研 究 速 報
UDC 539.371：531.36：539.32.072

有限回転変位を考慮した2次元剛体•ばねモデルの定式化（その2）
——動 的 問 題——

Forumulation of 2-D Rigid Body Spring Models Including Effect of Finite Rotational Displacement (II)
——Dynamic Problems——

三 藤 正 明*•竹 内 則 雄**•川 井 忠 彦***
Masaaki MITO, Norio TAKEUCHI and Tadahiko KAWAI

1. ま え が き

有限回転変位を考慮した2次元剛体•ばねモデルの静的問題に対する定式化は文献1)で示した．そこで，本論文では，動的問題に対する定式化について述べる．本文では，まず剛体内の加速度を示し，この加速度を動的問題に対する増分形仮想仕事式に代入することにより，運動方程式を求めることにする．さらに，数値計算例として片持ち梁を取り上げ，大変形有限要素解と本モデルの解を比較することにより，動的問題に対する本モデルの検討を行う．

2. 増分形仮想仕事式による面内要素の定式化

文献1)において，有限回転変位を考慮した2次元剛体•ばねモデルの剛性方程式を誘導した．ここでは，その結果のみを以下に示す．

$$[\boldsymbol{K}_d+\boldsymbol{K}_G-\boldsymbol{K}_P-\boldsymbol{K}_f]\{\varDelta\boldsymbol{U}\}=\varDelta\boldsymbol{F}+\varDelta\boldsymbol{R} \qquad (1)$$
$$\varDelta\boldsymbol{F}=\varDelta\boldsymbol{F}_P+\varDelta\boldsymbol{F}_f$$
$$\varDelta\boldsymbol{R}=-\varDelta\boldsymbol{R}_\sigma+\varDelta\boldsymbol{R}_P+\varDelta\boldsymbol{R}_f$$

ここで，$\boldsymbol{K}_d$ は初期変位を考慮した剛性行列，$\boldsymbol{K}_G$ は幾何剛性行列，$\boldsymbol{K}_P$ は初期物体力行列および $\boldsymbol{K}_f$ は初期表面力行列である．また，$\varDelta\boldsymbol{F}_P$ は物体力による増分荷重ベクトル，$\varDelta\boldsymbol{F}_f$ は表面力による増分荷重ベクトルである．そして，$\varDelta\boldsymbol{R}_\sigma$ は初期応力による残差荷重ベクトル，$\varDelta\boldsymbol{R}_P$ および $\varDelta\boldsymbol{R}_f$ はおのおの物体力および表面力による残差荷重ベクトルである．

本論文では，この剛性方程式を利用し，有限回転変位を考慮した2次元剛体•ばねモデルの運動方程式を示す．動的問題に対する定式化を行うまえに，剛体の任意点での加速度について述べる．いま，3次元の剛体を考える．ここで，剛体の重心点での並進加速度ベクトルを $\ddot{\boldsymbol{U}}_G$, x, y, z 軸回りの剛体の角速度ベクトルを $\dot{\boldsymbol{O}}$ とすれば，剛体の運動力学より，剛体内の任意点の加速度ベクトル $\ddot{\boldsymbol{U}}$ は

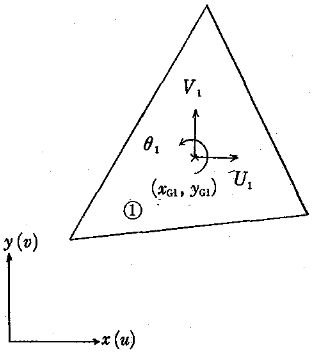
$$\ddot{\boldsymbol{U}}=\ddot{\boldsymbol{U}}_G+(d\dot{\boldsymbol{O}}/dt)\times\boldsymbol{r}+\dot{\boldsymbol{O}}\times(\dot{\boldsymbol{O}}\times\boldsymbol{r}) \qquad (2)$$

