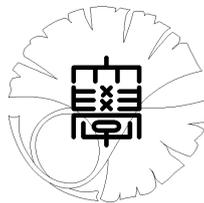


数理科学実践研究レター 2020-15 October 05, 2020

雲の中での雨粒の成長について

by

中塚 成徳



**UNIVERSITY OF TOKYO**  
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES  
KOMABA, TOKYO, JAPAN

# 雲の中での雨粒の成長について

中塚成徳<sup>1</sup> (東京大学大学院数理科学研究科)

Shigenori Nakatsuka (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

## 概要

降雨現象は地形や大気の状態によって決まり様々な形態をとる。雨粒の成長過程は、大気という複雑な場の中で、雨粒同士の衝突併合過程及び水蒸気の凝結・蒸発過程という微視的な現象の積み重ねとして実現されるため、その厳密な解析は困難を伴う。本研究の目的は夏の積乱雲などの中で優位に働くと考えられている雨粒同士の衝突併合過程を簡略化された大気の流れの下でシミュレーションし、大気中の雨粒の成長について考察することである。

## 1 はじめに

降雨現象は、雲粒（雨粒）が大気中で十分に成長し、大気中の上昇気流による風圧より自重の効果が大きくなり、地表に落下する現象である。その厳密な解析が困難な理由として、雲粒の核となる大気中の化学物質の分布という初期条件の他に、

- 大気の流体的性質
- 大気の大域的な状態を表す、密度・速度・温度の変化が雲粒の成長による微視的過程と大きな相互効果を持つ
- 雲粒の状態はその半径をパラメータにとった時、その値域が  $10^{-2}\text{mm}$ - $2\text{mm}$  と変化が大きいため、離散近似が難しい

といった問題がある。熱力学的平衡過程における雲粒の凝結・蒸発過程による成長モデルはすでにケーラー理論 (例えば [1, Section 5.11] を参照。) として知られている一方、衝突併合過程を大気中で実現した時の雲粒の成長過程の理解はまだ進んでいない。

本論文では、降雨に関わる空間を高さをパラメータとする一次元空間とし、大気の流れが高さに関し線形に依存し時間に依存しないという簡略化されたという状況の下で衝突併合過程で雲粒がどのように成長するのかをシミュレーションする。特に、このモデルは山脈が与える大気の流れへの影響などの地表の因子を除いた理想化されたモデルである。未熟な試みであるため、計算例としては非常に単純なつまらないものしか取り上げないが、雲底における上昇気流が雲粒の成長を促進している様を感じ取ってもらえれば幸いである。

## 2 降雨モデルの設定

### 2.1 雲粒の分布

雲粒の分布を次のモデルで考える。降水に関わる上空 10km までの一次元空間を 50 等分し、離散化された座標を  $(x_1, x_2, \dots, x_{50})$  とする。これは上空を 200m ごとに分割しているため簡易的なモデルを考えるためには十分であるとする。また雲粒は半径 2mm までとし、その重さにより等分し 50 種類  $(1, 2, \dots, 50)$  に分けられるとして離散化する (50 に対応するのが半径 2mm の雲粒とする)。雲粒を高度の分割と同じく 50 種類に分けたのは、これにより大気中の雲粒の分布  $50 \times 50$  の正方行列で表せ、後述するように雲粒の分布の時間発展を行列の積により表示することができ、数値計算に適するという事情による。ある時刻での大気中の雲粒の分布を  $50 \times 50$  の正方行列

$$N = (n_{ij})_{i,j=1}^{50}$$

<sup>1</sup>nakatuka@ms.u-tokyo.ac.jp

を用い,  $(i, j)$  成分が高さ  $x_i$  にある重さ  $j$  の粒子の個数となると決めることで表現する. 特に, 地表の状態は  $x_1$  に対応するものとして観測される降雨の雲粒の分布は  $N$  の第一行成分

$$N_{\text{precipitation}} = (n_{1,1}, \dots, n_{1,50})$$

で与えるとする.

