

博 士 論 文

逐次座屈固有値解析法を用いた  
H形断面梁の最大曲げ耐力評価

福 島 佳 浩









## 目次

1	序論	1
1.1	研究の背景	1
1.2	既往の研究	2
1.3	本研究の目的	3
1.4	本論文の構成	4
2	逐次座屈固有値解析法	5
2.1	序	5
2.2	既往の解析方法との比較	5
2.3	解析方法の概要	6
2.3.1	力学モデル	6
2.3.2	力学モデルの剛性低下	9
2.3.3	力学モデルと座屈現象の対応	10
2.3.4	座屈固有値解析を用いた最大耐力評価	11
2.4	巨視的不安定性	13
2.4.1	非線形性と不安定性	13
2.4.2	巨視的不安定曲面	14
2.5	結	15
3	材料非線形性を考慮した最大曲げ耐力評価	17
3.1	序	17
3.2	解析モデル	17
3.2.1	概要	17
3.2.2	材料特性	18
3.2.3	残留応力	18
3.2.4	初期たわみ	19
3.2.5	モデルの命名規則	19
3.3	解析手順	19
3.4	材料非線形性による剛性低下の影響の定量的評価	21
3.4.1	塑性化のモデル化	21
3.4.2	座屈モーメントの低下	21
3.4.3	分岐モーメントの定義と意味	22
3.5	解析結果	22
3.5.1	完全弾塑性モデル、残留応力なし、初期たわみなし (P00)	23
3.5.2	バイリニアモデル、残留応力なし、初期たわみなし (B00)	26
3.5.3	完全弾塑性モデル、残留応力 30%、初期たわみなし (P03)	29
3.5.4	バイリニアモデル、残留応力 30%、初期たわみなし (B03)	32
3.6	残留応力の影響	35
3.6.1	剛性低下曲線への影響	35
3.6.2	巨視的不安定曲面への影響	37
3.7	材料特性の影響	39

3.7.1	剛性低下曲線への影響	39
3.7.2	巨視的不安定曲面への影響	40
3.8	結	41
4	幾何学的非線形性を考慮した最大曲げ耐力評価	42
4.1	序	42
4.2	解析モデル	42
4.2.1	概要	42
4.2.2	初期たわみ	42
4.3	解析手順	42
4.4	幾何学的非線形性による剛性低下の影響の定量的評価	43
4.4.1	面外方向の設定	44
4.4.2	面外変形量の算出方法	44
4.4.3	剛性低下を含まない荷重変形曲線	45
4.4.4	剛性低下曲線	46
4.4.5	幾何学的非線形性による剛性低下の二つの要因	47
4.5	解析結果	48
4.5.1	座屈モード形状	48
4.5.2	弾性モデル、残留応力なし、弾性一次座屈モード形状 (E00_E1)	55
4.5.3	弾性モデル、残留応力なし、弾性二次座屈モード形状 (E00_E2)	67
4.5.4	弾性モデル、残留応力なし、正弦半波形状 (E00_SH)	79
4.6	面外変形に対する初期たわみの影響	91
4.6.1	初期たわみ形状の影響	91
4.6.2	初期たわみ量の影響	95
4.6.3	横座屈細長比の影響	97
4.7	巨視的不安定曲面に対する初期たわみの影響	99
4.7.1	横座屈細長比の影響	100
4.7.2	初期たわみ形状の影響	101
4.7.3	初期たわみ量の影響	102
4.8	結	103
5	材料非線形性と幾何学的非線形性の連成を考慮した最大曲げ耐力評価	104
5.1	序	104
5.2	解析モデル	104
5.2.1	概要	104
5.3	解析手順	104
5.4	材料非線形性と幾何学的非線形性による剛性低下の影響の定量的評価	105
5.5	解析結果	105
5.5.1	バイリニアモデル、残留応力なし、弾性一次座屈モード形状 (B00_E1)	106
5.5.2	バイリニアモデル、残留応力なし、弾性二次座屈モード形状 (B00_E2)	118
5.5.3	バイリニアモデル、残留応力なし、正弦半波形状 (B00_SH)	127
5.5.4	バイリニアモデル、残留応力 30%、弾性一次座屈モード形状 (B03_E1)	136
5.5.5	バイリニアモデル、残留応力 30%、弾性二次座屈モード形状 (B03_E2)	148
5.5.6	バイリニアモデル、残留応力 30%、正弦半波形状 (B03_SH)	157

5.6	材料非線形性と幾何学的非線形性の相互作用 . . . . .	166
5.6.1	面外変形による塑性化進展状況の変化 . . . . .	166
5.6.2	塑性化による面外変形進展状況の変化 . . . . .	169
5.7	二つの非線形性を考慮した巨視的不安定曲面 . . . . .	170
5.8	$M_{bt}$ と $M_{\max}$ の比較 . . . . .	174
5.8.1	幾何学的非線形性による剛性低下が一次モードで生じる場合 . . . . .	175
5.8.2	幾何学的非線形性による剛性低下が高次モードで生じる場合 . . . . .	176
5.9	結 . . . . .	176
6	結論 . . . . .	178
6.1	本研究の結論 . . . . .	178
6.2	今後の課題 . . . . .	180



## 謝辞

本論文は、著者が東京大学大学院博士課程に在学した3年間に行った研究をまとめたものである。

著者の指導教員である東京大学大学院工学系研究科准教授 伊山潤先生には、学部4年の卒業論文指導にはじまり、修士課程の2年間の後、設計事務所勤務の4年半を挟んで、博士課程の3年間までに至る、非常に長い期間にわたって、ご指導、ご鞭撻を賜りました。社会人博士として鋼構造研究室に戻り、3年間の研究を成し遂げることができたのも、多岐にわたる先生のご指導があつてのことと存じます。ここに、深く謝意を申し上げます。

東京大学大学院工学系研究科元教授 桑村仁先生、同 教授 泉聡志先生、同 准教授 長山智則先生、東京大学生産技術研究所教授 川口健一先生には、著者の論文の副査をお引き受け頂くことになりました。ここに、厚く御礼申し上げます。

著者が所属した鋼構造研究室の東京大学大学院工学系研究科元教授 桑村仁先生、助教 小山毅先生には、研究室会議の場をはじめ、日頃から研究についての知識や示唆を頂きました。元秘書の三嶋佳代子さんや学生の皆様にも、日常の研究生活の中でお世話になりました。ここに、感謝の意を表します。

著者の勤務先である佐藤淳構造設計事務所代表 佐藤淳氏には、博士課程に進学し、設計業務と並行して研究を行うことに理解を示して頂き、業務の調整をはじめとして多大なご協力を頂きました。事務所スタッフの皆様も含め、感謝致します。

最後になりましたが、研究や設計を続ける上で、これまでの生活を支えてくれた家族にも感謝を述べたいと思います。ありがとうございました。

2018 年夏



## 記号リスト

$A$	: 梁の断面積
$a$	: 梁の初期たわみの最大たわみ量
$a^*$	: 梁の一次モード方向への初期たわみの最大たわみ量。 $a^* = a \times \langle \mathbf{v}_{\text{shape}}, \mathbf{e}_1 \rangle / \ \mathbf{v}_{\text{shape}}\  \ \mathbf{e}_1\ $
$b$	: 梁幅
$d$	: 力学モデルのレール上のローラの初期位置と載荷位置の水平距離
$\mathbf{d}$	: 梁の変形ベクトル
$d_j$	: $\mathbf{d}$ の第 $j$ 成分 (梁端回転角に対応する成分)
$E$	: シェル要素のヤング係数
$E_{ep}$	: 片面のみが塑性化したシェル要素のヤング係数
$E_{pp}$	: 両面が塑性化したシェル要素のヤング係数
$E_p$	: 材料の応力歪関係における二次剛性
$E_0$	: 材料の応力歪関係における初期剛性
$e$	: 力学モデルのレール上でのローラの移動距離
$e_{cr}$	: 力学モデルのレール上でのローラの移動距離の閾値
$\mathbf{e}_n$	: 梁の弾性 $n$ 次座屈モードベクトル
$e_{nj}$	: $\mathbf{e}_n$ の第 $j$ 成分 (梁端回転角に対応する成分)
$\mathbf{e}_1$	: 梁の弾性一次座屈モードベクトル
$e_{1j}$	: $\mathbf{e}_1$ の第 $j$ 成分 (梁端回転角に対応する成分)
$\mathbf{e}_2$	: 梁の弾性二次座屈モードベクトル
$f$	: 梁の強軸まわりの形状係数。 $f = Z_{px}/Z_x$
$H$	: 力学モデルの並進ばねの高さ
$h$	: 梁せい
$I_x$	: 梁の強軸まわり断面二次モーメント
$I_y$	: 梁の弱軸まわり断面二次モーメント
$I_w$	: 梁の反りねじり定数
$J$	: 梁のサン・ブナンねじり定数
$k_1$	: 力学モデルの並進ばねの剛性
$l_b$	: 梁スパン
$M$	: 梁に作用する強軸まわりの梁端モーメント
$M'$	: 幾何学的非線形性による剛性低下がないと仮定した場合の $M$ 。 $M' = \sum \Delta M'_k$
$M_s$	: 力学モデルの回転ばねに作用する曲げモーメント
$M_{bt}$	: 梁の分岐モーメント
$M_{cr}$	: 力学モデルの回転ばねの降伏耐力
$M_e$	: 梁の弾性横座屈モーメント
$M_k$	: 荷重増分解析の第 $k$ ステップにおける $M$
$M_l$	: 梁の横座屈モーメント
$M'_l$	: 座屈モード方向への変形を考慮して低減した梁の横座屈モーメント。 $M'_l = M_l \times M/M'$
$M_{\max}$	: 梁の最大曲げ耐力
$M_p$	: 梁の全塑性モーメント。 $M_p = \sigma_y \times Z_{px}$
$M_y$	: 梁の降伏モーメント。 $M_y = \sigma_y \times Z_x$

$M'_y$	: 残留応力を考慮して低減した $M_y$ 。 $M'_y = (\sigma_y - \sigma_r)Z_x$
$P$	: 力学モデルの並進ばねに加える引張力
$P'$	: 等価モデルの並進ばねに加える引張力
$P_{cr}$	: 力学モデルで $M = M_{cr}$ となるときの $P$
$P'_{cr}$	: 力学モデルで回転ばねの回転による変形を考慮して低減した $P_{cr}$
$r_{dj}$	: $\mathbf{d}$ の大きさに占める $d_j$ の割合。 $r_{dj} = d_j / \ \mathbf{d}\ $
$r_{ej}$	: $\mathbf{e}_1$ の大きさに占める $e_{1j}$ の割合。 $r_{ej} = e_{1j} / \ \mathbf{e}_1\ $
$r_j$	: $r_{ej}$ と $r_{dj}$ の比。 $r_j = r_{ej} / r_{dj}$
$s_n$	: 面外方向ベクトルに $\mathbf{e}_n$ を用いた場合の $s_1$
$s_{nk}$	: 荷重増分解析の第 $k$ ステップにおける $s_n$
$s_1$	: 梁端回転角に占める面内変形成分の割合。 $s_1 = \delta_{1j} / d_j$
$s_{1bt}$	: $M = M_{bt}$ となる時点での $s_1$
$t$	: フランジ厚
$\mathbf{v}_{init}$	: 初期たわみを表すベクトル。 $\mathbf{v}_{init} = a \times \mathbf{v}_{shape}$
$\mathbf{v}_s$	: 正弦半波形状を表すベクトル
$\mathbf{v}_{shape}$	: 初期たわみの形状を表すベクトル
$w$	: ウェブ厚
$Z_{px}$	: 梁の強軸まわり塑性断面係数
$Z_{py}$	: 梁の弱軸まわり塑性断面係数
$Z_x$	: 梁の強軸まわり断面係数
$Z_y$	: 梁の弱軸まわり断面係数
$\Delta M_k$	: 荷重増分解析の第 $k$ ステップにおける $M$ の増分
$\Delta M'_k$	: 幾何学的非線形性による剛性低下がないと仮定した場合の $\Delta M_k$ 。 $\Delta M'_k = (M_k / \delta_k) \times \Delta \theta_k$
$\Delta \theta_k$	: 荷重増分解析の第 $k$ ステップにおける $\theta$ の増分
$\delta$	: 力学モデルの並進ばねの伸び
$\delta'$	: 等価モデルの並進ばねの伸び
$\delta_1$	: $\mathbf{d}$ から $\mathbf{e}_1$ の成分 (面外方向成分) を取り除いたベクトル (面内変形ベクトル)
$\delta_k$	: 荷重増分解析の第 $k$ ステップにおける $\delta_{1j}$
$\delta_{1j}$	: $\delta_1$ の第 $j$ 成分 (梁端回転角に対応する成分)
$\theta$	: 梁の強軸まわり梁端回転角
$\theta_{bt}$	: $M = M_{bt}$ となる時点での $\theta$
$\theta_e$	: $M = M_e$ となるときの $\theta$
$\theta_k$	: 荷重増分解析の第 $k$ ステップにおける $\theta$
$\theta_p$	: $M = M_p$ となるときの $\theta$
$\theta_s$	: 力学モデルの回転ばねの回転角
$\lambda_b$	: 梁の横座屈細長比。 $\lambda_b = \sqrt{M_p / M_e}$
$\sigma_y$	: 降伏応力度
$\sigma_r$	: 残留応力の大きさ
$\sigma_{rc}$	: 圧縮側の残留応力の大きさ
$\sigma_{rt}$	: 引張側の残留応力の大きさ
$\phi$	: $\mathbf{d}$ と $\mathbf{e}_1$ のなす角度
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: ベクトルの内積
$\ \cdot\ $	: ベクトルの大きさ







# 1 序論

## 1.1 研究の背景

### 複雑な構造物の理解

近年、H 形断面梁の上フランジにシアコネクタを介して接合されたコンクリートスラブによる梁の横座屈補剛効果について、盛んに研究が行われている<sup>1)2)3)4)</sup>など。これらの研究の成果は設計指針にも取り入れられ、コンクリートスラブが取り付けられた梁の最大耐力や塑性変形能力の設計式が提案されているが<sup>5)</sup>、最大耐力や塑性変形能力が向上する力学的機構については不明な点が多い。スラブ付梁に関する有限要素解析による検討も行われているが<sup>6)7)8)</sup>、コンクリートスラブやシアコネクタなどの複雑な条件を詳細に設定することで、高い精度で実験結果を再現するような解析が行えたとしても、その解析結果から最大耐力や塑性変形能力が向上する力学的機構を把握することは必ずしも容易ではない。

スラブ付梁という工法自体は近年になって普及したものではないため、このような研究が行われるようになったことは、工法の変化というよりも、実験技術や解析技術が発達し、計算資源も潤沢になったことで、構造物についての詳細かつ高精度な情報が得られるようになったことを反映していると考えられる。一方で、現状において、スラブによって梁の最大耐力や塑性変形能力が向上する力学的機構の把握に至っていないことは、構造物についての詳細かつ高精度な情報を得るだけでは、それを理解したことにはならないことを示している。

構造物の挙動についての理解を深めるためには、より多くの情報が得られるようになるのと並行して、得られた膨大な量の情報を抽象し、単純化する方法を発達させる必要があると考えられる。そのためには、構造物が最大耐力を発揮する過程がどのように捉えられてきたかに立ち戻ることも有用である。

### 構造物の最大耐力評価

鋼材を用いた構造物の耐力に関する研究は、大きく二つに分けることができると考えられる。

ひとつは、Musschenbroek の実験 (1729 年) や Euler の弾性曲線の解析 (1744 年) にはじまったとされる<sup>9)</sup> 弾性座屈に関する研究であり、Lagrange、Laplace、Legendre、T.Young らによって、18 世紀後半から 19 世紀初頭にかけて精緻化されていった<sup>9)</sup>。その後、Bryan(1888 年)、Timoshenko<sup>10)</sup>、Ritz(1909 年) らによるエネルギー原理に基づく解法や、Schwarz(1885 年)、Engesser(1893 年)、Vianello(1898 年) らによる逐次近似解法が誕生し、弾性座屈の問題は構造物のつり合いの安定問題として整理されてきた<sup>11)</sup>。

もうひとつは、Tresca(1864 年) や Saint-Venant(1870 年) にはじまったとされる<sup>9)12)</sup> 金属の塑性に関する研究である。同じ 19 世紀後半には、Bessemer による転炉法 (1855 年) や Siemens と Martin による平炉法 (1864 年) が発明され<sup>11)</sup>、鋼材を構造物の材料として広く用いることが可能になるとともに、Kirkaldy や Bauschinger らによって降伏後も含めた鋼材の性質に関する研究が盛んに行われたことも<sup>9)</sup>、Prandtl や Nadai らによる塑性理論の発展を促したと考えられる。Tresca<sup>13)</sup> や von Mises<sup>14)</sup> が提案した降伏条件は現在でも広く用いられており、塑性を利用した設計法は、機械、航空、船舶などの他の分野ではみられない、建築特有の耐力評価方法となっている。

弾性座屈理論は、細長い材の耐力にはよく合致したものの、短い材の耐力を過大評価することは T.Young によっても指摘されており、実用的には Tredgold(1822 年) や Hodgkinson(1840 年) による実験値が用いられた<sup>9)</sup>。弾性座屈理論の適用限界は Lamarle(1845 年) によって理論的に指摘され<sup>9)</sup>、Bauschinger による実験 (1887 年)、Tetmajer による直線式や Johnson による放物線式といった実験式の提案、Jasinsky、Engessar、von Kármán、Shanley<sup>15)</sup> らによる Tangent modulus theory(1889 年) や Double modulus theory(1895 年、1908 年) の確立<sup>9)11)</sup> などを経て、塑性理論の誕生と並行して、両者の境界である非弾性座屈の耐力評価方法が理論化されていった。

Tangent modulus theory や Double modulus theory は、塑性化の影響をヤング係数の低下として捉えるものであり、ヤング係数の分布が一様でない場合への弾性座屈理論の拡張であるとみなすことができる。このことは、Shanley の論文<sup>15)</sup> に対する Discussion において、Double modulus theory を確立した von Kármán 自身も述べており、同じ箇所でも von Kármán が指摘するように、Shanley の論文の要点は、非弾性座屈耐力を求めることの難しさが、塑性化による応力歪関係

の非線形性 (材料非線形性) ではなく、不可逆性にあることを示したことであった。しかし、同論文で、Shanley は Tangent modulus theory を用いるべきと結論付け、von Kármán は Tangent modulus theory を下限、Double modulus theory を上限とできるだろうと述べているように、ヤング係数が増加する過程を詳細に追って不可逆性を考慮することは実用的には重視されず、耐力に関する二つの研究は、「塑性の影響を材料非線形性として捉えることで弾性座屈理論に統合する」というかたちで接続されてきたと言える。

座屈耐力を低下させる要因としては、塑性化の他に、荷重の偏心や初期たわみなどの幾何学的なものがあり、初期たわみを有する柱の Euler 座屈耐力の理論解は、T.Young、Ostenfeld、von Kármán らが導出している<sup>11)</sup>。初期たわみのばらつきが座屈応力度に与える影響について統計的な観点から整理することで、幾何学的な要因による耐力低下を定量的に評価する研究は行われており<sup>16)17)18)</sup>、その中には Euler 座屈以外に H 形断面梁の横座屈耐力に関するものも含まれているが、いずれも統計的傾向の整理にとどまっている。

塑性化の影響を材料非線形性として捉えた場合と同様に、耐力低下の幾何学的な要因を幾何学的非線形性として捉えることで弾性座屈理論に統合することができると考えられるが、Tangent modulus theory や Double modulus theory のように、Euler 座屈以外の座屈現象にも適用できるような一般的な方法は確立されておらず、二つの非線形性による最大耐力の低下を統一的に評価する方法を得るためには、一般の座屈現象に対して、幾何学的非線形性の影響を定量的に評価する方法が確立される必要がある。

本研究では、H 形断面梁の横座屈現象を題材として、幾何学的非線形性の影響を定量化する手法を提案し、材料非線形性ととも考慮することで、材料非線形性と幾何学的非線形性の両方を考慮した Tangent modulus load によって梁の最大曲げ耐力を評価することを試みる。

## 1.2 既往の研究

### 横座屈と材料非線形性

横座屈は 1800 年代には認識されていたとされるが<sup>19)</sup>、本格的に研究が発展するのは 19 世紀終盤以降であり、Burr と Elmore による実験 (1884 年)、Mitchell (1899 年) や Prandtl (1899 年) による理論的研究がその先駆けとなって、Timoshenko、Wagner、Goodier らによって弾性座屈理論が体系化されており<sup>9)19)</sup>、非弾性横座屈についての研究は、軸圧縮を受ける棒の非弾性座屈に関する Shanley の論文<sup>15)</sup>に続くようにして、1950 年代以降に発展した<sup>19)</sup>。

White は学位論文<sup>20)</sup>の中で、梁の横座屈問題を扱う座屈解析に対して非弾性挙動を盛り込んだ研究として、Bleich<sup>21)</sup>、Neal<sup>22)</sup>、Wittrick<sup>23)</sup>、Horne<sup>24)</sup>の研究を取り上げている。いずれも Tangent modulus theory または Double modulus theory に基づいているが、歪硬化域におけるせん断弾性係数  $G_{sh}$  の値の取り方については、ヤング係数と同じ比率で低減するもの<sup>21)</sup>と弾性時と同じ値を用いるもの<sup>22)24)</sup>がある。White 自身の研究は Tangent modulus theory に基づいており、 $G_{sh}$  については、塑性化開始時には弾性時の値に近いもののせん断歪の増加とともに急激に低下するという Haaijer の指摘<sup>25)</sup>を踏まえて、弾性時の値の  $1/4.6$  の値を用いている ( $G = 11500\text{ksi}$  に対し、 $G_{sh} = 2500\text{ksi}$ )。

座屈解析によって非弾性座屈耐力を求めるにあたり最も重要になるのがヤング係数の分布、すなわち塑性化領域の分布である。塑性化領域の分布を変化させる要因の一つである残留応力について、Galambos<sup>26)</sup>は、直線分布の残留応力を仮定して塑性化領域を求め、Tangent modulus theory に基づいてヤング係数を低下させることで、梁の非弾性横座屈耐力に対する影響を明らかにした。この研究では、歪硬化域におけるせん断弾性係数は  $G_{sh} = 2400\text{ksi}$  としており、White<sup>20)</sup>の用いたものとはほぼ同じ値となっている。

塑性化領域の分布は、残留応力以外に曲げモーメントの分布にも応じて様々に異なるため、種々の残留応力や曲げモーメント分布の組み合わせについて、Tangent modulus theory や Double modulus theory に基づいた研究が行われてきている<sup>27)28)29)</sup>など。

### 横座屈と幾何学的非線形性

座屈耐力に対する幾何学的な初期不整の影響を考慮する方法としては、Perry-Robertson 式<sup>30)31)</sup>

$$(\sigma_E - \sigma)(\sigma_y - \sigma) = \eta \sigma_E \sigma \quad (1-1)$$

を用いる方法が挙げられる。ここで、 $\sigma_E$  は Euler 座屈応力度、 $\sigma_y$  は降伏応力度、 $\sigma$  は座屈応力度、 $\eta$  は面外変形量を表す無次元量である。

Perry-Robertson 式は、正弦半波形状の初期たわみを有する材を中心圧縮したときの直応力度の分布を求め、圧縮側の最大応力度が降伏応力度に達するときの荷重を座屈耐力とみなすことで得られる。軸圧縮される場合と強軸まわり曲げモーメントを受ける場合では、初期たわみによる応力度分布や変形形状の変化の仕方が異なるが、 $\sigma_y$  を  $M_p\sigma_y/M_y$  に置き換えたり ( $M_y$  は降伏モーメント、 $M_p$  は全塑性モーメント)、 $\eta$  に用いる関数を変化させたりすることで、横座屈についても同様の式を適用できることが示されている<sup>32)33)</sup>。

初期たわみを有する材が載荷される際には、応力度分布が変化する一方で変形量も増加するため、材料が塑性化しない場合でも荷重変形関係には非線形性が生じるが、Perry-Robertson 式は幾何学的な初期不整の影響を応力度の偏分布として捉えることで材料非線形性の問題に置き換える方法であるため、変形の増加による非線形性 (幾何学的非線形性) を定量化するものではない。

幾何学的な初期不整が耐力に与える影響について、確率論的な方法を用いて検討を行ったものに、藤本ら<sup>16)34)</sup>、坂本ら<sup>35)17)</sup>、井戸田ら<sup>18)</sup> による研究があるが、いずれの研究においても初期たわみを有する材の最大耐力を座屈耐力とみなしており、幾何学的非線形性を定量化しているわけではない点では同様である。

### 1.3 本研究の目的

本研究では、幾何学的非線形性の影響による座屈耐力の低下を定量的に評価する方法として、座屈モード方向への変形量を用いることを提案し、材料非線形性と幾何学的非線形性の二つの非線形性による剛性低下に着目した最大耐力評価法を確立することを目的とする。

座屈モードは構造物の変形や塑性化に伴い時々刻々と変化するため、逐次的に線形座屈固有値解析を行うことで、座屈モードの変化についても考慮する (これを逐次座屈固有値解析法と称する)。逐次座屈固有値解析法では、塑性化によるヤング係数の低下も反映するため、材料非線形性の影響も同時に捉えることができる。Tangent modulus theory や Double modulus theory は、材料非線形性を線形化する手法であったが、本手法は材料非線形性と幾何学的非線形性の二つの非線形性を線形化する手法であり、材料非線形性と幾何学的非線形性の両方を考慮した Tangent modulus load を求めることで最大耐力を評価する方法であると言える。

本稿では、強軸まわりの曲げモーメントを受ける H 形断面梁の最大曲げ耐力について、同手法の適用性を確認する。H 形断面梁に加えられる曲げモーメント分布に応じて、弾性座屈モーメント、座屈モード形状、塑性化の進展状況のすべてが変化するため、各指針<sup>19)36)</sup> において、横座屈耐力には曲げモーメント分布の影響が考慮されているが、材料非線形性と幾何学的非線形性の影響の区別は不明である。提案手法を用いることで、曲げモーメント分布に加え、材料的な初期不整である残留応力や幾何学的な初期不整である初期たわみなどが最大曲げ耐力の低下に与える影響を、材料非線形性と幾何学的非線形性に区別したかたちで明確に捉えることができると考えられる。

## 1.4 本論文の構成

### 第2章: 逐次座屈固有値解析法

第2章では、逐次座屈固有値解析法の概要について説明する。逐次座屈固有値解析法では、荷重増分解析と座屈固有値解析を併用することで、剛性低下に着目した最大耐力の評価を行う。座屈固有値解析と荷重増分解析のいずれか一方のみを用いる場合と比較したとき、材料非線形性と幾何学的非線形性の影響を分離して考慮できるところに利点がある。

また、材料非線形性と幾何学的非線形性を微視的不安定性と巨視的不安定性として捉えることで、分岐モーメントに対する非線形性の影響を図示する方法として巨視的不安定曲面を提案する。

### 第3章: 材料非線形性を考慮した最大曲げ耐力評価

第3章では、材料非線形性による剛性低下の影響を定量的に評価する方法を述べ、初期たわみを有しないモデルのみを対象として、材料非線形性による剛性低下の影響について検討する。曲げモーメント分布、材料特性、残留応力の有無をパラメタとして、塑性化進展状況の変化を確認することで、各パラメタが剛性低下に与える影響について考察する。

### 第4章: 幾何学的非線形性を考慮した最大曲げ耐力評価

第4章では、幾何学的非線形性による剛性低下の影響を定量的に評価する方法を述べ、材料特性を弾性モデルとしたモデルのみを対象として、幾何学的非線形性による剛性低下の影響について検討する。曲げモーメント分布、初期たわみ形状、初期たわみ量をパラメタとして、面外変形進展状況の変化を確認することで、各パラメタが剛性低下に与える影響について考察する。初期たわみ形状と座屈モード形状の関係によって面外変形が進行する方向が決まり、初期たわみ量に応じて面外変形量が変化することを示す。

### 第5章: 材料非線形性と幾何学的非線形性の連成を考慮した最大曲げ耐力評価

第5章では、材料非線形性と幾何学的非線形性の両方を有するモデルの検討を行う。両方の非線形性による剛性低下が同時に生じる場合には、塑性化と面外変形が相互に影響しあうことで剛性低下状況が変化する。第3章と第4章の検討および相互作用の影響を考慮し、二つの非線形性の影響が同時に存在する場合の梁の最大曲げ耐力について考察する。

### 第6章: 結論

第6章では、各章の内容を整理し、逐次座屈固有値解析法の適用性についてまとめる。

## 2 逐次座屈固有値解析法

### 2.1 序

構造物の最大耐力を知ることは建築物の安全性に大きく関わるため、最大耐力を求めるための方法について多くの研究が行われてきた。

近年では、コンピュータを用いた解析方法が発達した結果、実際の構造物が有する複雑な形状や境界条件を詳細にモデル化して解析することで、実験で得られる挙動を高い精度で再現することも可能になってきている。

その一方で、解析モデルが複雑になるほど解析結果として得られる挙動も複雑になり、初期条件とした与えた各パラメータと最大耐力や変形能力を比較しただけでは、そのパラメータがどのような力学的機構で最大耐力や塑性変形能力を変化させるのかを捉えることは困難である。スラブ付梁を例に挙げると、コンクリートスラブがH形断面梁の上フランジに取り付くことで耐力や塑性変形能力が向上することは、実験と解析の両面で検討が行われ、設計指針<sup>5)</sup>にも記載されるようになったが、スラブが梁の耐力や塑性変形能力を向上させる力学的機構については不明な点が多い。

本研究では、構造物が最大耐力をむかえるまでに生じる荷重変形関係の剛性低下に着目し、各パラメータが最大耐力に与える影響を、材料非線形性と幾何学的非線形性による剛性低下状況の変化を介して捉えることを検討する。そのための方法として、荷重増分解析の各段階において生じる剛性の変化を、線形座屈固有値解析を用いて定量化する方法(逐次座屈固有値解析法)を提案する。

### 2.2 既往の解析方法との比較

構造物の最大耐力を求める方法は、座屈固有値解析を用いるものと荷重増分解析を用いるものに大別することができる。White はそれぞれの方法の利点と欠点について、次のようにまとめている<sup>20)</sup>。

- 座屈固有値解析の利点
  1. シンプルで統一的な解法で、すべての座屈問題に拡張できる
  2. 残留応力の影響を考慮できる
  3. Tangent modulus theory に基づくことで非弾性座屈に適用できる
- 座屈固有値解析の欠点
  1. 釣合経路の分岐点を予測するだけで、最大耐力点に対応するとは限らない
  2. 部材や荷重の偏心を考慮できず、釣合経路の分岐が生じる場合だけにしか適用できない
- 荷重増分解析の利点
  1. 偏心の影響がある場合の挙動を合理的に説明できる
  2. 弾性挙動だけを考慮する場合、設計を強度基準として簡略化できる
  3. 非弾性挙動を考慮する場合、最大耐力を予測するための基準をつくることができる
- 荷重増分解析の欠点
  1. シンプルな場合以外には適用が困難である
  2. 意図的でない偏心の大きさは不明である
  3. 非弾性の場合への拡張が極めて困難なため、一般の場合については、最大耐力ではなく塑性化が開始する荷重しか予測できない

その後、コンピュータを用いることで複雑な条件を考慮した荷重増分解析を行うことが可能になったため、荷重増分解析の欠点の1と3はかなり解消しているが、その他の欠点については、座屈固有値解析と荷重増分解析のいずれについても、現在でも同じことが言える。

載荷方法、材料特性、残留応力、初期たわみなどの条件を詳細に設定した荷重増分解析を行えるようになったことで、複雑

な条件に応じた最大耐力を高い精度で求めることができるようになった。しかし、座屈固有値解析によって得られる耐力が釣合経路の分岐点における荷重という意味合いをもつものに対し、荷重増分解析によって得られる最大耐力にはそのような意味合いがないため、詳細な条件を設定できるにも関わらず、各条件が最大耐力に対して与える影響を把握することは困難である。近年では、コンクリートスラブが取り付けなどのより複雑な場合についても検討が行われているが、条件が複雑になればなるほど、初期条件と最大耐力を直接比較するだけでは、初期条件が最大耐力に与える影響を捉えることは難しくなっていくと考えられる。

初期条件が最大耐力に与える影響を捉えるためには、最大耐力に達するまでに生じる荷重変形関係の剛性低下に着目することで、初期条件によって剛性低下状況が変化した結果として最大耐力が変化するという過程を追跡することが有効であると考えられる。荷重増分解析のみによっても、接線剛性の変化を追うことで、剛性低下の総量を知ることができるが、材料非線形性による剛性低下と幾何学的非線形性による剛性低下を区別することは難しい。

逐次座屈固有値解析法では、荷重増分解析と座屈固有値解析を併用することで、荷重増分解析によって得られる荷重変形関係の剛性低下状況を、材料非線形性と幾何学的非線形性に区別して可視化することができ、初期条件が最大耐力に与える影響をより詳細に捉えることができるという点で、座屈固有値解析や荷重増分解析のみを用いる方法に比べて利点があると言える。

## 2.3 解析方法の概要

**逐次座屈固有値解析法**は、漸次的に生じる構造体の剛性変化を、線形座屈固有値解析を用いて逐次定量化することで、構造体の最大耐力を評価するための方法である。本手法では、剛性低下の要因を材料非線形性と幾何学的非線形性の二つの非線形性に区別し、線形座屈固有値解析を用いてそれぞれの非線形性による影響を定量化する。

### 2.3.1 力学モデル

具体的な手順等については、第3章～第5章で強軸まわりの曲げモーメントを受けるH形断面梁に対して本手法を適用する際に述べることにし、本節ではFig.2-1に示す力学モデルを用いて逐次座屈固有値解析法の概要について述べる。

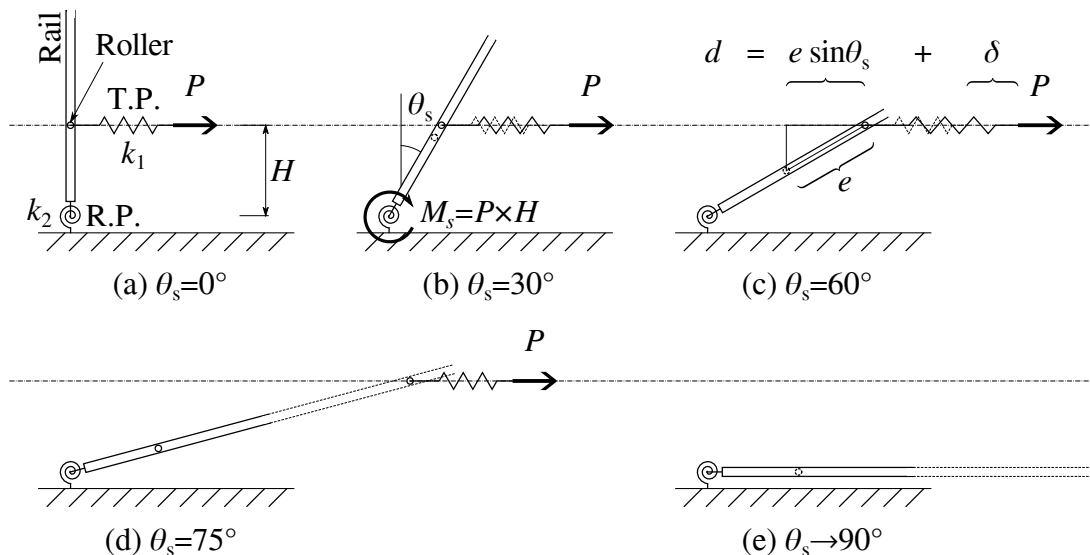


Fig. 2-1 Dynamic model

力学モデルは



- 並進ばね (T.S.)
- 回転ばね (R.S.)
- ローラ (Roller)
- レール (Rail)

の4つの要素から構成され、その挙動は次の各条件に従うものとする。

1. ローラは並進ばねと接続されており、レール上を摩擦なしに無限に移動できる
2. レールは回転ばねと接続されており、外力が作用しない状態では鉛直上向き ( $\theta_s = 0$ ) である
3. 並進ばねは弾性体または弾塑性体とする
4. 回転ばねは完全剛塑性体または完全弾塑性体とする
5. 並進ばねが弾塑性体の場合、並進ばねの剛性低下に合わせて回転ばねの降伏耐力も低下する
6. 並進ばねを高さ一定で水平としたまま、引張力を加える

図中の記号の意味は以下のとおりとする。

$P$	並進ばねに加える引張力
$H$	並進ばねの高さ
$k_1$	並進ばねの剛性
$\delta$	並進ばねの伸び
$M_s$	回転ばねに作用する曲げモーメント
$M_{cr}$	回転ばねの降伏耐力
$\theta_s$	回転ばねの回転角
$e$	レール上でのローラの移動距離
$d$	レール上のローラの初期位置と載荷位置の水平距離

後述するように、力学モデルは、

- 並進ばねの伸び = 初期変形様式<sup>37)</sup>(直接変形様式<sup>38)</sup>) での変形
- レール上でのローラの移動 = 座屈変形様式<sup>37)38)</sup> での変形
- 回転ばねの降伏耐力 = 座屈耐力

というかたちで座屈現象を抽象的に表したものになっている。以下では、並進ばねと回転ばねの特性に応じて力学モデルの挙動が変化することを確認していく。

#### 例 1. 並進ばねが弾性体、回転ばねが完全剛塑性体の場合: 弾性座屈

最初に、並進ばねの特性が弾性体で、回転ばねの特性が Fig.2-2(a) のような完全剛塑性体である場合を考える。

このとき、回転ばねに作用する曲げモーメント  $M_s = PH$  が回転ばねの降伏耐力  $M_{cr}$  を超えるまではレールは鉛直 ( $\theta_s = 0^\circ$ ) のままである。変位  $d$  は並進ばねの伸び  $\delta$  と一致し、系全体の剛性  $P/d$  は並進ばねの剛性  $k_1$  と一致する。

$M_s$  が  $M_{cr}$  に達すると、レールが水平 ( $\theta_s = 90^\circ$ ) になるように倒れながら、ローラがレール上を無限に移動するため、 $P = P_{cr} = M_{cr}/H$  で  $e \rightarrow \infty$ 、 $d \rightarrow \infty$  となる。荷重  $P$  と変位  $d$  の関係を荷重変形曲線として図示すると Fig.2-2(b) のようになる。図中には  $M_{cr}$  の値を破線で示している。

この例では、 $P = P_{cr}$  に達するまで系全体の剛性低下は生じず、 $P = P_{cr}$  になった途端にローラがレール上を移動することによって剛性が 0 になっている。

#### 例 2. 並進ばねが弾塑性体、回転ばねが完全剛塑性体の場合: 材料非線形性の表現

次に、例 1 において並進ばねが弾塑性体となった場合について考える。

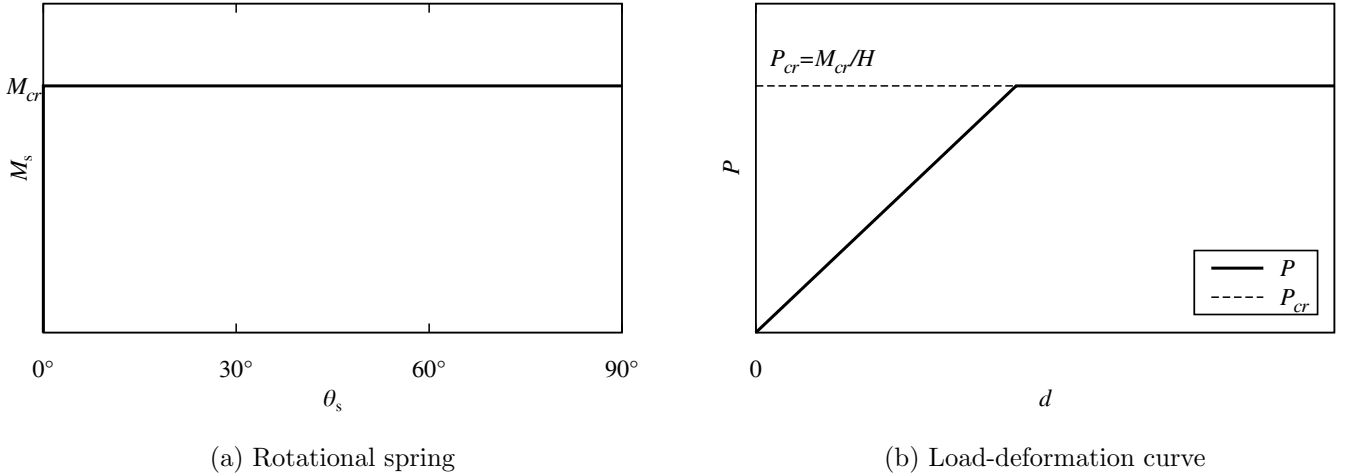


Fig. 2-2 T.S.: Elastic, R.S.:Rigid-plastic

Fig.2-3(a) のように、並進ばねの剛性  $k_1$  が  $P \geq P_y$  の範囲において低下すると仮定する。回転ばねは例 1 と同様の完全剛塑性体とするが、上述したように、並進ばねの剛性が低下すると同時に、回転ばねの降伏耐力  $M_{cr}$  も低下するようにモデル化する。

この場合、変位  $d$  が並進ばねの伸び  $\delta$  と一致する点は変わらないものの、並進ばねの剛性  $k_1 = P/\delta$  自体が低下する影響により、系全体の剛性  $P/d = P/\delta$  も  $k_1$  と同じように低下する。

$P = P_{cr}$  になった時点で初めてレールに傾きが生じ、ローラがレール上を移動することで  $d \rightarrow \infty$  となる点も例 1 と同様であるが、剛性  $k_1$  の低下に合わせて  $M_{cr}$  も低下しているため、例 1 の場合よりも低い荷重で  $P = P_{cr}$  をむかえる。以上の挙動を荷重変形曲線として図示すると、Fig.2-3(b) のようになる。

この例では、系全体の剛性低下が並進ばねの剛性低下によって生じた後、 $P = P_{cr}$  でローラがレール上を移動することで剛性が 0 まで低下している。

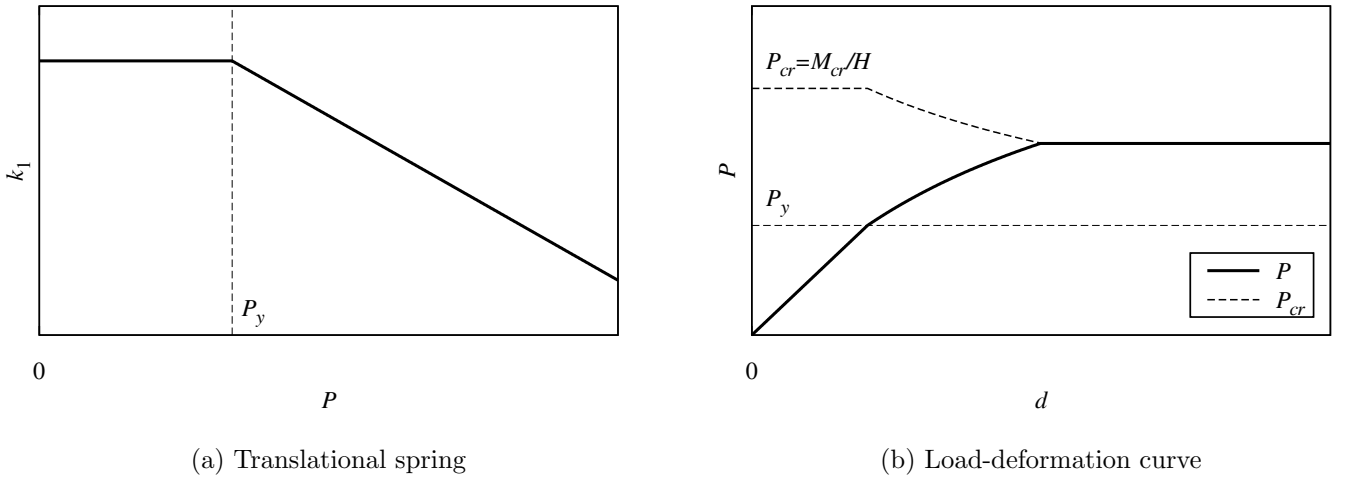


Fig. 2-3 T.S.: Elastic-plastic, R.S.:Rigid-plastic

### 例 3. 並進ばねが弾性体、回転ばねが完全弾塑性体の場合：幾何学的非線形性の表現

今度は、回転ばねの特性が Fig.2-4(a) のような完全弾塑性体である場合を考える。並進ばねの特性は例 1 と同じく弾性体とする。

この場合、回転ばねに作用する曲げモーメント  $M_s$  が増加するにつれてレールの傾き  $\theta_s$  が増加するため、並進ばねの伸び  $\delta$  とレール上でのローラの移動距離の水平成分  $e \sin \theta_s$  の和が変位  $d$  となる。

$$d = \delta + e \sin \theta_s \quad (2-1)$$

$\delta = P/k_1$ 、 $e = H/\cos \theta_s - H$ 、 $\theta_s = PH/k_2$  を考慮すると、系全体の剛性  $P/d$  は、

$$P/d = \frac{1}{1/k_1 + H(\tan(PH/k_2) - \sin(PH/k_2))/P} \quad (2-2)$$

となる。これは、剛性  $k_1$  と  $P/H(\tan(PH/k_2) - \sin(PH/k_2))$  の並進ばねを直列につないだ状態に相当し、荷重  $P$  が増加するにつれて  $\theta_s$  が  $0^\circ$  から  $90^\circ$  まで増加すると、剛性  $P/d$  は  $k_1$  から 0 まで低下する。

$P$  が  $P_{cr}$  に近付くと  $d \rightarrow \infty$  となるのは回転ばねが完全剛塑性体の場合と同様であるが、 $P$  が増加するにつれて剛性  $P/d$  が低下するため、 $P$  は  $P_{cr}$  に漸近するものの、 $P_{cr}$  には達しない。荷重変形曲線として図示すると Fig.2-4(b) のようになる。