として与えられる．ここで，$\boldsymbol{r}$ は重心点から任意点までの動径ベクトルである．上式を用いて，図-1に示す2次元剛体要素の任意点での加速度を求める．重心点での並進加速度を $(\ddot{u}_1, \ddot{v}_1)$ とし，角速度を $\dot{\theta}_1$ とすれば，これらを(2)式に代入することにより，任意点における x, y 方向における加速度 $\ddot{U}(x, y)$, $\ddot{V}(x, y)$ は以下のようになる．

$$\ddot{U}(x, y)=\ddot{u}_1-(y-y_{G1})\ddot{\theta}_1-(x-x_{G1})(\dot{\theta}_1)^2$$
$$\ddot{V}(x, y)=\ddot{v}_1+(x-x_{G1})\ddot{\theta}_1-(y-y_{G1})(\dot{\theta}_1)^2 \qquad (3)$$

回転角 θ_1 が微小と仮定し，上式の2次以上の項を省略すれば，微小変形理論で用いる加速度と一致することは容易に理解できる．つぎに，上式を用いて増分加速度を求める．いま，x, y 方向の増分加速度を $\varDelta\ddot{U}$, $\varDelta\ddot{V}$ とすれば，

$$\varDelta\ddot{U}=\varDelta\ddot{U}^{(1)}+\varDelta\ddot{U}^{(2)}$$
$$\varDelta\ddot{U}^{(1)}=\varDelta\ddot{u}_1-(y-y_{G1})\varDelta\ddot{\theta}_1-2(x-x_{G1})(\dot{\theta}_1^{(0)}\cdot\varDelta\dot{\theta}_1)$$
$$\varDelta\ddot{U}^{(2)}=-(x-x_{G1})(\varDelta\dot{\theta}_1)^2$$
$$\varDelta\ddot{V}=\varDelta\ddot{V}^{(1)}+\varDelta\ddot{V}^{(2)}$$
$$\varDelta\ddot{V}^{(1)}=\varDelta\ddot{v}_1+(x-x_{G1})\varDelta\ddot{\theta}_1-2(y-y_{G1})(\dot{\theta}_1^{(0)}\cdot\varDelta\dot{\theta}_1)$$



X：重心点

図-1　剛体変位場を仮定した三角形要素

* 五洋建設株式会社
**(株)国際テクノロジー•センター
*** 東京大学生産技術研究所　第2部

研　究　速　報

$$\Delta\ddot{V}^{(2)}=-(y-y_{G1})(\Delta\dot{\theta}_1)^2$$

となる．ここで，上付きの(0)は前段階の加速度であり，(1)，(2)はそれぞれ1次および2次の増分であることを表す．上式を整理して，以下のようなベクトル表示する．すなわち，1次増分については，

$$\Delta\ddot{\boldsymbol{U}}^{(1)}=\boldsymbol{H}_1\cdot\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}_1+\boldsymbol{H}_2\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{u}}_1 \qquad (5)$$

$$(\Delta\ddot{\boldsymbol{U}}^{(1)})^t=\lfloor\Delta\ddot{U}^{(1)},\ \Delta\ddot{V}^{(1)}\rfloor$$

$$(\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}_1)^t=\lfloor\Delta\ddot{u}_1,\ \Delta\ddot{v}_1,\ \Delta\ddot{\theta}_1\rfloor$$

$$(\Delta\dot{\boldsymbol{u}}_1)^t=\lfloor\Delta\dot{u}_1,\ \Delta\dot{v}_1,\ \Delta\dot{\theta}_1\rfloor$$

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix}1&0&-(y-y_{G1})\\0&1&(x-x_{G1})\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}0&0&-2(x-x_{G1})\dot{\theta}_1^{(0)}\\0&0&-2(y-y_{G1})\dot{\theta}_1^{(0)}\end{bmatrix}$$