## 2.2 雲粒の成長に関する設定

雲粒の時間発展は次を満たすとする:

- (雲底付近における雲粒生成の条件) 雲底付近 (地表から高さ 1km 程度まで) の座標  $x_2-x_6$  では常に新たに雲粒が生じているとし, Initial で表す.
- (蒸発・凝結効果) 雲粒が下降 (上昇) する際に起こる蒸発 (凝結) 効果を重さ  $j$  の雲粒が下降 (上昇) する際に  $j-1, (j+1)$ , になるとすることで近似する.
- (衝突併合効果) 重さ  $i, j$  の雲粒の衝突は

$$F_{\text{cld}}: \{i, j\} \mapsto \begin{cases} \{i+j\}, & (i+j \leq 50) \\ \{i+j-50, 50\}, & (i+j > 50) \end{cases}$$

で表される.

特に最後の条件は大きくなりすぎた粒子は衝突直後に分裂することを表している. この下で大気の流れは一定であるとし, 雲粒に与える高度変化の影響を定める. まず, 大気の流れによりある時刻で高さが  $x_j$  にあったものが次の時刻で高さ  $x_i$  にある確率を  $s_{ij}$  として行列

$$S = (s_{ij})_{i,j=1}^{50}$$

として表すと

$$s_{ij} \geq 0, (\forall i, j), \quad \sum_{i=1}^{50} s_{ij} = 1, (\forall j \neq 1), \quad s_{i1} = 0, (\forall i)$$

を満たす. 最後の等式は地表に降った雲粒は再び大気に戻らないことを表す. さらに粒子の高度は急激に変化しないこと  $s_{ij} = 0, (|i-j| > 1)$  を課す. この行列を上三角行列  $S_-$ , 対角行列  $S_0$ , 下三角行列  $S_+$  をもちいて  $S = S_- + S_0 + S_+$  と分解する. 大気雲粒の分布  $N$  が与えられたとき, 大気の流れにより下降・停滞・上昇する雲粒の分布はそれぞれ

$$S_+N, \quad S_0N, \quad S_-N$$

により与えられる. この時, 衝突併合効果として, 停滞した雲粒  $S_0N$  のうち, 1/3 づつがそれぞれ, 下降してきたものと上昇してきた雲粒と衝突併合し, 残りがそのまま停滞するとしよう. 更に, 雲粒の集合の衝突併合は雲粒の半径によらず等確率で起こるとして以下のように定義する: 雲粒の集団  $(k_1, \dots, k_{50})$  を集合  $R = \{1, \dots, 50\}$  から  $\mathbb{Z}$  への関数の元とみなし,  $i$  のみで 1 の値をとりその他で 0 の値をとるデルタ関数  $\delta_{[i]}$  を用いれば一般の元は  $\sum_{j=1}^{50} k_j \delta_{[j]}$  で表される. 衝突併合過程  $F_{\text{cld}}$  は  $\delta_{[i]}$  を用いれば

$$F_{\text{cld}}(\delta_{[i]}, \delta_{[j]}) = \delta_{i+j \leq 50} \delta_{[i+j]} + \delta_{i+j > 50} (\delta_{[i+j-50]} + \delta_{[50]})$$

と表現される. ここで  $\delta_{i+j \leq 50}$  と  $\delta_{i+j > 50}$  は条件  $i+j \leq 50, (i+j > 50)$  が満たされたとき 1 の値をとり, 満たされない場合は 0 の値をとる関数とする. それぞれ雲粒の二つ集団  $\sum k_j^1 \delta_{[j]}, \sum k_j^2 \delta_{[j]}$  の衝突併合過程を

$$\left( \sum k_j^1 \delta_{[j]} \right) * \left( \sum k_j^2 \delta_{[j]} \right) = \sum_{i=1}^{50} (k_i^1 + k_i^2) \delta_{[i]} + \sum_{i,j=1}^{50} \text{Min} \left\{ \frac{k_i^1}{50}, \frac{k_j^2}{50} \right\} (F_{\text{cld}}(\delta_{[i]}, \delta_{[j]}) - (\delta_{[i]} + \delta_{[j]}))$$