この例では、系全体の剛性低下はローラがレール上を徐々に移動することによって生じている。

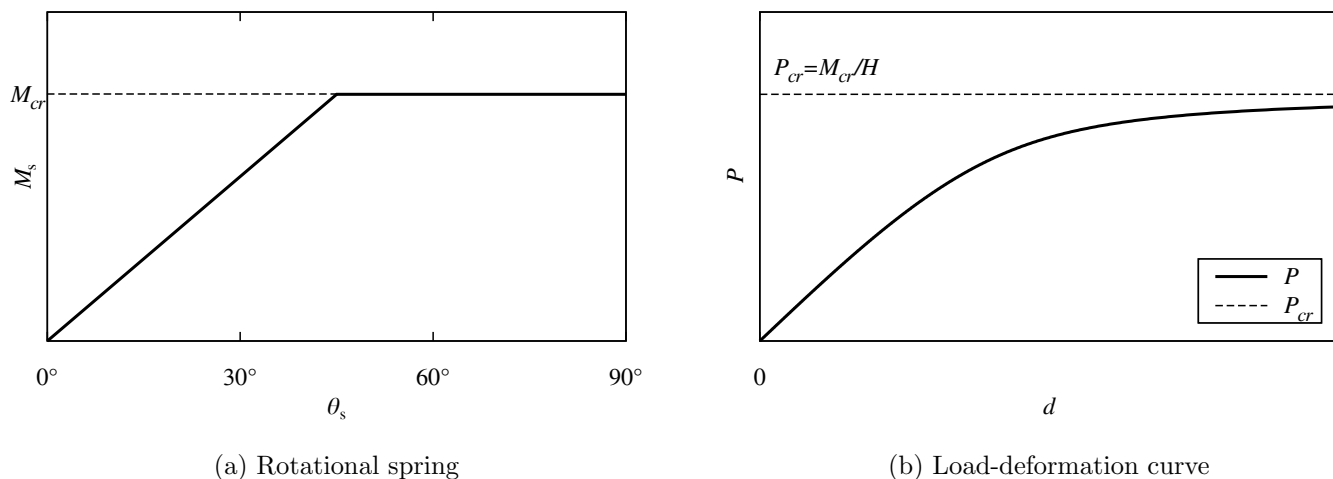


Fig. 2-4 T.S.: Elastic, R.S.:Elastic-plastic

### 2.3.2 力学モデルの剛性低下

例3でみたように、力学モデルの変位  $d$  は、

- 並進ばねの伸びによる成分  $\delta$
- レール上でのローラの移動による成分  $e \sin \theta_s$

の二つの成分に分けることができ、1は並進ばねの特性によって、2は回転ばねの特性によって決まる。1と2の両方が力学モデル全体の剛性に関わるため、1と2のいずれの成分によって剛性低下が生じるかによって、力学モデルの剛性低下の要因は二種類に分けることができる。

1が増加することによる剛性低下は、並進ばねの塑性化による剛性低下を直接反映したものであり、材料非線形性に相当する。一方、2が増加することによる剛性低下は、レール上でのローラの移動によって生じる見かけの剛性低下であり、幾何学的非線形性に相当する。

力学モデルは、並進ばねの挙動と回転ばねを介したレール上でのローラの挙動を組み合わせることによって、材料非線形性と幾何学的非線形性という二つの非線形性による剛性低下を表現したモデルとなっている。

### 2.3.3 力学モデルと座屈現象の対応

材料非線形性と幾何学的非線形性による剛性低下を表現した力学モデルは、座屈現象を抽象したものとなっており、回転ばねの降伏耐力  $M_{cr}$  を座屈耐力、レール上でのローラの移動を座屈モード方向への変形として捉えることができる。

例 1 では、回転ばねが降伏耐力に達するまで並進ばねの塑性化と座屈モード方向への変形の両方による剛性低下が生じず、回転ばねが降伏耐力に達した途端にレールが水平になることで、座屈モード方向への変形が急増し、剛性が 0 まで低下する。これは、弾性座屈が生じる場合に対応する。

例 2 では、回転ばねが降伏耐力に達するまで座屈モード方向への変形が生じず、回転ばねが降伏耐力に達して座屈モード方向への変形が急増することで最大耐力をむかえる点は例 1 と共通しているが、回転ばねが降伏耐力に達する前に並進ばねが塑性化することで、材料非線形性による剛性低下の影響が生じている。並進ばねの剛性が低下するのに合わせて回転ばねの降伏耐力  $M_{cr}$  も低下させているのは、材料非線形性によって系全体の剛性が低下するとともに、座屈耐力が低下することを表現している。これは、非弾性座屈が生じる場合に対応する。回転ばねが降伏耐力に達した後の剛性が正の値を取る場合には、レールが水平になるまでに座屈モード方向への変形が進行しながら荷重  $P$  が増加する。座屈モード方向への変形の進行に伴う回転ばね剛性の低下がないと仮定し、座屈モード方向への変形を無限に増大させたときの極限荷重が Double modulus load であり、座屈モード方向への変形が生じ始めるときの荷重が Tangent modulus load である<sup>15)</sup>。例 2 では回転ばねが降伏耐力に達した後の剛性を 0 と仮定しているため、力学モデルの耐力は Tangent modulus load に相当する。

例 3 では、載荷開始とともにレールが回転し始め、座屈モード方向への変形が徐々に進行することで幾何学的非線形性による剛性低下が生じるため、幾何学的な初期不整を有する部材の挙動に対応する。例 3 のように、幾何学的非線形性による剛性低下のみが生じる力学モデルにおいて剛性が 0 に収束する過程を座屈とみなすか否かは、座屈の定義によって異なる。

力学モデルにおける座屈の定義としては、荷重に着目するか変形に着目するかに応じて、

定義 1 回転ばねに作用する曲げモーメントが  $M_{cr}$  に達する現象

定義 2 レールの傾き  $\theta_s$  が  $\theta_s = 0$  から  $\theta_s > 0$  に切り替わる現象

の二つが考えられる。例 1 や例 2 のように回転ばねが完全剛塑性体の場合には、どちらの定義を採用しても座屈が生じる時点は同じであり、 $M_{cr}$  が有限の値である限り必ず座屈が生じる。それに対し、例 3 のように回転ばねが完全弾塑性体の場合には、定義 1 での座屈は変形が無限大となる極限でしか生じない場合があり、定義 2 での座屈は  $P = 0$  で生じることになる。

非弾性座屈の場合に、座屈モード方向への変形を基準として Tangent modulus load や Double modulus load を位置付けることができたことを踏まえると、材料非線形性と幾何学的非線形性の両方による剛性低下を考慮した最大耐力を評価するにあたっては、定義 2 のように座屈モード方向への変形を基準にするのが望ましいと考えられるが、定義 2 をそのまま採用すると、例 3 のように幾何学的非線形性の影響がある場合には、最大耐力が常に 0 となってしまう。

そこで、次のように定義 2 を拡大した定義 2b によって力学モデルの座屈を定義することを提案する。

定義 2b 回転ばねが完全剛塑性体の系 (等価モデル) で同じ変位  $d$  を生じさせたとき、レールの傾き  $\theta_s$  が  $\theta_s = 0$  から  $\theta_s > 0$  に切り替わる現象

定義 2b を図示すると、Fig.2-5 のようになる。等価モデルは、元のモデルから幾何学的非線形性による剛性低下の影響を取り除いたものであり、等価モデルでの並進ばねの伸び  $\delta'$  は、ローラの移動による変形成分がなくなる分、元のモデルでの並進ばねの伸び  $\delta$  よりも増加し、それに合わせて荷重  $P'$  も元のモデルの荷重  $P$  よりも増加する。

前項の例 3 の等価モデルについて、 $P'$  と  $d$  の関係を荷重変形曲線として図示すると、Fig.2-6(a) のようになる。

例 3 の等価モデルは例 1 のモデルと同じであるため、Fig.2-2(b) と同じように、荷重変形曲線は剛性  $k_1$  の直線となる。等価モデルでの回転ばねの降伏耐力を考慮せずに  $P'$  を求めているため、Fig.2-6(a) では  $P'$  が際限なく上昇しているが、回転ばねの降伏耐力を考慮すれば、例 1 と同様に  $P = P_{cr}$  の時点で  $\theta_s > 0$  となり、座屈が生じると考えられる。

定義 2b を座屈の定義とした場合、等価モデルで  $P' = P_{cr}$  となるときの変位  $d_{cr}$  と同じだけの変位が元のモデルに生じるときの荷重  $P$  を座屈耐力とみなすことになる。この荷重を求めるために、耐力  $P_{cr}$  を  $P'_{cr} = P_{cr} \times P/P'$  で置き換えたグラ

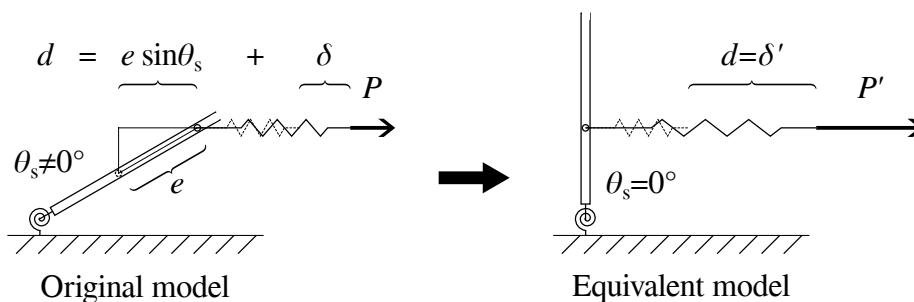


Fig. 2-5 Equivalent model

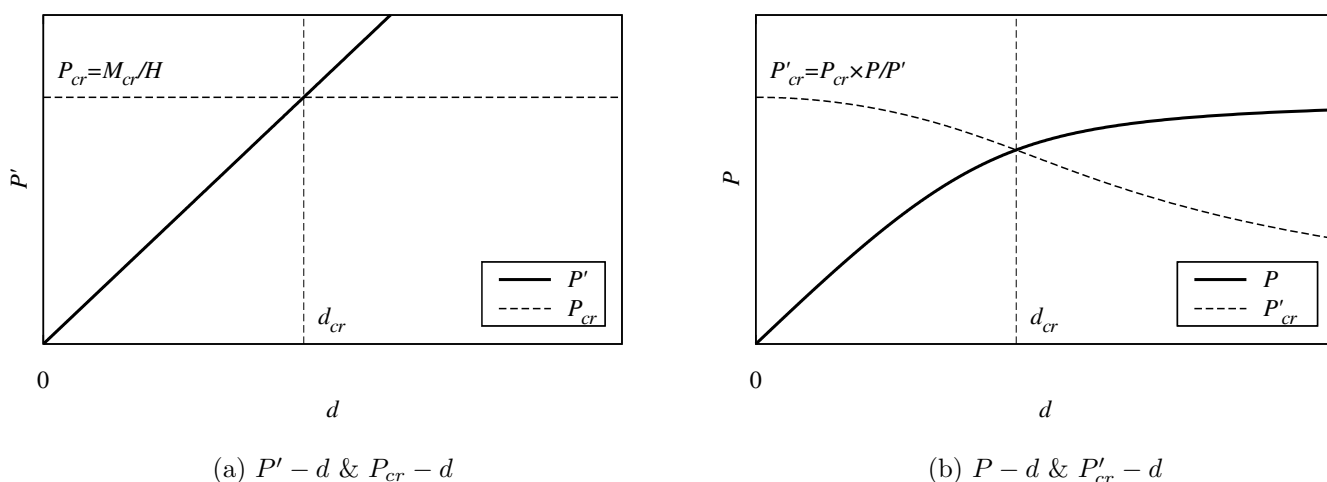


Fig. 2-6 Load-deformation curve: Equiv. model

フを Fig.2-6(b) に示す。Fig.2-6(b) に示す二つの曲線の交点における荷重が、定義 2b を座屈の定義とした場合の座屈耐力となる。

剛性低下の観点からは、定義 2b によって  $P_{cr}$  を  $P'_{cr}$  に低減することは、材料非線形性による剛性低下が生じる場合に座屈耐力が低下するのと同じように、幾何学的非線形性による剛性低下が生じる場合についても座屈耐力が低下するとみなすことに相当している。

座屈モード方向への変形という観点からは、定義 2b では座屈に至る以前にレール上でローラが移動することになるため、座屈が生じたとみなすときの座屈モード方向への変形量の閾値  $e_{cr}$  を、回転ばねの初期剛性が減少するのに応じて増加させることに相当する。回転ばねが完全剛塑性体の場合、初期剛性は無限大であるため  $e_{cr} = 0$  となり、回転ばねが完全弾塑性体の場合、初期剛性が有限の値であるため  $e_{cr} > 0$  となる。すなわち、定義 2b による座屈の定義の拡大は、幾何学的な初期不整を有する部材のように载荷開始と同時に座屈モード方向への変形が生じ始める場合にも、座屈モード方向への変形量に閾値を設けることで、座屈とみなせる時点を設定するものとなっている。

回転ばねの剛性が 0 でない範囲では、閾値  $e_{cr}$  を超えて座屈モード方向への変形が進行すると荷重が増加するが、定義 2b によって定義される座屈耐力はこの荷重増加を無視したものとなっており、系の最大耐力を過小評価する。座屈モード方向への変形の進行に伴う荷重増加を無視するという点では、材料非線形性による剛性低下が生じる場合の Tangent modulus load と同じであり、定義 2b による座屈耐力は、Tangent modulus load の考え方を幾何学的非線形性による剛性低下が生じる場合に拡張するものであると言える。

#### 2.3.4 座屈固有値解析を用いた最大耐力評価

力学モデルは、座屈耐力と座屈モード方向への変形という二つの情報を表現したモデルであるため、より複雑な構造物についても、線形座屈固有値解析を行い、座屈固有値と座屈固有ベクトルを求めることで、力学モデルを用いた場合と同じように、定義 2b によって定義した座屈耐力を求めることができる。定義 2b をより一般的なかたちで述べると、以下のように

なる。

定義 2c 幾何学的非線形性による剛性低下が生じないモデルで同じ変形を生じさせたとき、座屈モード方向への変形が生じ始める現象

解析の手順としては、

1. 荷重増分解析を行い、荷重変形曲線を求める
2. 荷重増分解析の各段階について座屈固有値解析を行い、座屈耐力と座屈モード形状を求める
3. 1 で求めた変形形状と 2 で求めた座屈モード形状から、座屈モード方向への変形量を求める

となる。この一連の解析手順を**逐次座屈固有値解析法**と称する。逐次座屈固有値解析法の流れを Fig.2-7 に図示する。

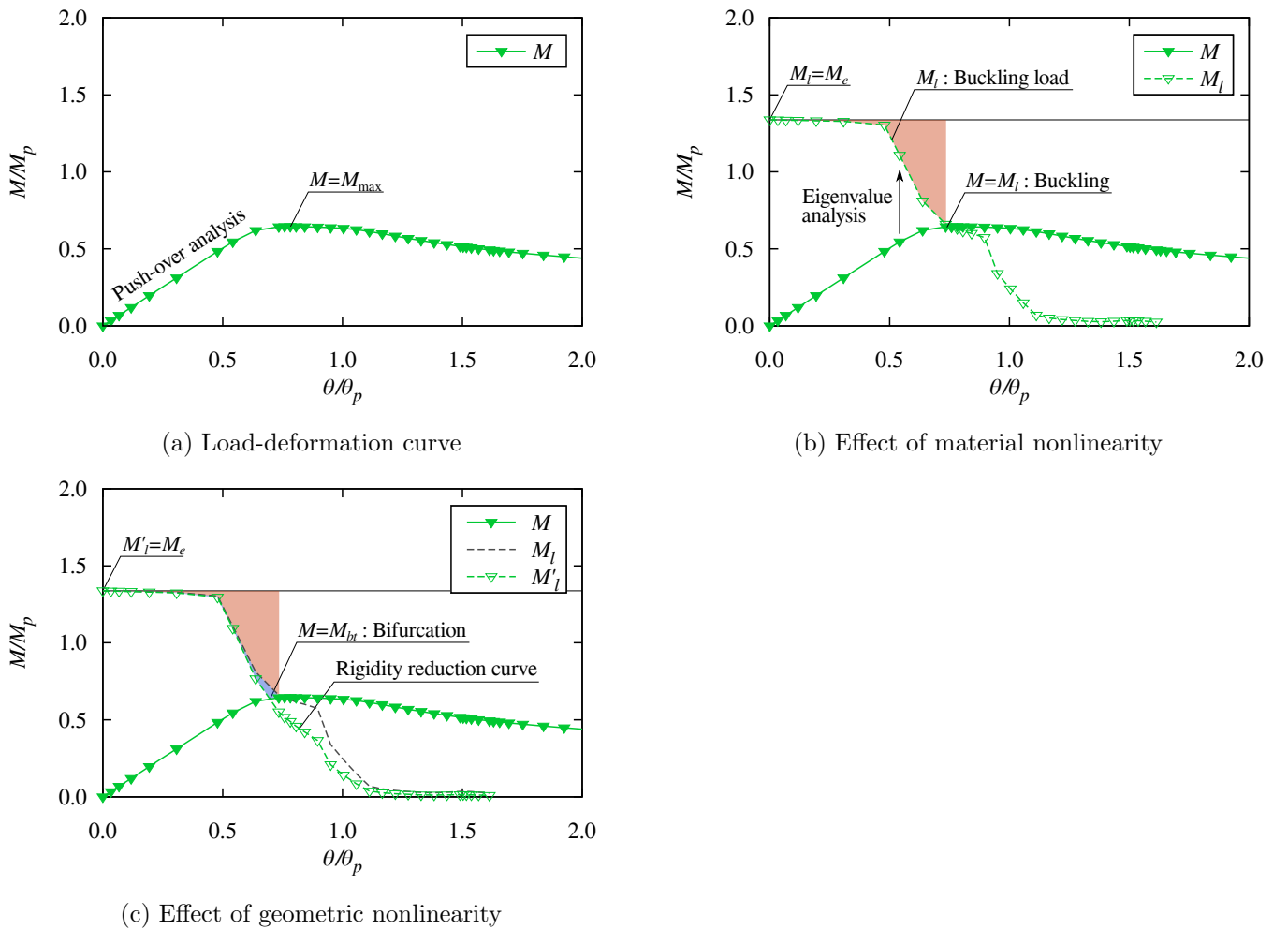


Fig. 2-7 Sequential eigenvalue analysis method

材料非線形性の影響は、手順 2 において塑性化した部分のヤング係数を低下させることで考慮され、座屈耐力  $M_l$  の低下として現れる。Fig.2-7(b) では緑破線で  $M_l$  の推移を示しており、図中の赤色領域が材料非線形性の影響を表している。

幾何学的非線形性の影響は、手順 3 で求めた座屈モード方向への変形量に応じて、力学モデルの場合の等価モデルと同じ考え方で座屈耐力を  $M_l$  から  $M'_l$  に低減することで考慮される。Fig.2-7(c) では灰破線で  $M_l$ 、緑破線で  $M'_l$  の推移をそれぞれ示しており、図中の青色領域が幾何学的非線形性の影響を表している。 $M'_l$  には材料非線形性と幾何学的非線形性の両方

の影響が含まれるため、本論文では  $M'_l$  の推移を表す曲線を**剛性低下曲線**と称する。

荷重変形曲線と剛性低下曲線の交点における荷重は定義 2c による座屈耐力に相当する。本論文では、この荷重を**分岐モーメント**  $M_{bt}$  と称し、手順 1 で求めた最大耐力  $M_{\max}$  の予測下限値とする。

定義 2c による座屈耐力は、材料非線形性と幾何学的非線形性の両方を考慮した Tangent modulus load に相当し、実際の最大耐力を過小評価するが、幾何学的非線形性の影響がない場合には座屈モード方向への変形が生じない時点での耐力、幾何学的非線形性の影響がある場合には座屈モード方向への変形量が過大とならない時点での耐力を与えるものであり、最大耐力の予測下限値として有用であると考えられる。また、座屈耐力に対する剛性低下の影響を、材料非線形性と幾何学的非線形性の二つに区別して評価できるため、複雑な構造物の挙動を把握する上でも有用であると考えられる。

## 2.4 巨視的不安定性

本節では、不安定性という観点から非線形性を捉えることで、分岐モーメント  $M_{bt}$  を不安定状態に至るときの荷重と位置付け、降伏モーメント  $M_y$ 、全塑性モーメント  $M_p$ 、弾性横座屈モーメント  $M_e$  と  $M_{bt}$  の関係を整理する。

### 2.4.1 非線形性と不安定性

本研究では、剛性低下をもたらす非線形性を、材料非線形性と幾何学的非線形性の二種類に区別している。このうち、材料非線形性は塑性化の進展に対応しており、転位の移動という微視的なスケールにおける幾何学的な不安定性を表している。鋼は炭素などの不純物を含む多結晶であるため、炭素による転位の固着効果や、結晶粒同士の方位の違いがすべりに及ぼす影響により、降伏後も急激な不安定性に陥ることはなく、ひずみ硬化を生じながら塑性変形が進行する<sup>39)</sup>。材料の応力歪関係は、このような微視的な現象を剛性の変化として抽象することで巨視的に捉えたものである。一方、幾何学的非線形性は面外変形の進展に対応しており、部材全体が座屈モードの形状に変形するという巨視的なスケールにおける幾何学的な不安定性を表している。

二つの非線形性は、巨視的な視点で捉えると異なる現象として観察されるが、いずれも特定の方向への変形の増大という幾何学的な不安定性を表すという点は共通している。すなわち、非線形性とは幾何学的不安定性であり、対象となる幾何学的現象のスケールに応じて、微視的な幾何学的不安定性(微視的不安定性)を材料非線形性、巨視的な幾何学的不安定性(巨視的不安定性)を幾何学的非線形性として捉えていると言える。

2.3.1 項で取り上げた力学モデルで言えば、力学モデルの剛性の変化は、並進ばねの伸びの変化(材料非線形性)とロール上でのローラの移動(幾何学的非線形性)という二つの異なる現象の組み合わせとして捉えることができるが、力学モデルの一部である並進ばねの伸びの変化自体を、力学モデル全体と同じ構造のモデルを用いてモデル化することができ、巨視的な力学モデルの中に微視的な力学モデルが含まれているとみなすことができる。

逐次座屈固有値解析法では、微視的不安定性の影響を要素のヤング係数の変化として、巨視的不安定性の影響を座屈モード方向への変形として、それぞれ表現することで、二つの不安定性を統一的に捉える方法を提案している。

以上をまとめると、Table 2-1 のとおりとなる。

Table 2-1 Nonlinearity and instability

非線形性	現象	不安定性	定量化
材料非線形性	塑性化	微視的	ヤング係数の低下
幾何学的非線形性	面外変形	巨視的	座屈モード方向への変形

## 2.4.2 巨視的不安定曲面

変形方向が座屈モード方向と完全に一致した状態を巨視的不安定な状態と定義すると、非線形性と不安定性を関連付ける観点からは、分岐モーメント  $M_{bt}$  は、二つの不安定性の増大を考慮して、部材が巨視的不安定な状態に至ったとみなせるときの荷重として捉えることができる。

降伏モーメント  $M_y$ 、全塑性モーメント  $M_p$ 、弾性横座屈モーメント  $M_e$  についても、不安定性の観点から整理すると、

- $M_y$ : 断面の一部に微視的不安定性が生じるときの荷重
- $M_p$ : 断面全体に微視的不安定性が生じるときの荷重  
歪硬化を考慮しなければ、断面全体に微視的不安定性が生じた時点で変形状態に関係なく部材が巨視的不安定に至ると考えられるため、「微視的不安定性のみによって巨視的不安定に至るときの荷重」とみなすことができる。
- $M_e$ : いずれの不安定性も生じないまま急激に巨視的不安定に至るときの荷重  
巨視的不安定性だけが増大する場合を漸近的に巨視的不安定に至るものと考え、その間の座屈固有値の変化を無視すれば、「巨視的不安定性のみによって巨視的不安定に至るときの荷重」とみなすことができる。

とまとめることができる。

$M_p$  と  $M_e$  はともに巨視的不安定に至るときの荷重という点では  $M_{bt}$  と同じであるが、微視的不安定性と巨視的不安定性の増大の仕方に仮定を設けたものであり、いずれも  $M_{bt}$  の特殊な場合であると言える。横座屈細長比  $\lambda_b = \sqrt{M_p/M_e}$  は、微視的不安定性のみが生じると仮定した場合と巨視的不安定性のみが生じると仮定した場合の  $M_{bt}$  の比をとったものであり、巨視的不安定に至るときの微視的不安定性と巨視的不安定性の影響度合いの目安になると考えられる。実際には二つの不安定性の両方が増大しながら巨視的不安定に至るときの荷重が決まるが、 $M_{bt}$  が  $M_p$  や  $M_e$  とどのような比率にあるかをみることにより、それぞれの不安定性の影響、すなわち材料非線形性と幾何学的非線形性の影響をみることができる。

縦軸に  $M_{bt}/M_p$ 、横軸に  $M_{bt}/M_e$  をとり、 $\lambda_b$  を変化させたモデルをプロットすると、Fig.2-8 (a) のようになり、 $\lambda_b$  の大きさによって二つの非線形性の影響が変化する様子を見ることができる。本論文では、この図のことを**巨視的不安定曲面**と称する。巨視的不安定曲面では、原点と各プロットを結ぶ直線の勾配が  $\lambda_b$  に対応している。

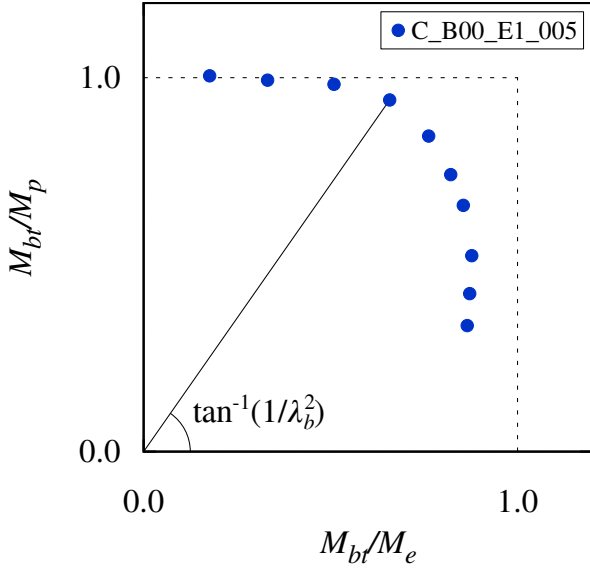
残留応力や初期たわみなどの初期不整が存在しない場合、巨視的不安定曲面の形状は Fig.2-8(b) のようになる。微視的不安定性と巨視的不安定性が生じない場合には  $M_{bt} = M_e$  であるため、プロットは直線  $M_{bt}/M_e = 1.0$  上に並ぶ(点  $A_0$ )。梁端モーメントが  $M_y$  を超えると断面の一部に微視的不安定性が生じるため、プロットは原点と  $A_0$  を結ぶ直線上で原点側に移動する(点  $A_1$ )。  $M_{bt} = M_y$  に対応する点(点 E)は弾性座屈と非弾性座屈の境界であり、点 E における横座屈細長比は弾性限界細長比  $_e\lambda_b$  と呼ばれる<sup>36)</sup>。  $M_{bt} = M_p$  に対応する点(点 P)は、断面全体に微視的不安定性が生じた場合と同等の耐力を発揮する点であり、不安定性の進行状況や歪硬化の影響によっては  $M_{bt} > M_p$  となることもあるものの、これよりも  $\lambda_b$  が小さい範囲では  $M_{bt} = M_p$  とみなすことができ、点 P における横座屈細長比は塑性限界細長比  $_p\lambda_b$  と呼ばれる<sup>36)</sup>。

残留応力が存在する場合には、断面の一部が塑性化し始める梁端モーメントが小さくなるため、点 E が下方向に移動し、巨視的不安定曲面の形状は Fig.2-8(c) のようになる。

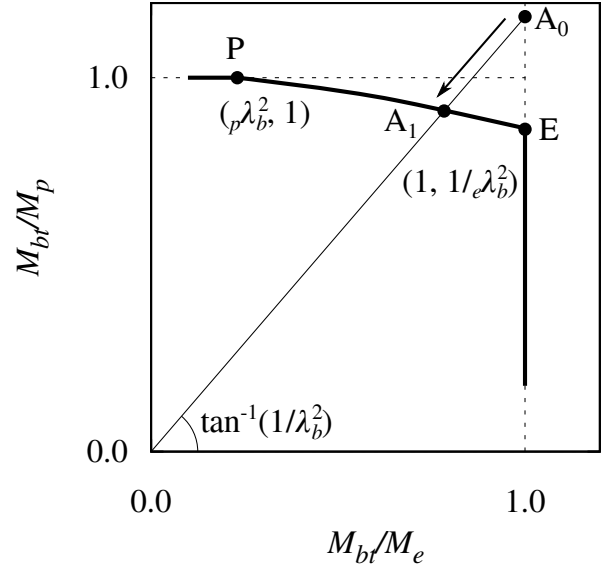
初期たわみが存在する場合には、 $M_{bt}$  を求める際に、変形方向と座屈モード方向が完全には一致していない状態を巨視的不安定とみなしているため、巨視的不安定曲面の横軸の値が 1.0 を下回る。また、座屈モード方向への変形によって断面の一部が塑性化し始める梁端モーメントも小さくなるため、巨視的不安定曲面は横軸方向に縮小するだけでなく縦軸方向にも変化し、Fig.2-8(d) のようになる。

横座屈細長比  $\lambda_b$  と梁の耐力の関係を表すという点では巨視的不安定曲面は横座屈曲線と同じであり、両者は互いに変換可能なものであるが、材料非線形性や幾何学的非線形性の影響を明確に図示できるという点に巨視的不安定曲面を用いることの利点があると考えられる。

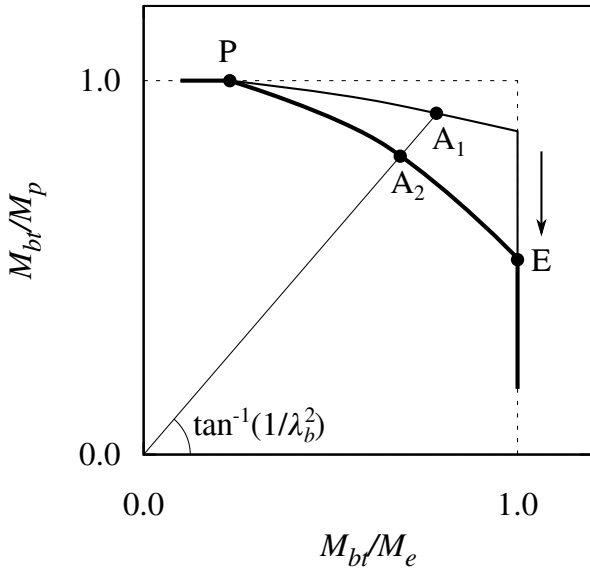




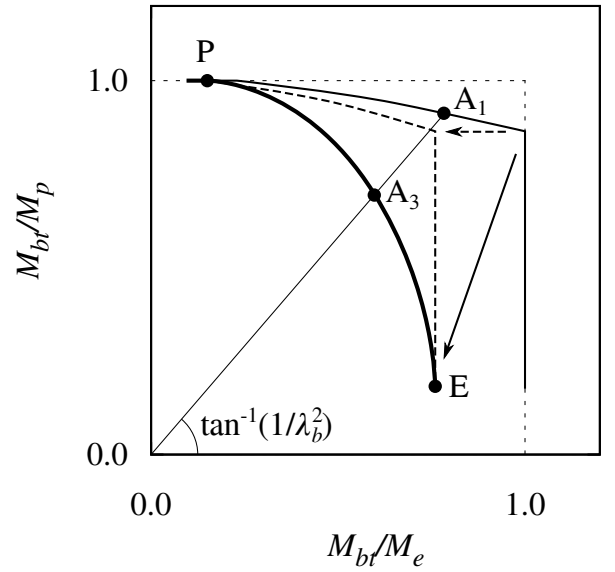
(a) C\_B00\_E1\_005



(b) Without initial imperfection



(c) With residual stress



(d) With initial deflection

Fig. 2-8 Macroscopic instability surface

## 2.5 結

本章では、構造物の剛性低下を逐次定量化することで構造物の最大耐力を評価する方法である逐次座屈固有値解析法について述べた。

逐次座屈固有値解析法では、剛性低下の要因を材料非線形性と幾何学的非線形性の二つの非線形性に区別し、荷重増分解析の各インクリメントについて逐次的に線形座屈固有値解析を行うことでその影響を定量化する。

材料非線形性の影響は、荷重増分解析において塑性化した部分のヤング係数を Tangent modulus theory に基づいて低下させることで考慮し、座屈固有値解析で得られる座屈固有値から求めた座屈荷重  $M_l$  の値は、塑性化が進展するにつれて低下する。幾何学的非線形性の影響は、部材の変形に含まれる座屈モード形状の変形成分が増加するにつれて、座屈モーメン

ト  $M_l$  が低下するものとみなすことで考慮する。

二つの非線形性の影響を考慮して求めた座屈荷重  $M_l'$  の推移を表す曲線を剛性低下曲線と称し、荷重変形曲線と剛性低下曲線の交点における荷重 (分岐モーメント  $M_{bt}$ ) を、最大曲げ耐力の予測下限値としている。

分岐モーメント  $M_{bt}$  は「幾何学的非線形性による剛性低下が生じないモデルで同じ変形を生じさせたとき、座屈モード方向への変形が生じ始める現象 (定義 2c)」として座屈を定義した場合の座屈耐力であり、材料非線形性と幾何学的非線形性の両方を考慮した Tangent modulus load に相当する。

また、非線形性を幾何学的な不安定性として捉えると、材料非線形性は微視的不安定性、幾何学的非線形性は巨視的不安定性となり、

- 分岐モーメント  $M_{bt}$ : 二つの不安定性の連成によって部材が巨視的不安定に至るときの荷重
- 全塑性モーメント  $M_p$ : 微視的不安定性のみによって部材が巨視的不安定に至るときの荷重
- 弾性横座屈モーメント  $M_e$ : 巨視的不安定性のみによって巨視的不安定に至るときの荷重

と位置付けることができるため、部材が巨視的不安定な状態に至る時点での二つの非線形性の影響を図示するための方法として、 $M_{bt}/M_p$  と  $M_{bt}/M_e$  の関係を表す巨視的不安定曲面を提案した。

次章以降において、逐次座屈固有値解析法を用いた梁の最大曲げ耐力の検討結果を示す。



## 要素

H 形断面梁は、低減積分と有限ひずみ定式化による 4 節点 4 辺形応力/変位シェル要素 (シェル要素名: S4R) でモデル化し、シェル要素の板厚方向の積分点の数は 5 としている。メッシュ分割は、梁幅方向を 20 分割 (メッシュサイズ=5[mm])、梁せい方向を 20 分割 (メッシュサイズ=10[mm]) とし、梁スパン方向については、端部から 50[mm] までの範囲をメッシュサイズ=5[mm]、その間をメッシュサイズ=10[mm] として分割している。

## 座標軸

部材座標軸は、梁幅方向を X 軸方向、梁せい方向を Y 軸方向、梁の材軸方向を Z 軸方向とし、断面の図心位置を  $X=0$ 、 $Y=0$ 、片側の梁端部を  $Z=0$  とする。

## 支持条件

梁端部を柱に剛接合する場合を想定して支持条件を設定する。支持条件は、梁端断面の各節点を梁端の図心点に剛体拘束した上で、図心点に対して与える。並進自由度は、一端 ( $Z=0$ ) はすべて固定、他端 ( $Z=l_b$ ) は材軸方向 (Z 軸方向) のみを自由、その他を固定とする。回転自由度は、両端とも、強軸まわり (X 軸まわり) を自由、弱軸まわり (Y 軸まわり) とねじり (Z 軸まわり) を固定とする。また、梁端断面においてウェブ軸 (Y 軸) に対する上下フランジの変位を同一とするような拘束を与えることで、反り変形を拘束している。

## 載荷方法

載荷は梁端の図心点に強軸まわりの強制回転角を与えることにより行い、すべて単調載荷とする。曲げモーメント分布は、反対称曲げ (Antisymmetric)、片曲げ (Cantilever)、一様曲げ (Uniform) の 3 通りとし、それぞれ A、C、U と称する。曲げモーメントの向きは Fig.3-1 に示す向きとする。

## 梁スパン

梁スパン  $l_b$  は各曲げモーメント分布につき 10 通りずつ、横座屈細長比  $\lambda_b = \sqrt{M_p/M_e}$  が同程度になるように設定する。ここで、 $M_p$  は全塑性モーメント、 $M_e$  は弾性横座屈モーメントをそれぞれ表す。 $\lambda_b$  は 0.42~1.62 の範囲としている。 $\lambda_b$  と梁スパンの対応は Fig.3-4 に一覧で示す。

### 3.2.2 材料特性

材料特性は、完全弾塑性モデル (P)、バイリニアモデル (B) の 2 通りについて検討する。各モデルの初期剛性  $E_0$ 、二次剛性  $E_p$ 、降伏応力度  $\sigma_y$  を Table3-2 に示す。完全弾塑性モデルの二次剛性は、解析の都合上、0 ではなく、1[N/mm<sup>2</sup>] としている。

Table 3-2 Material property

モデル名	初期剛性 $E_0$ [N/mm <sup>2</sup> ]	二次剛性 $E_p$ [N/mm <sup>2</sup> ]	降伏応力度 $\sigma_y$ [N/mm <sup>2</sup> ]
完全弾塑性モデル	205000	1	258.5
バイリニアモデル	205000	2050	258.5

応力歪曲線を Fig.3-2 に示す。

### 3.2.3 残留応力

H 形断面梁の横座屈に対する残留応力の影響を最初に取り扱った Galambos の研究<sup>26)40)</sup> では、フランジ幅方向端部が圧縮  $\sigma_{rc} = 0.3\sigma_y$ 、フランジ幅方向中央部およびウェブが引張  $\sigma_{rt} = [bt/(bt + w(h - 2t))]\sigma_{rc}$  となるような直線分布の残留応力が仮定されている (ここで、 $b$  は梁幅、 $h$  は梁せい、 $w$  はウェブ厚、 $t$  はフランジ厚)。山田らの研究<sup>27)</sup> では、溶接

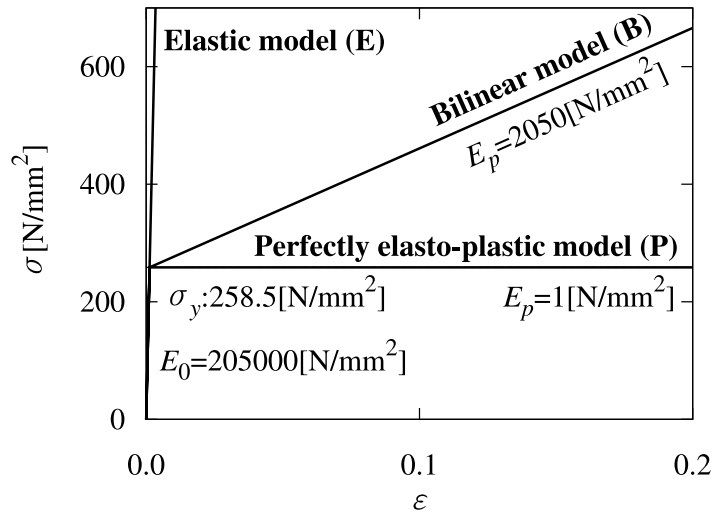


Fig. 3-2 Material property

組立 H 形鋼と圧延 H 形鋼に分けて残留応力分布を仮定しており、圧延 H 形鋼の場合の残留応力分布は Galambos のものと同様である。鈴木らの研究<sup>28)</sup>では、溶接組立 H 形鋼について一種類 (I)、圧延 H 形鋼について二種類 (II、III) の計三種類の残留応力分布を仮定しており、圧延 H 形鋼のうち (III) は Galambos や山田らのものと同様である。圧延 H 形鋼の (II) はウェブの分布が異なっており、Galambos はウェブの残留応力分布を一樣と仮定しているのに対し、ウェブ上下端部で  $\sigma_{rt} = 0.3\sigma_y$ 、ウェブ中央部で  $\sigma_{rc} = 0.3\sigma_y$  となるように、ウェブの残留応力も直線分布と仮定している。これに合わせて、フランジ中央部の残留応力は  $\sigma_{rt} = 0.3\sigma_y$  となっている。加藤らの研究<sup>29)</sup>では、解析用の残留応力として、フランジ幅方向端部からフランジ幅の 1/4 ずつの範囲が圧縮  $\sigma_{rc} = 0.5\sigma_y$ 、フランジ幅方向中央部の 1/2 の範囲が引張  $\sigma_{rt} = 0.5\sigma_y$  となるような、階段状の分布が仮定されており、ウェブには残留応力が仮定されていない。青木ら<sup>41)</sup>は圧延 H 形鋼の残留応力分布を測定した上で、Galambos と同様の三角形分布に加え、放物線分布を提案している。

本研究では、フランジの残留応力分布は、既往研究<sup>26)40)27)28)</sup>における圧延形鋼の場合と同様に、フランジ幅方向 (X 軸方向) 端部を圧縮  $\sigma_r = -0.3\sigma_y$ 、中央部を引張  $\sigma_r = +0.3\sigma_y$  とした三角形分布とし、板厚方向 (Y 軸方向) および材軸方向 (Z 軸方向) は一定とする (Fig.3-3)。H 形断面梁が強軸曲げモーメントのみを受けるとき、横座屈と局部座屈のいずれが生じる場合でも、フランジの塑性化の影響が支配的であり、ウェブの塑性化の影響はわずかであると考えられることから、ウェブへの残留応力の導入は省略する。

#### 3.2.4 初期たわみ

本章で取り扱う解析モデルでは、初期たわみはなしとする。

#### 3.2.5 モデルの命名規則

解析モデルの名称は、曲げモーメント分布、横座屈細長比、材料特性、残留応力、初期たわみ形状、初期たわみ量の順に並べて指定する。Fig.3-4 に、各パラメタをまとめて示す。

### 3.3 解析手順

前節で示した解析モデルを用い、次のような一連の解析を行う。

#### 手順 1

材料非線形性および幾何学的非線形性を考慮した荷重増分解析を行う

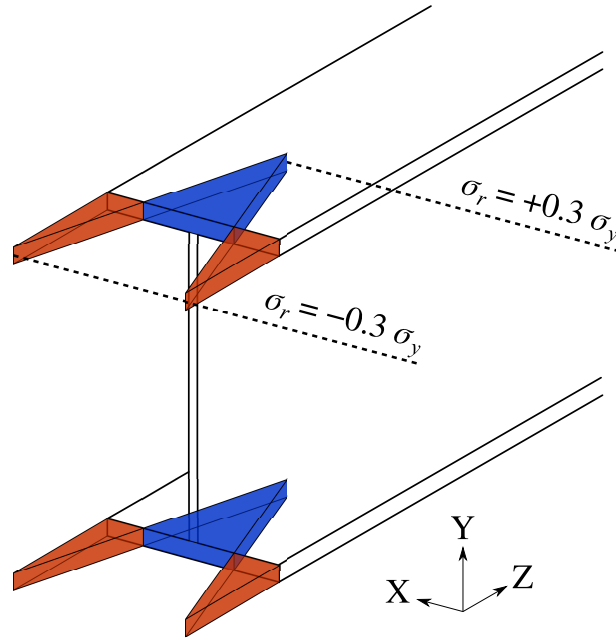


Fig. 3-3 Residual stress

Model name

**C083\_B03\_E1\_005**

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

① Moment distribution

**A:** Asymmetry  
**C:** Cantilever  
**U:** Uniform

③ Material property

**E:** Elastic  
**P:** Perfectly elasto-plastic  
**B:** Bilinear

④ Residual stress

**00:** 0.0  
**03:**  $0.3\sigma_y$  (Flange)

⑤ Initial deflection type

**E1:** 1st mode vector  
**E2:** 2nd mode vector  
**SH:** half of sine wave

⑥ Magnitude of initial deflection

**001:** 1/10000  
**005:** 1/2000  
**010:** 1/1000

② Lateral-torsional slenderness ratio ( $\lambda_b$ )

$\lambda_b$	Span [m]		
	A	C	U
0.42	3.0	2.6	1.9
0.57	4.5	3.8	2.8
0.71	6.0	5.0	3.6
0.83	7.5	6.1	4.3
0.94	9.0	7.3	5.0
1.04	10.5	8.5	5.6
1.14	12.0	9.6	6.3
1.30	15.0	11.8	7.6
1.45	18.0	14.1	8.8
1.62	22.0	17.1	10.5

Fig. 3-4 Model name

## 手順 2

荷重増分解析の各段階について、塑性化による剛性低下を考慮した座屈固有値解析を行う

一連の解析はプログラムを用いて行っており、具体的な処理としては次のようになる。

1. 所定のパラメタを有する解析モデルを作成する
2. 弾性横座屈モーメント  $M_e$  と、弾性座屈モード形状の初期たわみを有するモデルの初期たわみ形状を求めるために、

線形座屈固有値解析を行う

3. 大変形の定式を使用した静的応力解析を行う (手順 1)
4. 静的応力解析の各インクリメントについて、静的応力解析用と同じモデルを新たに生成し、
  - (a) 各要素について、塑性化の有無に応じて材質を再設定する
  - (b) 当該インクリメントにおける変形形状  $\mathbf{d}$  を初期たわみとして再設定する
  - (c) 横座屈モーメント  $M_l$  を求めるために、線形座屈固有値解析を行う (手順 2、3.4 節)