である．同様にして，2次増分も以下のように表す．

$$\Delta\ddot{U}^{(2)}=\Delta\dot{\boldsymbol{u}}_1^t\cdot\boldsymbol{N}_1\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{u}}_1 \qquad (6)$$

$$\Delta\ddot{V}^{(2)}=\Delta\dot{\boldsymbol{u}}_1\cdot\boldsymbol{N}_2\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{u}}_1$$

$$\boldsymbol{N}_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-(x-x_{G1})\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-(y-y_{G1})\end{bmatrix}$$

以上により，1次および2次の増分加速度が得られたので，つぎに動的問題に関する増分形仮想仕事式を求める．文献1)で示した静的問題に対する増分形仮想仕事式を参考にすると，動的問題に対する増分形仮想仕事式は次式のごとく与えられる．

$$\sum_{eb}\int_{S_b}\delta(\boldsymbol{\delta}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{\delta})^t\cdot(\boldsymbol{\sigma}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{\sigma})ds$$
$$-\sum_e\iint_A\delta(\boldsymbol{U}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{U})^t\cdot(\bar{\boldsymbol{P}}^{(0)}+\Delta\bar{\boldsymbol{P}}$$
$$-(\gamma/g)(\ddot{\boldsymbol{U}}^{(0)}+\Delta\ddot{\boldsymbol{U}}))dA$$
$$-\sum_{eb}\int_{S_b}\delta(\boldsymbol{U}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{U})^t\cdot(\bar{\boldsymbol{f}}^{(0)}+\Delta\bar{\boldsymbol{f}})ds=0 \qquad (7)$$

ここで，$\Delta\boldsymbol{\delta}$，$\Delta\boldsymbol{\sigma}$ はそれぞれ増分相対変位および増分応力である．また，$\Delta\bar{\boldsymbol{P}}$，$\Delta\bar{\boldsymbol{f}}$ は増分物体力および増分表面力であり，γ は単位体積重量，g は重力加速度である．さらに，s_b は要素境界面の領域であり，$\sum_e$ および $\sum_{eb}$ はそれぞれ各要素内，要素境界面上の総和をとることを意味する．上式の増分相対変位 $\Delta\boldsymbol{\delta}$，増分変位 $\Delta\boldsymbol{U}$ および増分加速度 $\Delta\ddot{\boldsymbol{U}}$ を1次および2次成分の和，すなわち

$$\Delta\boldsymbol{\delta}=\Delta\boldsymbol{\delta}^{(1)}+\Delta\boldsymbol{\delta}^{(2)} \qquad (8)$$

$$\Delta\boldsymbol{U}=\Delta\boldsymbol{U}^{(1)}+\Delta\boldsymbol{U}^{(2)}$$

$$\Delta\ddot{\boldsymbol{U}}=\Delta\ddot{\boldsymbol{U}}^{(1)}+\Delta\ddot{\boldsymbol{U}}^{(2)}$$

で表し，高次項を省略すると以下のように整理することができる．

$$\sum_{eb}\int_{S_b}\delta(\Delta\boldsymbol{\delta}^{(1)})^t\cdot\Delta\boldsymbol{\sigma}ds$$
$$+\sum_{eb}\int_{S_b}\delta(\Delta\boldsymbol{\delta}^{(2)})^t\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(0)}ds$$
$$+\sum_e\iint_A\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(1)})^t\cdot(\gamma/g)\Delta\ddot{\boldsymbol{U}}^{(1)}dA$$
$$+\sum_e\iint_A\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(2)})^t\cdot(\gamma/g)\cdot\Delta\ddot{\boldsymbol{U}}^{(0)}dA$$
$$-\sum_e\iint_A\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(2)})^t\cdot(\bar{\boldsymbol{P}}^{(0)}+\Delta\bar{\boldsymbol{P}})dA$$
$$-\sum_{eb}\int_{S_b}\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(2)})^t\cdot(\boldsymbol{F}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{F})ds=\Delta\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{R} \qquad (9)$$

