別紙２

審査の結果の要旨

論文提出者　ティース　ホルガー

計算理論（計算可能性と計算量の理論）では、有限的・離散的・記号的な操作によって如何なる情報処理が可能か、また可能ならばどれほど効率よくできるかを問う。このような性質上、考察の対象は原則として整数など有限の言葉で表される離散データの処理である。しかし実数などのように無限に続く近似によってしか表されない連続データの処理も、近似値を部分的に取り扱う過程として適切に捉えることで、計算理論の俎上に載せることができる。このようにしてやや高度な数学的対象の複雑さを論ずる研究は計算可能解析と呼ばれ、近年では計算可能性のみならず、より精密に計算量（複雑さの度合）を測る研究も行われている。

本論文は、このような計算量の分析の対象として、時刻の経過とともに微分方程式に従って値が変化する連続力学系を扱っている。これに関する最も基本的な事実の一つとして、もし系を記述する函数が解析的ならば、解となる函数の複雑度はあまり大きくならない（もとの函数に比べ「多項式時間」の範囲に留まる）ことが、ミュラーらの考察（1987）などから判っていた。しかしこの結果は、方程式を実際に解く手順を与えない非一様なものである上に、解が一定の有界区間内に留まるという単純な場合にしか通用しないなど、かなり限定された形であった。本論文はこれを幾つかの意味で拡張・精密化することで、連続力学系の計算量をより包括的に理解することを目指した研究である。

論文の第一章と第七章はそれぞれ、全体の紹介と、まとめ・展望を述べている。第二章は、以後の議論の前提となる計算可能解析の基本概念すなわち二型計算と表現の理論の概説である。第三〜六章が研究成果を述べた主要部であり、以下のように構成されている。

第三章では前章の枠組の下で、解析函数への操作を扱うための表現やその下での計算量限定について整理している。解析函数は、数を数に対応させる函数である側面と、級数としても表されるという側面を併せ持ち、そのことを利用した処理ができるため様々な操作を行っても計算量の大きい函数を生じにくい。このこと自体は既に個別的には（特に一変数の函数については）指摘されていたが、本章ではその結果を統一的に扱えるようパラメタつき表現を使って議論を整理するとともに多変数に一般化した。本章は技術的な新しさは小さいが、先行文献で分散していた議論を纏め、次章以降の結果を記述する準備にもなっている。

第四章では、前章の準備をもとに、微分方程式の計算（摸倣）の計算量を扱っている。系を記述する解析函数ｆに比べて、それにより得られる解ｙの複雑さは大きくならないことが知られていたが、このことから直ちに「与えられたｆからｙを求める」一様な手順の存在が言えるわけではない。本章はそのような一様な結果を得る詳細な解析を行っているが、特徴的なのは、その結果を単に（二型）多項式時間計算可能性という大まかな形ではなく適切な

パラメタを用いた計算量上界として表していること、またそれにより解が非有界な場合にも通用することである。これにより本章の結果は、多項式微分方程式の計算時間が軌道の長さに依存して抑えられるという最近のグラサらの結果を一般化してもいる。

第五章では、通常の「最悪時」の意味での計算量が定義できない系についても複雑さを論ずるために、「平均時」の計算量（特に平均多項式時間）を扱う方法を述べている。解析函数で書かれた微分方程式であっても、特異点をもつ場合、その附近を通る解は初期値に強く依存するため、効率のよい計算が原理的に不可能である。しかし多くの自然な方程式では特異点が稀であり、「殆どの」入力において（前章までの結果により）複雑さの小さい振舞いを示すと期待される。本章ではこのことを実際に、一定の条件を満すハミルトン系の計算量が平均多項式時間であるという形で証明した。具体的な系についてこのような結果を得るには、特異点が稀である（測度が零である）ことのみならず、特異点にどの程度近づくことがどの程度稀であるかをより詳しく示す必要があり、そのために適切に時刻を離散化する新しい論法を用いている。平均計算量の考え方そのものは離散データの問題に対してはレヴィンによって 1980 年代に創められたが、それを連続系の具体的な問題に応用したのは本論文が初であると思われる。

第六章では、第四章で理論的に扱った微分方程式ソルバを実装して評価している。現時点では一定の入力形式や一定の精度に特化したソルバに比肩する性能は出ないが、任意の解析函数を受付ける最も一般的な形の実装となっており、高速化への課題について報告している。

本論文では、以上の各内容が数学的な意味で正しく裏づけられていることは勿論であるが、より理念的なレベルでも題材の選択や定式化の意義が明確に説明されている。特に、第三章の解析函数の表現についての議論を、二階多項式時間の概念を用いて大まかな形でのみ述べるのではなく、適切なパラメタを用いて計算量を記述したことは、第四章における従来よりも精密な分析と、第六章における実装にも役立っており、これは二階計算量理論の粗さに対する批判に一定の解決を提示する貢献といえる。また第五章も上述の平均計算量評価手法の新しさに加え、そもそもこの種の連続系問題に平均計算量を適用することが物理系の実質的な複雑さを測る意味をもつという動機の説明には説得力があり、そのために必要な定式化を行ったこと自体も意義が大きい。

このように、本論文に纏められた研究は、自然で重要な課題に対し相当の貢献をなしており、本審査委員会は博士（学術）の学位を授与するにふさわしいものと認定する。