### 3.4 材料非線形性による剛性低下の影響の定量的評価

#### 3.4.1 塑性化のモデル化

座屈固有値解析用モデルの形状および座屈固有値解析結果の例を Fig.3-5 に示す。

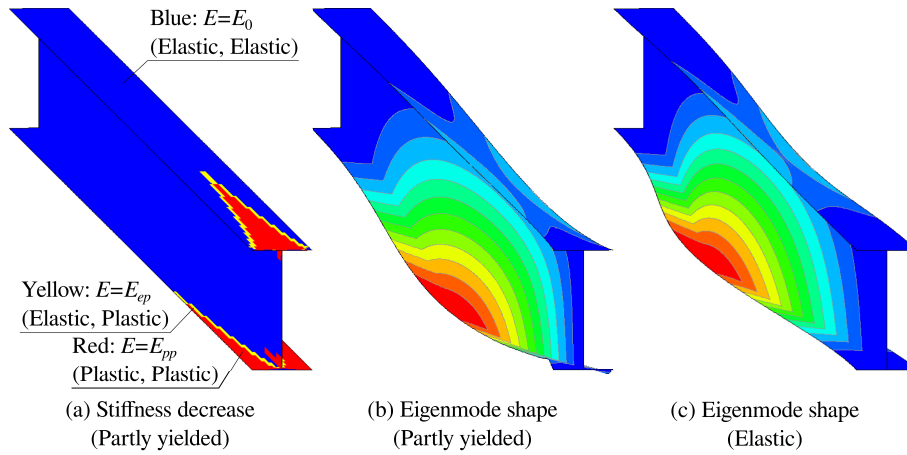


Fig. 3-5 Analytical model for eigenvalue analysis

Fig.3-5(a) は塑性化の進展状況を表している。荷重増分解析の当該ステップにおいて塑性化した要素は、材料の二次剛性に応じてヤング係数が低下した要素として取り扱う。シェル要素については、表裏の各面について塑性化の判定が行えるため、初期剛性を  $E_0$ 、二次剛性を  $E_p$  としたとき、片面のみが塑性化している要素のヤング係数は  $E_{ep} = (E_0 + E_p)/2$  とし、両面とも塑性化している要素のヤング係数は  $E_{pp} = E_p$  とする。Fig.3-5(a) では、両面が塑性化した要素を赤色、片面のみが塑性化した要素を黄色、弾性範囲内の要素を青色で示している。Fig.3-5(b) は (a) の塑性化状況を考慮した一次座屈モード形状、Fig.3-5(c) は弾性状態における一次座屈モード形状をそれぞれ示している。これらの図では、変位が大きいほど青から赤になるように表示している。

座屈固有値解析により求めた一次座屈モード形状によっては、当該モード形状に座屈変形を起こす際に除荷される要素が発生するが、本研究では Tangent modulus theory を採用し、除荷要素についてもヤング係数を  $E_0$  まで回復させることはせず、常に接線剛性を維持するものとしている。ヤング係数以外の条件は、荷重増分解析のモデルと同条件としている。

#### 3.4.2 座屈モーメントの低下

例として、片曲げ、 $\lambda_b = 1.04$ (スパン 8.5[m])、完全弾塑性モデル、残留応力なし、初期たわみなしの場合の荷重変形曲線を Fig.3-6 に示す。

Fig.3-6 で原点から右上に向かう実線が荷重増分解析結果を表し、左上から右側に向かう破線が座屈固有値解析結果を表している。縦軸は、荷重増分解析については梁端モーメント  $M$ 、座屈固有値解析については固有値から求めた横座屈モーメント  $M_l$  をそれぞれ全塑性モーメント  $M_p$  で除した値を示している。横軸は共通しており、荷重増分解析における梁端回転角  $\theta$  を  $M_p$  に対応する梁端回転角  $\theta_p$  で除した値を示している。座屈固有値解析においては変形状態は固有モードであり、変形

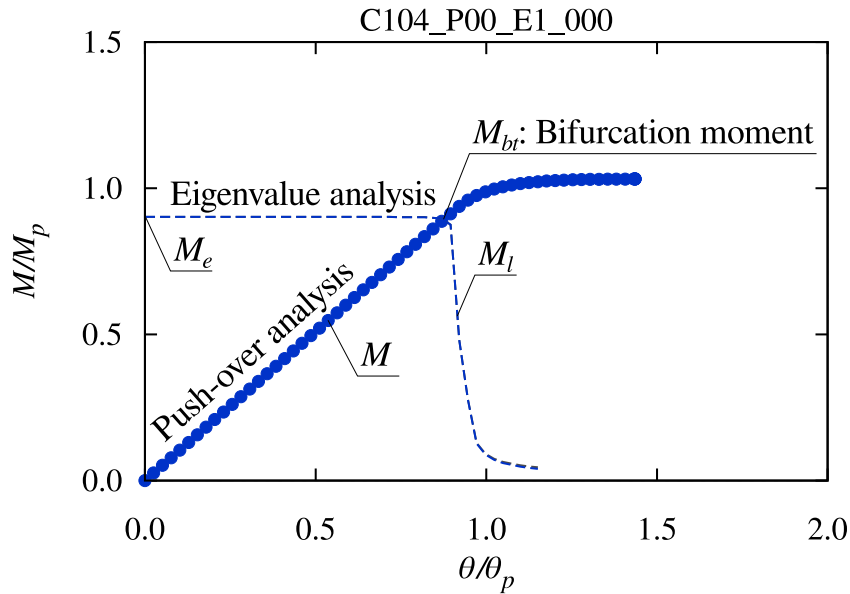


Fig. 3-6 Load-deformation curve: C104\_P00\_E1\_000

の絶対量には意味がないため、横軸の値は変形量ではなく、対応する荷重増分解析の段階を表す指標となっている。以降の荷重変形曲線のグラフでは、縦軸、横軸とも、Z=0 側の支点 (Fig.3-1 上図左側のピン支点) における値を用いている。

座屈固有値解析の曲線では、縦軸切片の値が弾性横座屈モーメント  $M_e$  を  $M_p$  で除した値  $M_e/M_p$  となっており、塑性化した要素のヤング係数を低下させているため、塑性化が進行に伴って  $M_l$  の値は  $M_e$  から大きく低下している。

### 3.4.3 分岐モーメントの定義と意味

Fig.3-6 で 2 曲線が交差する点は、荷重増分解析における梁端モーメント  $M$  と、座屈固有値解析により求めた横座屈モーメント  $M_l$  が一致する点である。本解析においては、除荷要素についても常に接線剛性を維持するものとしており、除荷剛性を考慮していないことから、2 曲線の交点は梁端モーメントが Tangent modulus load に達する時点に相当し、実現象においては、この交点で剛性の低下が現れると考えられる<sup>15)</sup>。交点を過ぎて変形が進行すると、Double modulus load に相当する荷重までは耐力が上昇する可能性があるが、この上昇幅は実用上はわずかであることが多いとされている<sup>15)</sup>。ことを考えると、交点における荷重は梁の最大曲げ耐力の下限值を与えると予測される。この点は数値解析的には釣合経路が分岐する点に相当するため<sup>42)</sup>、交点における荷重を**分岐モーメント**  $M_{bt}$  と称する。

## 3.5 解析結果

材料特性、残留応力、曲げモーメント分布、梁スパンごとの荷重変形曲線、巨視的不安定曲面、 $M_{bt}$  に達した時点での  $s_1$ 、 $r_j$ 、 $\cos \phi$  の値と横座屈細長比  $\lambda_b$  の関係を表すグラフを示す。荷重変形曲線については、 $\lambda_b = 0.42, 0.83, 1.14, 1.62$  の 4 モデルのみ示している。巨視的不安定曲面には  $M_{bt}$  に加えて荷重増分解析で得られる最大荷重  $M_{\max}$  を白抜きプロットで示している。

本章で取り上げる初期たわみを有しないモデルの場合、座屈分岐点において釣合経路の分岐が生じず、座屈分岐点よりも梁端回転角が大きい範囲では荷重変形曲線が実際の挙動を再現できないため、特に  $\lambda_b$  が大きい範囲で  $M_{\max}$  は  $M_{bt}$  を大きく上回っている。 $M_{bt}$  と  $M_{\max}$  の比較は、次章以降で取り上げる初期たわみを有するモデルについて行う。

また、初期たわみを有しないモデルでは面外変形も生じないため、すべてのモデルで  $s_1 = 1.0$ 、 $r_j = 0.0$ 、 $\cos \phi = 0.0$  となっている。



## 3.5.1 完全弾塑性モデル、残留応力なし、初期たわみなし (P00)

初期たわみなし (P00.E1.000)、逆対称曲げ

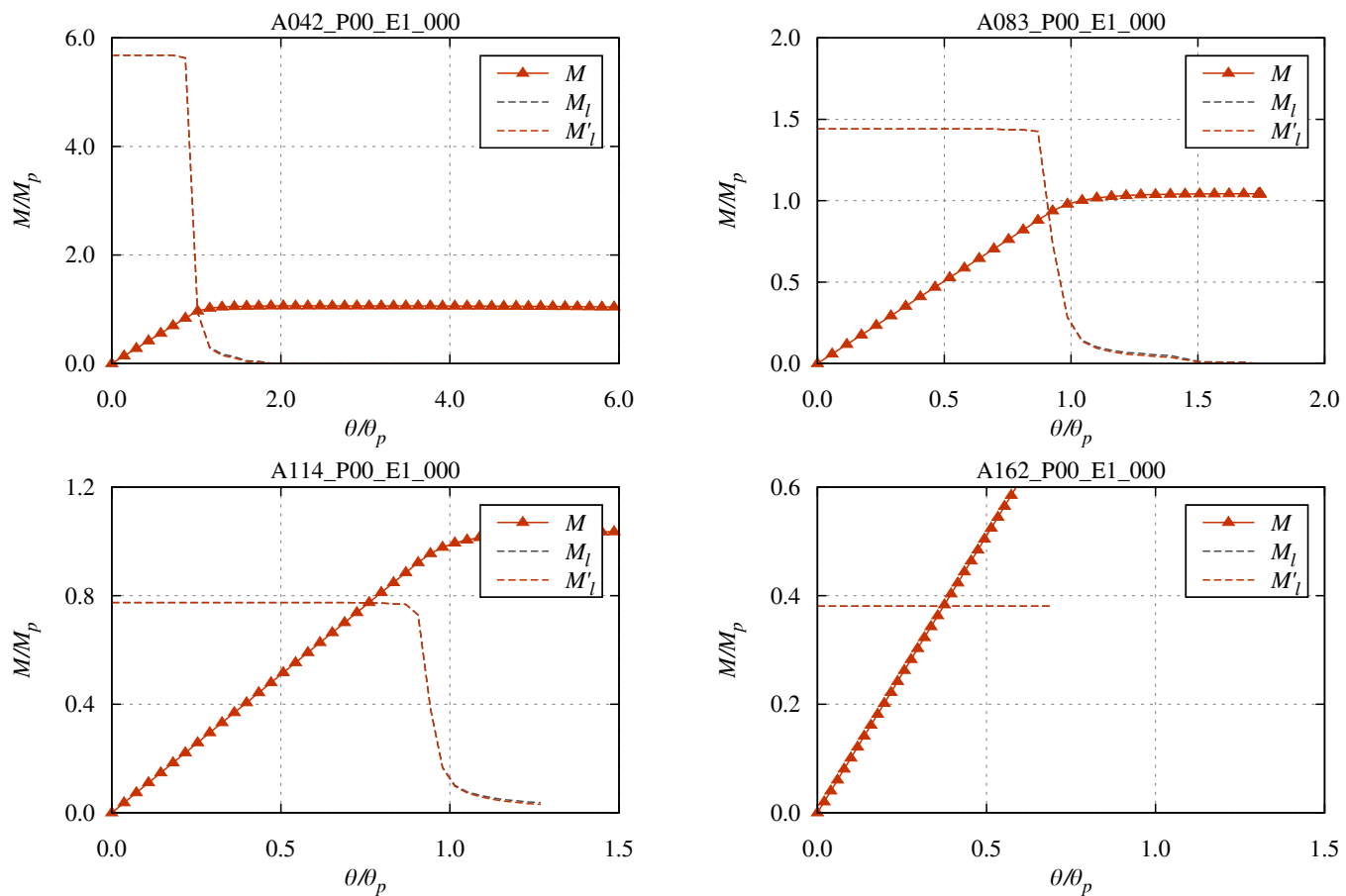


Fig. 3-7 Load-deformation curve: A.P00.E1.000

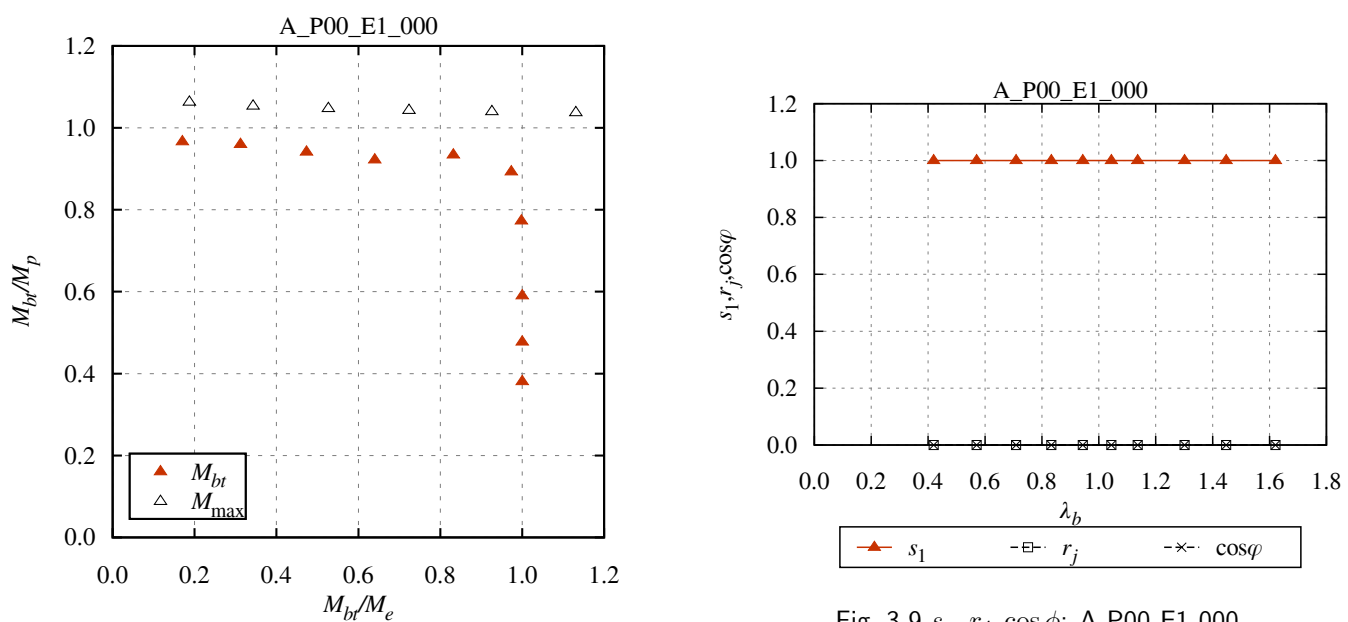
Fig. 3-9  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A.P00.E1.000