ここで，

$$\Delta\boldsymbol{F}=\sum_e\iint_A\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(1)})^t\cdot\Delta\bar{\boldsymbol{P}}dA$$
$$+\sum_{eb}\int_{S_b}\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(1)})^t\cdot\Delta\bar{\boldsymbol{f}}ds \qquad (10)$$

$$\Delta\boldsymbol{R}=-\sum_{eb}\int_{S_b}\delta(\Delta\boldsymbol{\delta}^{(1)})^t\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(0)}ds$$
$$+\sum\iint_A\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(1)})^t\cdot\bar{\boldsymbol{P}}^{(0)}dA \qquad (11)$$
$$+\sum_{eb}\int_{S_b}\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(1)})^t\cdot\bar{\boldsymbol{f}}^{(0)}ds$$
$$-\sum_e\iint_A\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(1)})^t\cdot(\gamma/g)\cdot\Delta\ddot{\boldsymbol{U}}^{(0)}dA$$

である．(1)式で示した有限回転変位を考慮した剛性方程式を求める際に，加速度に関係する項以外の係数行列およびベクトルは文献1)で示した．すなわち，(9)式では，左辺第1項より $\boldsymbol{K}_d$ 行列，第2項より $\boldsymbol{K}_G$ 行列，第5項より $\boldsymbol{K}_P$ 行列および第6項より $\boldsymbol{K}_f$ 行列である．また，荷重ベクトルとしては，(10)式の右辺第1項および第2項より $\Delta\boldsymbol{F}_P$ および $\Delta\boldsymbol{F}_f$ ベクトルを求めた．さらに，残差荷重ベクトルとしては，(11)式の右辺第1項より $\Delta\boldsymbol{R}_\sigma$ ベクトル，第2項より $\Delta\boldsymbol{R}_P$ および第3項より $\Delta\boldsymbol{R}_f$ である．ここでは，加速度に関係する係数行列およびベクトルを具体的に示す．まず，文献1)より1次増分変位 $\Delta\boldsymbol{U}^{(1)}$ は，

$$\Delta\boldsymbol{U}^{(1)}=\boldsymbol{Q}_1\cdot\Delta\boldsymbol{u}_1 \qquad (12)$$

$$(\Delta\boldsymbol{U}^{(1)})^t=\lfloor\Delta U^{(1)},\ \Delta V^{(1)}\rfloor$$

$$(\Delta\boldsymbol{u}_1)^t=\lfloor\Delta u_1,\ \Delta v_1,\ \Delta\theta_1\rfloor$$

$$\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}1&0&-(y-y_{G1})-(x-x_{G1})\theta_1^{(0)}\\0&1&(x-x_{G1})-(y-y_{G1})\theta_1^{(0)}\end{bmatrix}$$

と表される．(5)式と(12)式を(9)式の左辺第3項に代入すると，

$$\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(1)})^t\cdot(\gamma/g)\cdot\Delta\ddot{\boldsymbol{U}}^{(1)}$$
$$=\delta(\Delta\boldsymbol{u}_1)^t\cdot\boldsymbol{Q}_1^t\cdot(\gamma/g)\cdot(\boldsymbol{H}_1\cdot\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}_1+\boldsymbol{H}_2\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{u}}_1) \qquad (13)$$

となり，ここで

$$\boldsymbol{M}=\iint_A\boldsymbol{Q}_1^t\cdot(\gamma/g)\cdot\boldsymbol{H}_1dA \qquad (14)$$

$$\boldsymbol{m}=\iint_A\boldsymbol{Q}_1^t\cdot(\gamma/g)\cdot\boldsymbol{H}_2dA$$