と定義する．右辺第二項は衝突併合過程による雲粒の生成消滅項である．積  $*$  を

$$*: \text{Mat}_{50}(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \times \text{Mat}_{50}(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \rightarrow \text{Mat}_{50}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

に各行ごとの積の線形和として拡張することで大気中の雲粒の分布同士の衝突併合過程が表現される．雲粒の衝突は，高さ  $x_i$  で停滞した雲粒のうち  $1/3$  が，高さ  $x_{i+1}$  から下降した雲粒と衝突し， $1/3$  が高さ  $x_{i-1}$  から上昇した雲粒と衝突し， $1/3$  がそのまま残ると仮定することで，大気中の雲粒の分布行列  $N$  の（離散的）時間発展は，

$$N \mapsto \text{Initial} + \frac{1}{3}S_0N + \frac{1}{3}(S_0N) * (S_+N) + \frac{1}{3}(S_0N) * (S_-N) \quad (1)$$

と書ける．

### 3 実験結果

境界条件 Initial として雲粒の分布が重さ・高度ともに次の Gauss 分布

$$\text{Initial} = \left( 100e^{-\frac{1}{20}(j-10)^2} e^{-\frac{1}{2}(i-2)^2} \delta_{1 < i < 7} \right)_{i,j=1}^{50}$$

を考える． $S$  として大気の安定度を表すパラメータ  $a \in [0, 1]$  を用いた以下の二種類  $S_1, S_2$  を考える：

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-a}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \frac{1-a}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-a}{2} & a & \frac{1-a}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-a}{2} & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-a}{2} & a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1-a}{2} & a \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-a}{50} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \frac{2(1-a)}{50} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{49(1-a)}{50} & a & \frac{3(1-a)}{50} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{48(1-a)}{50} & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1-a)}{50} & a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1-a}{50} & a \end{pmatrix}.$$

$S_1$  は雲粒の高度変化が高さによらないモデルをあらわしており， $S_2$  は地表付近での上昇気流，雲頂での下降気流の効果を模したモデルである．（以下  $S_1$  を風なしの場合， $S_2$  を風ありの場合と呼ぶことにする．）再帰方程式 (1) を  $a = 0.5, 0.7, 0.9$  の場合に，雲粒の分布が安定するまで数値計算を行った．図 1,2 はそれぞれの条件の下での大気中に存在する各雲粒の総数をグラフにまとめたものである．ここから，大気の安定度  $a$  の値が大きいほど，大気中での雲粒の個数が多くなりことが分かる．また重さが 50 の雲粒はその値よりも近い重さの雲粒よりも選択的に生成されていることが分かる．これは，十分な重さをもった雲粒同士の衝突併合過程において重さ 50 の雲粒が生成されることによると考えられる．風ありの場合と風なしの場合の結果を比較することにより，風ありの方がより多くの雲粒を大気中に含むことが分かり，これは直感に一致する．さらに，風ありの場合では境界条件の雲粒の重さに関する Gauss 分布の中心 10 からはなれた 14 付近に重さのピークを持つ．これは，雲底付近の上昇気流により雲粒がより高いところで安定的に存在し，水蒸気の凝結効果により各雲粒が成長した結果だと考えられる．