Fig. 3-8 Macroscopic instability surface: A.P00.E1.000

初期たわみなし (P00\_E1\_000)、片曲げ

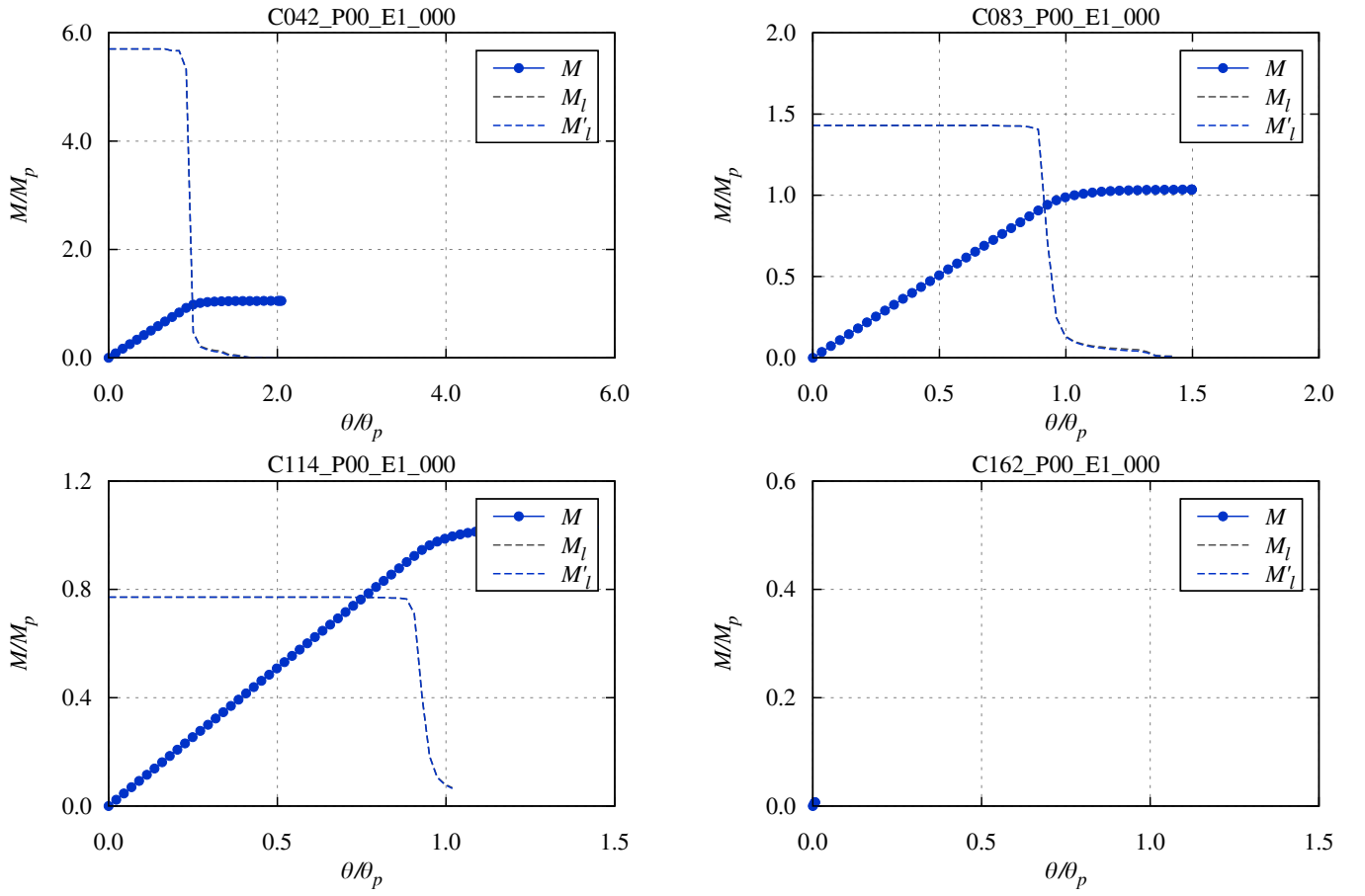


Fig. 3-10 Load-deformation curve: C\_P00.E1\_000

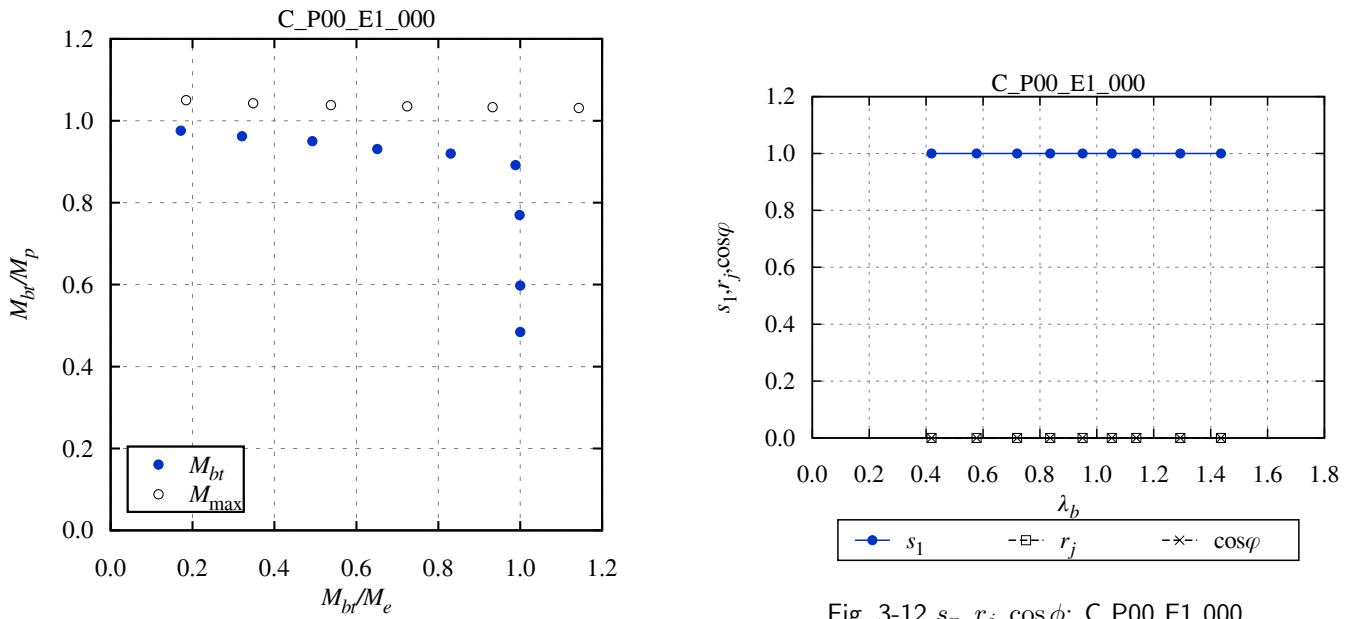


Fig. 3-12  $s_n, r_j, \cos\phi$ : C\_P00.E1\_000

Fig. 3-11 Macroscopic instability surface: C\_P00.E1\_000

初期たわみなし (P00\_E1\_000)、一様曲げ

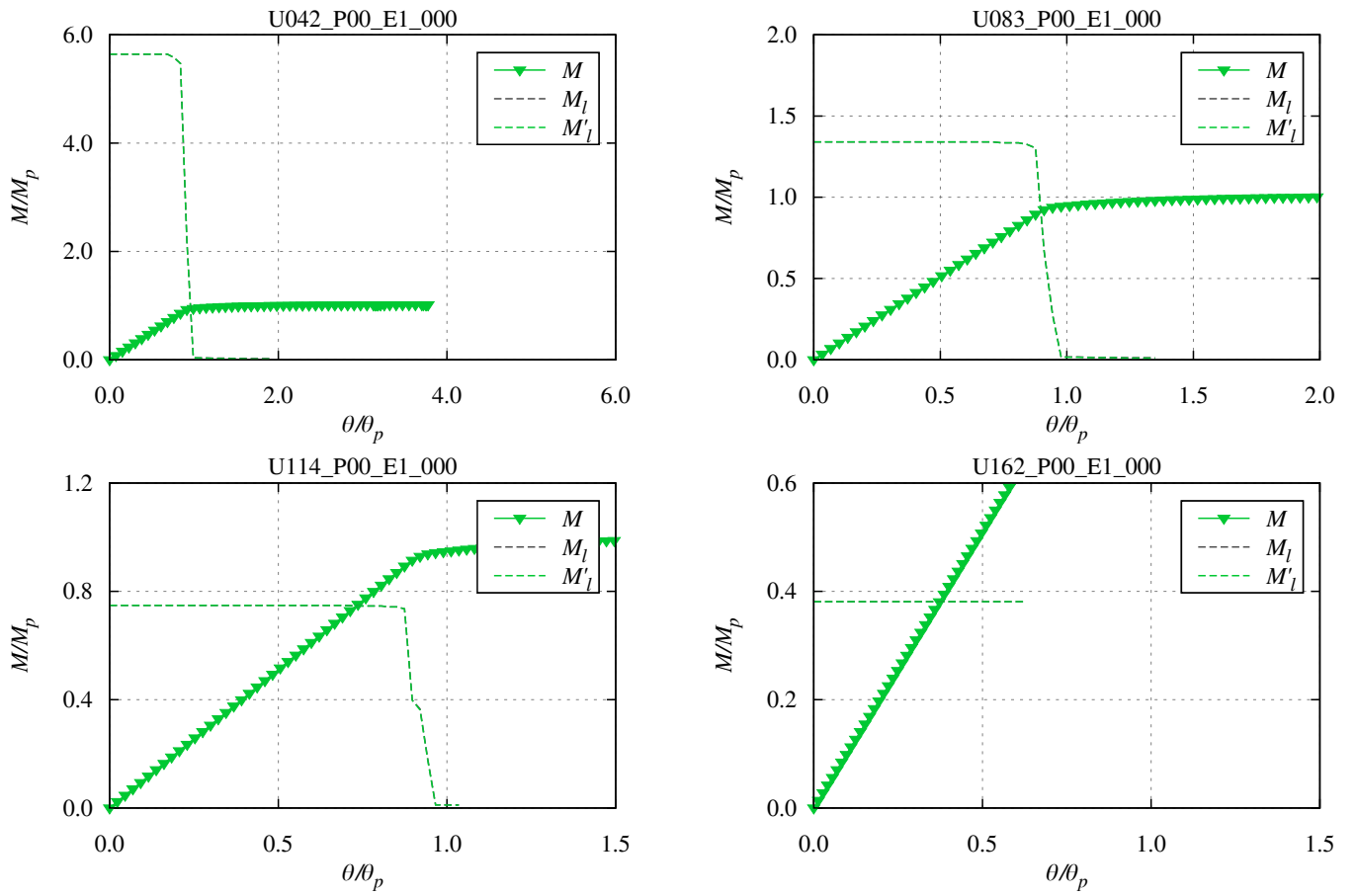


Fig. 3-13 Load-deformation curve: U\_P00.E1\_000

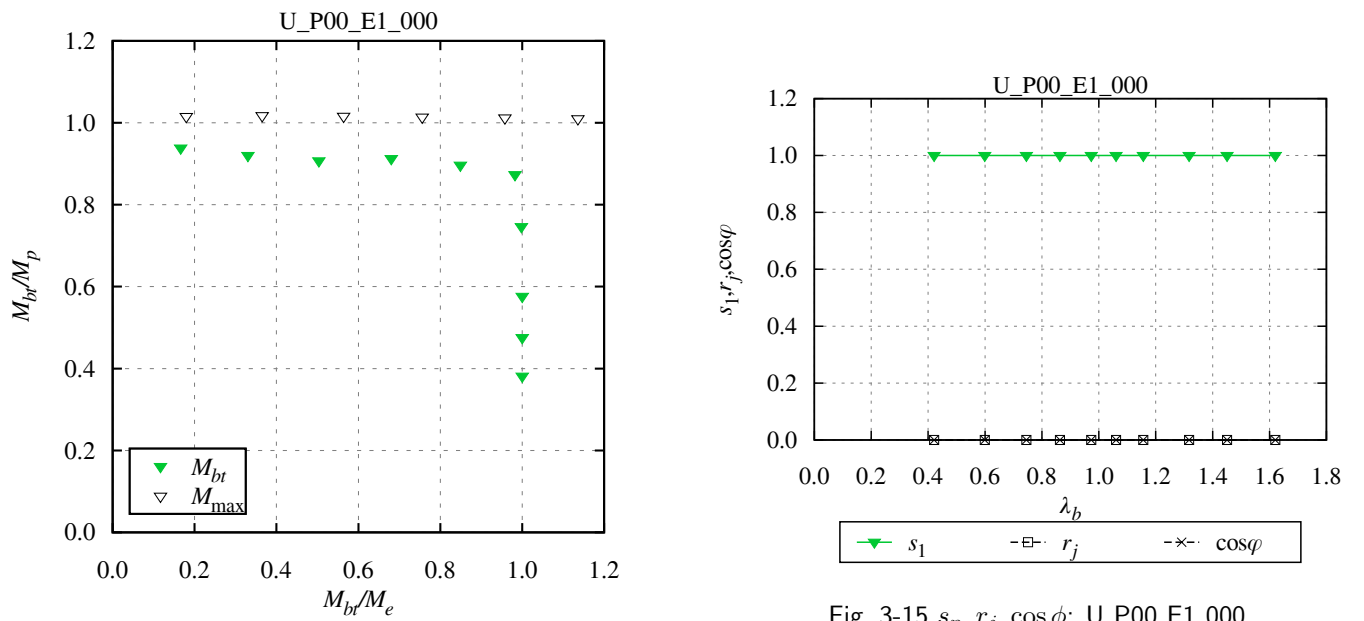


Fig. 3-15  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_P00.E1\_000

Fig. 3-14 Macroscopic instability surface: U\_P00.E1\_000

### 3.5.2 バイリニアモデル、残留応力なし、初期たわみなし (B00)

初期たわみなし (B00.E1.000)、逆対称曲げ

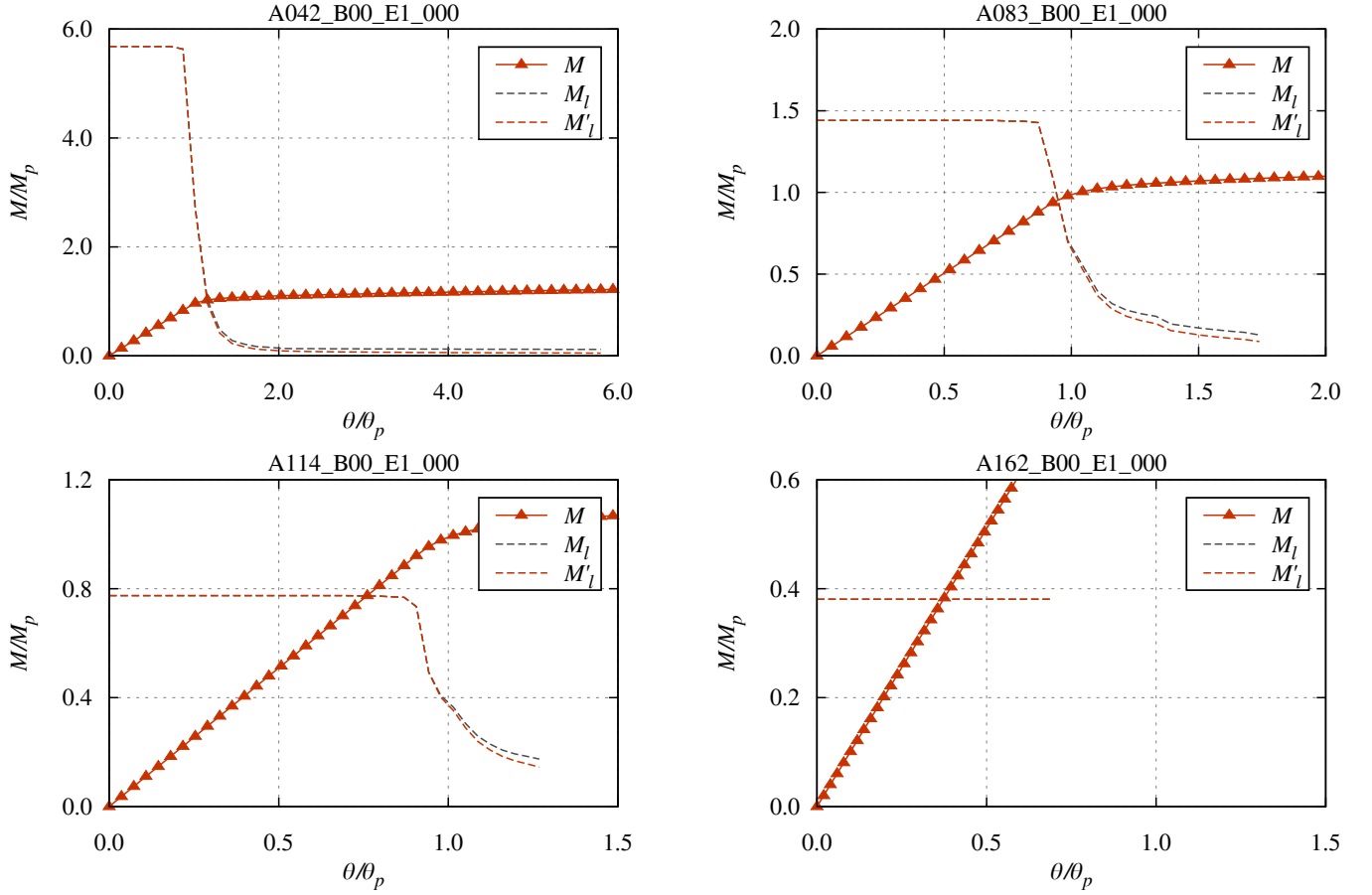


Fig. 3-16 Load-deformation curve: A\_B00.E1.000

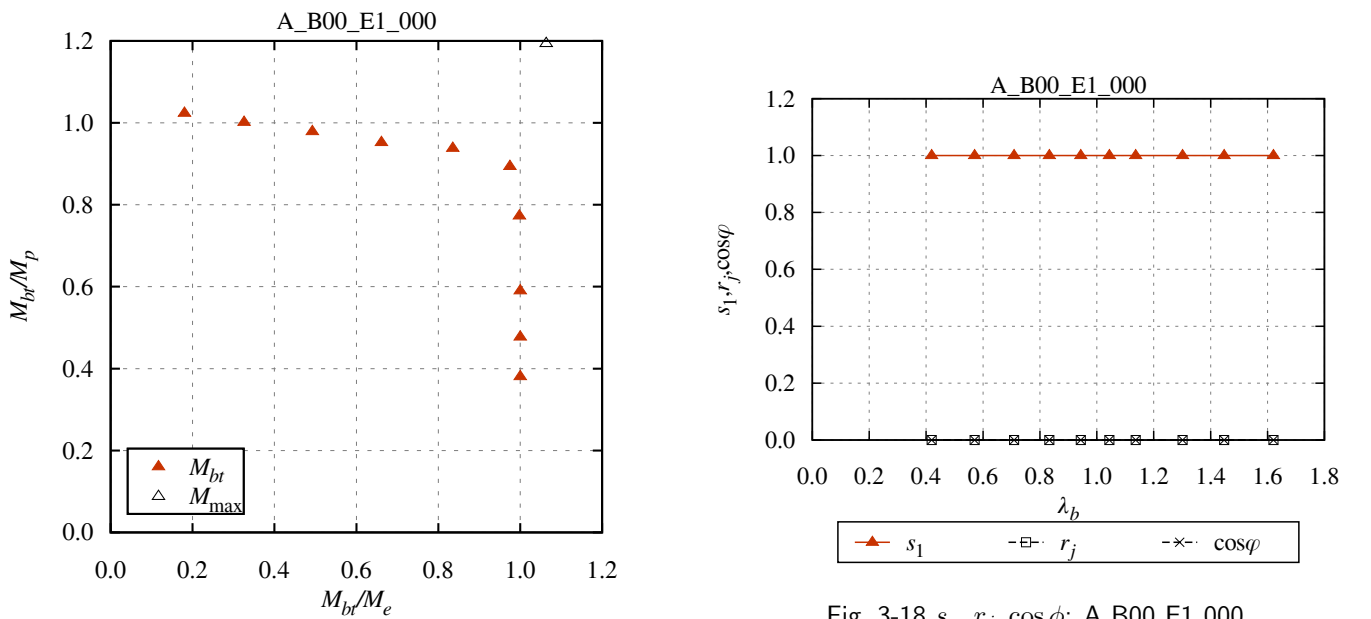


Fig. 3-17 Macroscopic instability surface: A\_B00.E1.000

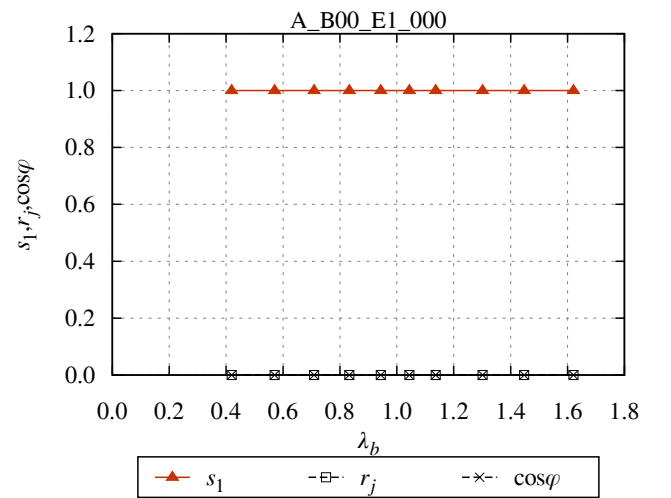


Fig. 3-18  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_B00.E1.000

初期たわみなし (B00\_E1\_000)、片曲げ

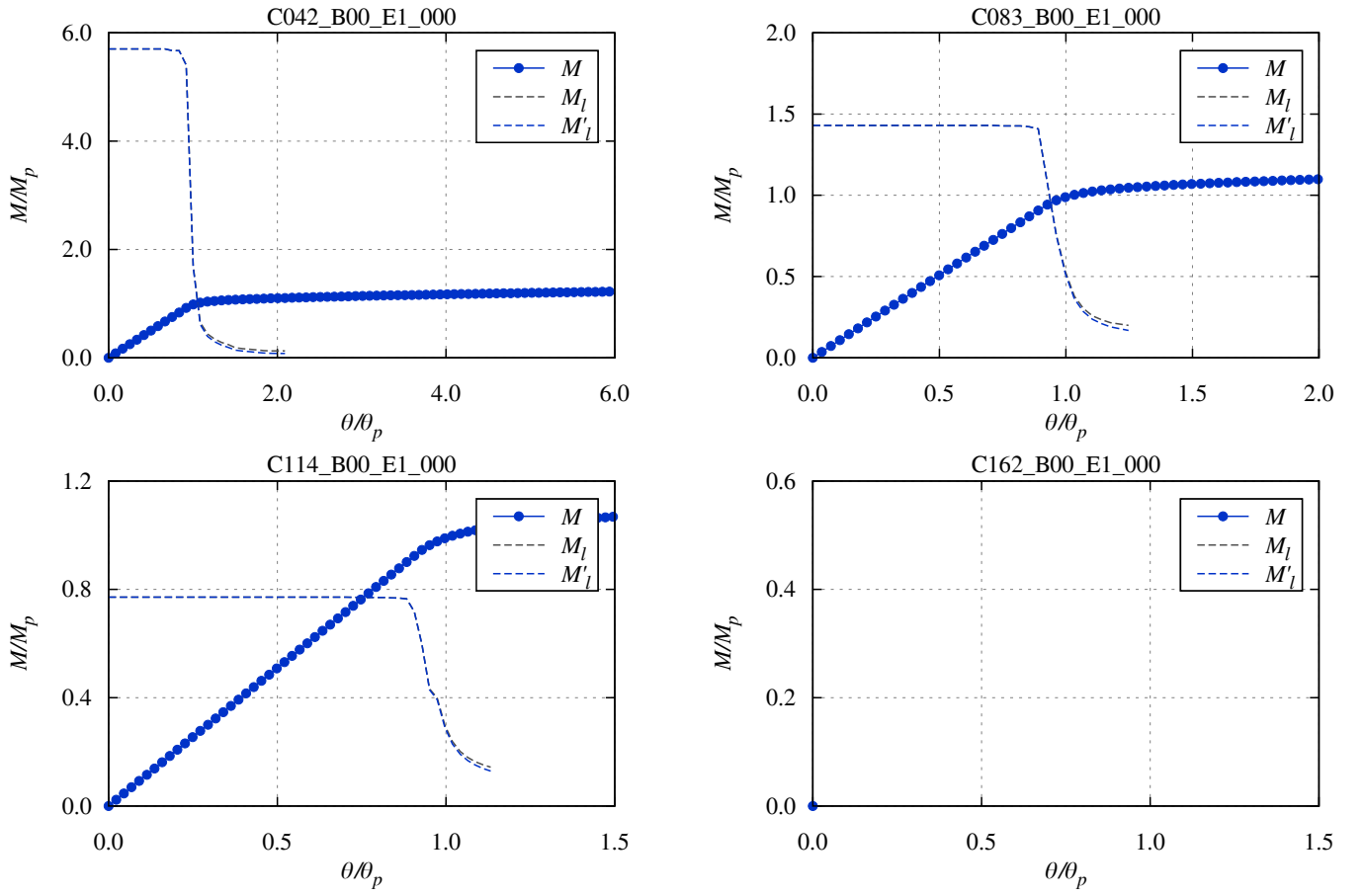


Fig. 3-19 Load-deformation curve: C\_B00.E1\_000

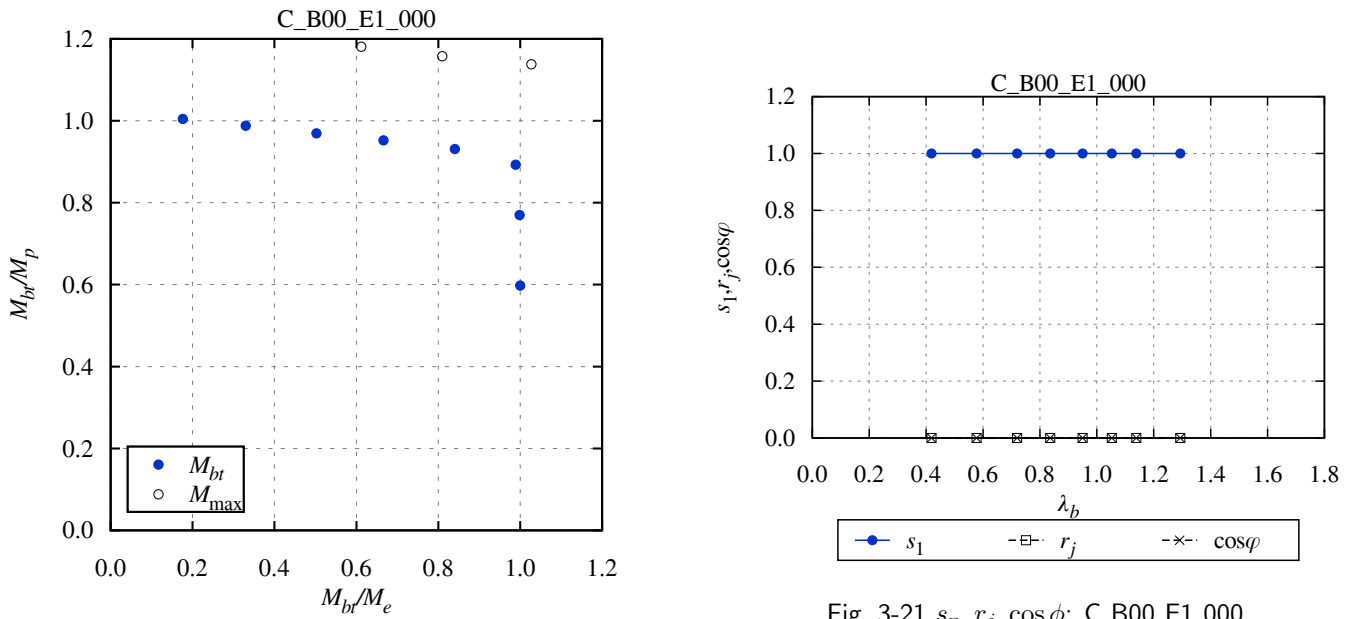


Fig. 3-21  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_B00.E1\_000

Fig. 3-20 Macroscopic instability surface: C\_B00.E1\_000

初期たわみなし (B00\_E1\_000)、一様曲げ

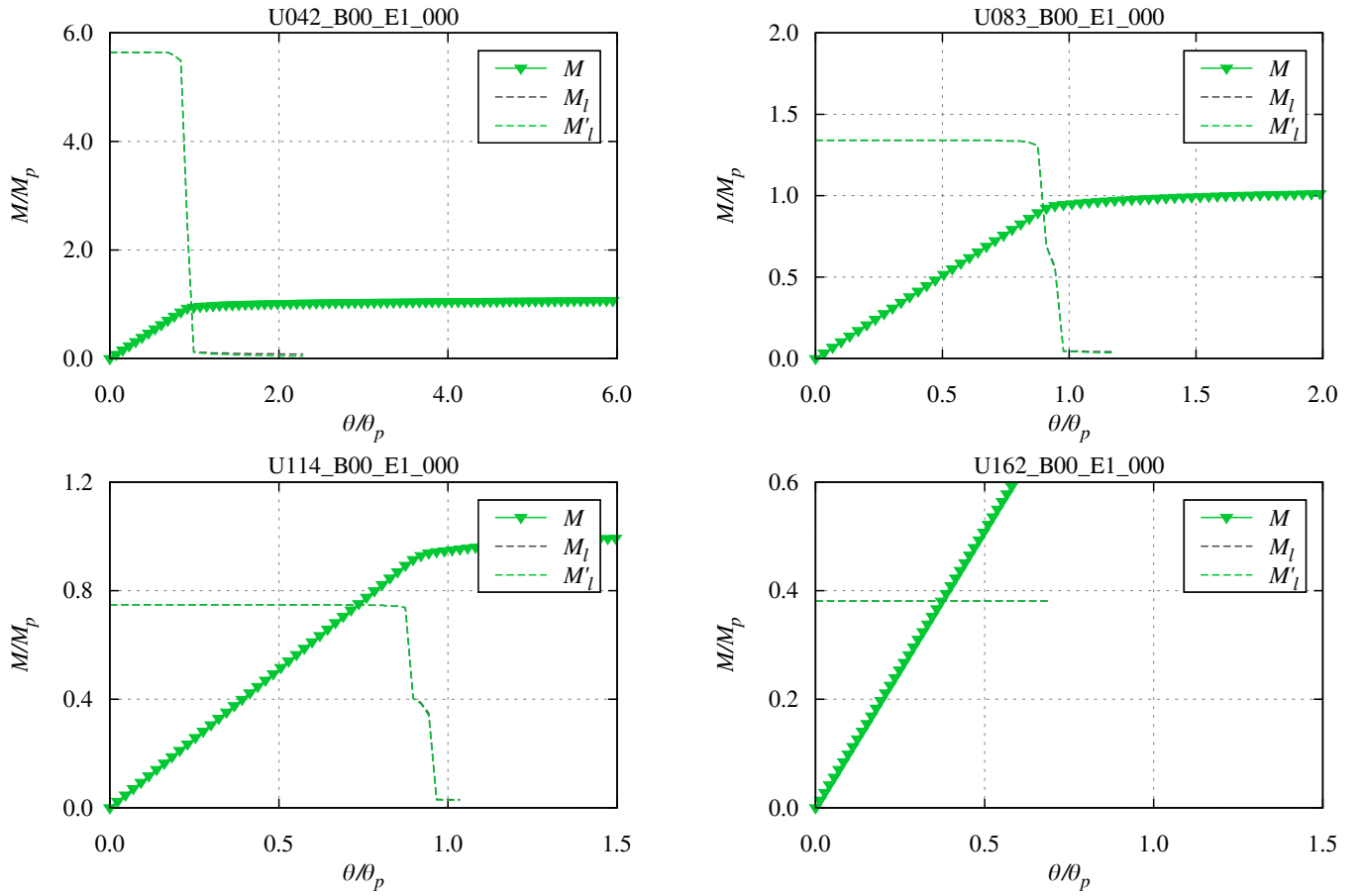


Fig. 3-22 Load-deformation curve: U\_B00.E1\_000

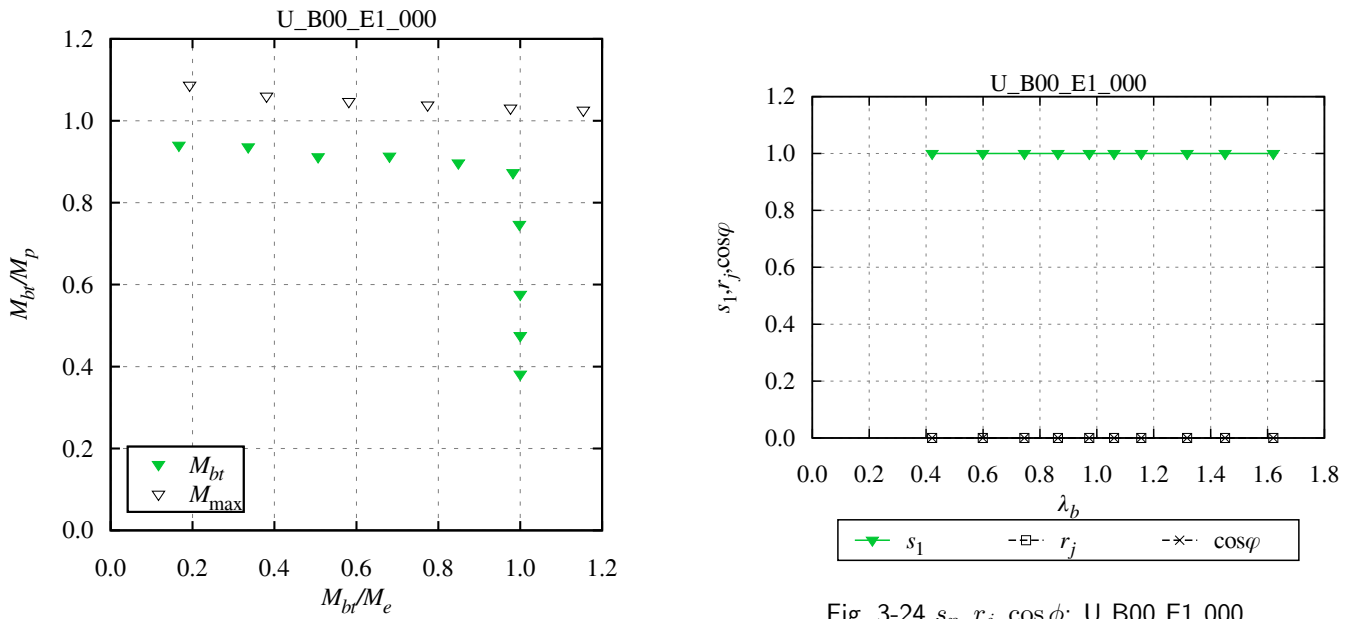


Fig. 3-24  $s_n, r_j, \cos\phi$ : U\_B00.E1\_000

Fig. 3-23 Macroscopic instability surface: U\_B00.E1\_000

## 3.5.3 完全弾塑性モデル、残留応力 30%、初期たわみなし (P03)

初期たわみなし (P03.E1.000)、逆対称曲げ

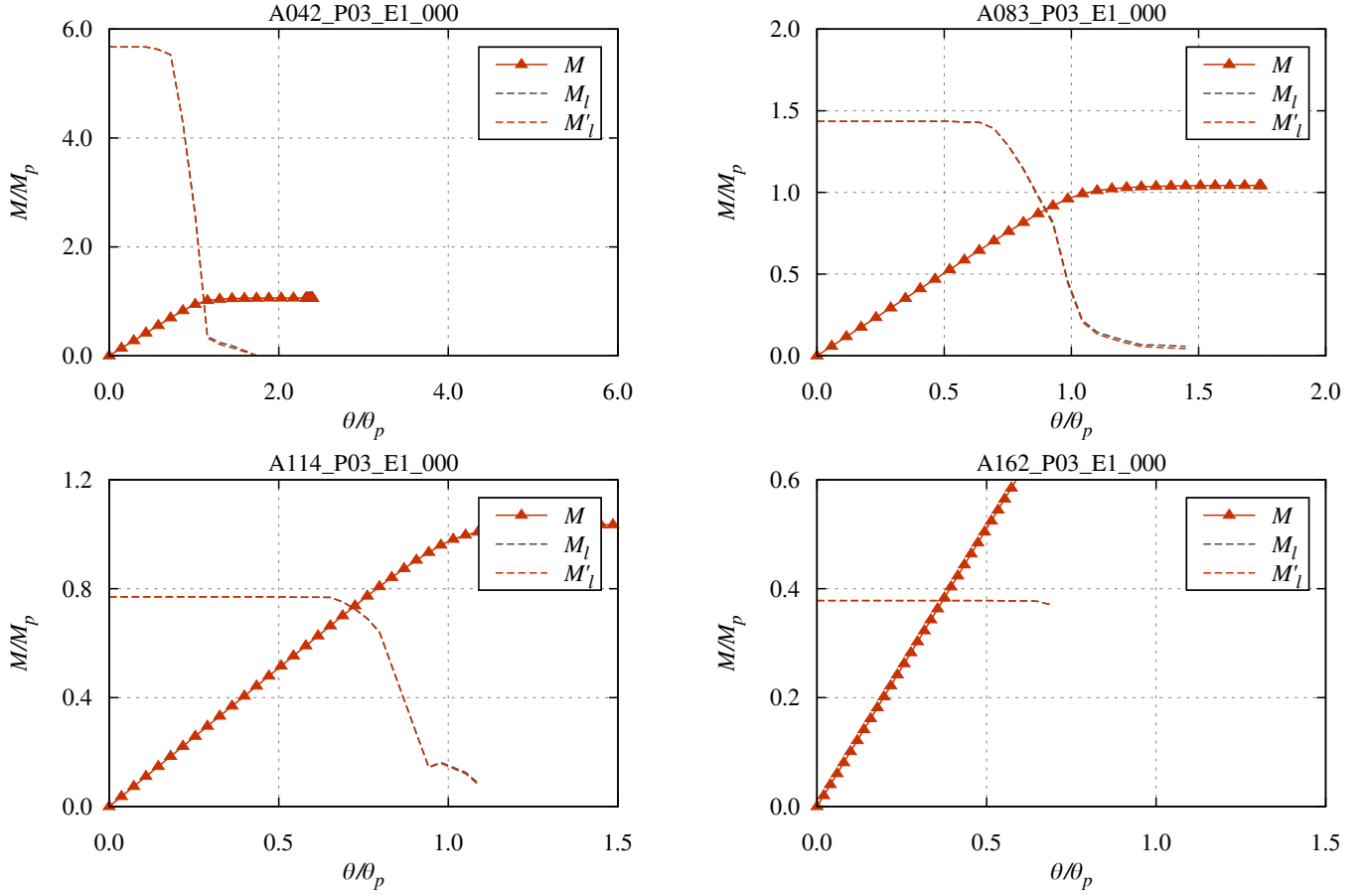


Fig. 3-25 Load-deformation curve: A\_P03.E1.000

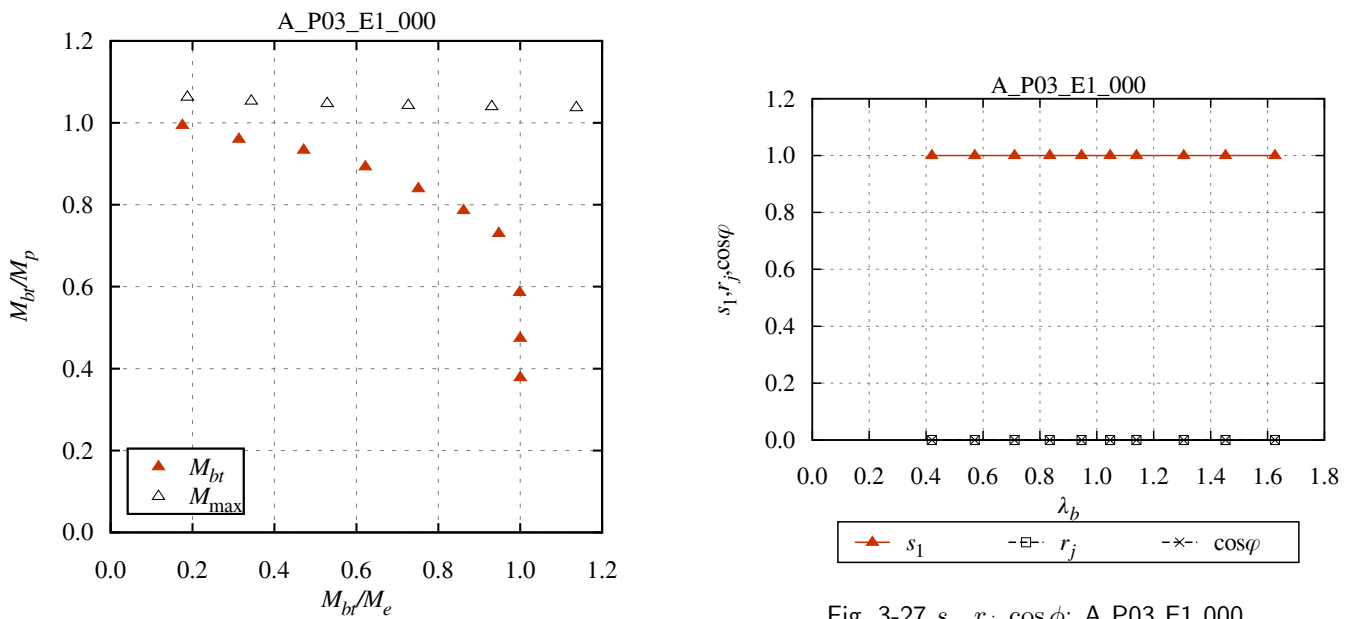
Fig. 3-27  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_P03.E1.000

Fig. 3-26 Macroscopic instability surface: A\_P03.E1.000

初期たわみなし (P03.E1\_000)、片曲げ

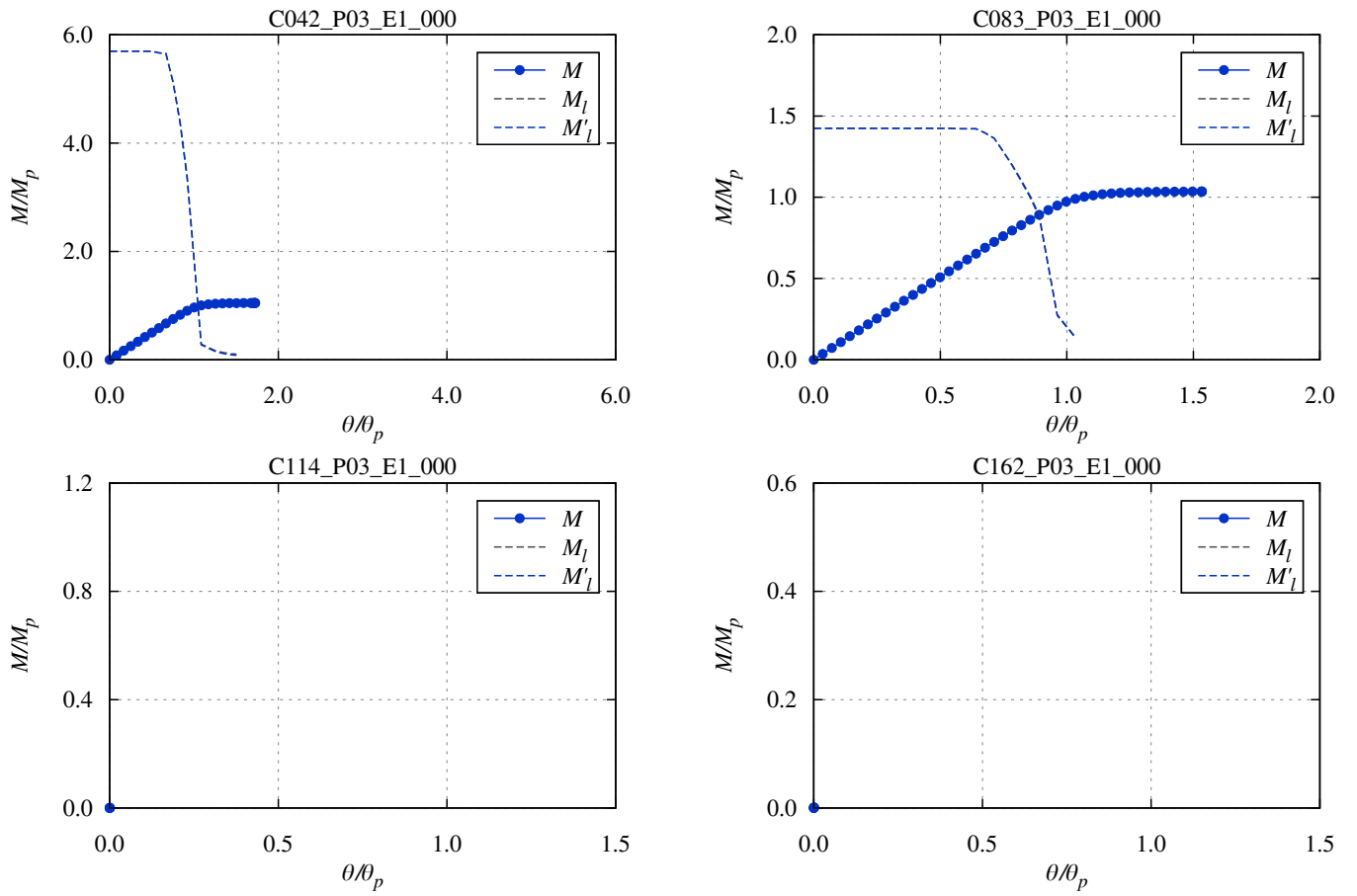


Fig. 3-28 Load-deformation curve: C\_P03.E1\_000

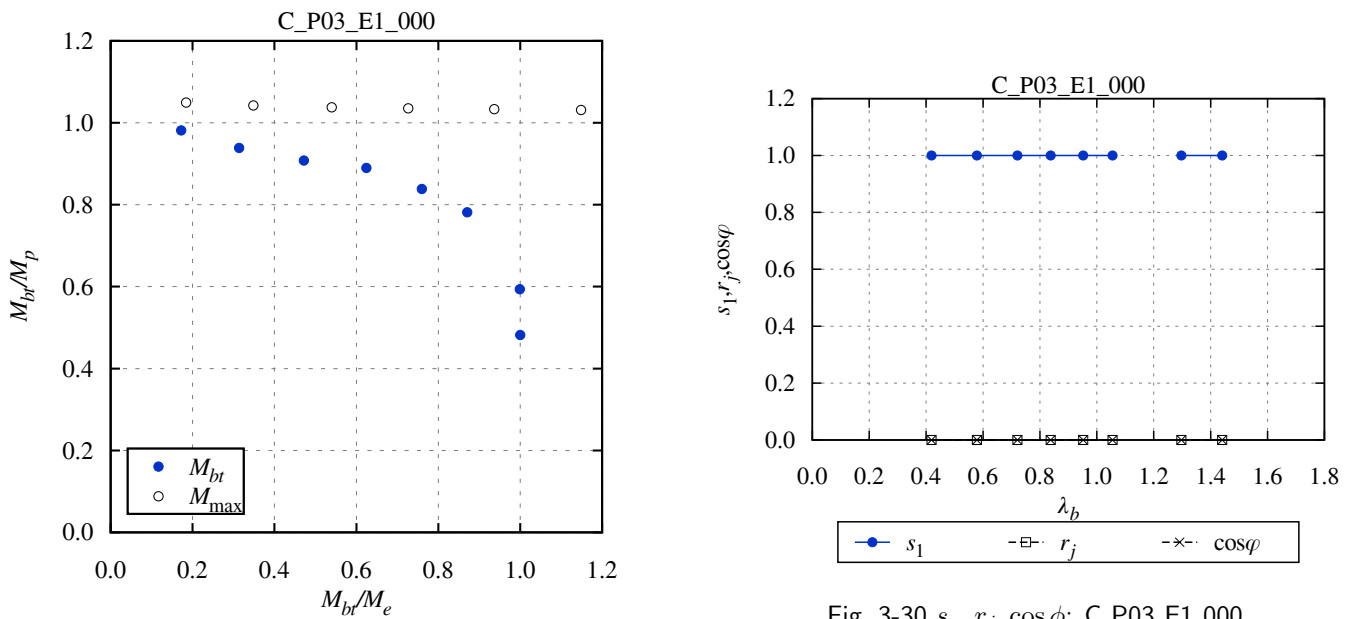


Fig. 3-29 Macroscopic instability surface: C\_P03.E1\_000

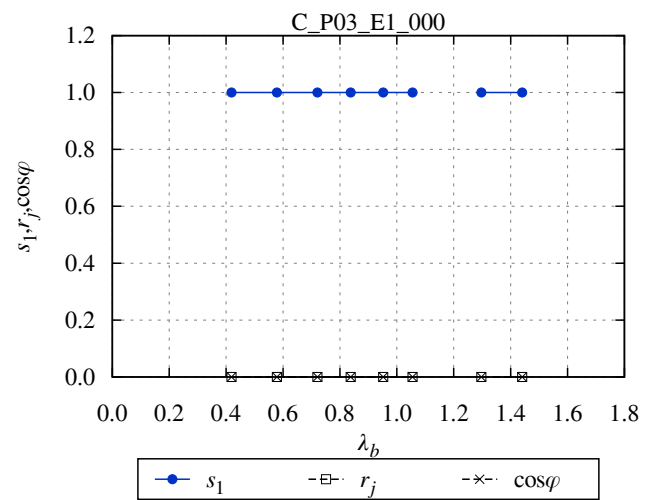


Fig. 3-30  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_P03.E1\_000



初期たわみなし (P03\_E1\_000)、一様曲げ

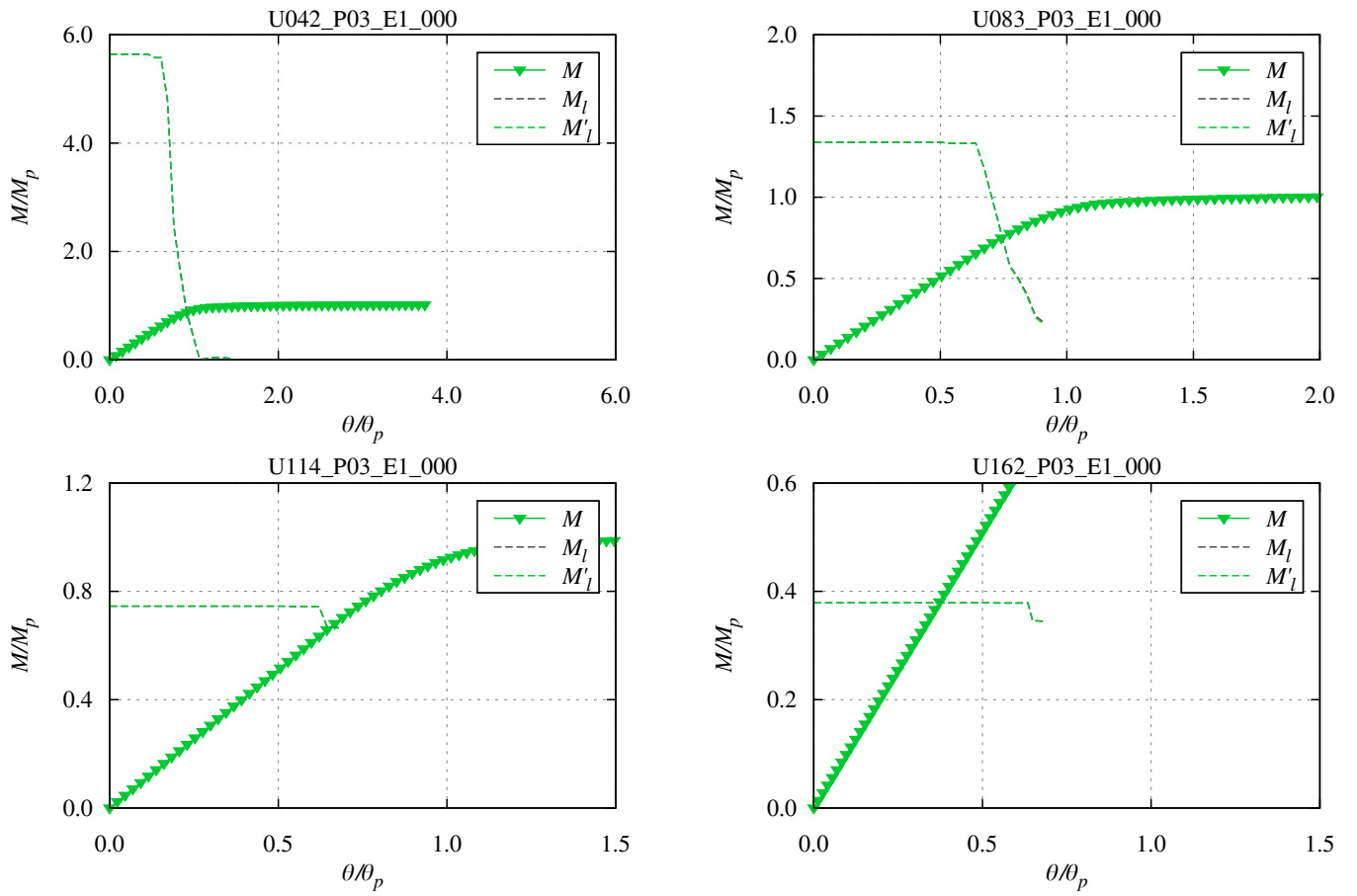


Fig. 3-31 Load-deformation curve: U\_P03.E1\_000

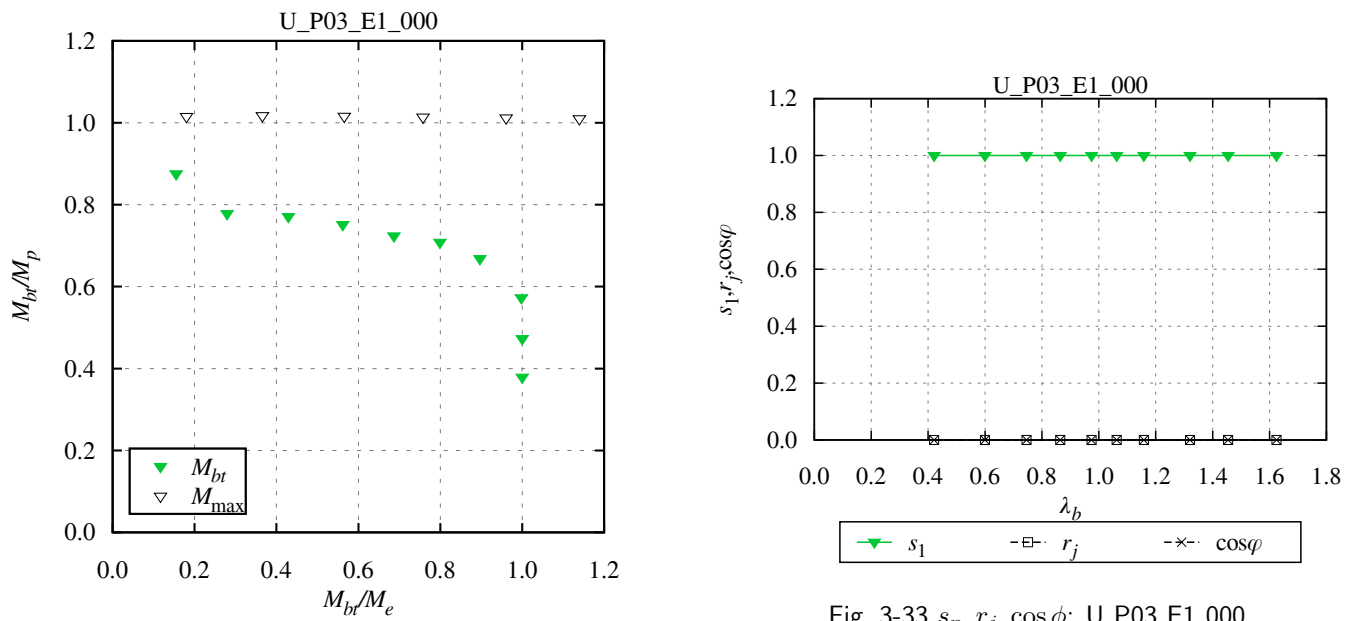


Fig. 3-33  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_P03.E1\_000

Fig. 3-32 Macroscopic instability surface: U\_P03.E1\_000

### 3.5.4 バイリニアモデル、残留応力 30%、初期たわみなし (B03)

初期たわみなし (B03.E1\_000)、逆対称曲げ

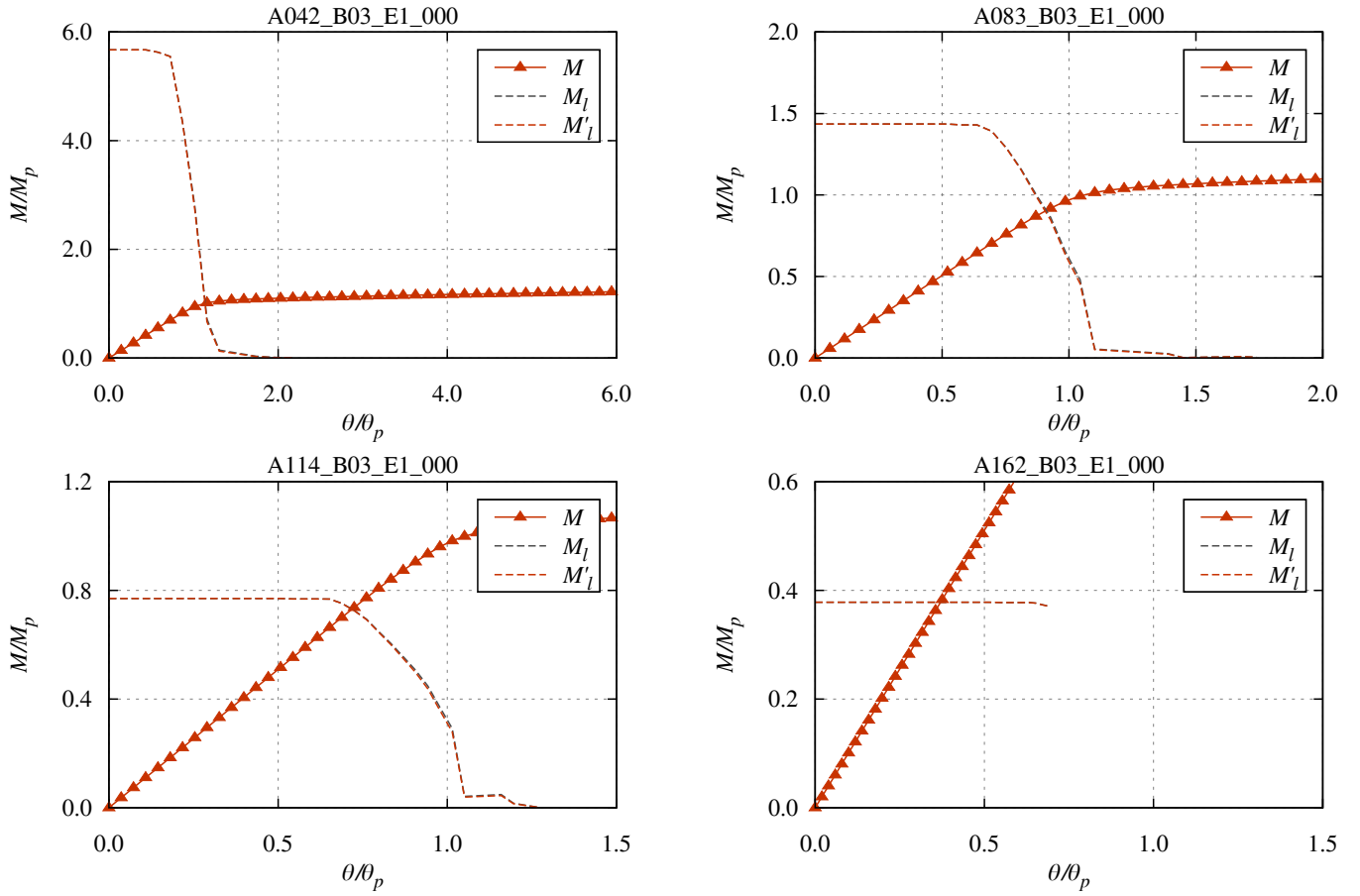


Fig. 3-34 Load-deformation curve: A\_B03.E1\_000

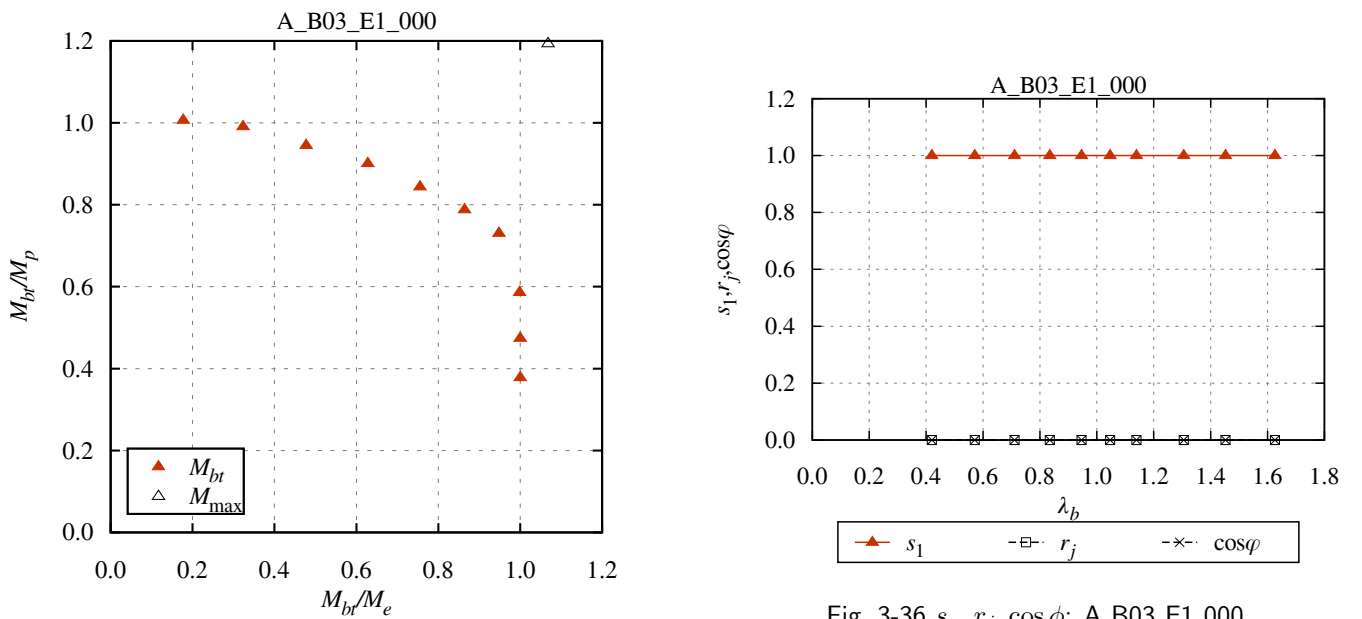


Fig. 3-35 Macroscopic instability surface: A\_B03.E1\_000

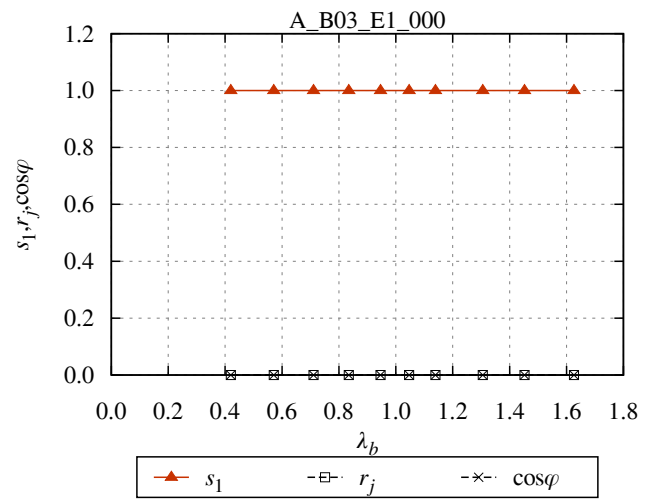


Fig. 3-36  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_B03.E1\_000

初期たわみなし (B03\_E1\_000)、片曲げ

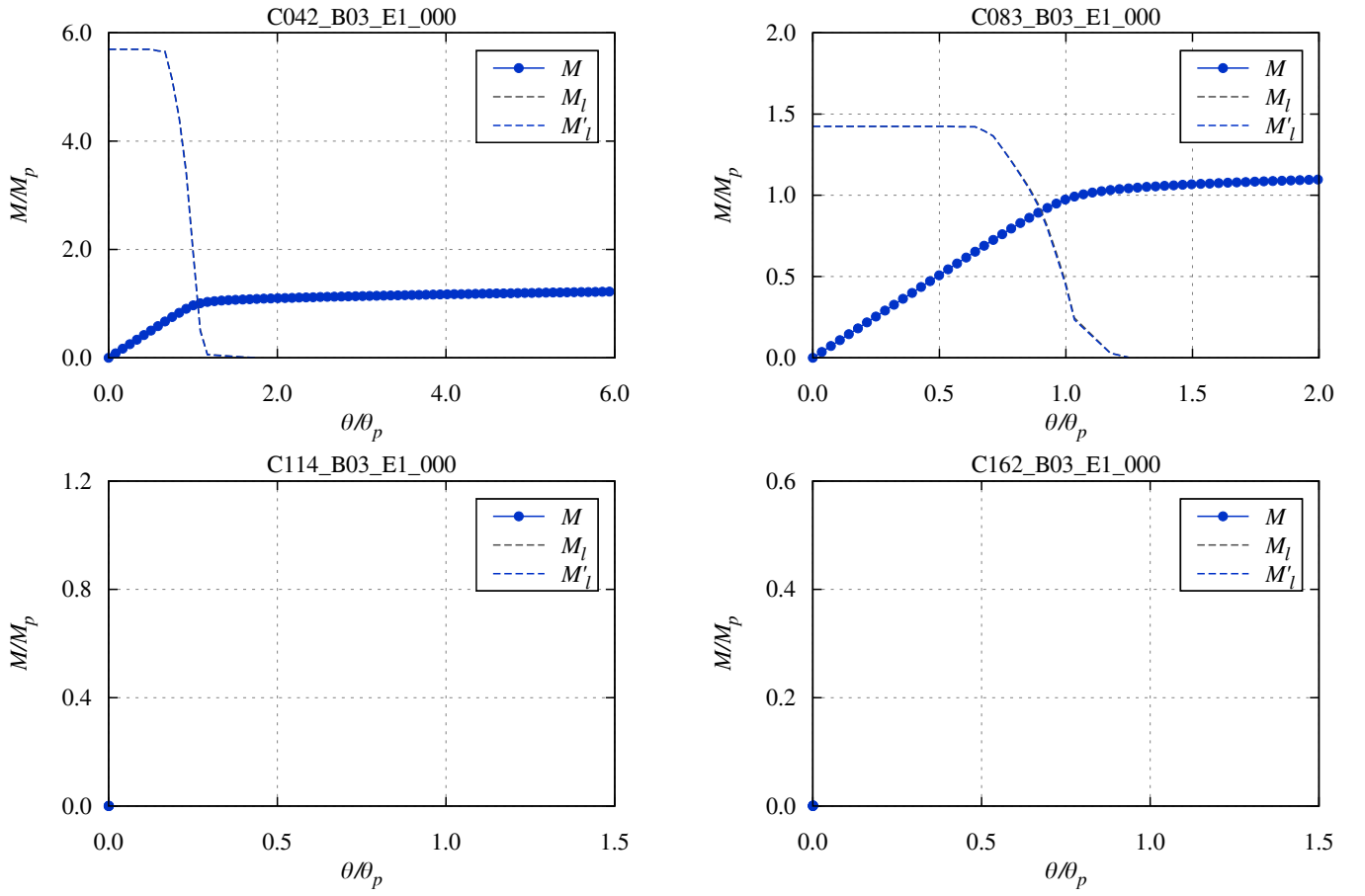


Fig. 3-37 Load-deformation curve: C\_B03.E1.000

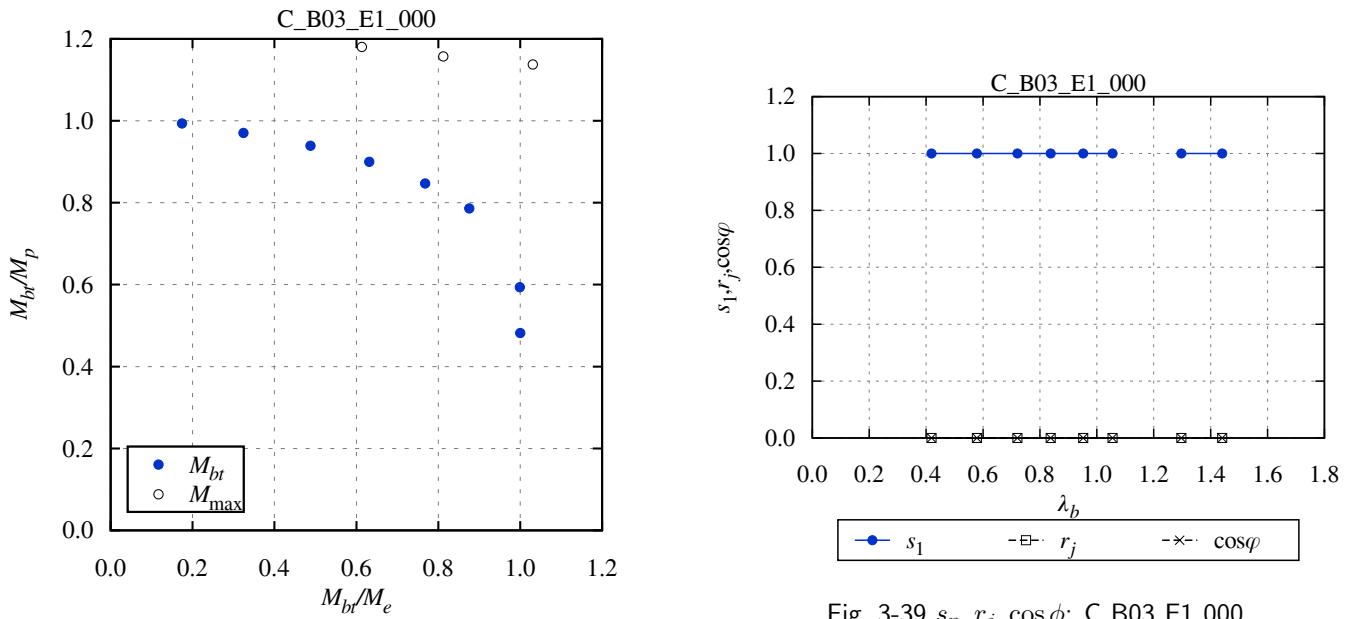


Fig. 3-39  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_B03.E1.000

Fig. 3-38 Macroscopic instability surface: C\_B03.E1.000

初期たわみなし (B03\_E1\_000)、一様曲げ

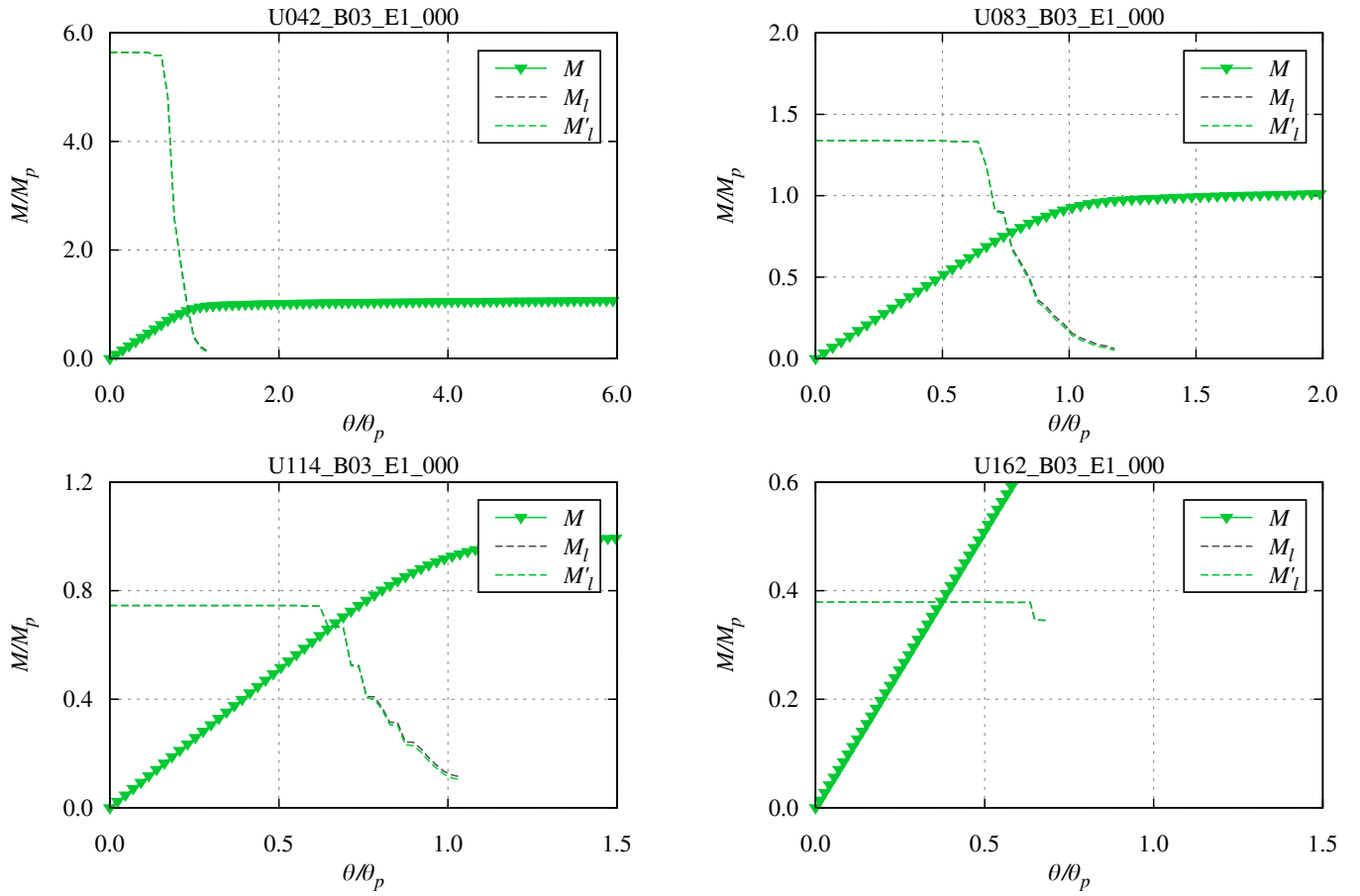


Fig. 3-40 Load-deformation curve: U\_B03.E1\_000

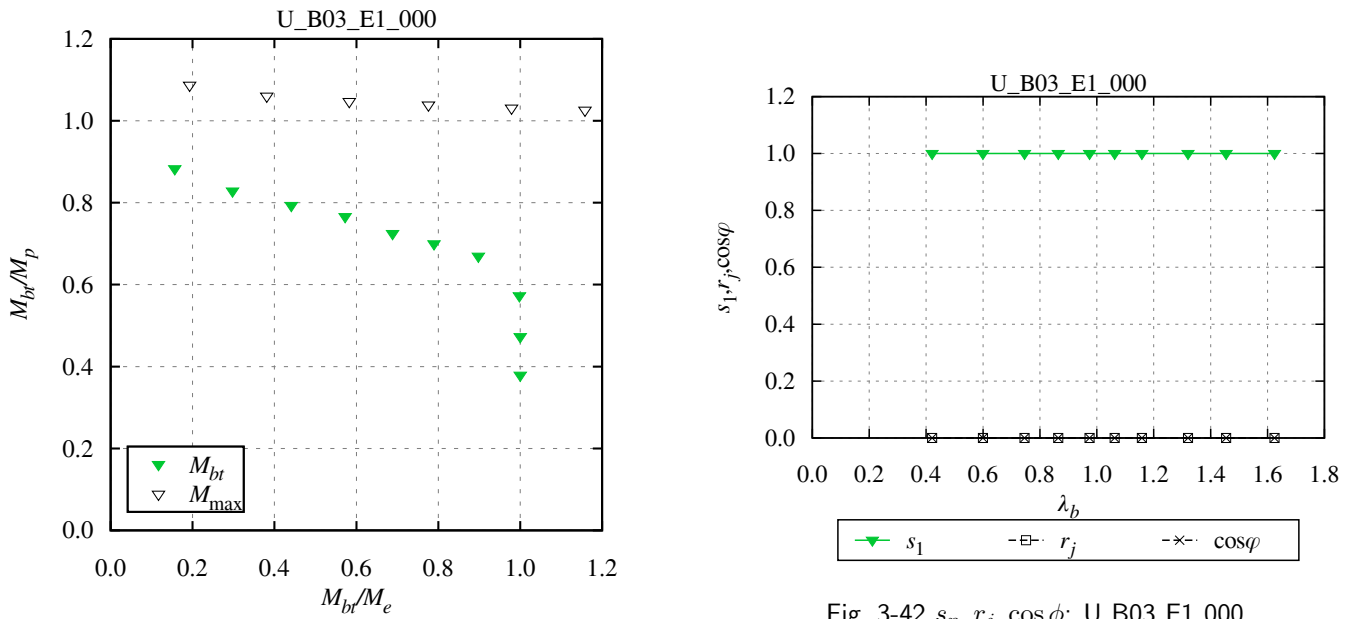


Fig. 3-41 Macroscopic instability surface: U\_B03.E1\_000

Fig. 3-42  $s_n, r_j, \cos\phi$ : U\_B03.E1\_000

### 3.6 残留応力の影響

#### 3.6.1 剛性低下曲線への影響

逆対称曲げ、完全弾塑性モデルの  $\lambda_b = 0.83$  (スパン 7.5[m]) と  $\lambda_b = 1.04$  (スパン 10.5[m]) の場合について、残留応力の有無が異なるモデル同士の荷重変形曲線と剛性低下曲線を比較すると、Fig.3-43、Fig.3-44 のようになる。実線は荷重変形曲線、破線は剛性低下曲線を表し、赤色は残留応力なしモデル (P00)、橙色は残留応力ありモデル (P03) を表す。