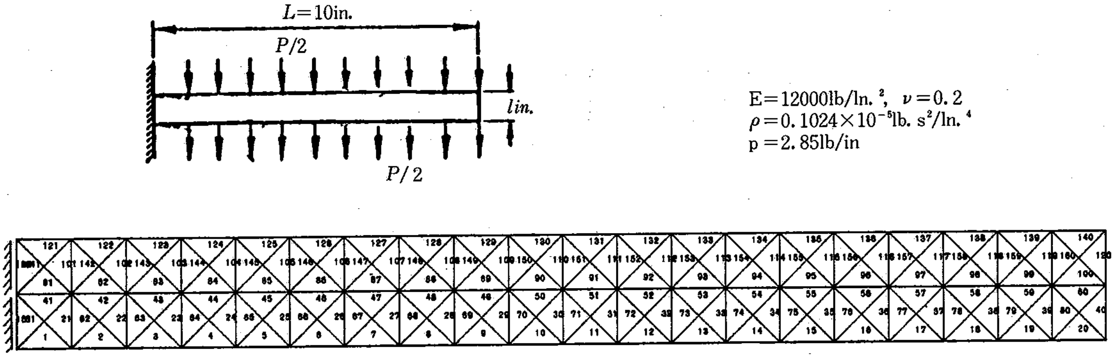


図-2　動的応答解析モデルと要素図

とおくと，質量行列 $\boldsymbol{M}$ および速度に関する係数行列 $\boldsymbol{m}$ は，

$$\boldsymbol{M}=(\gamma/g)\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ & A & 0 \\ \mathrm{SYM} & & I_{xx}+I_{yy} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{m}=(\gamma/g)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \mathrm{SYM} & & 2(I_{xx}+I_{yy})\dot{\theta}_1^{(0)}\cdot\theta_1^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$I_{xx}=\int_A\int(x-x_{G1})^2dA,\ I_{yy}=\int_A\int(y-y_{G1})^2dA$$

となる．ここで，A は要素の面積を表す．つぎに，(9)式の左辺第4項より初期加速度行列 $\boldsymbol{K}_a$ を求める．2次増分変位 $\Delta\boldsymbol{U}^{(2)}$ は文献1)より，

$$(\Delta\boldsymbol{U}^{(2)})^t=\lfloor \Delta U^{(2)},\Delta V^{(2)}\rfloor \tag{16}$$

$$\Delta U^{(2)}=1/2\cdot\Delta\boldsymbol{u}_1^t\cdot\boldsymbol{N}_1\cdot\Delta\mathbf{u}_1$$

$$\Delta V^{(2)}=1/2\cdot\Delta\boldsymbol{u}_1^t\cdot\boldsymbol{N}_2\cdot\Delta\boldsymbol{u}_1$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2$ 行列は(6)式で示している．上式を(9)式第4項の被積分項に代入し整理すると，以下の関係が得られる．

$$\begin{aligned}&(\Delta\boldsymbol{U}^{(2)})^t\cdot(\gamma/g)\cdot\ddot{\boldsymbol{U}}^{(0)}\\ &=(\gamma/g)(\Delta U^{(2)}\cdot\ddot{U}^{(0)}+\Delta V^{(2)}\cdot\ddot{V}^{(0)})\\ &=(\gamma/g)\cdot 1/2\cdot\lfloor\Delta u_1,\Delta v_1,\Delta\theta_1\rfloor\\ &\times\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \mathrm{SYM} & & -(x-x_{G1})\ddot{U}^{(0)}-(y-y_{G1})\ddot{V}^{(0)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta u_1\\ \Delta v_1\\ \Delta\theta_1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{17}$$

さらに，(3)式の関係を上式に代入し積分を実行すると，初期加速度行列 $\boldsymbol{K}_a$ が次式のごとく得られる．

$$\boldsymbol{K}_a=(\gamma/g)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \mathrm{SYM} & & (I_{xx}+I_{yy})(\dot{\theta}_1^{(0)})^2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

最後に(11)式の右辺第4項より初期加速度による残差荷重ベクトル $\Delta\boldsymbol{R}_\sigma$ を示す．まず，右辺第4項に(12)式を代入すると

