|^3}{6}\}$, $y \in \mathbb{R}$ から

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\mathcal{X}} d\mu_N^m \exp\left(\frac{\sqrt{-1}\theta}{N} [\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})] f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})\right) - 1 + \frac{\theta^2}{2N^2} \int_{\mathcal{X}} d\mu_N^m [\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})]^2 f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})^2 \right| \\
 & \leq \frac{\theta^2}{N^2} \int_{\mathcal{X}} d\mu_N^m \min\{[\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})]^2 f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})^2, \frac{|\theta|}{6N} |\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})|^3 |f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})|^3\}
 \end{aligned}$$

であることを用いた。また、四行目では、 $|\log(1+y) - y| \leq |y|^2$, $|y| \leq \frac{1}{2}$ を用いた。一方、直接計算により、

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} d\mu_N^m \langle Y_N(\eta), f \rangle \langle Y_N(\eta), g \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2} \int_{\mathcal{X}} d\mu_N^m [\eta(\mathbf{x}) - m(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N})]^2 f(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N}) g(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N}) \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{y} (1 - m(\mathbf{y})^2) f(\mathbf{y}) g(\mathbf{y}) \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

この結果は、 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ における平均 $m(\mathbf{y})$ に対し、そこからの揺らぎは、平均 0 分散 $1 - m(\mathbf{y})^2$ の正規分布に従うことを表している。

3 Glauber-Kawasaki dynamics

3.1 モデルの定義

Glauber-Kawasaki dynamics とは、次式で定められる生成作用素 \mathcal{L}_N に対応する \mathcal{X} -値マルコフ過程 $\{\eta(t) = \{\eta(\mathbf{x}, t); \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2\} \in \mathcal{X}; t \geq 0\}$ である：

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_N f)(\eta) &:= N^2 (\mathcal{L}^K f)(\eta) + (\mathcal{L}^G f)(\eta), \\ (\mathcal{L}^K f)(\eta) &:= \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{y}: |\mathbf{x}-\mathbf{y}|=1} (f(\eta^{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) - f(\eta)) \\ (\mathcal{L}^G f)(\eta) &:= \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2} c(\mathbf{x}, \eta) (f(\eta^{\mathbf{x}}) - f(\eta)), \end{aligned}$$

ただし、 $N \in \mathbb{N}$ はスケールパラメータ、 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ は台有界な有界関数である。ここで、 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ が台有界とは、ある有限集合 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ が存在して、 f は $\{\eta(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda\}$ のみに依存する場合にいう。また、 $\eta^{\mathbf{x}, \mathbf{y}}, \eta^{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2$ は以下のように定義される粒子配置である：

$$\eta^{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{z}) := \begin{cases} \eta(\mathbf{y}) & \mathbf{z} = \mathbf{x} \\ \eta(\mathbf{x}) & \mathbf{z} = \mathbf{y} \\ \eta(\mathbf{z}) & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \eta^{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) := \begin{cases} -\eta(\mathbf{x}) & \mathbf{z} = \mathbf{x}, \\ \eta(\mathbf{z}) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

すなわち、 $\eta^{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ は \mathbf{x}, \mathbf{y} 上の粒子の状態を交換し、 $\eta^{\mathbf{x}}$ は \mathbf{x} 上の粒子の状態を反転させたものであり、作用素 \mathcal{L}^K は粒子の拡散、また \mathcal{L}^G は粒子の生成消滅を表している。生成消滅のレート関数 $c: \mathbb{Z}^2 \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ はあるコンパクト集合 $0 \in \Lambda_0 \subset \mathbb{Z}^2$ が存在して、

$$\begin{aligned} c(0, \eta) &= \sum_{\Lambda \subset \Lambda_0} K_{\Lambda} \eta_{\Lambda} \quad \eta_{\Lambda} := \prod_{\mathbf{x} \in \Lambda} \eta(\mathbf{x}), \\ c(\mathbf{x}, \eta) &= c(0, \tau_{-\mathbf{x}} \eta) \end{aligned}$$

として表されるとする。ここで、 K_{Λ} は c が非負となるように取られた定数であり、 $\tau_{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$ は平行移動作用素

$$\tau_{\mathbf{x}} \eta(\mathbf{z}) := \eta(\mathbf{z} - \mathbf{x})$$

である。特に、 c は平行移動不変、台有界である。

次節でこのモデルに対して知られている結果を述べるために、いくつか記号の定義をする。 $D([0, \infty), \mathcal{X})$, $D([0, \infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$ はそれぞれ $[0, \infty)$ 上の $\mathcal{X}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ に値を取る左連続右極限を持つ関数の全体であって、Skorokhod 位相が入った位相空間とする。 $\nu_m, -1 \leq m \leq 1$ を \mathcal{X} 上の平均 m のベルヌーイ直積測度とし、 $F(m): [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(m) := -2 \int_{\mathcal{X}} d\nu_m \eta(0) c(0, \eta)$$

で定める。 \mathcal{X} 上の確率測度 μ に対して、初期分布が μ であるマルコフ過程 $\{\eta(t) \in \mathcal{X}; t \geq 0\}$ による $D([0, \infty), \mathcal{X})$ 上の像測度を \mathbb{P}_{μ}^N 、また \mathbb{P}_{μ}^N による期待値を \mathbb{E}_{μ}^N と書く。

3.2 大数の法則

\mathcal{X} 上の確率測度列 $(\mu_N^{m_0})_{N \in \mathbb{N}}$ は, (1.2) よりも強く, 次の仮定を満たすとする: ある $m_0 \in C_0^3(\mathbb{R}^2)$ が存在して, 任意のコンパクト集合 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ に対して,

$$\mu_N^{m_0} \left(\prod_{\mathbf{x} \in \Lambda} \eta(\mathbf{x}) \right) = \prod_{\mathbf{x}=(x_1, x_2) \in \Lambda} m_0 \left(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{N} \right). \quad (3.1)$$

これは, 任意の粒子の状態は他の粒子と相関がないことを仮定している.