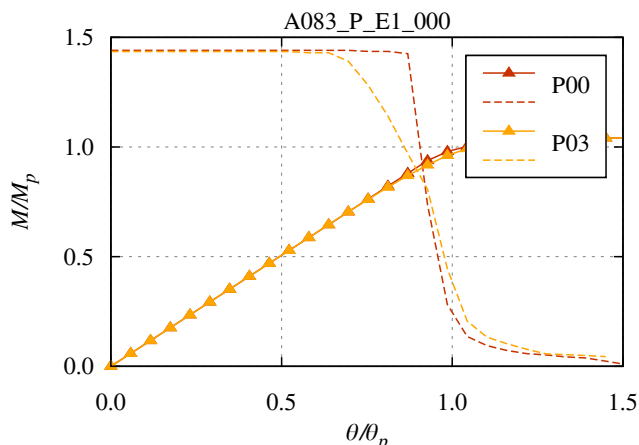


Fig. 3-43 Load-deformation curve: A083\_P\_E1\_000

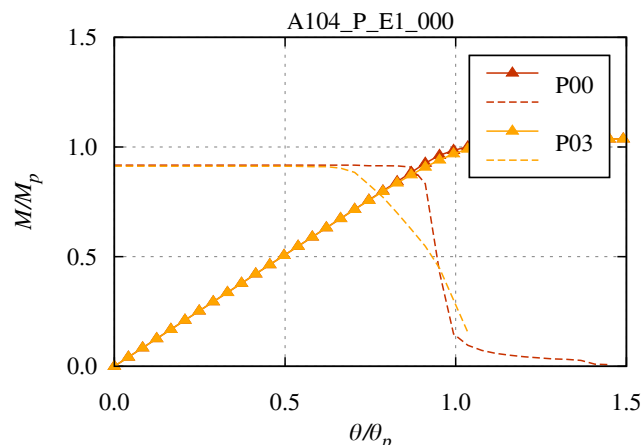


Fig. 3-44 Load-deformation curve: A104\_P\_E1\_000

荷重変形曲線と剛性低下曲線のそれぞれに対する残留応力の影響をみると、荷重変形曲線では  $\theta/\theta_p = 0.8$  付近から P03 モデルの方が P00 モデルよりもやや剛性が低下しているものの両者の差がわずかであるのに対し、剛性低下曲線では赤破線と橙破線の間に明瞭な差が現れている。

剛性低下曲線の縦軸の値 (横座屈モーメント  $M'_l$ ) の低下に着目すると、P00 モデル (赤破線) では  $\theta/\theta_p = 0.9$  付近で急激に低下しているのに対し、P03 モデル (橙破線) では  $\theta/\theta_p = 0.7$  付近から低下し始め、低下勾配は P00 モデルよりも緩やかになっている。これは、P00 モデルではフランジ幅方向に一斉に塑性化するのに対し、P03 モデルでは残留応力とフランジ応力の分布に応じて、圧縮側フランジではフランジ幅方向端部から、引張側フランジではフランジ幅方向中央部から、少しずつ塑性化領域が広がるためである (Fig.3-45、Fig.3-46、赤色は両面が塑性化した要素、黄色は片面のみが塑性化した要素、青色は塑性化していない要素を表す)。  $\theta/\theta_p = 0.9$  を超えると、P00 モデルよりも P03 モデルの方が値がやや大きくなっているが、これも残留応力の影響であり、残留応力がない場合に比べて、圧縮側フランジのフランジ幅方向中央部や引張側フランジのフランジ幅方向端部の塑性化が遅れるためだと考えられる。

P03 モデルの  $M'_l$  が低下し始める前の  $\theta/\theta_p \leq 0.7$  や、P00 モデルの  $M'_l$  が低下した後の  $\theta/\theta_p \geq 0.9$  では、P00 モデルと P03 モデルの  $M'_l$  の値の差は 0 またはわずかであり、 $M'_l$  の低下に対する残留応力の影響が大きいのは、両者の中間の  $0.7 \leq \theta/\theta_p \leq 0.9$  となっている。Fig.3-44 に示した  $\lambda_b = 1.04$  のモデルのように、この範囲で荷重変形曲線と剛性低下曲線が交差すると、分岐モーメント  $M_{bt}$  に対する残留応力の影響が現れ、残留応力の分布によらず、残留応力がある場合の方が  $M_{bt}$  は小さくなる。それよりも  $\lambda_b$  が大きいモデルは、 $\theta/\theta_p \leq 0.7$  で荷重変形曲線と剛性低下曲線が交差する場合に相当し、弾性座屈するため、残留応力の影響が出ない。逆に、Fig.3-43 に示した  $\lambda_b = 0.83$  のモデルのように、それよりも  $\lambda_b$  が小さいモデルでは、塑性化がかなり進行した段階で巨視的不安定状態に達するため、残留応力の影響はそれほど小さくなく、残留応力の分布によっては、残留応力がある場合の方が  $M_{bt}$  が大きくなる可能性もある。

曲げモーメント分布によって塑性化の進行状況が異なるため、残留応力の影響の現れ方は曲げモーメント分布の影響を受ける。そこで、片曲げモデルと一様曲げモデルについて同様の比較を行った結果を Fig.3-47～Fig.3-50 に示す。

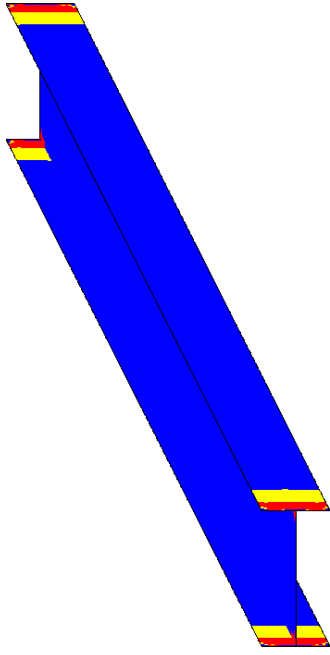


Fig. 3-45 Yielded area: A083\_P00\_E1\_000

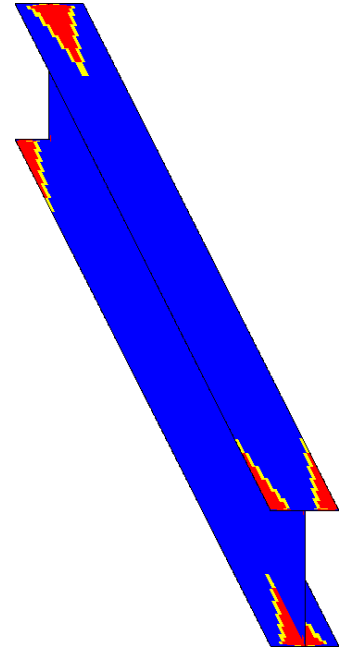


Fig. 3-46 Yielded area: A083\_P03\_E1\_000

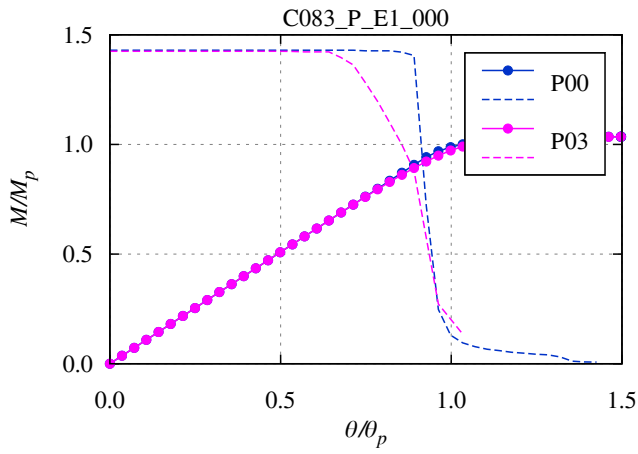


Fig. 3-47 Load-deformation curve: C083\_P\_E1\_000

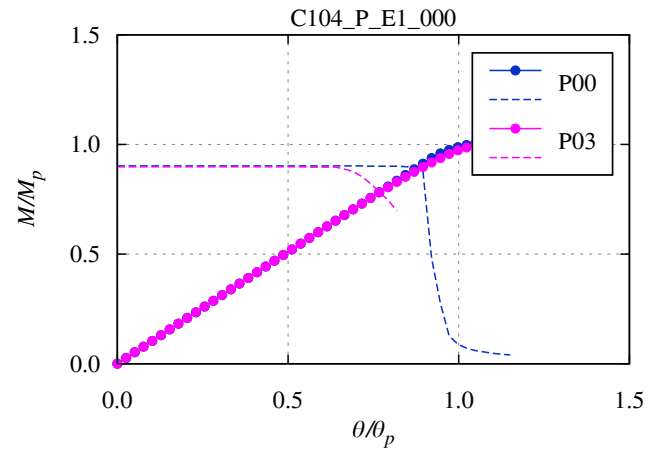


Fig. 3-48 Load-deformation curve: C104\_P\_E1\_000

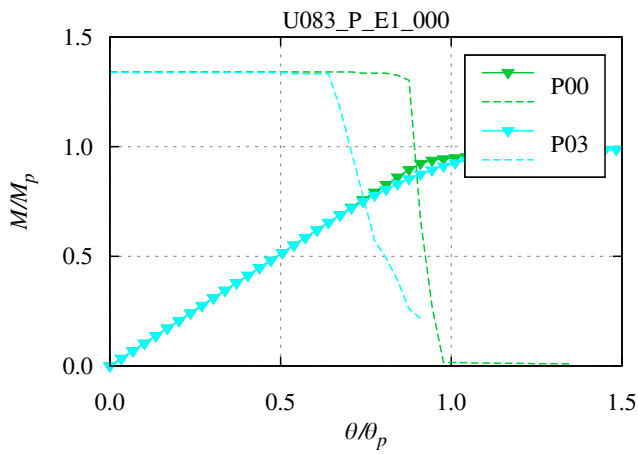


Fig. 3-49 Load-deformation curve: U083\_P\_E1\_000

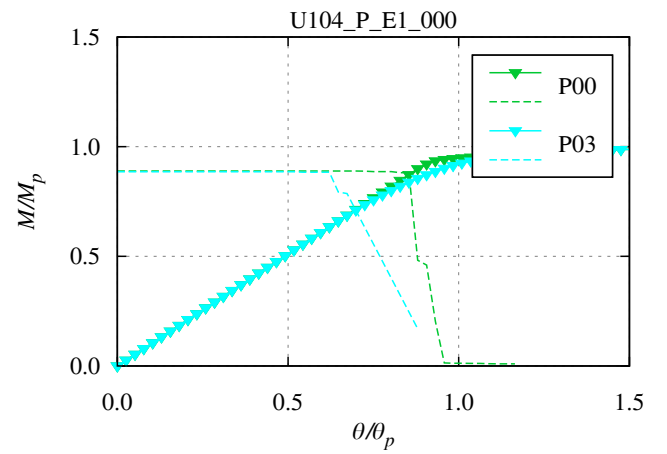


Fig. 3-50 Load-deformation curve: U104\_P\_E1\_000

片曲げモデルは逆対称曲げモデルと同様の傾向を示しているが、一様曲げモデルでは、剛性低下曲線の違いとして、

1. P03 モデルの  $M'_l$  の低下勾配が大きいこと
2.  $\theta/\theta_p \geq 0.9$  の範囲で  $M'_l$  がほぼ 0 になり、P03 モデルが P00 モデルを上回る現象がみられないこと

の 2 点が挙げられ、残留応力の有無による荷重変形曲線の違いも大きくなっている。これは、逆対称曲げモデルと片曲げモデルではモーメント勾配があるために梁の材軸方向端部から徐々に塑性化が進行するのに対し、一様曲げモデルでは梁の材軸方向に一斉に塑性化するという、塑性化の進行状況の違いを反映している (Fig.3-51、Fig.3-52)。

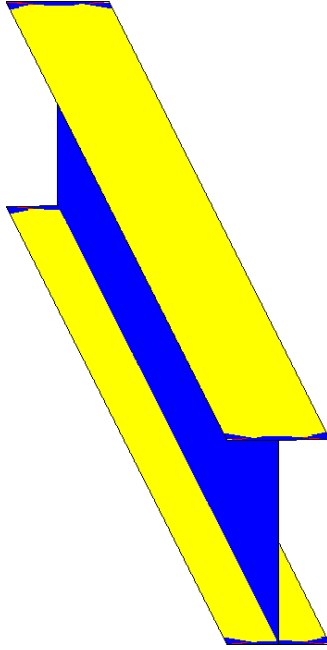


Fig. 3-51 Yielded area: U083\_P00\_E1.000

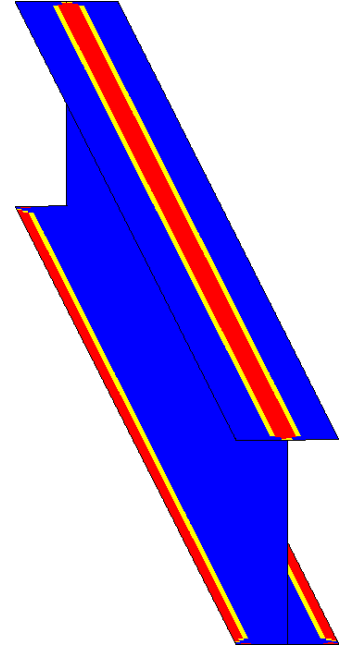


Fig. 3-52 Yielded area: U083\_P03\_E1.000

一様曲げモデルにおいて残留応力がある場合の  $M'_l$  の低下が大きいことは、 $\lambda_b$  が小さい範囲における残留応力による  $M_{bt}$  の低下量が、他の曲げモーメント分布に比べて大きくなることにつながる。この点については、次項にて巨視的不安定曲面を用いて確認する。

### 3.6.2 巨視的不安定曲面への影響

巨視的不安定曲面における点 E は、材料非線形性による微視的不安定性の影響の有無が変化する点であり、梁の一部が降伏を開始するときの荷重と分岐モーメント  $M_{bt}$  が一致するという条件から、点 E の縦座標を予測することができる。

本章では初期たわみを有しないモデルのみを対象としているため、 $M_{bt}$  に対する塑性化の影響が出始める  $\lambda_b$  の値は、曲げモーメント分布の影響を受けない。これは、Fig.3-43～Fig.3-50 に示した剛性低下曲線において、 $M'_l$  の値が低下し始めるときの横軸の値が、曲げモーメント分布によらず一致していることと対応している。

残留応力がない場合には、梁が降伏を開始するときの荷重は降伏モーメント  $M_y$  であり、点 E の縦座標は、形状係数  $f = Z_{px}/Z_x$  を用いて、 $1/f$  として予測できる。残留応力がある場合、Fig.3-3 に示した残留応力分布の影響で、圧縮側フランジではフランジ幅方向端部、引張側フランジではフランジ幅方向中央部で、早期に降伏するようになる。残留応力の大きさを  $\sigma_r$  として、梁端モーメントが  $M'_y = (\sigma_y - \sigma_r)Z_x$  に達したときに降伏すると考えると、点 E の縦座標は、 $(1 - \sigma_r/\sigma_y)/f$  として予測できる。この結果は、Galambos<sup>26)</sup> の結果とも一致している。

完全弾塑性モデルについて、残留応力がない場合 (Fig.3-53) と残留応力 30% の場合 (Fig.3-54) の巨視的不安定曲面に点 E

の縦座標の予測値を記入したものを示す。残留応力なしの場合は、Table3-1 の値を用いて、 $1/f = 185.121/210.688 = 0.879$ 、残留応力 30% の場合は、 $\sigma_r = 0.3\sigma_y$  として、 $(1 - \sigma_r/\sigma_y)/f = 0.615$  を、それぞれの予測値としている。

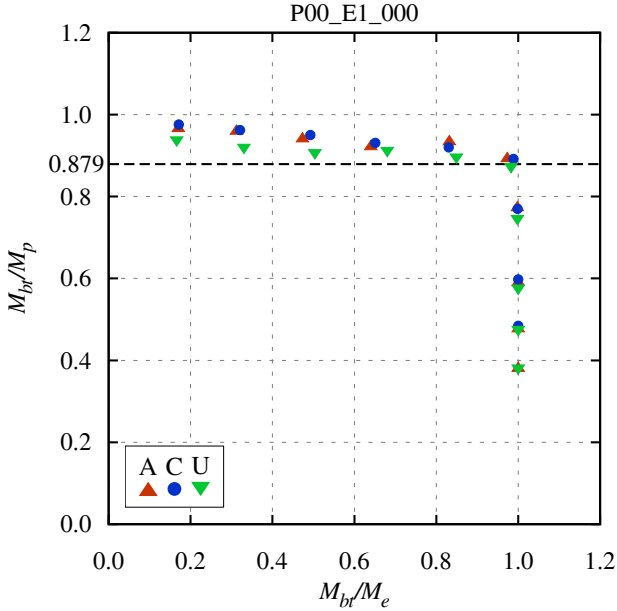


Fig. 3-53 Macroscopic instability surface: P00

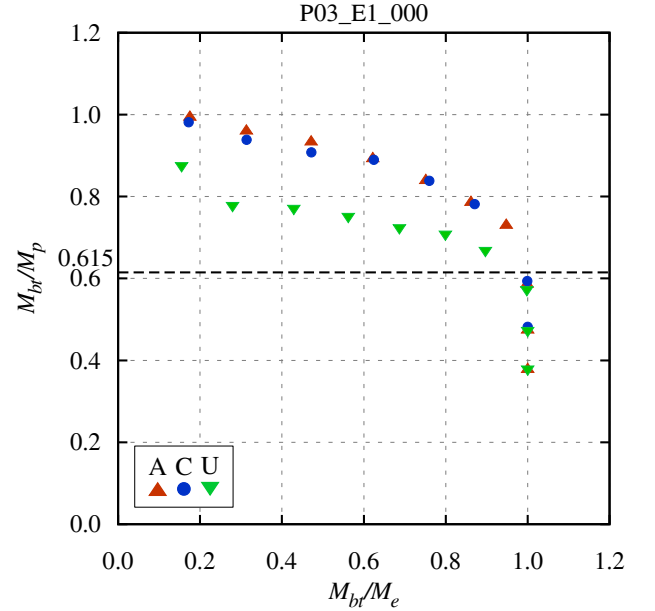


Fig. 3-54 Macroscopic instability surface: P03

上記の予測のとおり、点 E の縦座標は、曲げモーメント分布によらず、残留応力で決まっており、残留応力なしと残留応力 30% のいずれの場合も、横軸の値が一定となる点は、破線で示した予測値の位置と概ね一致している。

破線よりも上側における  $M_{bt}$  の傾向を確認すると、残留応力の有無によらず、逆対称曲げモデルと片曲げモデルが概ね一致していることと、一様曲げモデルが他の曲げモーメント分布よりも縦軸の値が小さいことがわかる。残留応力のないモデルで一様曲げモデルの  $M_{bt}$  が小さいことは、前項で述べた曲げモーメント分布による剛性低下曲線の違いの 2 点目に対応しており、逆対称曲げモデルや片曲げモデルでは  $\theta/\theta_p \geq 0.9$  での  $M'_l$  の低下が一旦緩やかになる領域があるのに対し、一様曲げモデルでは 0 まで急激に低下することを反映している。残留応力のあるモデルで一様曲げモデルの  $M_{bt}$  が小さいことは、剛性低下曲線の違いの 1 点目に対応しており、残留応力があることによって早期に  $M'_l$  が低下し始めた段階で、逆対称曲げモデルや片曲げモデルでは低下勾配が緩やかなのに対し、一様曲げモデルでは低下勾配が急であることを反映している。これらはいずれも、Fig.3-45 や Fig.3-51 などに示した塑性化進展状況の違いに起因している。



## 3.7 材料特性の影響

## 3.7.1 剛性低下曲線への影響

バイリニアモデルについて、残留応力の有無が異なるモデルの荷重変形曲線と剛性低下曲線を比較したものを Fig.3-55～Fig.3-60 に示す。図中には、前節に示した完全弾塑性モデルのグラフを黒の細実線と細破線で記入している。

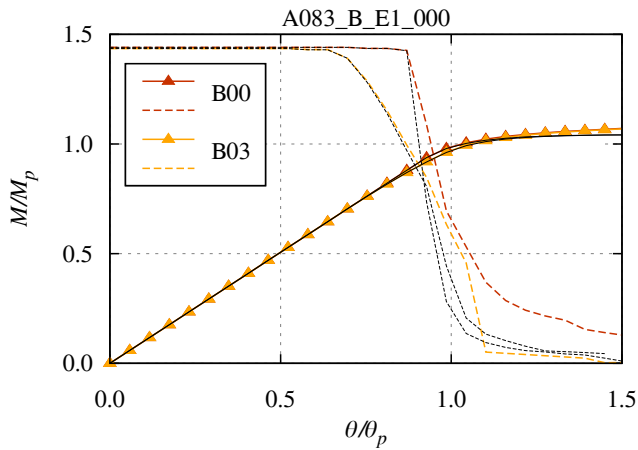


Fig. 3-55 Load-deformation curve: A083\_B.E1\_000

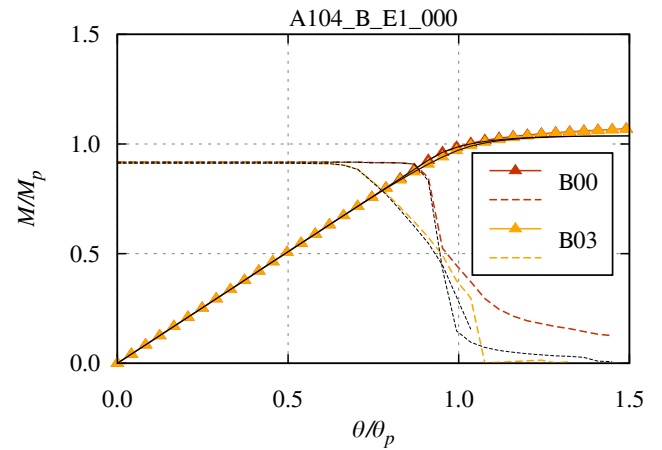


Fig. 3-56 Load-deformation curve: A104\_B.E1\_000

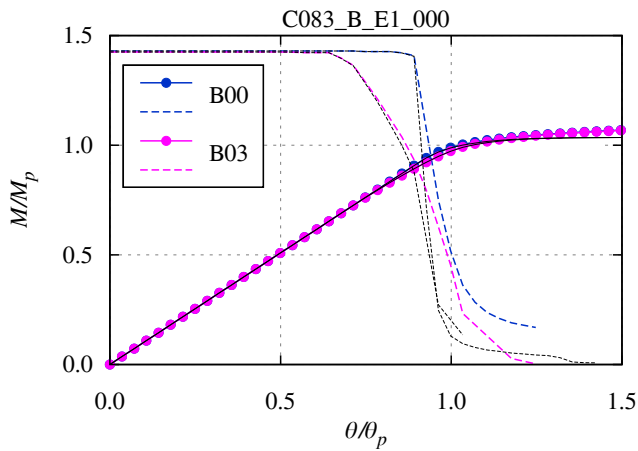


Fig. 3-57 Load-deformation curve: C083\_B.E1\_000

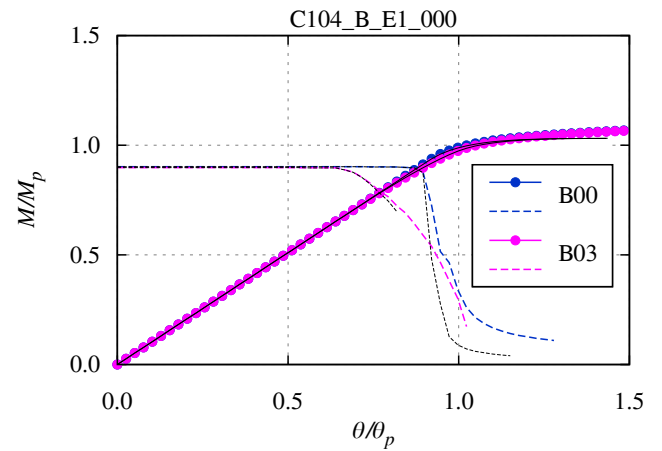


Fig. 3-58 Load-deformation curve: C104\_B.E1\_000

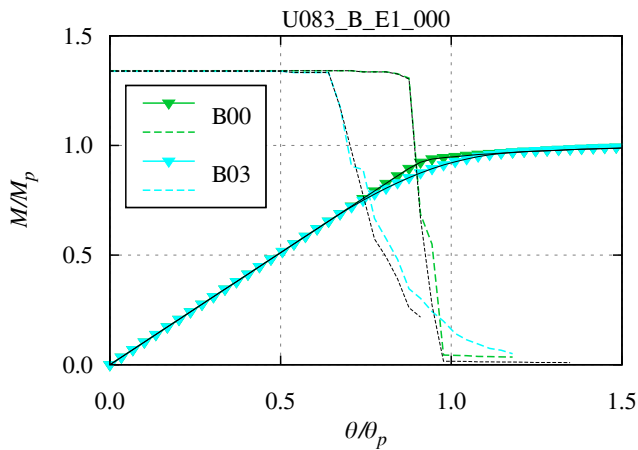


Fig. 3-59 Load-deformation curve: U083\_B.E1\_000

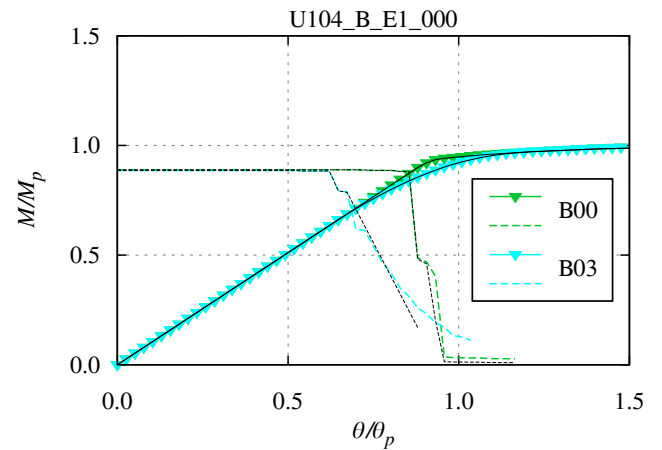


Fig. 3-60 Load-deformation curve: U104\_B.E1\_000

材料特性が異なるモデル同士の荷重変形曲線を比較すると、逆対称曲げモデルや片曲げモデルでは、 $\theta/\theta_p \geq 1.0$  の範囲で完全弾塑性モデルとバイリニアモデルの間に差がみられるが、 $M_{bt}$  への影響という観点からは、荷重変形曲線に対する材料特性の影響はないと言える。

剛性低下曲線を比較すると、 $M'_l$  が低下し始める  $\theta/\theta_p$  の値には変化がみられないが、低下勾配については、バイリニアモデル (赤破線、橙破線) の方が完全弾塑性モデル (黒破線) よりも緩やかになっている。これは、塑性化が開始するときの梁端回転角には二次剛性は影響しないが、塑性化した部分の剛性が大きいほど座屈耐力は高くなることと対応している。

残留応力の異なるモデル同士を比較すると、残留応力のないモデルの方が二次剛性の影響が大きく、曲げモーメント分布の異なるモデル同士を比較すると、逆対称曲げモデルや片曲げモデルでは二次剛性の影響が大きいのにに対し、一様曲げモデルでは二次剛性による剛性低下の違いがあまりみられない。塑性化領域の分布としては、塑性化領域が梁幅方向には広く、材軸方向には狭いほど、二次剛性の影響が大きくなっている。

また、低下勾配が緩くなることの影響は  $\theta/\theta_p$  の値が大きいほど増加するため、 $\theta/\theta_p$  が大きい範囲で荷重変形曲線と剛性低下曲線が交差する  $\lambda_b$  が小さいモデルほど、二次剛性が大きくなることによる  $M_{bt}$  の上昇は大きくなる (例えば、Fig.3-55 と Fig.3-56 では、Fig.3-55 の方が、完全弾塑性モデルに対するバイリニアモデルの  $M_{bt}$  の上昇が大きい)。

剛性低下曲線でもうひとつ異なる点として、バイリニアモデルの逆対称曲げモデルや片曲げモデルでは、 $\theta/\theta_p \geq 0.9$  において、残留応力のないモデルと残留応力のあるモデルの剛性低下曲線の上下関係が逆転しないことが挙げられる。そのため、バイリニアモデルの逆対称曲げモデルや片曲げモデルでは、完全弾塑性モデルでみられたような、残留応力がある場合の方が  $M_{bt}$  が大きくなる現象は確認されていない。

### 3.7.2 巨視的不安定曲面への影響

B00 モデルと B03 モデルの巨視的不安定曲面を Fig.3-61、Fig.3-62 に示す。図中には、白抜きプロットで P00 モデルと P03 モデルを記入し、前節と同様に点 E の縦座標の予測値を破線で示している。

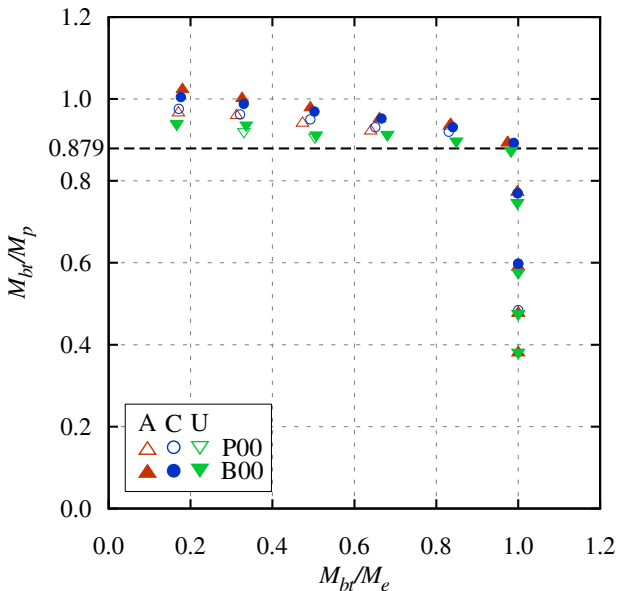


Fig. 3-61 Macroscopic instability surface: B00

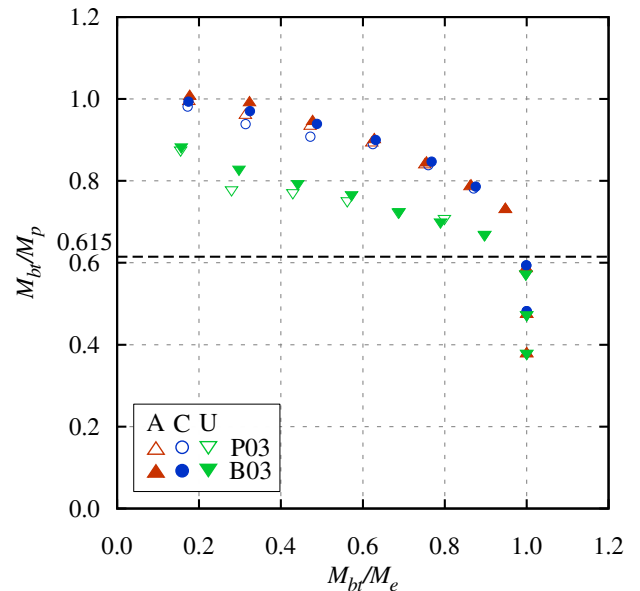


Fig. 3-62 Macroscopic instability surface: B03

点 E よりも  $\lambda_b$  が小さい範囲ではバイリニアモデルの方が  $M_{bt}$  が大きくなっており、二次剛性の影響がみられるが、前項で述べたとおり、塑性化が開始するときの梁端回転角には二次剛性は影響しないため、点 E の縦座標は、材料特性によらず前節で示した予測値と概ね一致している。

### 3.8 結

本章では、材料非線形性による剛性低下のみを有する場合について、逐次座屈固有値解析法を用いた検討結果を示した。

材料非線形性による剛性低下の影響は、荷重増分解析において塑性化した要素のヤング係数を Tangent modulus theory に基づいて低下させることで考慮され、座屈モーメント  $M_l$  の減少として現れる。梁端モーメント  $M$  と  $M_l$  が一致する点において荷重変形関係の釣合経路が分岐すると考えられるため、その時点での荷重を分岐モーメント  $M_{bt}$  と称し、最大曲げ耐力の予測下限値としている。ただし、本章で取り扱った解析モデルでは面外変形が生じず釣合経路が分岐しないため、荷重増分解析で得られる最大荷重  $M_{\max}$  は  $M_{bt}$  を大きく上回っている。

曲げモーメント分布と残留応力の有無に応じた塑性化進展状況の違いと塑性化領域のヤング係数の大きさに応じて、 $M_l$  の減少の仕方や  $M_{bt}$  の大きさが変化するため、曲げモーメント分布 (3 通り)、残留応力の有無 (2 通り)、材料特性 (2 通り) が材料非線形性による剛性低下に与える影響について、剛性低下曲線と巨視的不安定曲面を用いて考察した。

本章で得られた知見を以下に示す。

1. 剛性低下に対する曲げモーメント分布の影響は、塑性化領域分布の違いとして捉えることができる。逆対称曲げモデルと片曲げモデルではモーメント勾配があり、梁端部から徐々に塑性化が進行する点が共通しているため、剛性低下の傾向も概ね一致している。それに対し、一様曲げモデルでは梁が材軸方向に一斉に塑性化するため、逆対称曲げモデルや片曲げモデルに比べると塑性化領域が広く、剛性低下量が大きい傾向にある。
2. 剛性低下に対する残留応力の影響は、塑性化領域分布の変化として捉えることができる。
  - (a) 塑性化開始時点の変化は、曲げモーメント分布や二次剛性によらず、残留応力のみによって決まる。
  - (b) 塑性化が十分に進行した段階では塑性化領域の変化の影響が小さくなる傾向にある。
  - (c) 一様曲げモデルは他の曲げモーメント分布に比べると、塑性化の進行度によらず残留応力の影響が大きい。
3. 二次剛性が大きくなると剛性低下は抑制されるが、その影響の大きさには次のような傾向がある。
  - (a) 一様曲げモデルは他の曲げモーメント分布に比べて二次剛性の影響が小さい。
  - (b) 残留応力の有無を比較すると、残留応力がないモデルの方が二次剛性の影響が大きい。
  - (c) 横座屈細長比  $\lambda_b$  が小さいモデルの方が二次剛性の影響が大きい。

## 4 幾何学的非線形性を考慮した最大曲げ耐力評価

### 4.1 序

2章で概要を述べたように、幾何学的非線形性による剛性低下のみが生じる場合には、全変形量に占める座屈モード方向への変形量の割合に応じて座屈モーメント  $M_l$  が低下したものとみなすことで剛性低下の影響を考慮する。

本章では、幾何学的非線形性による剛性低下の影響を定量的に評価する具体的な方法を述べた後、幾何学的非線形性による剛性低下のみが生じる場合について、逐次座屈固有値解析法を用いた検討を行い、初期たわみ形状や初期たわみ量が剛性低下に与える影響について考察する。

### 4.2 解析モデル

#### 4.2.1 概要

有限要素解析モデルは第3章で述べたものと同様であるが、本章では材料特性はすべて弾性モデル (E)、残留応力はなしとし、次項に述べる初期たわみを導入する。

#### 4.2.2 初期たわみ

青木ら<sup>41)</sup>は、H形断面材の初期たわみを実測した上で、弱軸方向の初期たわみ形状を一山～三山の正弦波の重ね合わせで表現している。一山～三山の成分比は約 6:2:1 であり、最大たわみ量は材長の 1/400 程度となっている。初期たわみの変動が座屈耐力の変動に与える影響を統計的な観点で整理した井戸田らの研究<sup>18)</sup>では、梁スパンの 1/2000～1/200 の正弦半波と梁スパンの 1/100000 の正弦一波を重ね合わせた合成波を用いた面外変形とねじれ変形の初期たわみと、板要素に対する初期たわみを与えた解析を行っている。木村らの研究<sup>43)</sup>では、引張フランジが補剛された H 形断面梁の横座屈挙動について、梁スパンの 1/2500 の正弦半波と梁スパンの 1/10000 の正弦一波を重ね合わせた合成波の面外変形とねじれ変形の初期たわみを与えた数値解析結果を実験結果と比較し、妥当性を確認している。また、有限要素モデルを用いた数値解析を行う場合には、線形座屈固有値解析によってもとめた座屈モード形状の初期たわみを与えることもある<sup>44)</sup>。

本研究では、4.4 節で後述するように、変形ベクトルと座屈モードベクトルを用いて幾何学的非線形性の影響を考慮するため、初期たわみ形状としても座屈モード形状が重要になる。そこで初期たわみ形状として、弾性一次座屈モード (E1)、弾性二次座屈モード (E2)、正弦半波 (SH) の 3 通りについて検討する。

初期たわみ量については、梁スパンに対する最大たわみ量の比で表したとき、既往研究<sup>41)</sup>での実測値が 1/400 程度であること、鉄骨の製作および施工時の寸法精度の許容差を定めた鉄骨精度検査基準<sup>45)</sup>において「(4) 梁の曲がり」の限界許容差が 1.5/1000 以下かつ 15mm 以下とされていること、既往研究<sup>18)43)</sup>での数値解析時に 1/2000 程度とされることが多いことを考慮して、1/10000 (001)、1/2000 (005)、1/1000 (010)、1/500 (020) の 4 通りについて検討する。

### 4.3 解析手順

前節で示した解析モデルを用い、次のような一連の解析を行う。

#### 手順 1

材料非線形性および幾何学的非線形性を考慮した荷重増分解析を行う

#### 手順 2

荷重増分解析の各段階について、変形形状を考慮した座屈固有値解析を行う

#### 手順 3

手順 1 で得られた変形ベクトルと手順 2 で得られた固有ベクトルから幾何学的非線形性による剛性低下量を求める

一連の解析はプログラムを用いて行っており、具体的な処理としては次のようになる。

1. 所定のパラメタを有する解析モデルを作成する
2. 弾性横座屈モーメント  $M_e$  と、弾性座屈モード形状の初期たわみを有するモデルの初期たわみ形状を求めるために、線形座屈固有値解析を行う
3. 大変形の定式を使用した静的応力解析を行う (手順 1)
4. 静的応力解析の各インクリメントについて、静的応力解析用と同じモデルを新たに生成し、
  - (a) 各要素について、塑性化の有無に応じて材質を再設定する
  - (b) 当該インクリメントにおける変形状  $d$  を初期たわみとして再設定する
  - (c) 横座屈モーメント  $M_l$  と座屈モード形状  $e$  を求めるために、線形座屈固有値解析を行う (手順 2、3.4 節)
  - (d)  $d$  と  $e$  から、幾何学的非線形性による剛性低下量を求める (手順 3、4.4 節)

#### 4.4 幾何学的非線形性による剛性低下の影響の定量的評価

幾何学的非線形性による剛性低下のみが生じる場合の例として、片曲げ、 $\lambda_b = 1.04$ (スパン 8.5[m])、弾性モデル、弾性一次座屈モード形状初期たわみ、初期たわみ量 1/1000 の場合の荷重変形曲線を Fig.4-1 に示す。Fig.4-1 では、材料特性が弾性モデルであるため、材料非線形性による剛性低下はないものの、幾何学的非線形性によって剛性低下が生じており、荷重変形曲線は、横座屈モーメント  $M_l$  の曲線に達しないまま、ほぼ横ばいとなっている。前章で述べたとおり、2 曲線の交点が座屈分岐点であり、Fig.4-1 では 2 曲線が交差しないことから、座屈が生じないことがわかる。塑性化が生じない場合には、座屈荷重に漸近しながら荷重は上昇し続けると考えられるが、Fig.4-1 からわかるように、変形が過大となる。

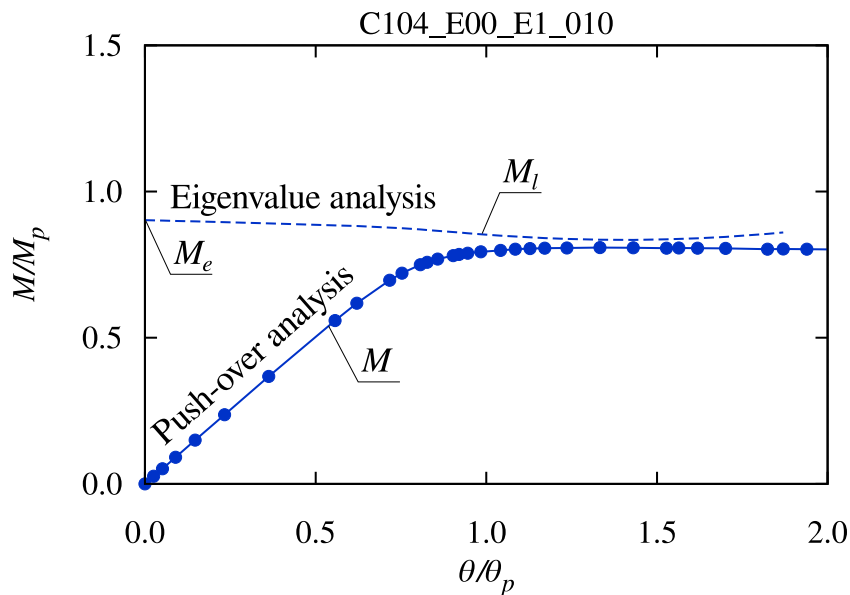


Fig. 4-1 Load-deformation curve: C104\_E00\_E1\_010

初期たわみを有する場合と有しない場合の変形状態を比較したとき、初期たわみを有する場合には、H 形鋼梁の強軸まわりの変形に加えて、弱軸まわりにも変形が進行する。弱軸まわりの変形の大きさは、初期たわみの形状および大きさに依存しており、最大たわみ量が大きいほど大きくなっている。荷重増分解析の弾性範囲内における剛性低下も、初期たわみの最大たわみ量が大きいほど大きくなっており、弱軸まわりの変形量と弾性範囲内における剛性低下には相関がみられる。

初期たわみを有しない場合の変形状が面内変形モードのみを含むのに対し、初期たわみを有する場合の変形状が面内変形モードだけでなく面外変形モードも含むとすると、梁端回転角に含まれる面外変形モードの影響により見かけの剛性が低下すると考えられる。この面外変形モードの影響による見かけの剛性低下が幾何学的非線形性による剛性低下であると予

想される。

#### 4.4.1 面外方向の設定

初期たわみを有しない場合、荷重が座屈荷重に達するまでは、面外変形による幾何学的非線形性がもたらす剛性低下は生じないことから、変位は面内方向成分のみであると言える。この段階では、変位ベクトル  $\mathbf{d}$  は一次座屈モードベクトル  $\mathbf{e}_1$  の成分を含んでおらず、座屈荷重に達すると座屈が生じ、 $\mathbf{d}$  と  $\mathbf{e}_1$  の向きが一致する。一方、初期たわみを有する場合には、载荷の初期段階から変位ベクトル  $\mathbf{d}$  が  $\mathbf{e}_1$  の成分を含んでいる可能性があり、このことが初期たわみを有しない場合と大きく異なる点となっている。そこで、面外方向ベクトルとして当該ステップにおける一次座屈モードベクトル  $\mathbf{e}_1$  を採用することで、変位ベクトル  $\mathbf{d}$  から面内方向成分のみを取り出すことを検討する。

#### 4.4.2 面外変形量の算出方法

変位ベクトル  $\mathbf{d}$  に対して、面外方向ベクトル  $\mathbf{e}_1$  を決めると、 $\mathbf{d}$  は次のかたちに一意に分解できる (Fig.4-2、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は内積を表す)。