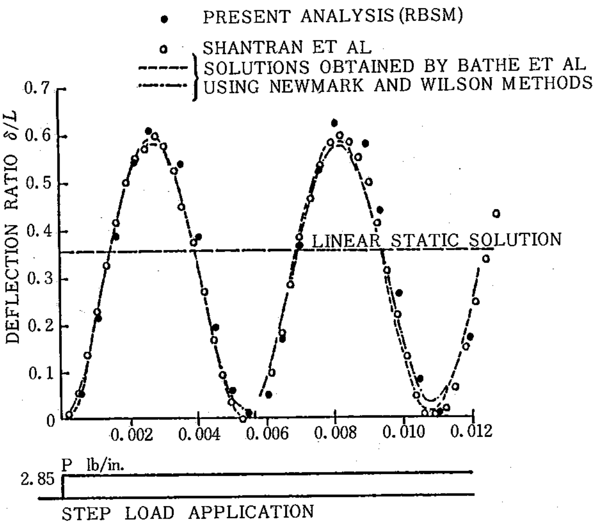


図-3　本モデルの解と有限要素解との比較

$$(\Delta\boldsymbol{U}^{(1)})^t\cdot(\gamma/g)\cdot\ddot{\boldsymbol{U}}^{(0)}=(\Delta\boldsymbol{u}_1)^t\cdot Q_1^t\cdot(\gamma/g)\cdot\ddot{\boldsymbol{U}}^{(0)} \tag{19}$$

となる．ここで，上式の加速度項に(3)式を代入し，積分すると，

$$\Delta\boldsymbol{R}_a=(\gamma/g)\begin{bmatrix}\ddot{u}_1^{(0)}\cdot A\\ \ddot{v}_1^{(0)}A\\ (I_{xx}+I_{yy})(\ddot{\theta}_1^{(0)}+\theta_1^{(0)}(\dot{\theta}_1^{(0)})^2)\end{bmatrix} \tag{20}$$

となる．以上により，有限回転変位を考慮した運動方程式を構成する係数行列および荷重ベクトルがすべて求まったので結果を整理すると，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{M}\cdot\Delta\ddot{\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{m}\cdot\Delta\dot{\boldsymbol{U}}+[\boldsymbol{K}_d+\boldsymbol{K}_G+\boldsymbol{K}_a-\boldsymbol{K}_p-\boldsymbol{K}_f]\{\Delta\boldsymbol{U}\}\\ &=\Delta\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{R}\\ &\Delta\boldsymbol{F}=\Delta\boldsymbol{F}_p+\Delta\boldsymbol{F}_f\\ &\Delta\boldsymbol{R}=-\Delta\boldsymbol{R}_\sigma+\Delta\boldsymbol{R}_p+\Delta\boldsymbol{R}_f-\Delta\boldsymbol{R}_a\end{aligned} \tag{21}$$