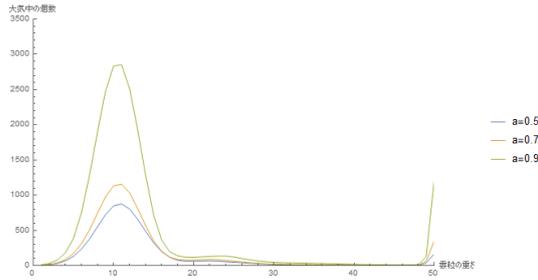


図 1:  $S = S1$  における大気中の雲粒の分布

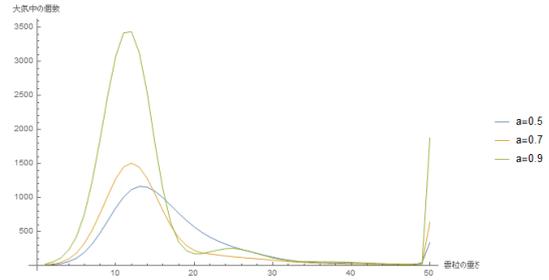


図 2:  $S = S2$  における大気中の雲粒の分布

図 3-4 では地上で観測される雲粒の分布を示している。風なしの場合では、期待されるように境界条件と同様の分布をもったピークを 10 にもつ雲粒の集合が観察されるが、重さ 49 をピークに持つ雲粒が観察される。これは大気中での衝突併合過程で生まれた重さ 50 の雲粒が地上で観測されたものと考えられ、簡単なモデルではあるが「多数の小雨のなかに十分大きな雨粒が降ってくる」という身近な現象と一致している。一方、今回の実験では風ありの場合では雲粒は地表にほとんど落ちないことが分かった。これは降雨現象自身を再現しておらず、雲低付近の風圧の効果  $S_2$  が大きすぎたためと考えられる。

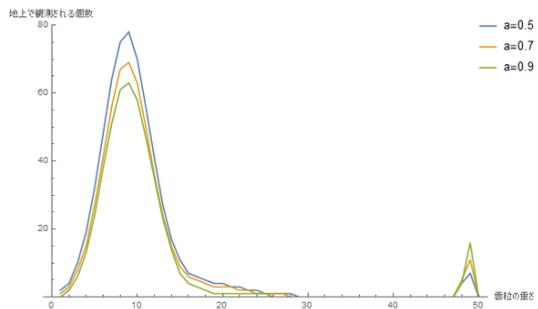


図 3:  $S = S1$  における地上での雲粒の分布

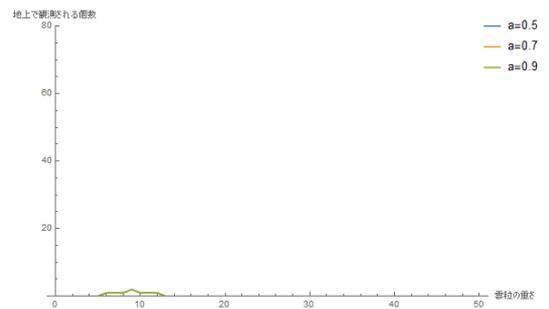


図 4:  $S = S2$  における地上での雲粒の分布

## 4 終わりに

本論文では、現実とは程遠い簡単な降雨のモデルを観察した。より重い雲粒がより落ちやすいモデルや、複雑な大気の影響を考慮したモデルを考察することは今後の課題である。一方で、境界条件、つまり、雲低付近で生成される雲粒の集合は重さ 10 をピークにもつ Gauss 分布であったが、衝突併合過程を通して重さ 50 の雲粒を生成することが分かった。その一方で図 1-2 で見られるように、この二つの集団の中間の重さを持つ雲粒はあまり生成されないことがわかった。このような分布の「不連続性」を数学的により深く理解することは今後の興味深い問題である。

## 5 謝辞

本課題を提供して下さった東京海上日動リスクコンサルティング株式会社の矢野良輔さまに感謝申し上げます。また、セミナーの時間調節や議論の総括をはじめ、多くのアドバイスを頂いた柏原崇人さまに感謝申し上げます。本研究は FMSP リーディング大学院の助成を受けております。

## 参考文献

- [1] Wang, P. (2013). *Physics and Dynamics of Clouds and Precipitation*. Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511794285