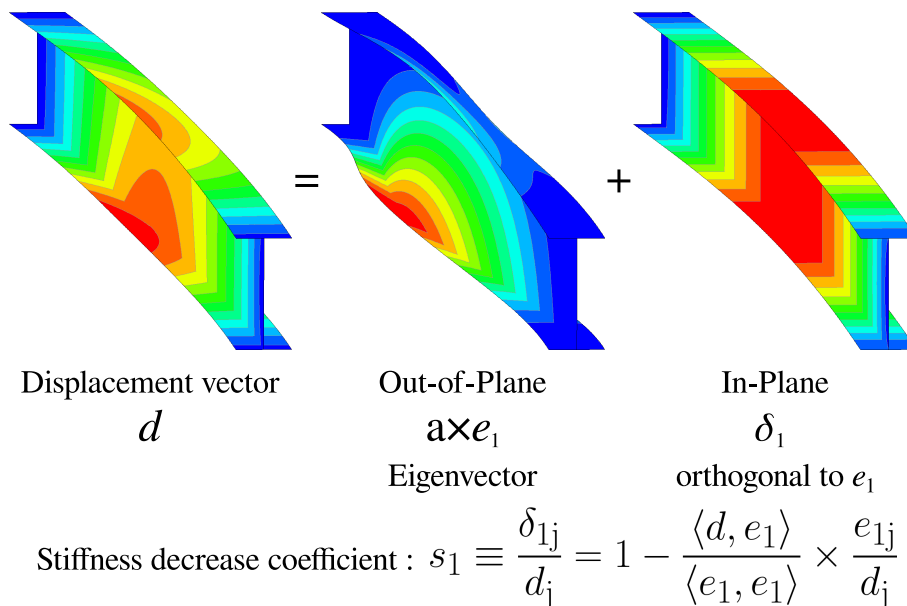


Fig. 4-2 Decompose displacement vector into out-of-plane & in-plane component

$$\mathbf{d} = a \times \mathbf{e}_1 + \delta_1 \quad (4-1)$$

$$\langle \delta_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 0 \quad (4-2)$$

(4-1) 式は、2章の力学モデルにおいて、系の変位を並進ばねの伸びとレール上でのローラの移動に分解したことに相当する。

(4-1) 式の両辺の  $\mathbf{e}_1$  との内積を取ることで  $a$  を求めると、

$$a = \langle \mathbf{d}, \mathbf{e}_1 \rangle / \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle \quad (4-3)$$

$\delta_1$  は、変位ベクトル  $\mathbf{d}$  から面外方向の成分を取り除いたものであるから、面内方向の変形成分を表している。

$\mathbf{d}$ 、 $\mathbf{e}_1$ 、 $\delta_1$  の第  $j$  成分をそれぞれ  $d_j$ 、 $e_{1j}$ 、 $\delta_{1j}$  として、 $d_j$  に対する  $\delta_{1j}$  の比  $s_1$  を求めると、

$$s_1 \equiv \delta_{1j} / d_j = 1 - \langle \mathbf{d}, \mathbf{e}_1 \rangle / \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle \times e_{1j} / d_j \quad (4-4)$$

$s_1$  は、あるステップにおける変形が、そのステップにおける一次座屈モード形状とどのくらい異なるかを表しており、一次座屈モードベクトルの方向を面外方向としたときの面外変形による剛性低下を表す指標になっている。 $s_1 = 1$  のとき、変

位ベクトルは面内方向成分のみであるため剛性低下は生じておらず、 $s_1 = 0$  のとき、変位ベクトルは面外方向成分のみであるため、剛性は 0 になっている。一般に、(4-4) 式において面外方向ベクトルに  $n$  次座屈モードベクトル  $e_n$  を用いる場合には、 $s_n$  と表記するものとする。

#### 4.4.3 剛性低下を含まない荷重変形曲線

荷重増分解析の第  $k$  ステップにおいて、梁端モーメントを  $M_k$ 、梁端モーメントの増分を  $\Delta M_k$ 、梁端回転角を  $\theta_k$ 、梁端回転角の増分を  $\Delta\theta_k$  とすると、剛性低下が生じない場合には、割線剛性  $M_k/\theta_k$  と瞬間剛性  $\Delta M_k/\Delta\theta_k$  は一致する。幾何学的非線形性のみによって剛性低下が生じると仮定すると、当該ステップにおける  $s_n$  を  $s_{nk}$  としたとき、 $\theta_k$  の面内方向成分は  $\delta_k = s_{nk}\theta_k$  であるから、瞬間剛性  $\Delta M_k/\Delta\theta_k$  を

$$M_k/\delta_k = M_k/(s_{nk}\theta_k) \quad (4-5)$$

で定義し直すことで、面外変形に伴う剛性低下を含まない荷重変形曲線が得られる (Fig.4-3)。

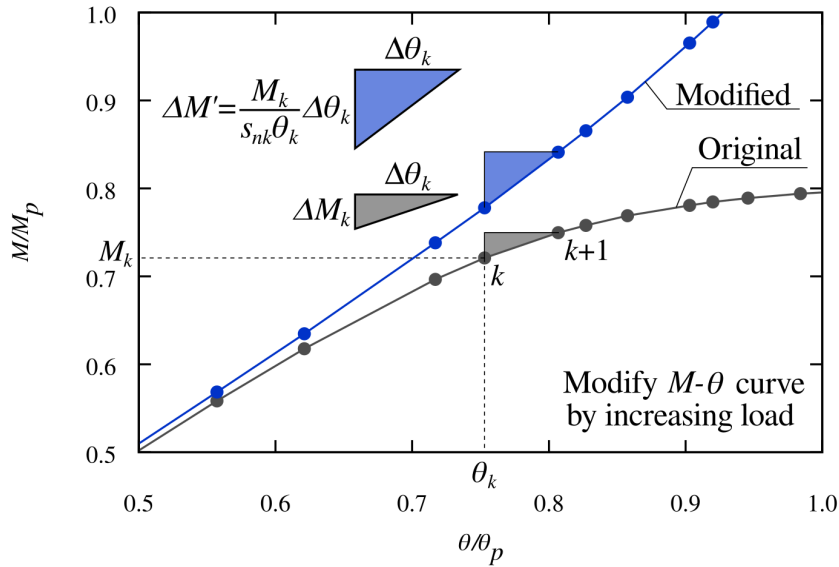


Fig. 4-3 Load-deformation curve modification

Fig.4-1 の荷重変形曲線について、変位増分は  $\Delta\theta_k$  のままとして、荷重増分を

$$\Delta M'_k = (M_k/(s_{nk}\theta_k)) \times \Delta\theta_k \quad (4-6)$$

で定義し直したものを Fig.4-4 に示す。

縦軸の値  $M' = \sum \Delta M'_k$  は、荷重増分解析で生じた変形を、幾何学的非線形性による剛性低下がない場合に生じさせるために必要な荷重を表している。初期たわみを有しない解析において、荷重が横座屈モーメントに達する点で座屈が発生することを考慮すると、初期たわみを有する場合には、定義し直した荷重  $M'$  が横座屈モーメントに達する、Fig.4-4 における 2 曲線の交点を座屈発生点とすることが妥当だと考えられる。

Fig.4-4 では、梁端モーメントが横座屈モーメントに漸近するにつれて、 $M' - \theta$  曲線の剛性がやや高めている。これは、瞬間剛性を (4-5) 式で定義し直すことが、面外変形による梁端モーメントの増加を 0 と仮定することを意味するのに対し、 $s_n \neq 1$  の場合、面外方向を表すベクトル  $e_n$  の梁端回転角に対応する成分  $e_{nj}$  は 0 でなく、剛性マトリックスや幾何剛性マトリックスの対角成分も 0 でないため、面外変形による梁端モーメントの増加が存在し、この仮定が成立しないことを反映している。面外変形  $e_{nj}$  による梁端モーメントの増加を 0 と仮定していることで、面内変形  $\delta_k$  と梁端モーメント  $M_k$  を



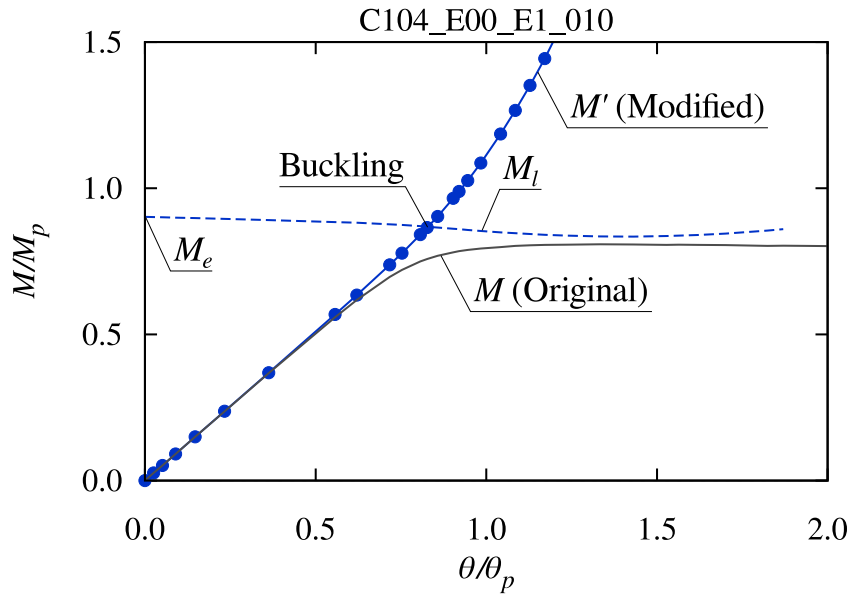


Fig. 4-4 Modified load deformation curve: C104.E00.E1.010

用いた瞬間剛性  $M_k/\delta_k$  は常に剛性を過大評価し、 $e_{nj}$  が大きくなるほどその影響は大きくなる。しかし、座屈発生点よりも左側ではその影響は小さく、指標  $s_n$  を用いた幾何学的非線形性による剛性低下の定量化は近似的には妥当であると言える。

#### 4.4.4 剛性低下曲線

初期たわみを有しないモデルでは、荷重増分解析の荷重変形曲線に対して、塑性化による剛性低下を表す座屈固有値解析の曲線をプロットすることで、両者の交点から分岐モーメントを求めた。初期たわみを有する場合についても、面外変形による剛性低下を横座屈モーメントの減少に換算し、座屈固有値解析の曲線に含めることで、塑性化および面外変形の両方による剛性低下を考慮した分岐モーメントを求めることを検討する。

Fig.4-4 の修正前後の荷重の比  $M/M'$  を横座屈モーメントに乘じることで、Fig.4-4 を修正したグラフを Fig.4-5 に示す。

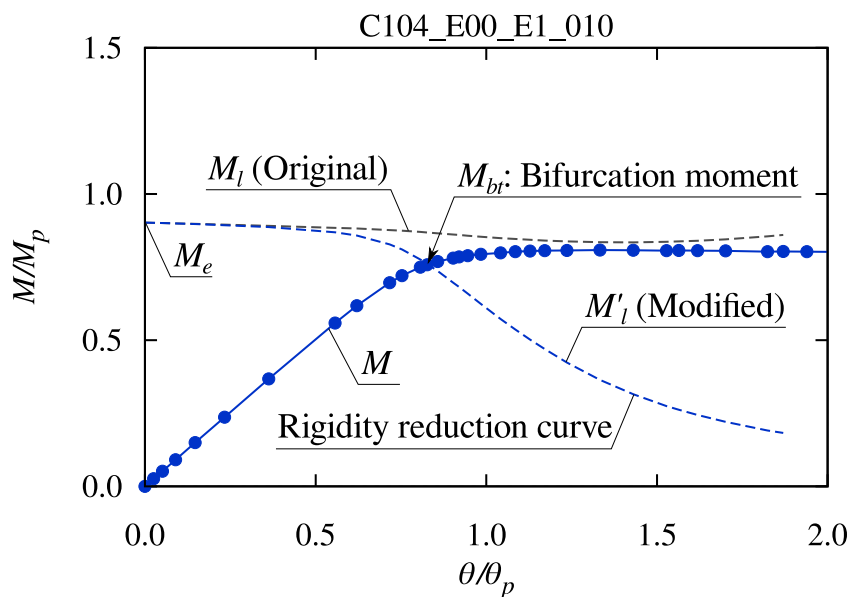


Fig. 4-5 Rigidity reduction curve: C104.E00.E1.010



Fig.4-5 における 2 曲線の交点は、交点における変位を面外変形による剛性低下がない場合に生じさせるための荷重が横座屈モーメント  $M_l$  に達する点を表しており、上述の座屈発生点に対応しており、この点における荷重が分岐モーメント  $M_{bt}$  となる。 $M_{bt}$  は塑性化と面外変形の両方による剛性低下を考慮して低減した横座屈耐力を表しており、 $M_l$  よりも値が小さく、その低下量は塑性化の進行度および面外変形の大きさに依存すると考えられる。

Fig.4-5 で修正された座屈固有値解析の曲線は、塑性化に伴う材料非線形性による剛性低下と面外変形に伴う幾何学的非線形性による剛性低下の両方を表しているため、この曲線を**剛性低下曲線**と称する。Fig.4-5 には一次座屈固有値に対応する剛性低下曲線のみを示しているが、高次の座屈固有値と座屈モードベクトルを用いることで、高次座屈固有値に対応する剛性低下曲線も同様に描くことができる。以下では、 $n$  次の座屈固有値に対応する剛性低下曲線のことを  $n$  次の剛性低下曲線と呼び、単に剛性低下曲線と述べた場合には一次の剛性低下曲線を指すものとする。

#### 4.4.5 幾何学的非線形性による剛性低下の二つの要因

(4-4) 式を変形すると、

$$s_1 = 1 - \langle \mathbf{d}, \mathbf{e}_1 \rangle / \|\mathbf{d}\| \|\mathbf{e}_1\| \times (e_{1j} / \|\mathbf{e}_1\|) / (d_j / \|\mathbf{d}\|) = 1 - r_j \cos \phi \quad (4-7)$$

となり、 $s_1$  は  $\mathbf{d}$  と  $\mathbf{e}_1$  のなす角度  $\phi$  の余弦  $\cos \phi = \langle \mathbf{d}, \mathbf{e}_1 \rangle / \|\mathbf{d}\| \|\mathbf{e}_1\|$  と、 $\mathbf{d}$  と  $\mathbf{e}_1$  に占める第  $j$  成分の割合  $r_{ej} = e_{1j} / \|\mathbf{e}_1\|$  と  $r_{dj} = d_j / \|\mathbf{d}\|$  の比  $r_j = r_{ej} / r_{dj}$  によって決まることがわかる。 $\cos \phi$  は変形と座屈モードの方向の一致度を表し、 $r_j$  は着目した変形成分が変形や座屈モードに占める割合を表しており、幾何学的非線形性による剛性低下の要因は、この二種類に分けることができる。

Fig.4-1 のモデルについて、梁端回転角の増加に伴う  $s_1$ 、 $r_{ej}$ 、 $r_{dj}$ 、 $\cos \phi$  の推移を示すと、Fig.4-6 のようになる。左側の縦軸は  $s_1$  と  $\cos \phi$  の値、右側の縦軸は  $r_{ej}$  と  $r_{dj}$  の値を表している。 $\theta/\theta_p = 0.6$  付近で  $\cos \phi$  の値が増加しており、変形  $\mathbf{d}$  の方向が座屈モード  $\mathbf{e}_1$  の方向に近づいていることがわかる。それと同時に、 $\mathbf{e}_1$  に占める梁端回転角の割合  $r_{ej}$  が増加し、 $\mathbf{d}$  に占める梁端回転角の割合  $r_{dj}$  が減少することで、両者の比  $r_j$  も増加している。これら二つの効果が合わさることで  $s_1$  が減少していることから、幾何学的非線形性による剛性低下の二種類の要因は、いずれもが重要であることがわかる。

ここで、 $r_{ej}$  の値は、4.4.3 項で述べた、面外変形による梁端モーメントの増加を 0 とする仮定からのずれを表す指標となる。 $r_{ej}$  が大きいほど、この仮定からのずれが大きくなり、結果として  $M'$  を過大評価、あるいは  $M'_l$  を過小評価することになるが、Fig.4-6 からわかるように、梁端モーメントが  $M_{bt}$  に達した時点では、 $r_{dj}$  に比べて  $r_{ej}$  は小さく、仮定が厳密には成立しないことの影響は小さいと言える。

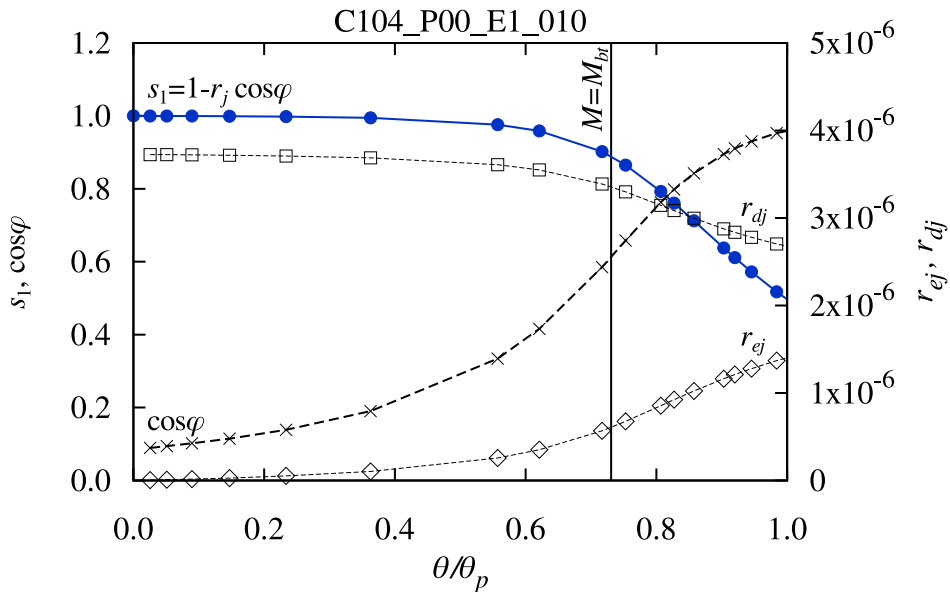


Fig. 4-6 Factors of rigidity reduction due to geometric nonlinearity

## 4.5 解析結果

4.5.1 項では、曲げモーメント分布、梁スパンごとの座屈モード形状を示し、4.5.2～4.5.4 項では、幾何学的非線形性のみを有する場合の解析結果について、初期たわみ形状、初期たわみ量、曲げモーメント分布、梁スパンごとの荷重変形曲線、巨視的不安定曲面、 $M_{bt}$  に達した時点での  $s_1$ 、 $r_j$ 、 $\cos \phi$  の値と横座屈細長比  $\lambda_b$  の関係を表すグラフを示す。荷重変形曲線については、 $\lambda_b = 0.42, 0.83, 1.14, 1.62$  の 4 モデルのみ示している。巨視的不安定曲面には  $M_{bt}$  に加えて荷重増分解析で得られる最大荷重  $M_{\max}$  を白抜きプロットで示している。

材料特性が弾性モデルの場合には材料が降伏しないため、 $M_p = \infty$  とすべきであるが、他の材料特性の結果との比較のため、縦軸の値を基準化する歳には、 $\sigma_y = 258.5[\text{N}/\text{mm}^2]$  としたときの  $M_p$  を便宜的に用いている。

また、初期たわみ形状が弾性二次座屈モード形状の場合 (4.5.3 項) と正弦半波形状の場合 (4.5.4 項) では、一次モードでの剛性低下が生じない場合があるため、一次の剛性低下曲線に加え、二次の剛性低下曲線も示した。

### 4.5.1 座屈モード形状

曲げモーメント分布、梁スパンごとに、弾性一次座屈モード形状  $e_1$  および弾性二次座屈モード形状  $e_2$  と、各モードに対応する座屈モーメント  $M_e$  を示す。モード形状図の色表示は変位の大きさに対応している。また、正弦半波形状ベクトルを  $v_s$  として、各モードベクトルと  $v_s$  の内積  $\langle e_1, v_s \rangle$ 、 $\langle e_2, v_s \rangle$  と、モードベクトル同士の内積  $\langle e_1, e_2 \rangle$  を併せて示す。

## 逆対称曲げ

弾性一次座屈モード形状は、フランジ幅方向の変位が大きい箇所が上フランジと下フランジにそれぞれ一山ずつあるが、上フランジと下フランジでは変位が大きい箇所が梁スパン方向にずれており、全体としては正弦一波に近い形状となっている。 $e_1$  と  $v_s$  の内積  $\langle e_1, v_s \rangle$  はすべて 0 となっている。

弾性二次座屈モード形状は、梁スパン中央でも変位が大きくなっており、全体として三山の波を有する形状となっている。梁スパンが大きいほど、中央部での変位が支配的になっている。 $e_2$  と  $v_s$  の内積  $\langle e_2, v_s \rangle$  は 0.059~0.817 で、梁スパンが大きくなるほど、内積の値も増加している。 $e_1$  と  $e_2$  の内積  $\langle e_1, e_2 \rangle$  はすべて 0 となっている。

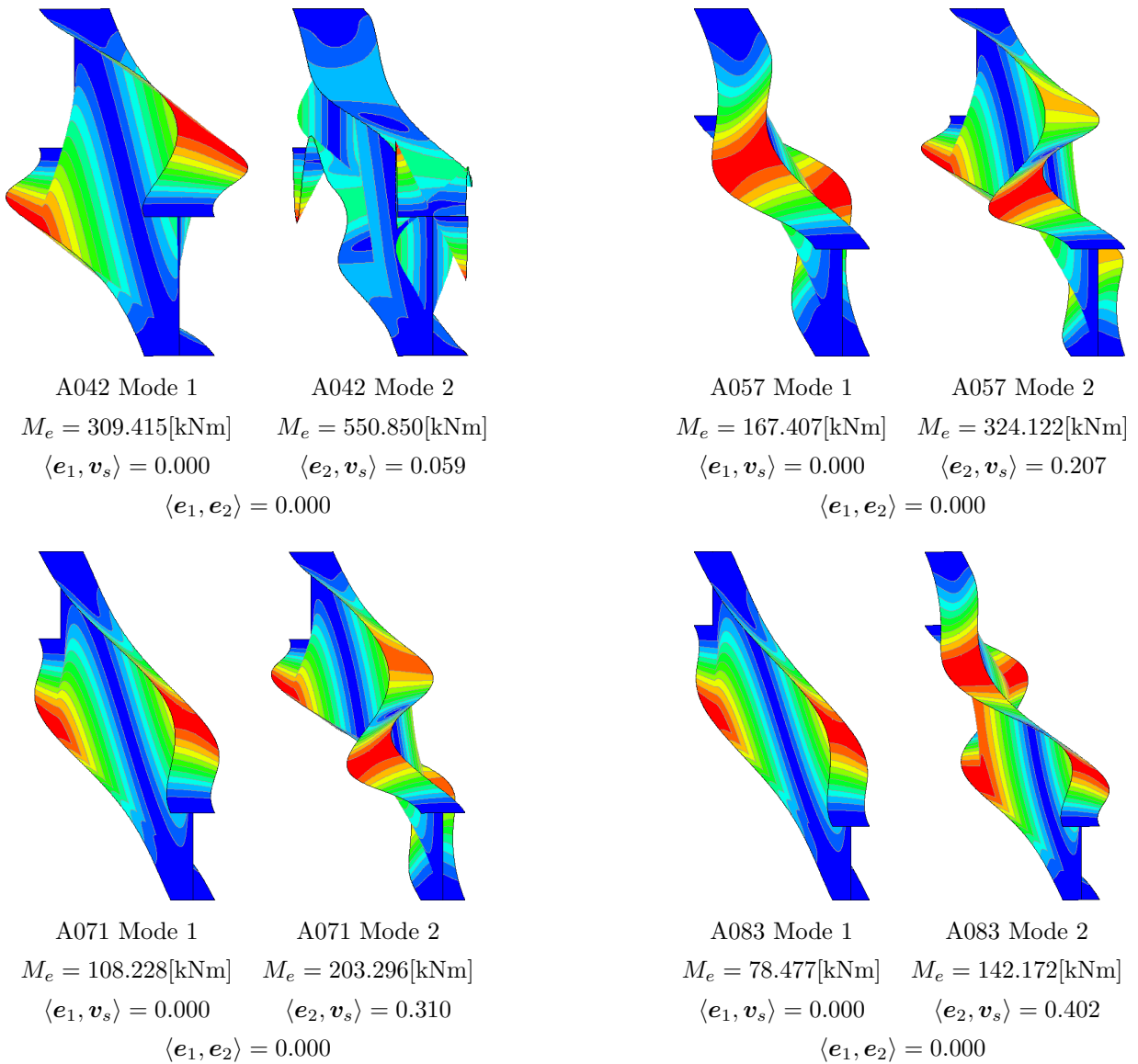


Fig. 4-7 Buckling mode shape: Antisymmetric bending 1

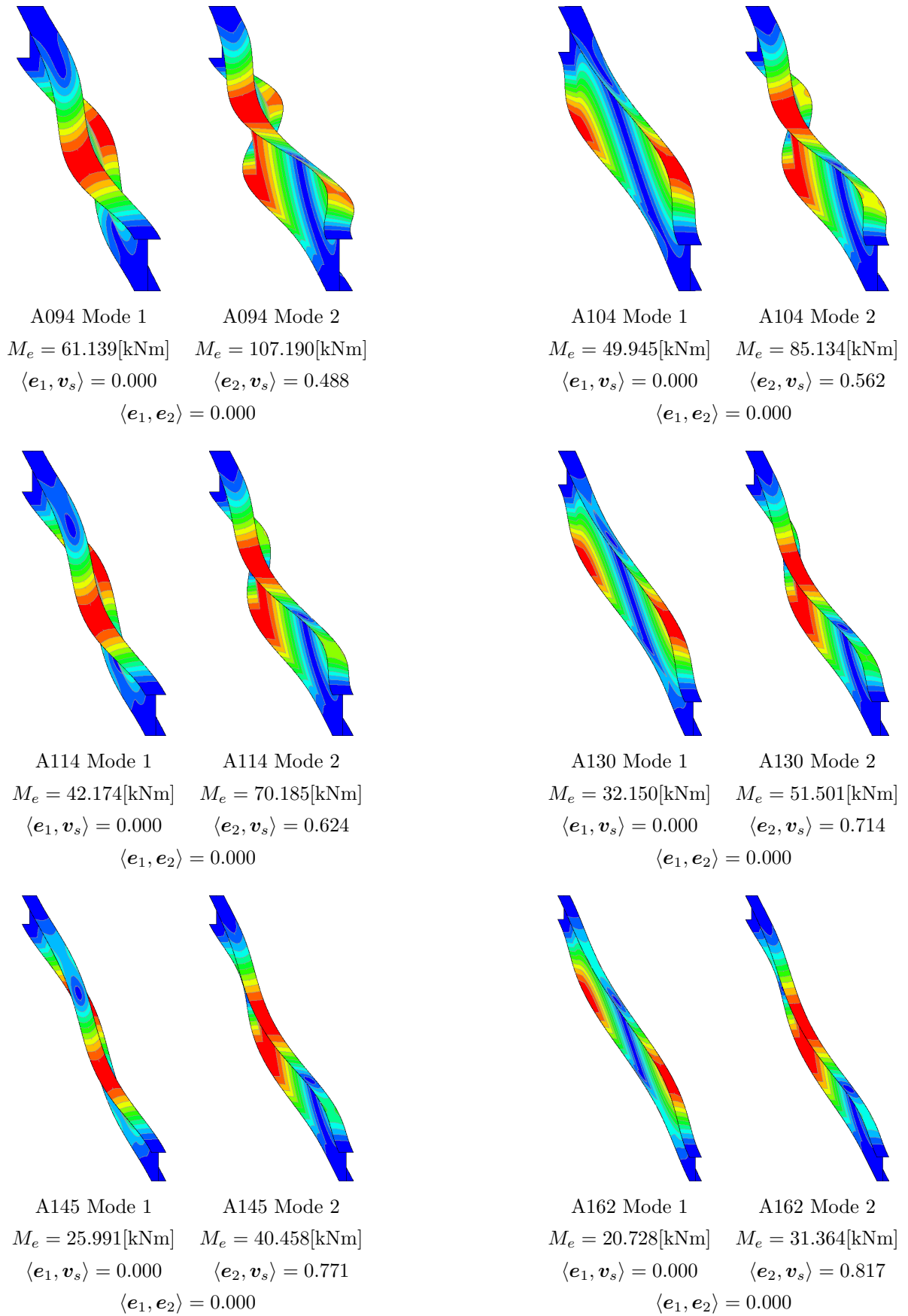


Fig. 4-8 Buckling mode shape: Antisymmetric bending 2

## 片曲げ

弾性一次座屈モード形状、弾性二次座屈モード形状とも、フランジ幅方向の変位が大きい箇所は下フランジに集中しており、二次モードがフランジの局部座屈となっている C042 モデルを除くと、一次モードでは一山、二次モードでは二山の波を有する形状となっている。

逆対称曲げモデルと異なり、 $\langle e_1, v_s \rangle$  の値は 0 ではなく、0.709~0.916 となっている。 $\langle e_1, e_2 \rangle$  の値も 0 ではなく、0.286~0.612 となっている。

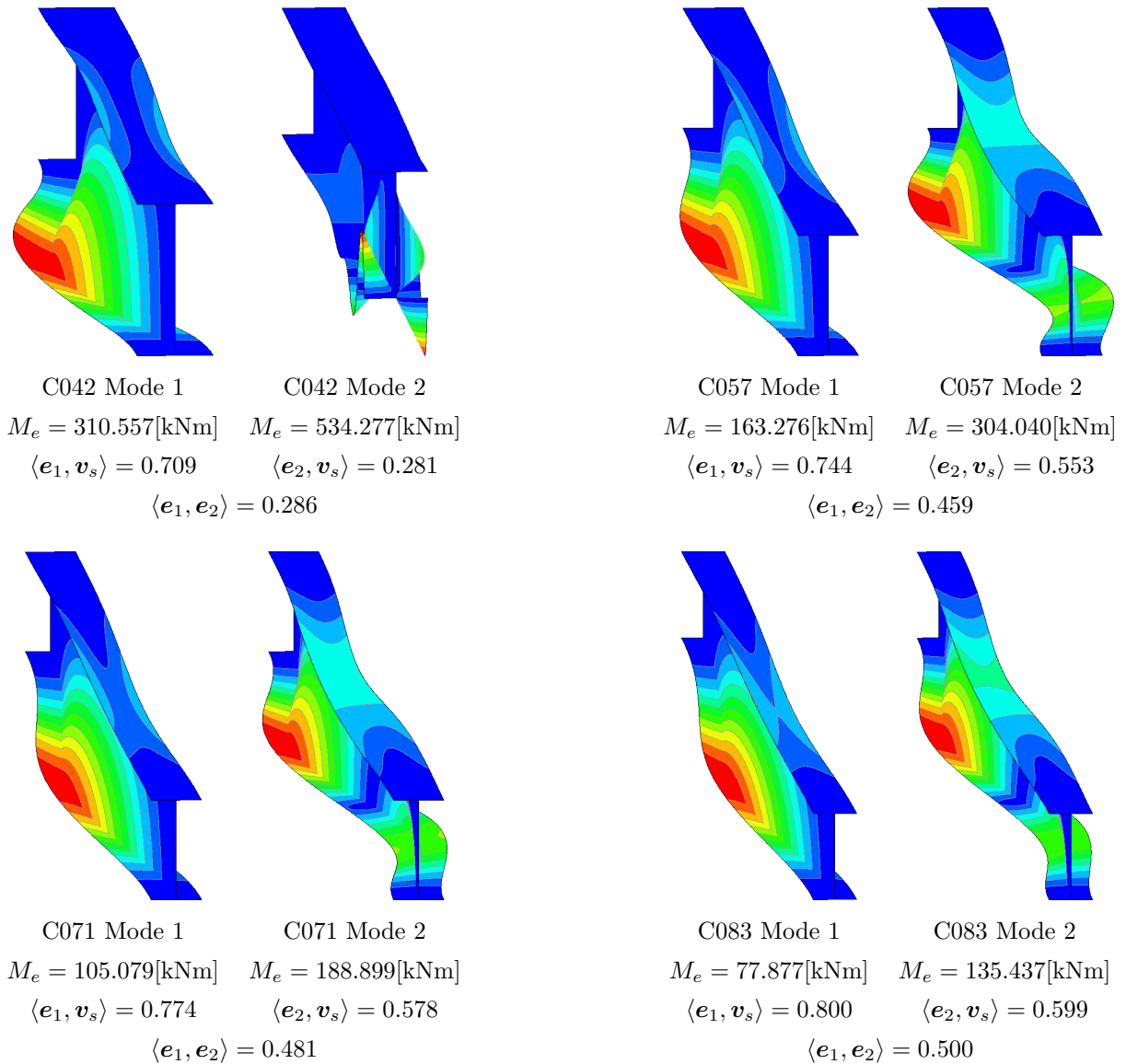


Fig. 4-9 Buckling mode shape: Cantilever bending 1

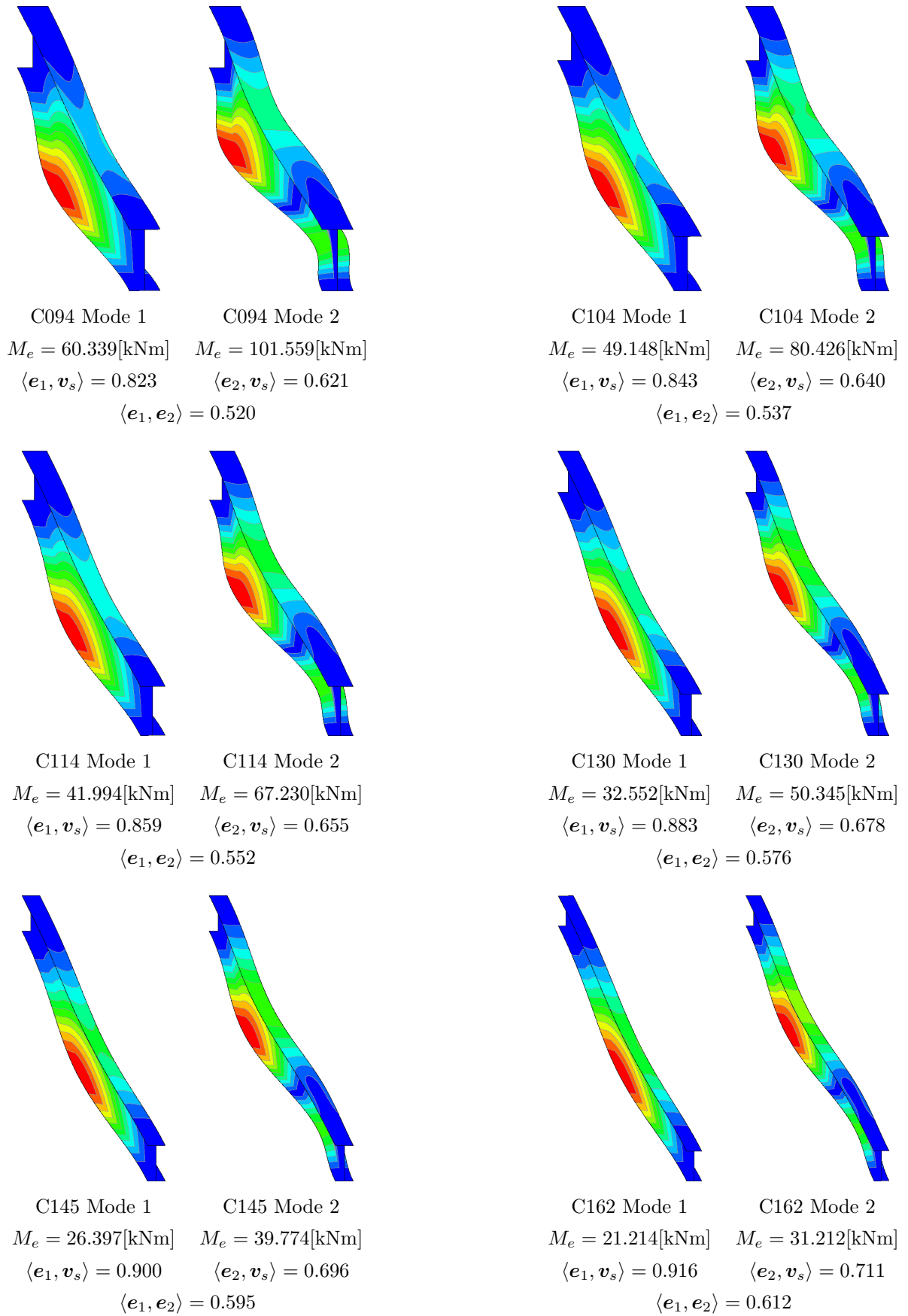


Fig. 4-10 Buckling mode shape: Cantilever bending 2

## 一様曲げ

座屈モード形状は一次モード、二次モードとも片曲げモデルと似ているが、二次モードについて、片曲げモデルでは二山の波の大きさに差があったのに対し、一様曲げモデルでは二山の波の大きさが同程度となっており、全体として正弦一波に近い形状となっている点が異なっている。

この違いは  $\langle e_2, v_s \rangle$  や  $\langle e_1, e_2 \rangle$  の値として表れており、片曲げモデルではともに 0 ではなかったのに対し、一様曲げモデルではともに 0 となっている。

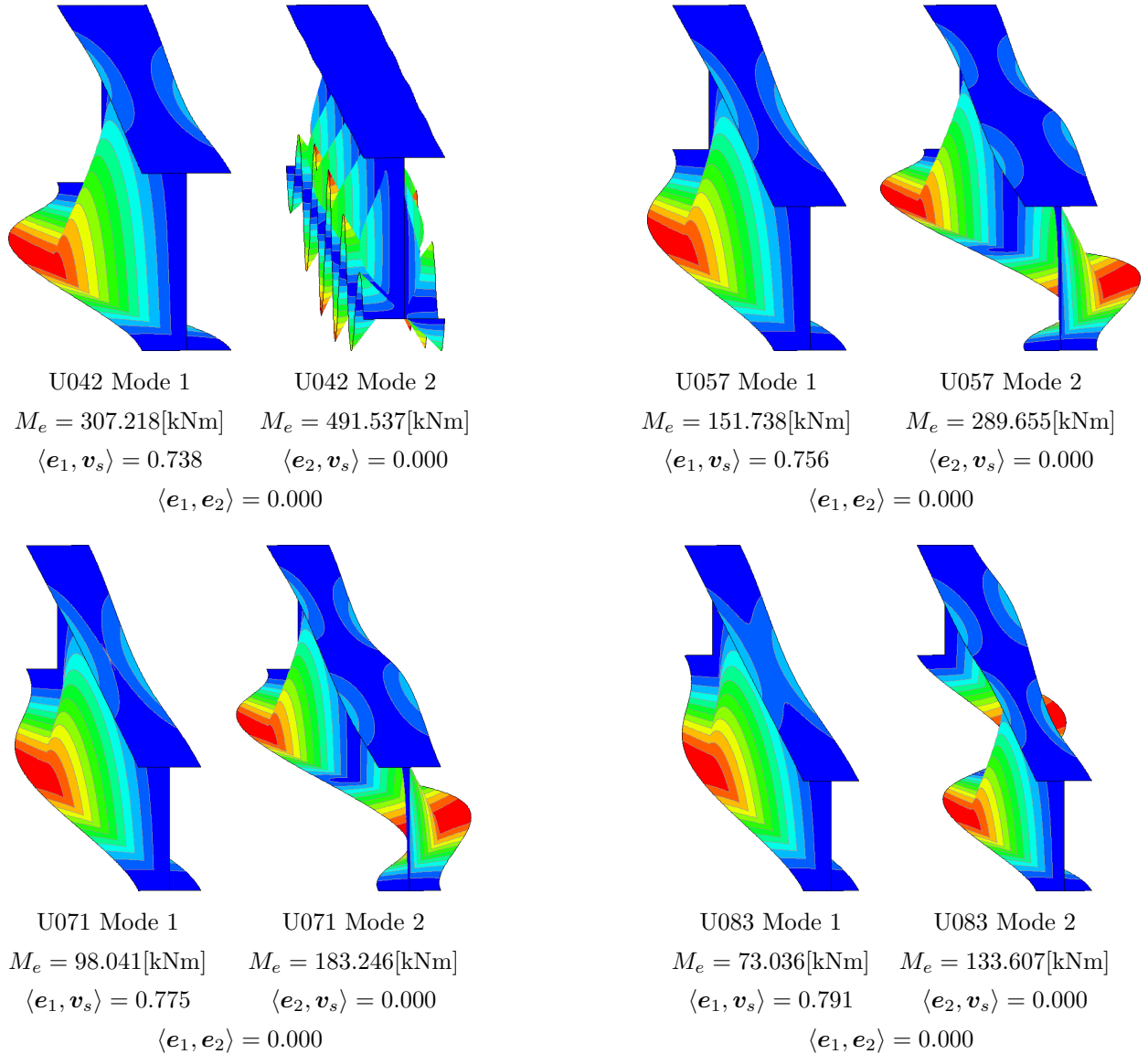


Fig. 4-11 Buckling mode shape: Uniform bending 1

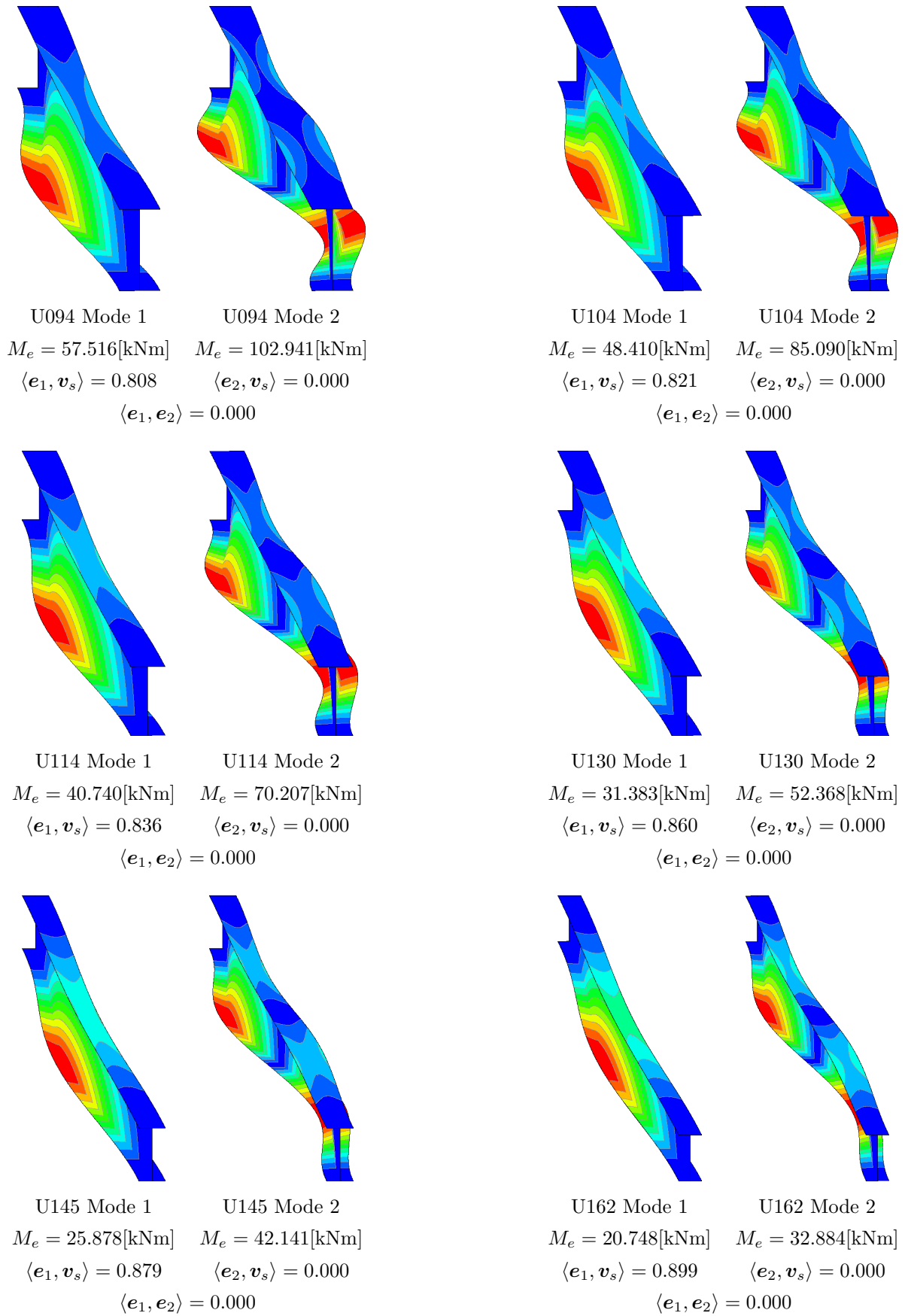


Fig. 4-12 Buckling mode shape: Cantilever bending 2



## 4.5.2 弾性モデル、残留応力なし、弾性一次座屈モード形状 (E00\_E1)

初期たわみ量=1/10000 (E00\_E1.001)、逆対称曲げ

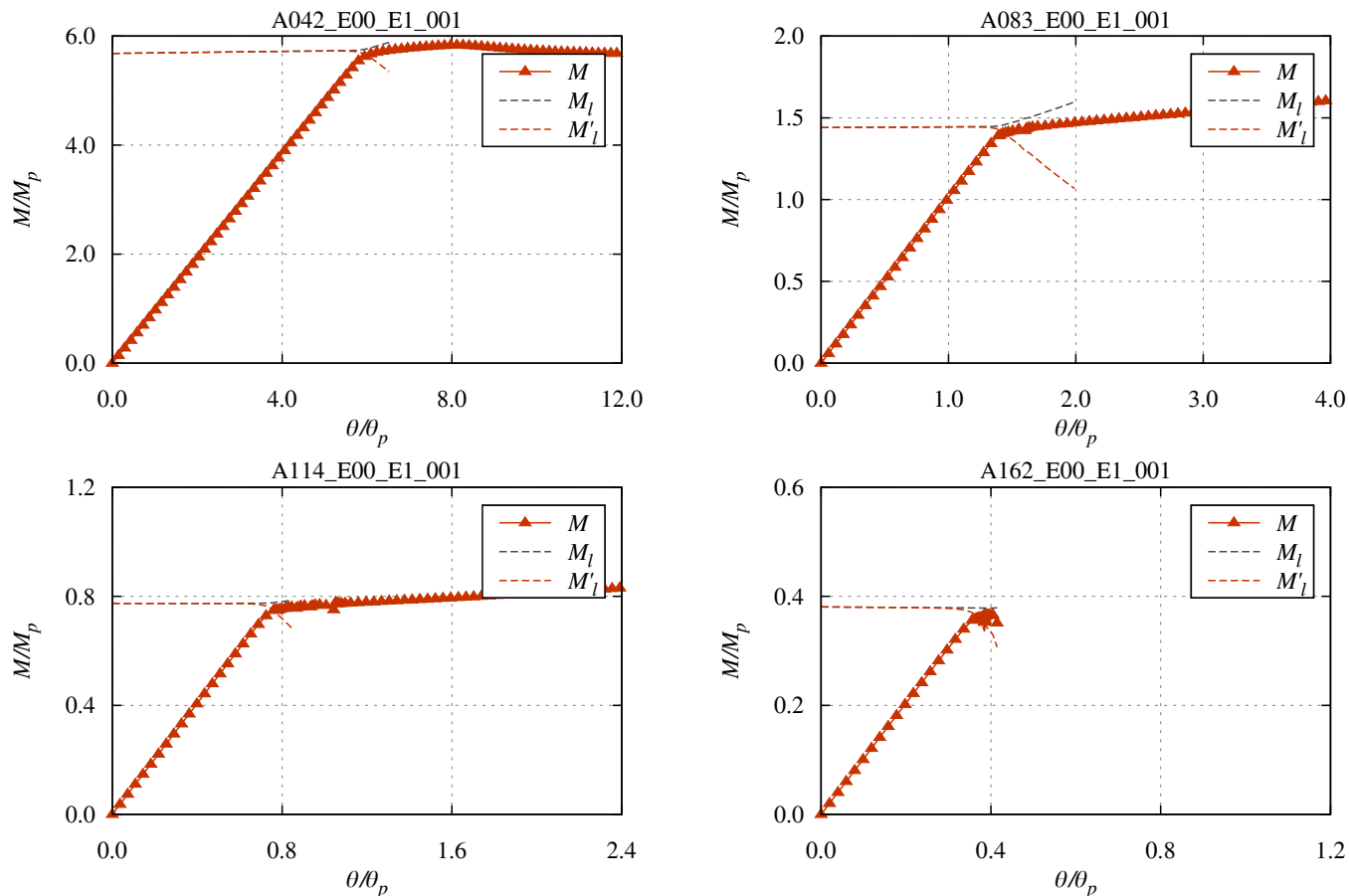


Fig. 4-13 Load-deformation curve: A\_E00.E1.001

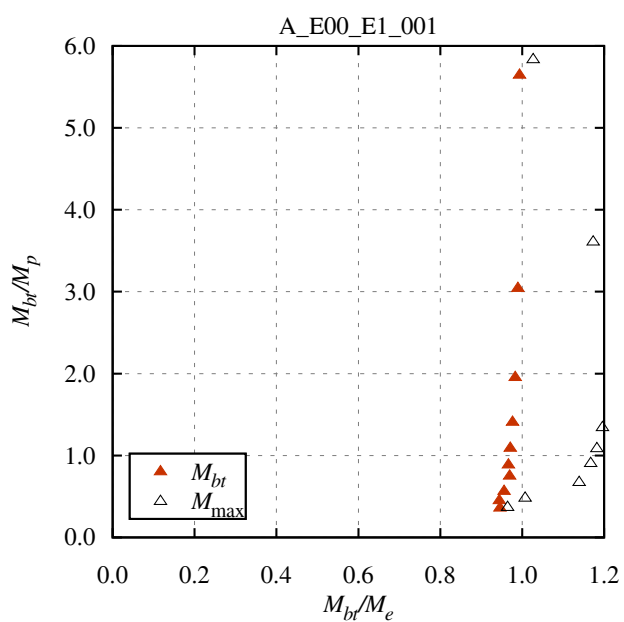
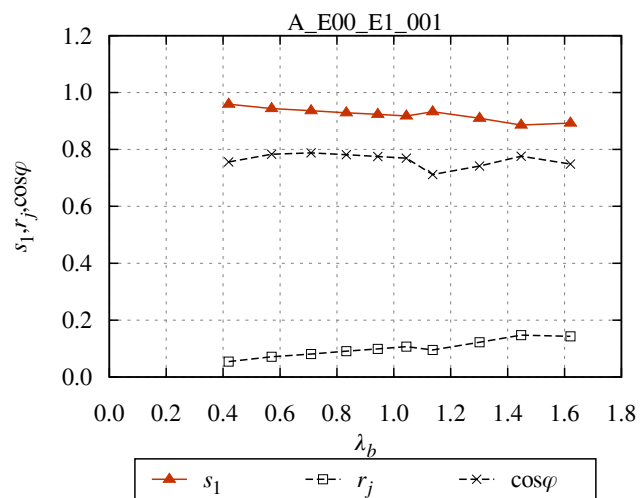