となる．

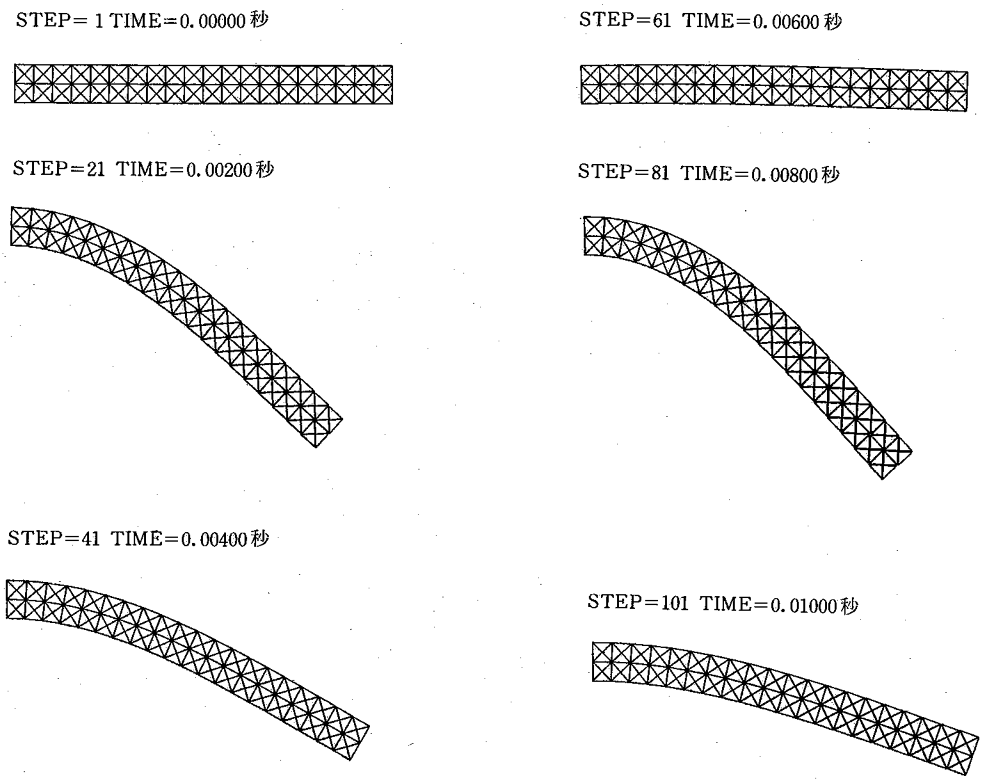


図-4　各時刻の応答変位図

3. 有限回転変位を考慮した片持ち梁の動解析

有限回転変位問題に対する精度の検討を行うために，図-2に示される片持ち梁を取り上げ，動的解析を行った．このモデルは文献2)に示されるように，Shantranらが8節点アイソパラメトリック要素を用いて，動的大変形解析を行ったモデルと同じものである．荷重としては，等分布荷重をステップ荷重として作用させた．なお，解析に際しては荷重の半分を片持ち梁の上，下面に作用させた．

図-3に解析結果を示す．横軸に時刻，縦軸には梁長に対する先端部の鉛直変位の比を取っている．図中，●印が本モデルによる解であり，○印がShantranらの解である．本モデルでは，時間きざみ$\Delta t=0.0001$秒としている．Shantranらは陽解法を用いて運動方程式を解いているため，時間きざみ$\Delta t=0.00001$秒と本モデルの場合と比べて小さい．また，破線および1点破線がBatheらが有限要素を用いて，陰解法により求めた値である．全体的に本モデルの値はShantranらの値と比べて周期的にやや長目の値を示している．図-4に時刻$t=0$秒から$t=0.01$秒までの，0.002秒きざみの応答変位を示す．

4. ま　と　め

有限回転変位を考慮した2次元剛体•ばねモデルの運動方程式を導いた．さらに，有限回転変位を考慮した動的問題に対する精度の検討を行うために片持ち梁の動的大変形解析を行い，有限要素解と本モデルの解を比較したところ，全体的に良好な精度で解が求まることがわかった．本手法は土の粒子そのものの挙動を扱うミクロレベルの粒状体力学へ適用するとその偉力が期待できるものと思われる．今後は数多くの数値解析を行うことにより，動的問題に対するデータの蓄積が必要であろう．

(1985年6月18日受理)

参　考　文　献

1) 三藤正明，竹内則雄，川井忠彦：〝有限回転変位を考慮した2次元剛体•ばねモデルの定式化（その1）－静的問題－″，生産研究，VOL. 37, No. 9,（1985）
2) D.Shantran, D.R.J.Owen, O.C.Zienkiewicz："Dynamic Transient Behaviour of Two and Three Dimentional Structures Including Plasticity, Large Deformation Effects And Fluid Interaction", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.4,(1976)