定理 3 ([1]). 確率過程 $\{X_N(\cdot) \in D([0, \infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))\}_N$ を $X_N(t) := X_N(\eta(t))$ によって定める. ここで, $X_N(\eta)$, $\eta \in \mathcal{X}$ は (2.1) によって定義されたものである. この時, $D([0, \infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$ 上の確率測度列 $P_N := \mathbb{P}_{\mu_N^{m_0}} \circ X_N^{-1}$ は $\delta_{m(\mathbf{y}, \cdot)} d\mathbf{y}$ に弱収束し, $m(\mathbf{y}, t)$ は次のコーシー問題の一意解である.

$$\begin{cases} \partial_t m(\mathbf{y}, t) = \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{y}} m(\mathbf{y}, t) + F(m(\mathbf{y}, t)) \\ m(\mathbf{y}, 0) = m_0(\mathbf{y}). \end{cases}$$

この定理は, 細胞集団の平均的な姿について, その時間発展法則は反応拡散方程式に従うことを示しており, すなわち, 大数の法則に相当するものである. 大規模相互作用系におけるこのような極限定理は, 標語的に “流体力学極限” と呼ばれている.

3.3 巨視的時間発展 (集団としての平均的ふるまい) に対する揺らぎ

定理 4 ([1]). (3.1) を仮定する. 確率過程 $\{Y_N(\cdot) \in D([0, \infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))\}_N$ を次式で定める:

$$Y_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2} (\eta(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E}_{\mu_N^{m_0}}[\eta(\mathbf{x}, t)]) \delta_{\frac{\mathbf{x}}{N}}.$$

この時, $D([0, \infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$ 上の確率測度列 $Q_N := \mathbb{P}_{\mu_N^{m_0}} \circ Y_N^{-1}$ はある $D([0, \infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$ 上の測度 Q に弱収束し, Q は次の条件で一意的に定められる: $D([0, \infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2))$ 上の *coordinate mapping process* $\{Y(t); t \geq 0\}$, テスト関数 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ に対して, (1) $\{Y(t)(\phi); t \geq 0\}$ は平均 0 の確率過程であり, (2) 任意の $G \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$G(Y(t)(\phi)) - \int_0^t ds Y(s)(A(s)\phi)G'(Y(s)(\phi)) - \frac{1}{2} \int_0^t ds \|B(s)\phi\|^2 G''(Y(s)(\phi))$$

は Q -マルチンゲールであり, (3) $\{Y(0)(\phi)\}$ は *Gaussian* であって, 共分散は

$$Q(Y(0)(\phi_1)Y(0)(\phi_2)) = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{y} \phi_1(\mathbf{y})\phi_2(\mathbf{y})(1 - m_0^2(\mathbf{y}))$$

で与えられる. ここで, G', G'' は G の一回, 二回微分であり,

$$A(t)\phi(\mathbf{y}) := \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{y}} \phi(\mathbf{y}) + \phi(\mathbf{y})F'(m(\mathbf{y}, t)),$$

$$\|B(s)\phi\|^2 := \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{y} (\nabla \phi(\mathbf{y}))^2 (1 - m(\mathbf{y}, t)^2) + 4 \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{y} \phi(\mathbf{y})^2 \int_{\mathcal{X}} d\nu_{m(\mathbf{y}, t)}(\eta) c(0, \eta).$$

近年では上記した大数の法則, 中心極限定理に加え, 大偏差原理にあたる結果も得られている [2, 3].

4 Conclusion

本稿では事象に単純な抽象化を行うことで, 数学的に厳密な結果が得られることを紹介した. 特に, 粒子系を採用することにより, 時間発展法則を自然に導入することができ, ある規模の細胞集団の平均的姿だけでなく, そこから一定時間経過後の細胞集団のふるまいを理論的に予想することが可能になった. しかし, 実際のデータとよく整合するとは限らず, またその検証も今回は行っていない. 現実に則した数学的結果を得るためには, 実際のデータと比較しつつ特定の細胞集団固有の特徴をモデル構築の際に考慮する必要があると考えられ, そのようなモデルでも揺らぎに関する厳密な結果が得られるのかは今後の課題である.

参考文献

- [1] A. DE MASI, P. FERRARI, J. LEBOWITZ : *Reaction-diffusion equations for interacting particle systems* . J. Stat. Phys. **44**, 589–644(1986)
- [2] G. JONA-LASINIO, C. LANDIM, M. E. VARES : *Large deviations for a reaction diffusion model*. Probab. Theory and Related Fields, **97**, 339–361(1993)
- [3] C. LANDIM, K. TSUNODA : *Hydrostatics and dynamical large deviations for a reaction-diffusion model*. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **54**, no. 1 51–74(2018)