Fig. 4-14 Macroscopic instability surface: A\_E00.E1.001

Fig. 4-15  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_E00.E1.001

初期たわみ量=1/10000 (E00\_E1\_001)、片曲げ

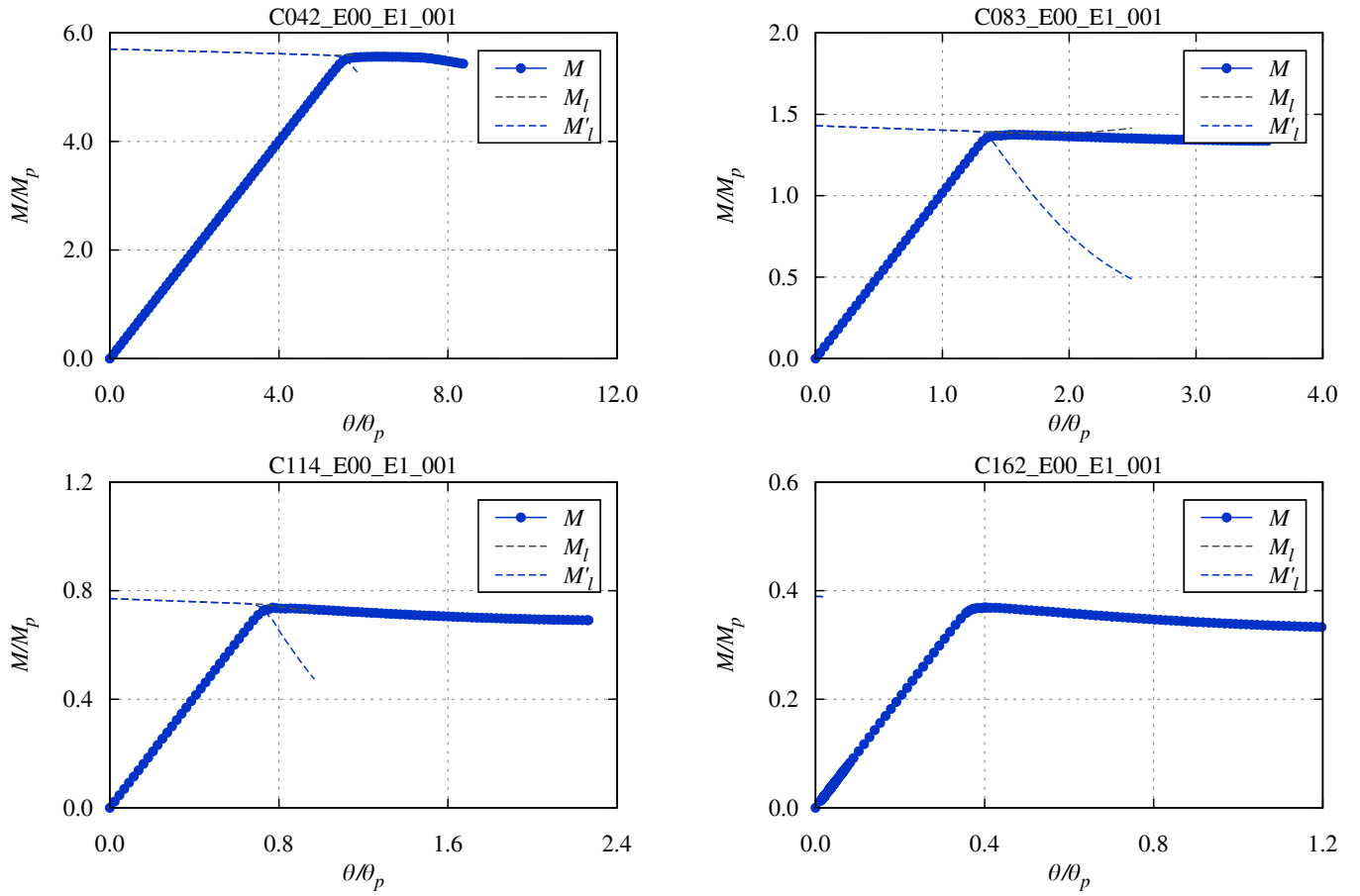


Fig. 4-16 Load-deformation curve: C\_E00.E1.001

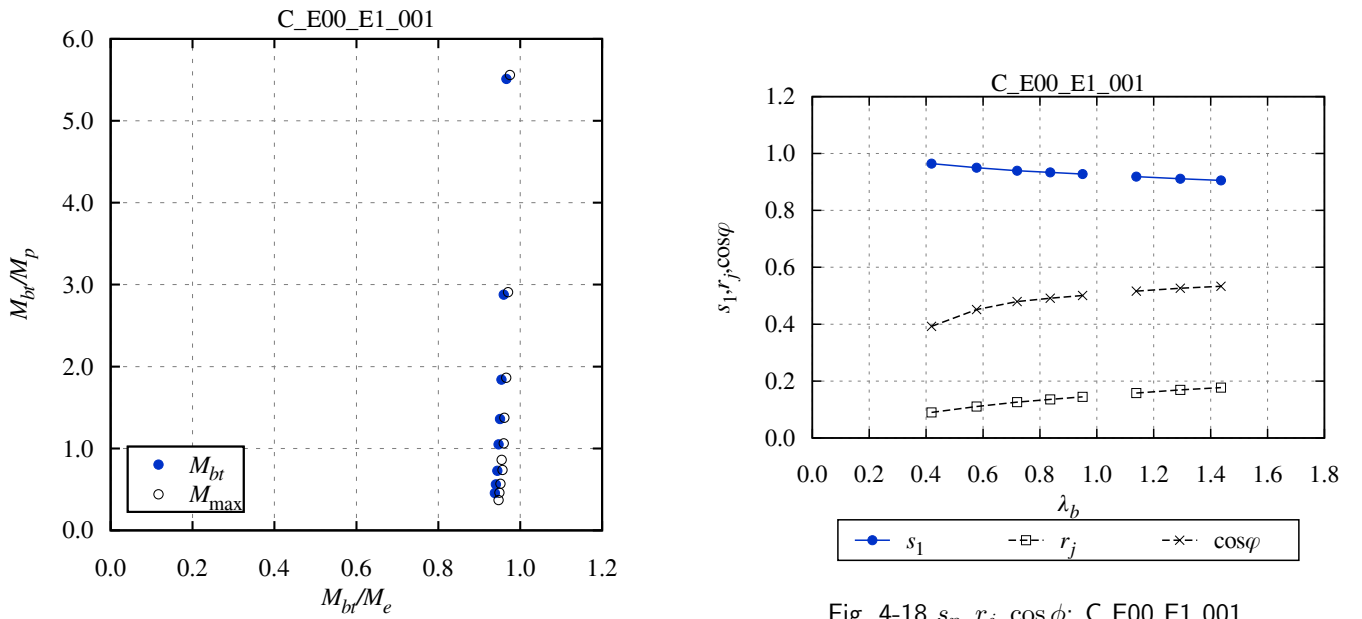


Fig. 4-18  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_E00.E1.001

Fig. 4-17 Macroscopic instability surface: C\_E00.E1.001

初期たわみ量=1/10000 (E00\_E1\_001)、一様曲げ

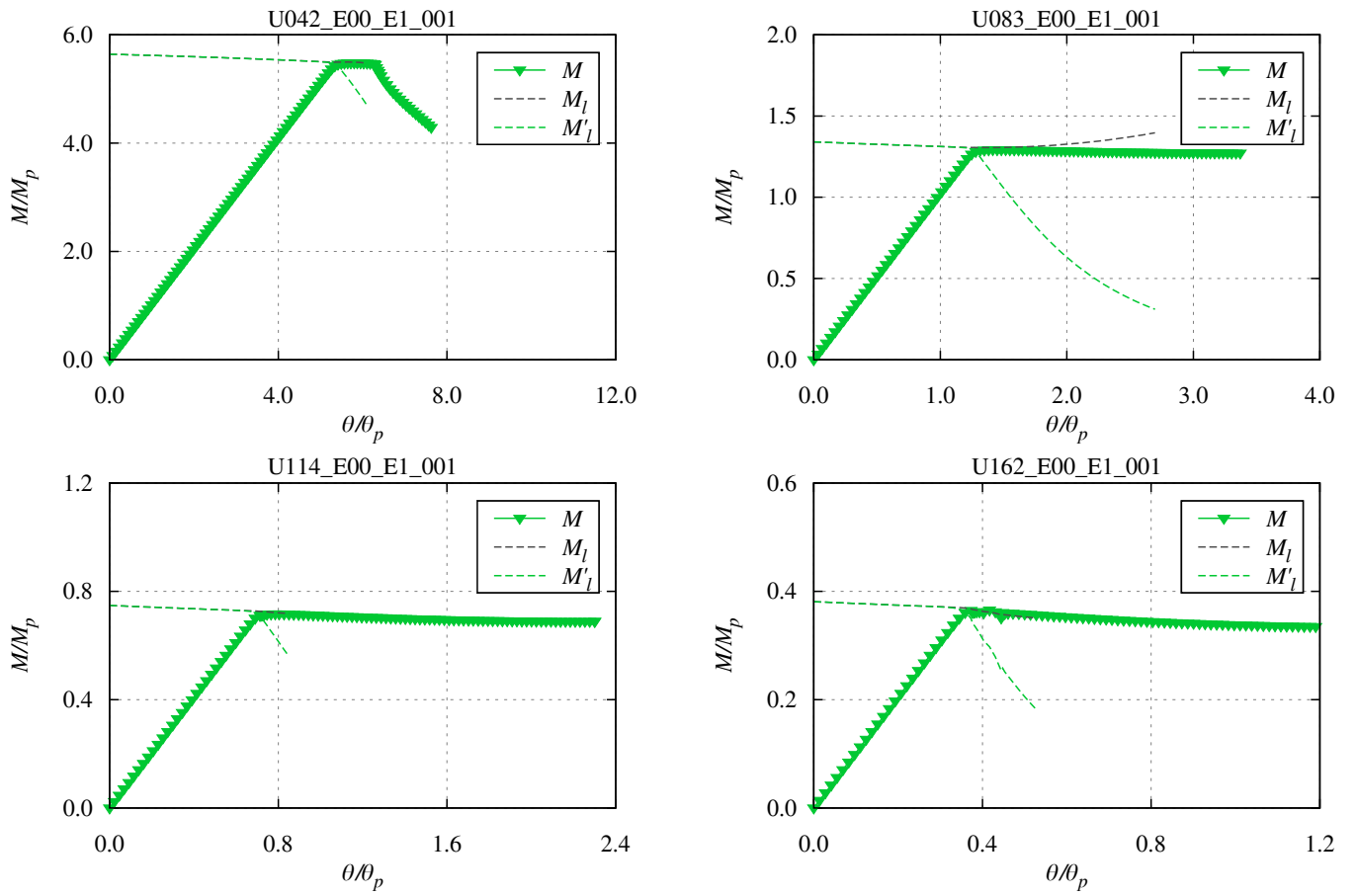


Fig. 4-19 Load-deformation curve: U\_E00.E1\_001

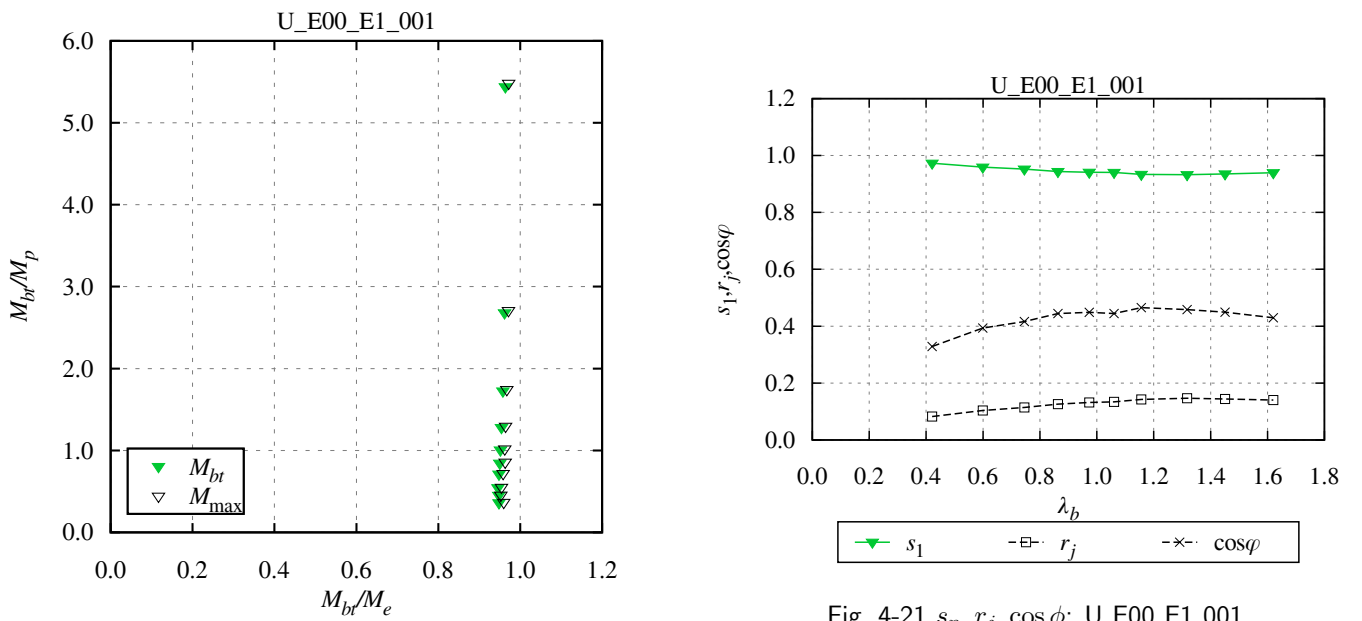


Fig. 4-21  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_E00.E1\_001

Fig. 4-20 Macroscopic instability surface: U\_E00.E1\_001

初期たわみ量=1/2000 (E00\_E1\_005)、逆対称曲げ

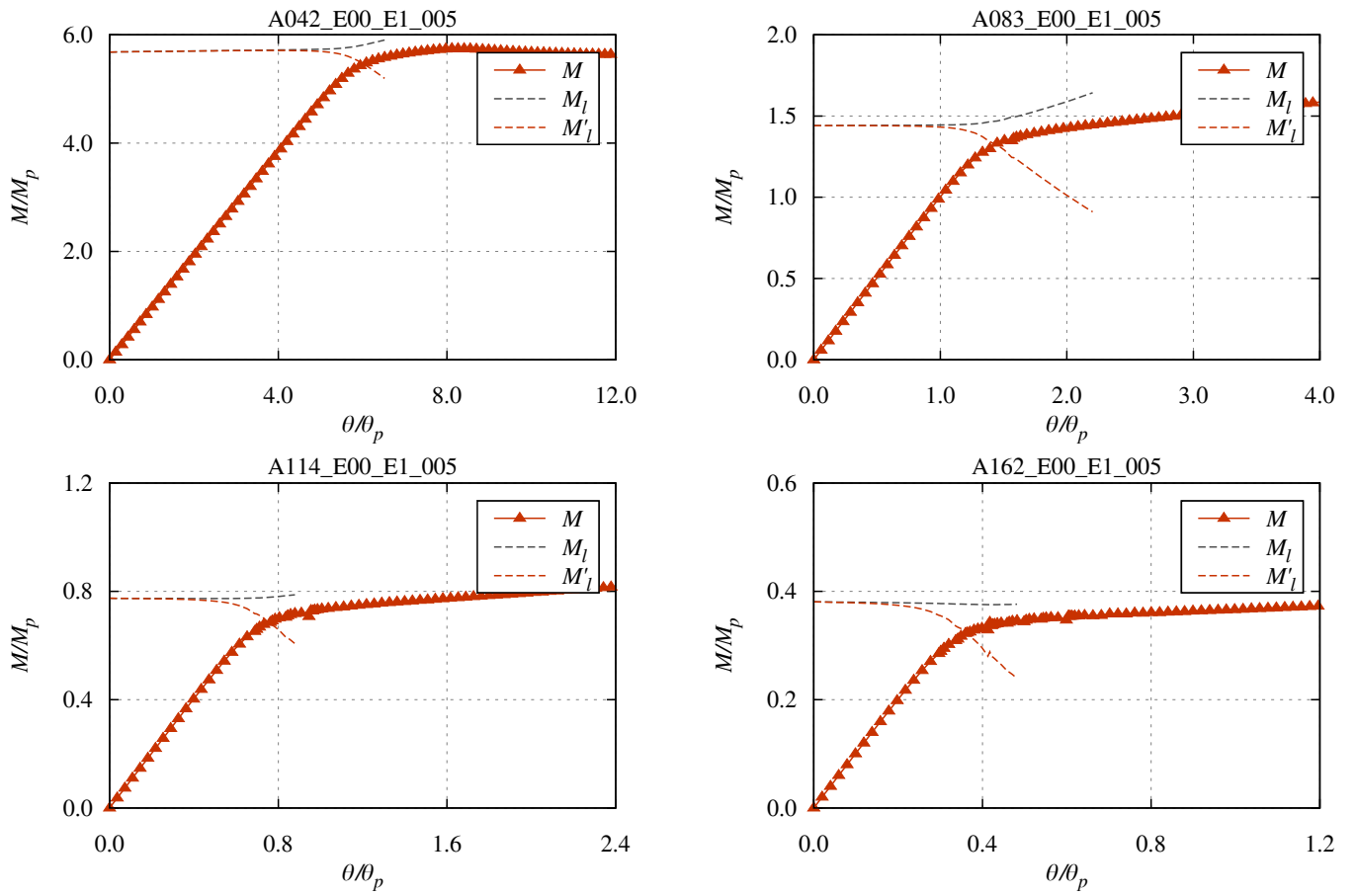


Fig. 4-22 Load-deformation curve: A\_E00.E1\_005

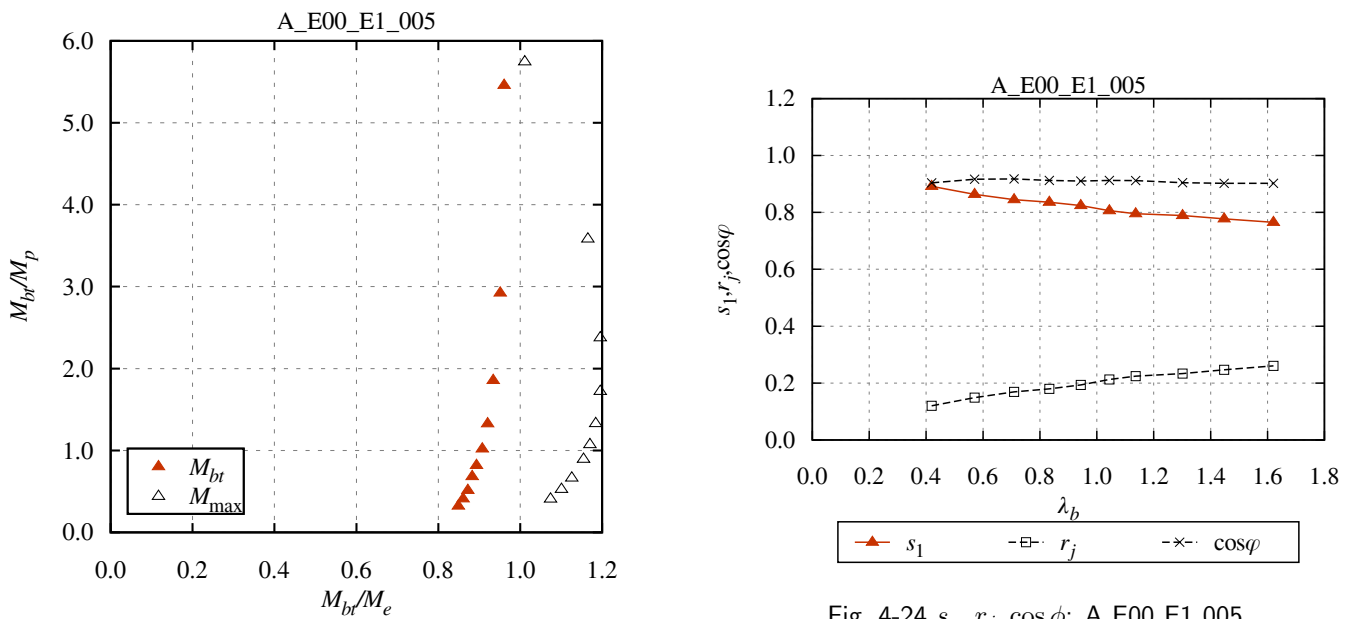


Fig. 4-24  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_E00.E1\_005

Fig. 4-23 Macroscopic instability surface: A\_E00.E1\_005

初期たわみ量=1/2000 (E00\_E1\_005)、片曲げ

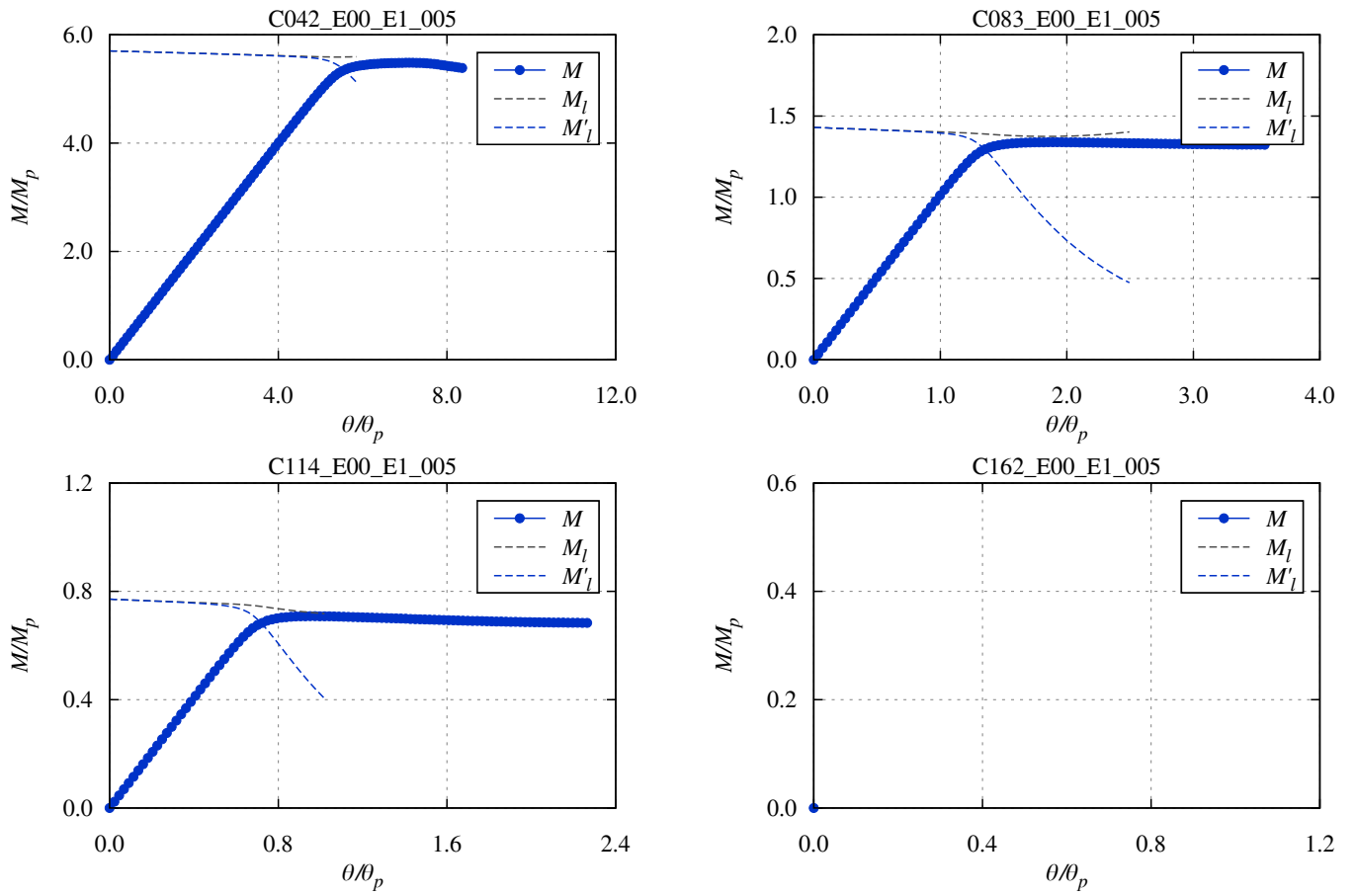


Fig. 4-25 Load-deformation curve: C\_E00.E1\_005

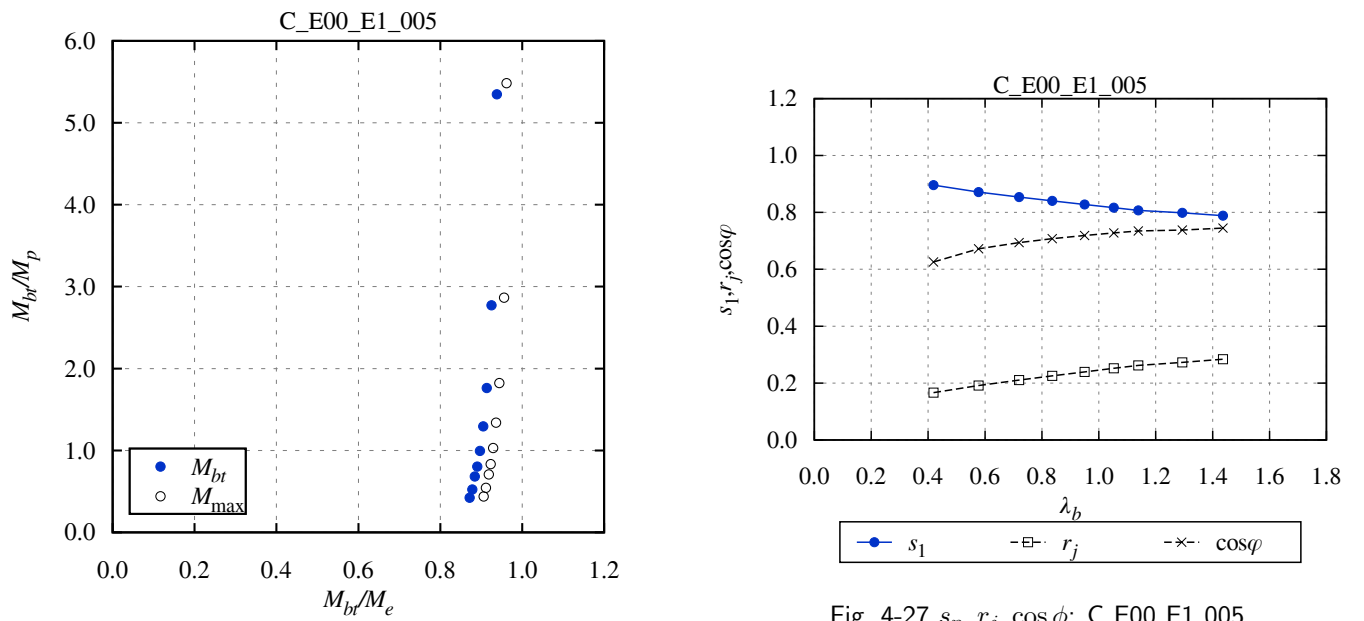


Fig. 4-27  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_E00.E1\_005

Fig. 4-26 Macroscopic instability surface: C\_E00.E1\_005

初期たわみ量=1/2000 (E00\_E1\_005)、一様曲げ

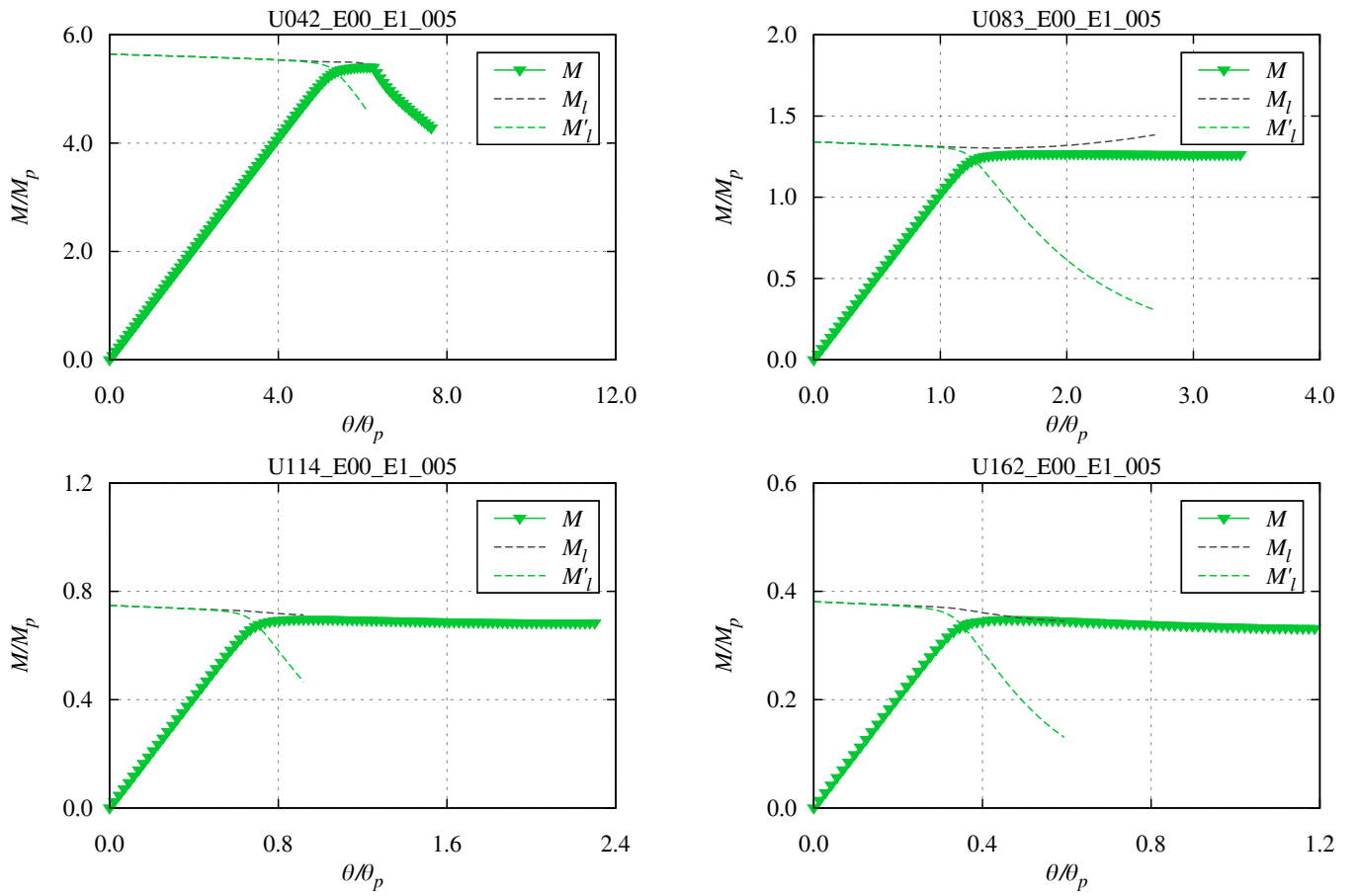


Fig. 4-28 Load-deformation curve: U\_E00\_E1\_005

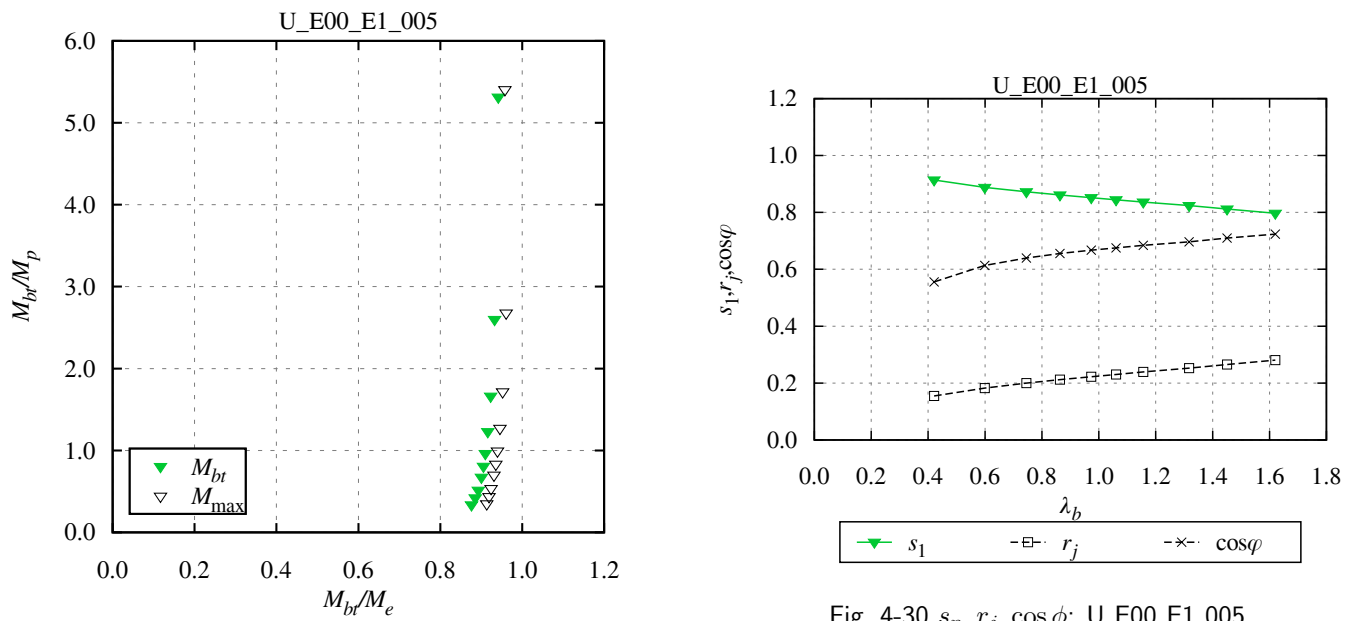


Fig. 4-29 Macroscopic instability surface: U\_E00\_E1\_005

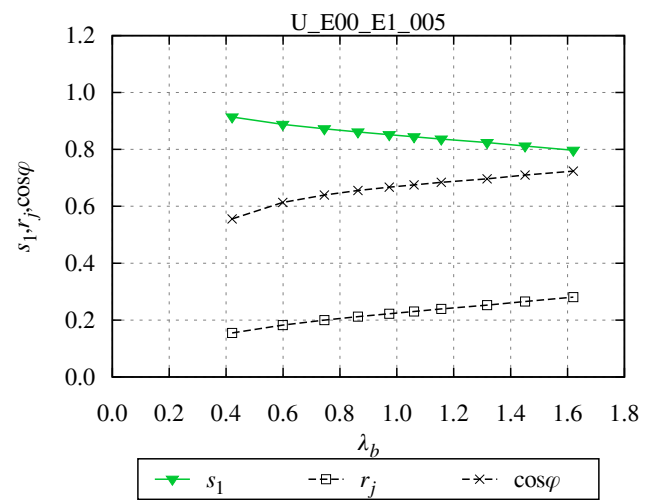


Fig. 4-30  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_E00\_E1\_005

初期たわみ量=1/1000 (E00\_E1\_010)、逆対称曲げ

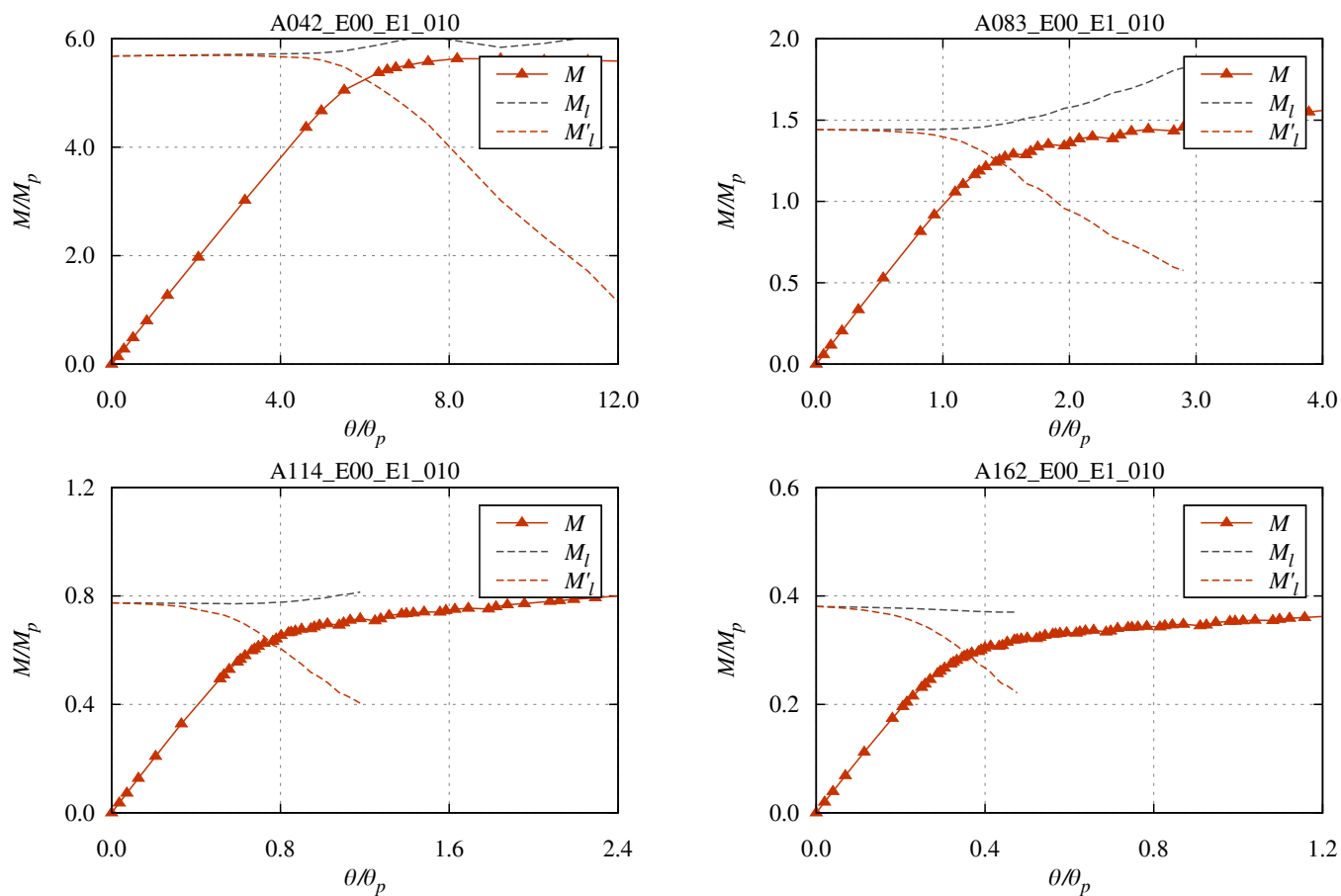


Fig. 4-31 Load-deformation curve: A\_E00.E1\_010

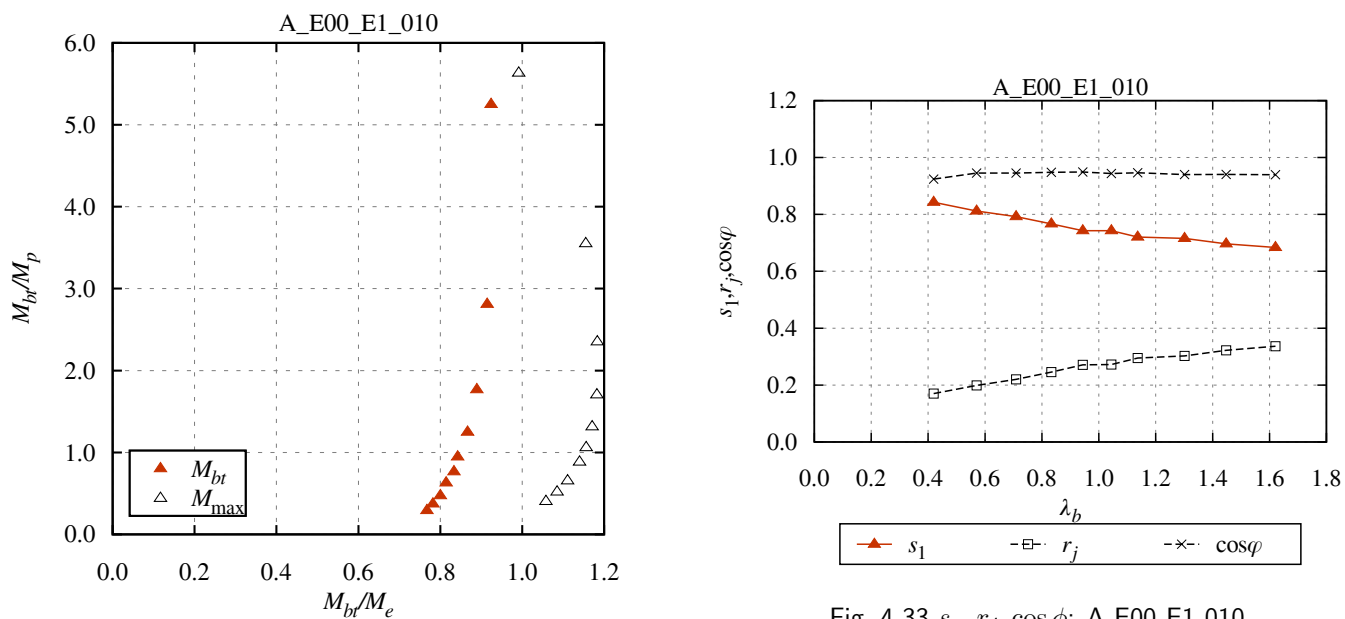


Fig. 4-32 Macroscopic instability surface: A\_E00.E1\_010

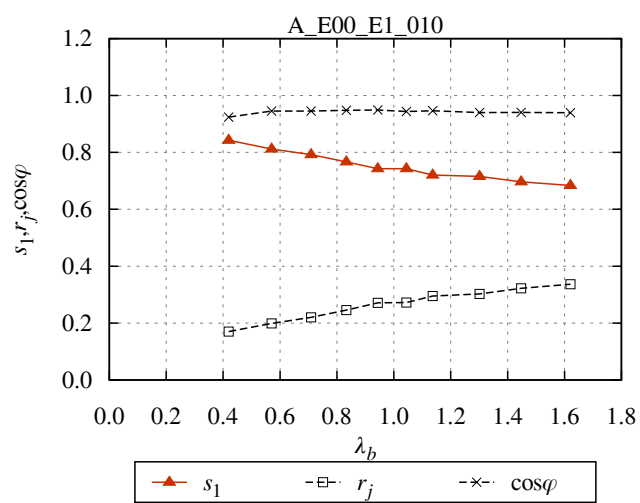


Fig. 4-33  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_E00.E1\_010

初期たわみ量=1/1000 (E00\_E1\_010)、片曲げ

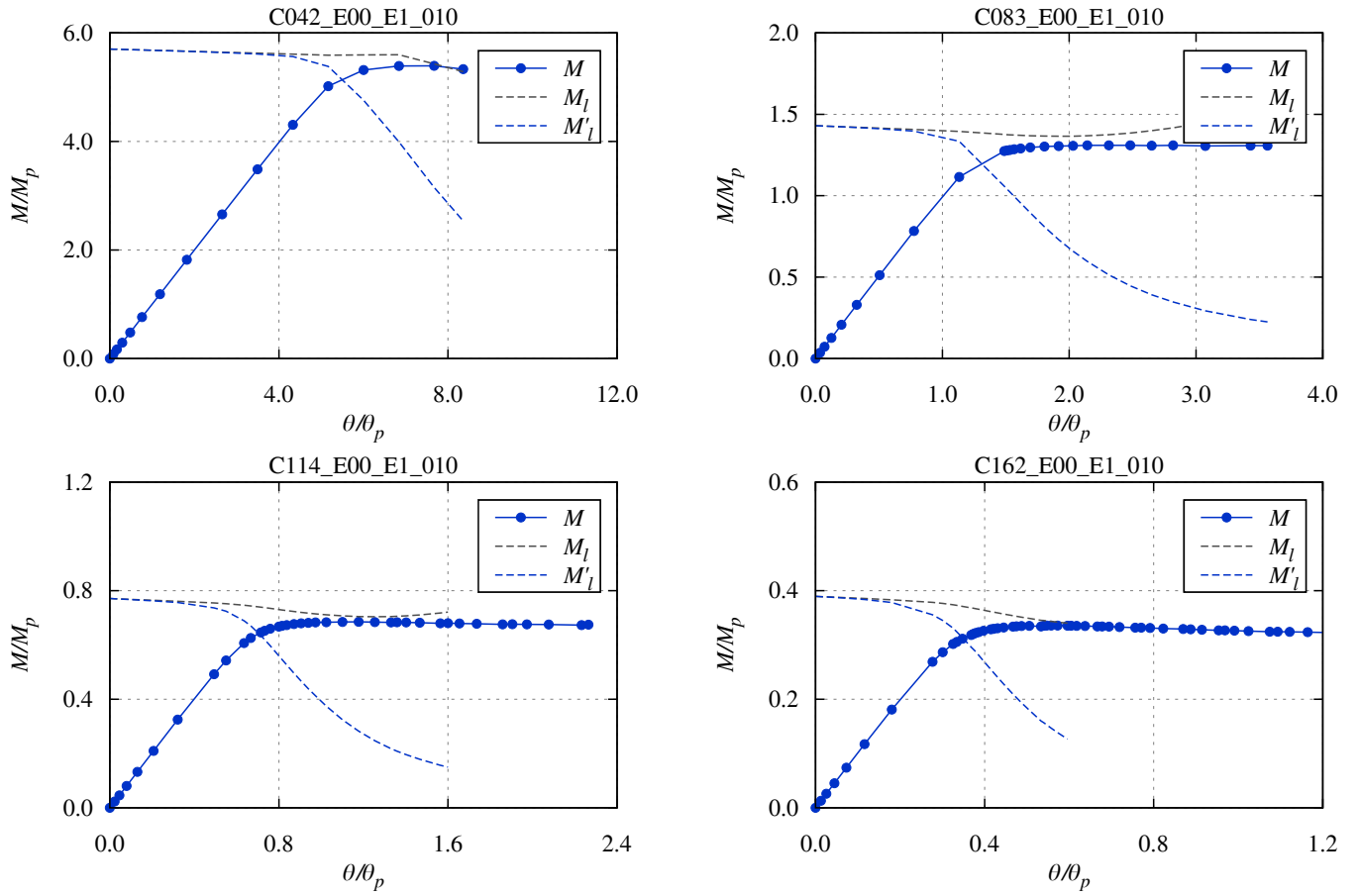


Fig. 4-34 Load-deformation curve: C\_E00.E1\_010

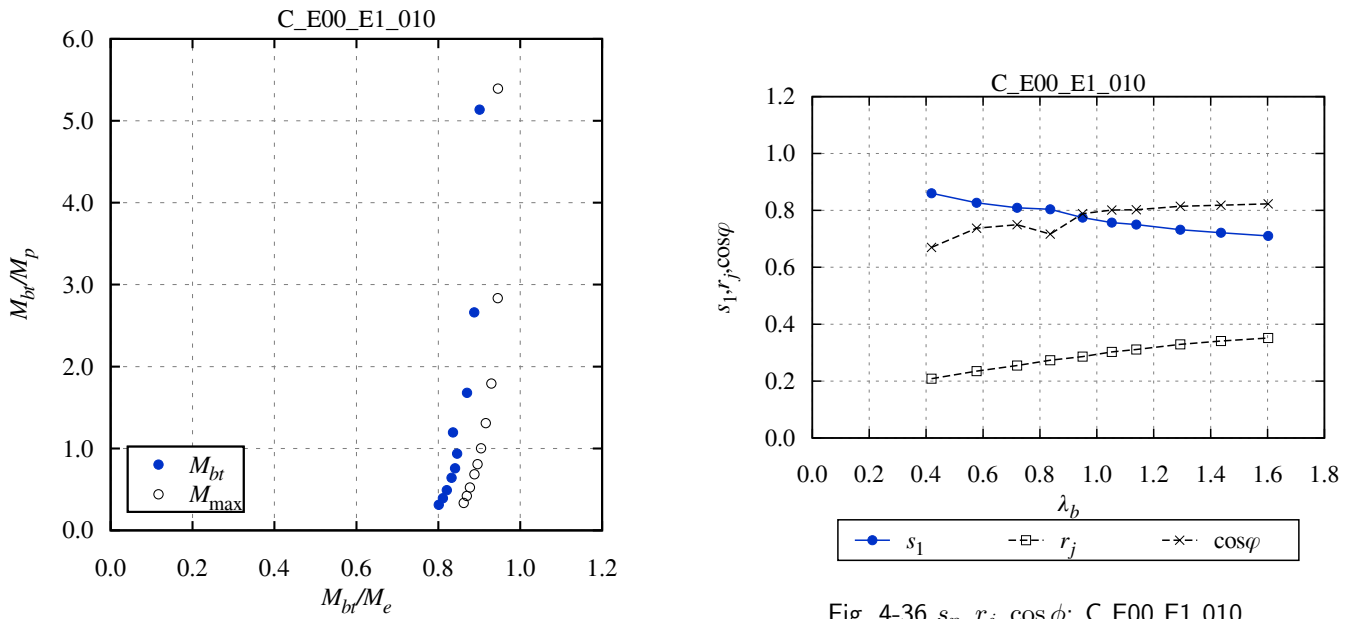


Fig. 4-35 Macroscopic instability surface: C\_E00.E1\_010

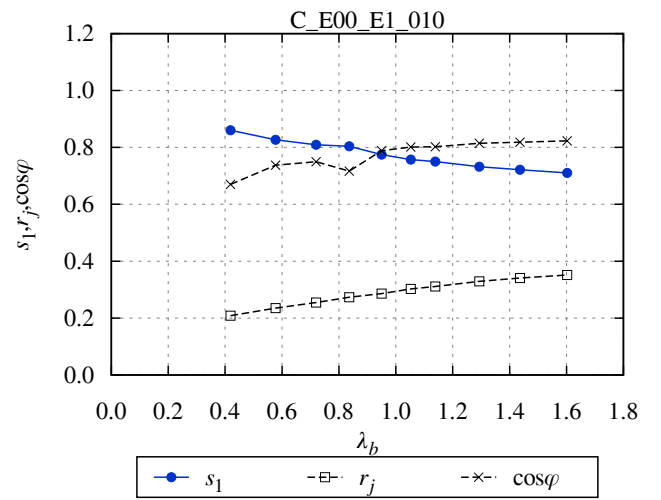


Fig. 4-36  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_E00.E1\_010



初期たわみ量=1/1000 (E00\_E1\_010)、一様曲げ

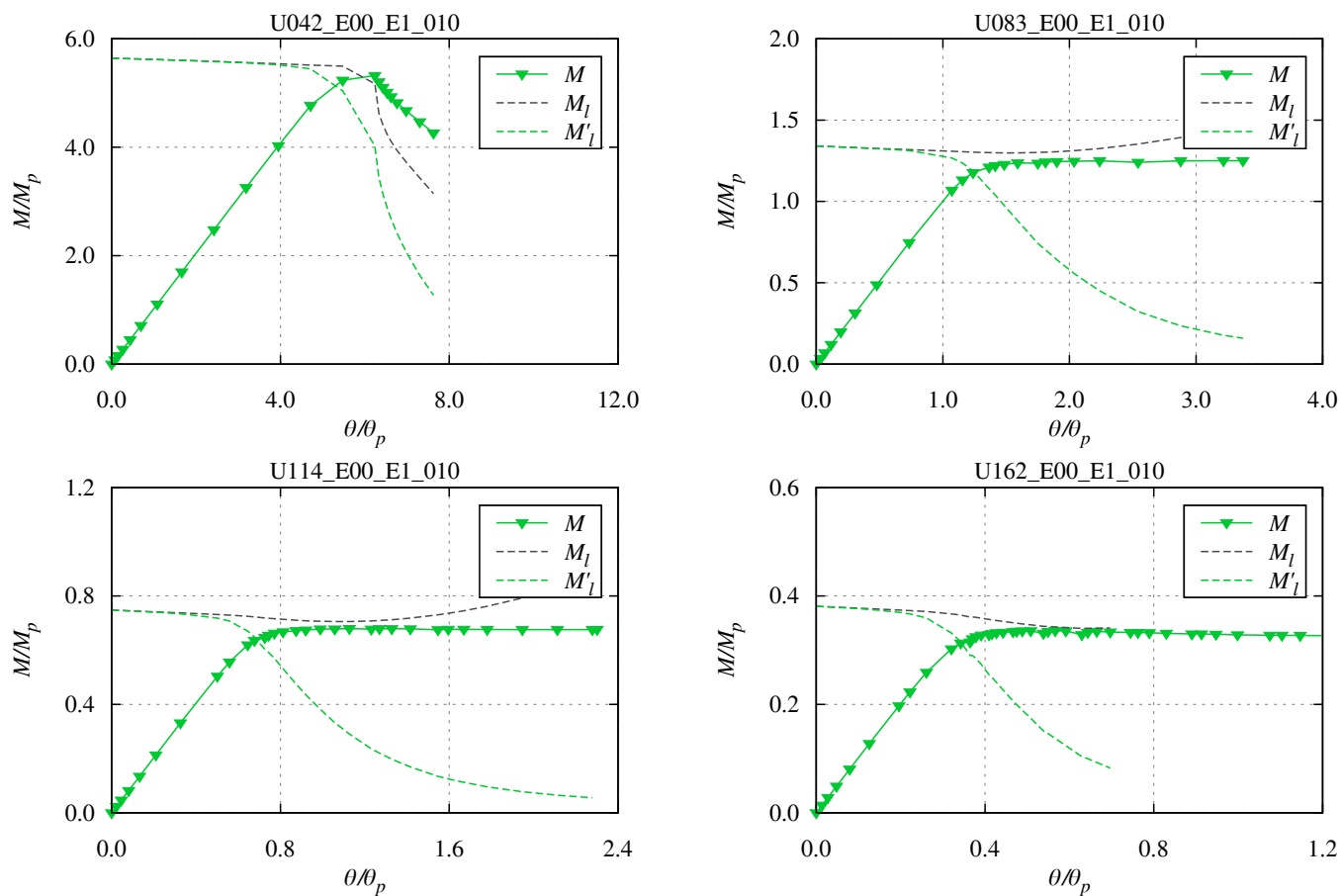


Fig. 4-37 Load-deformation curve: U\_E00\_E1\_010

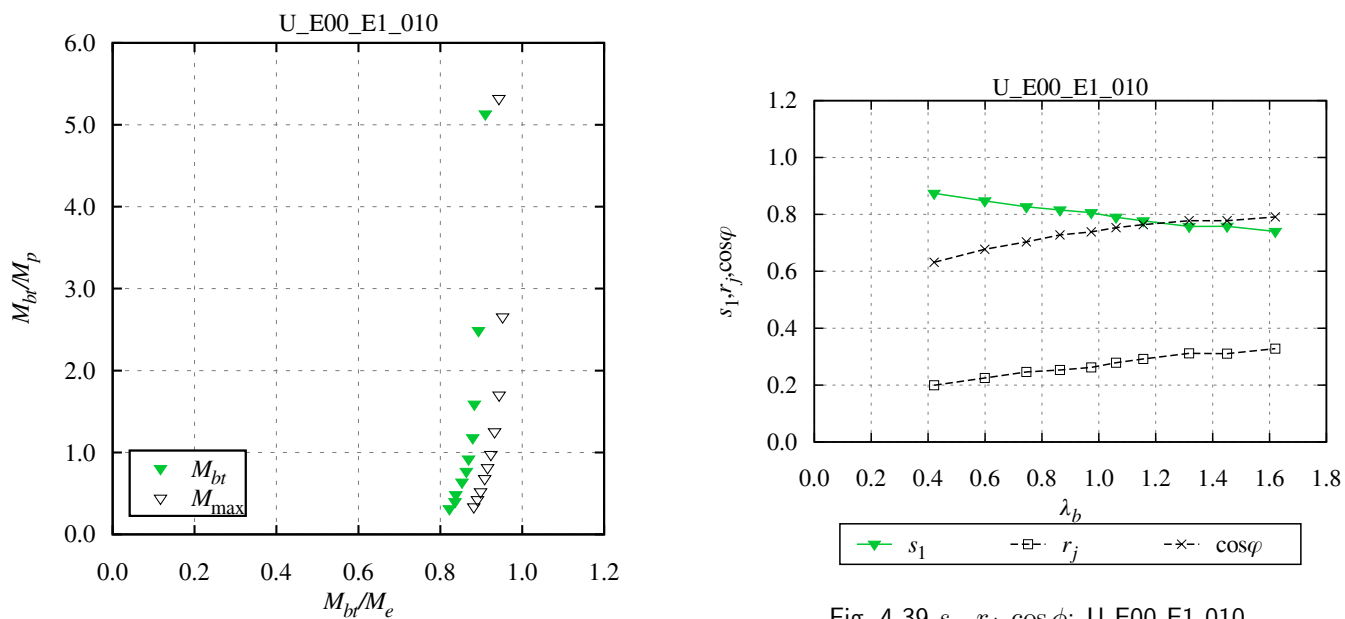


Fig. 4-39  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_E00\_E1\_010

Fig. 4-38 Macroscopic instability surface: U\_E00\_E1\_010

初期たわみ量=1/500 (E00\_E1\_020)、逆対称曲げ

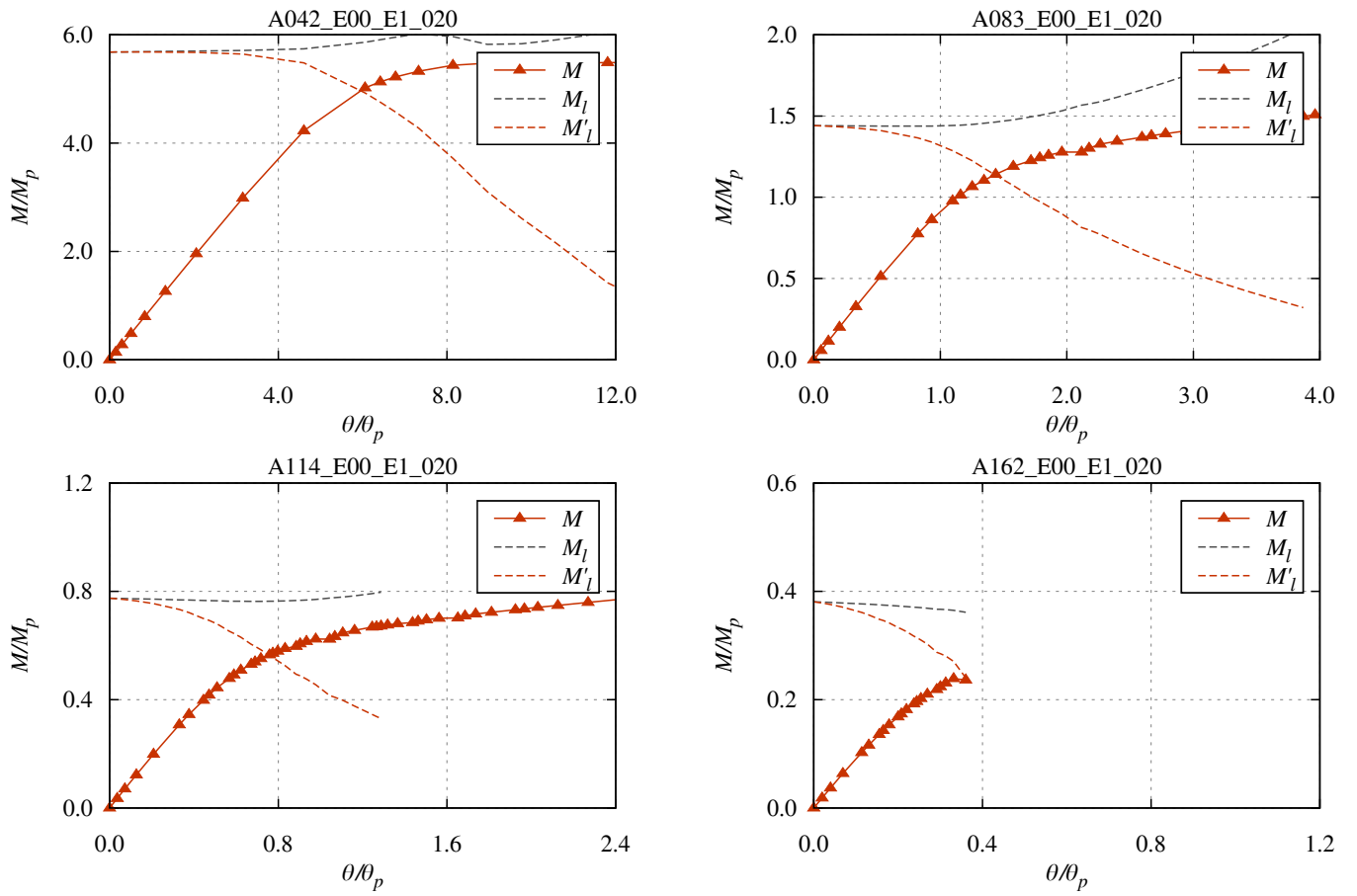


Fig. 4-40 Load-deformation curve: A\_E00.E1\_020

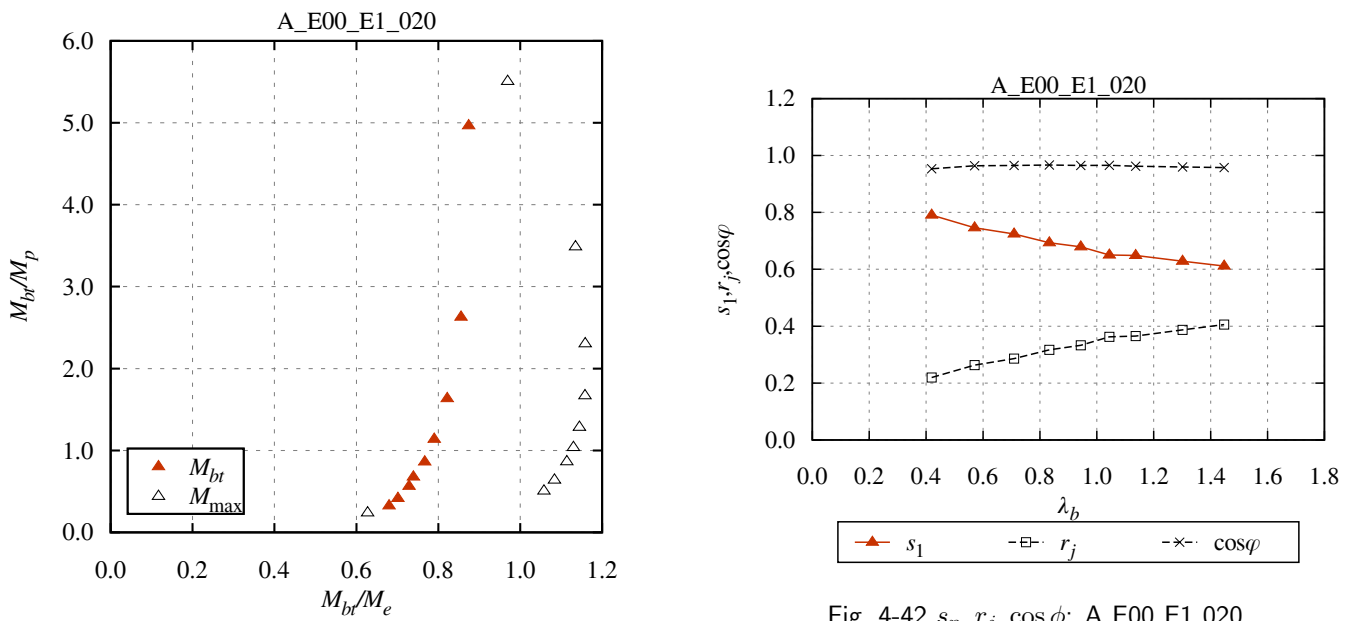


Fig. 4-42  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_E00.E1\_020

Fig. 4-41 Macroscopic instability surface: A\_E00.E1\_020

初期たわみ量=1/500 (E00\_E1\_020)、片曲げ

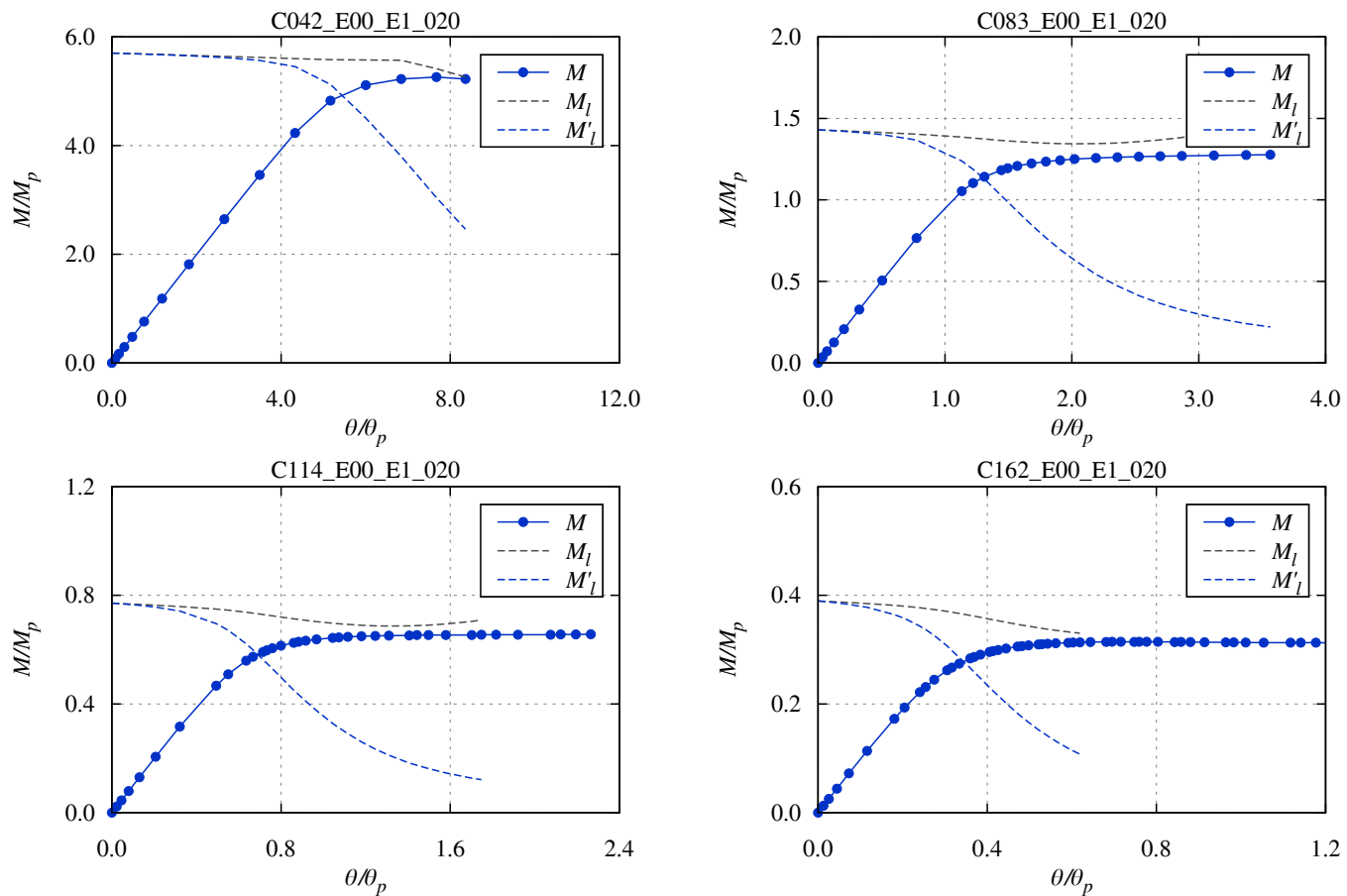


Fig. 4-43 Load-deformation curve: C\_E00\_E1\_020

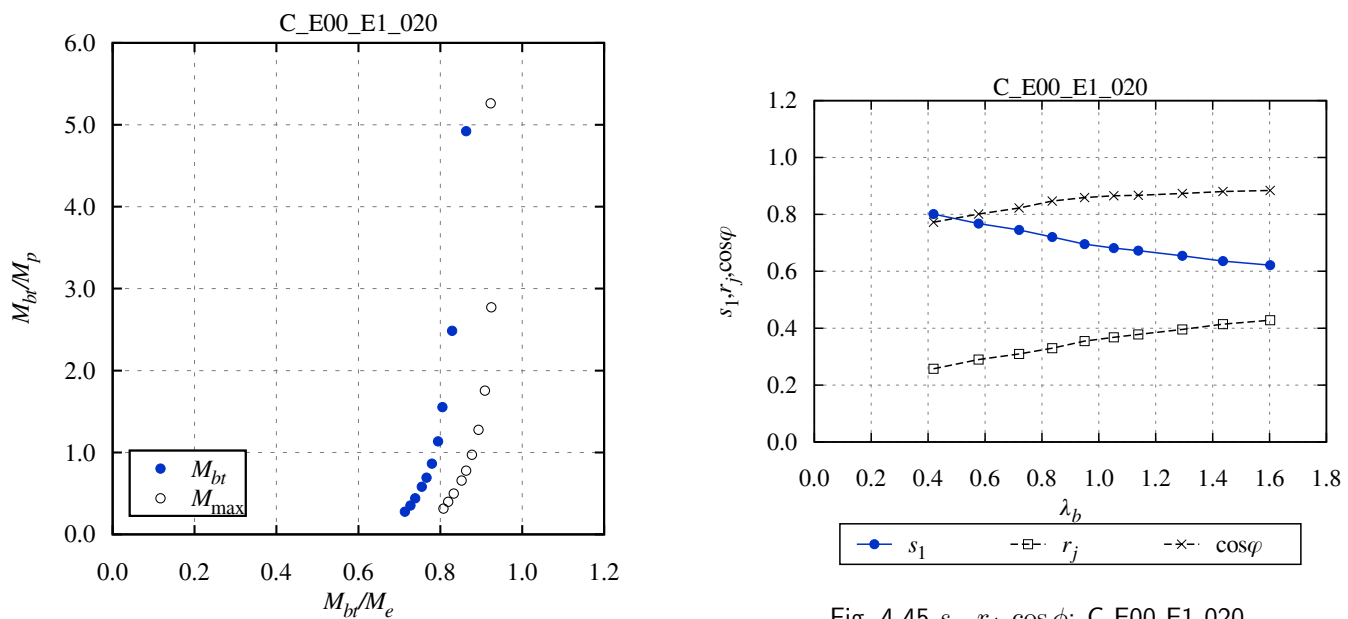


Fig. 4-44 Macroscopic instability surface: C\_E00\_E1\_020

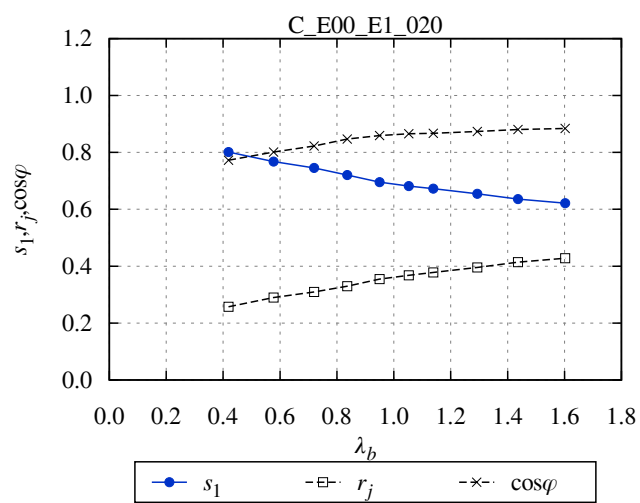


Fig. 4-45  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_E00\_E1\_020

初期たわみ量=1/500 (E00\_E1\_020)、一様曲げ

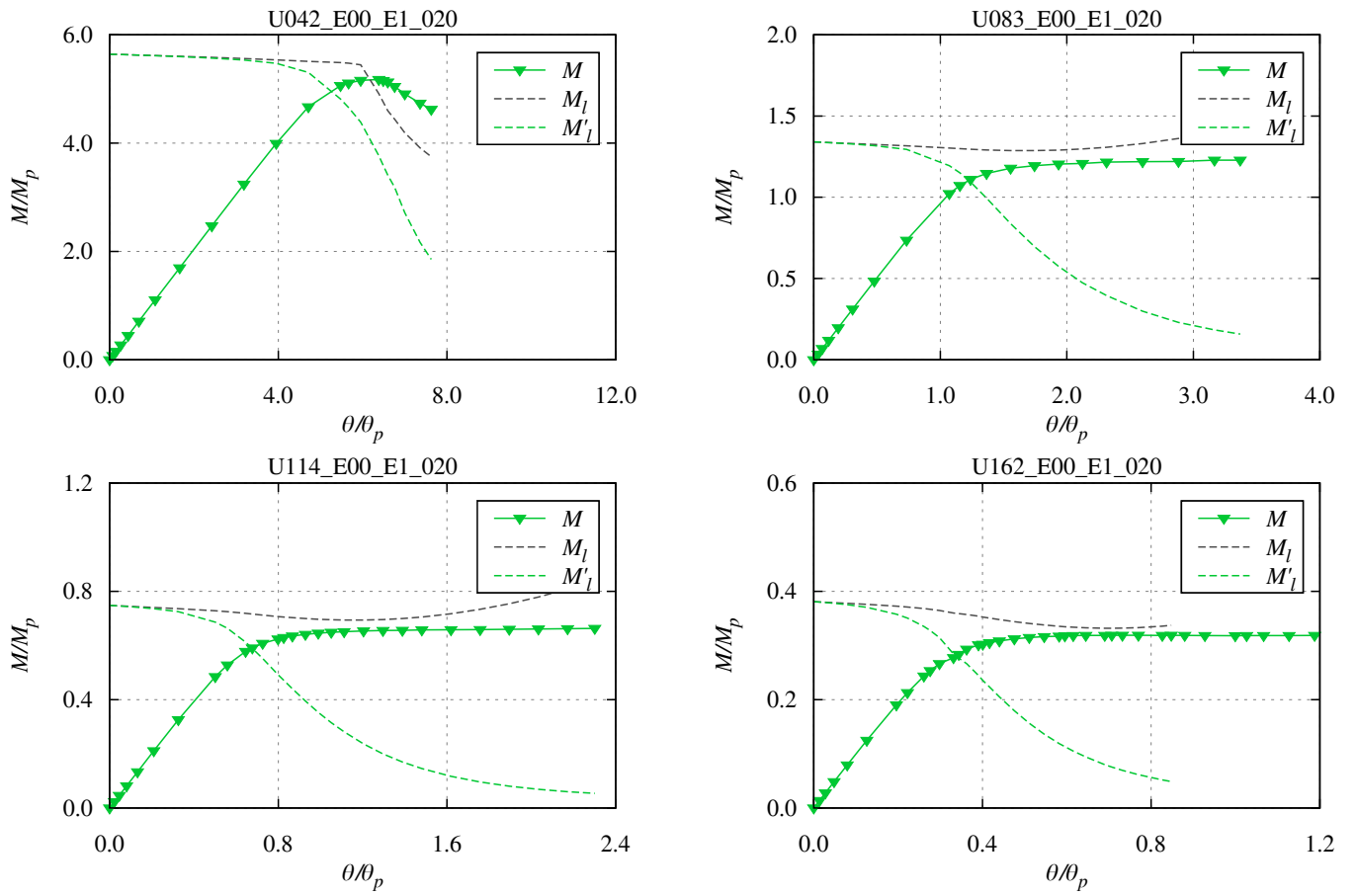


Fig. 4-46 Load-deformation curve: U\_E00\_E1\_020

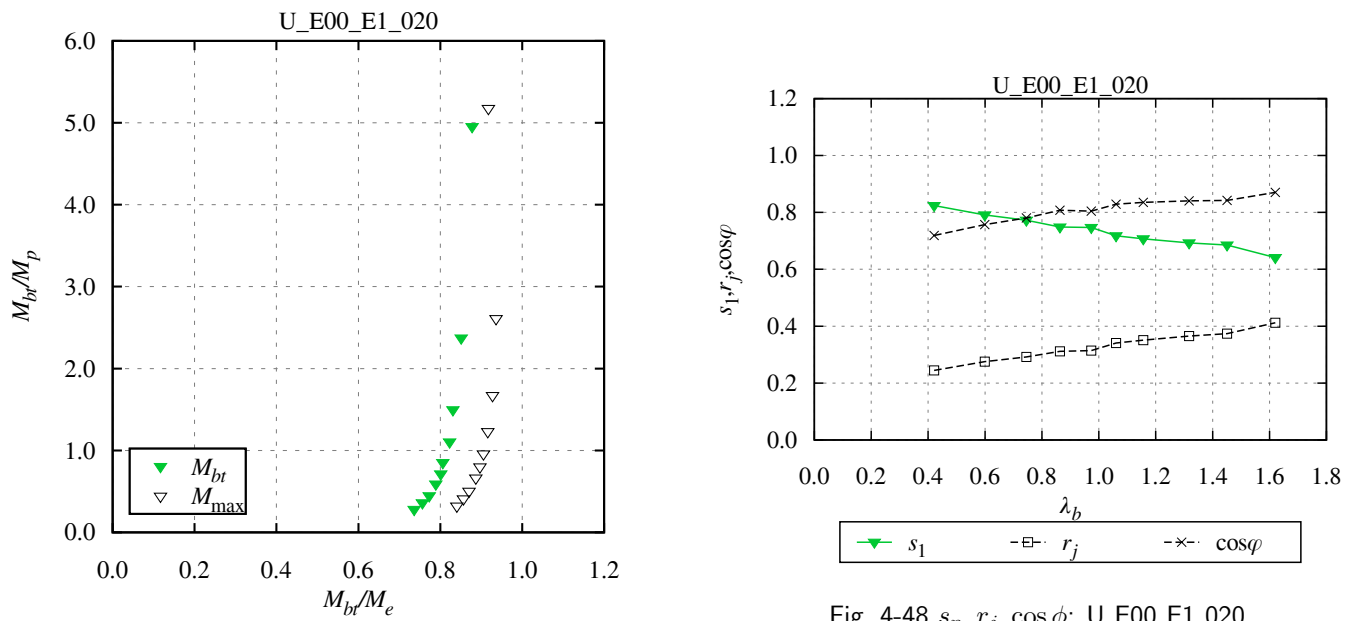


Fig. 4-48  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_E00\_E1\_020

Fig. 4-47 Macroscopic instability surface: U\_E00\_E1\_020

## 4.5.3 弾性モデル、残留応力なし、弾性二次座屈モード形状 (E00\_E2)

初期たわみ量=1/10000 (E00\_E2.001)、逆対称曲げ

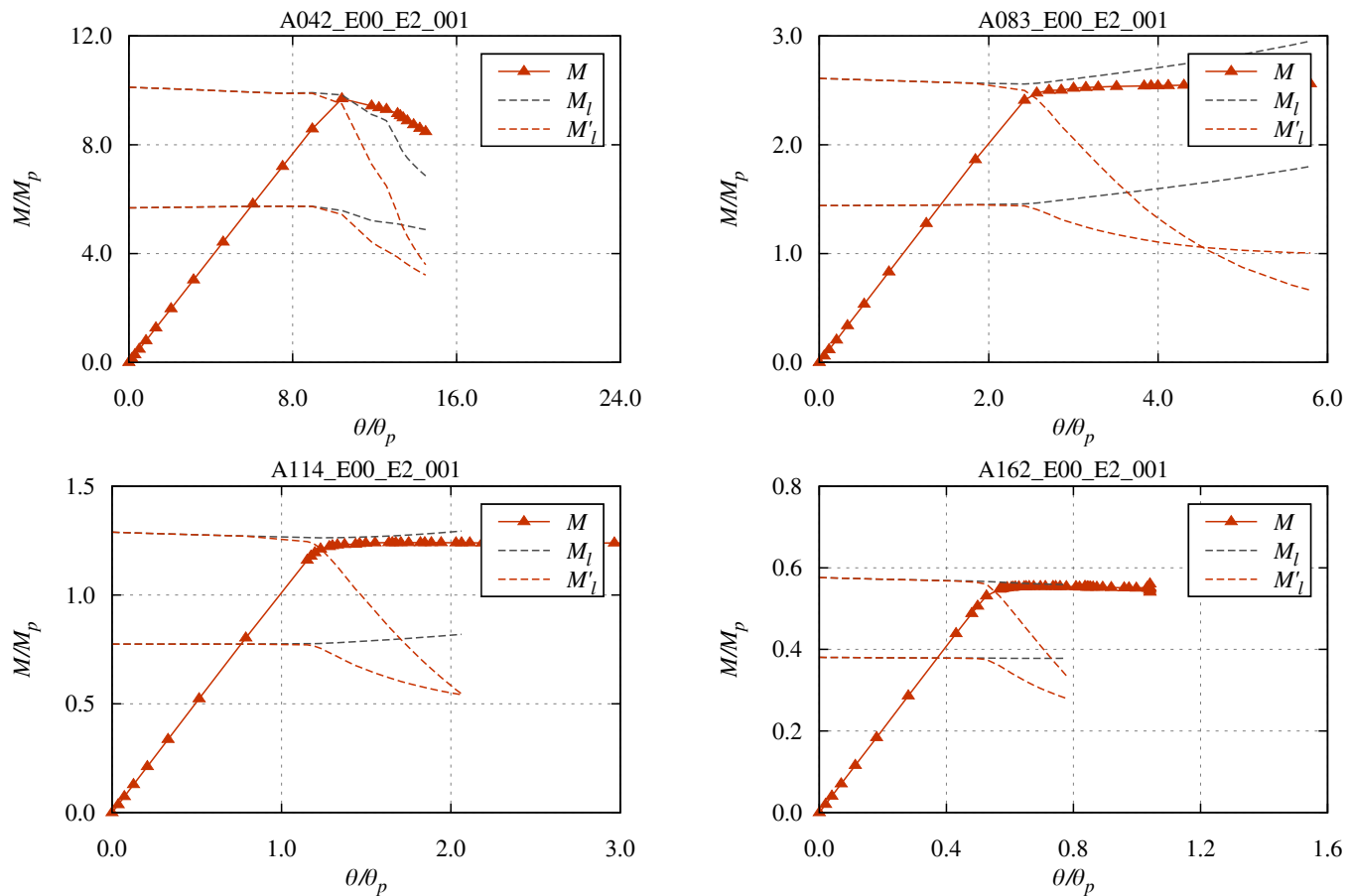


Fig. 4-49 Load-deformation curve: A\_E00.E2.001

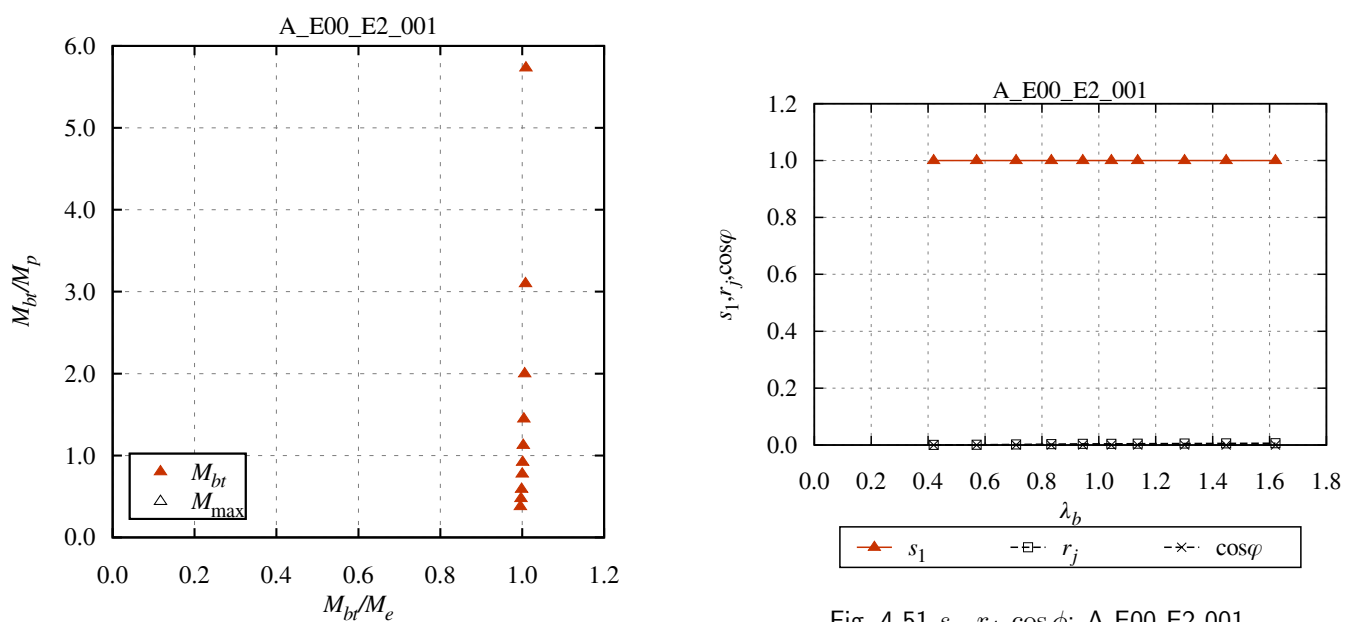
Fig. 4-51  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_E00.E2.001

Fig. 4-50 Macroscopic instability surface: A\_E00.E2.001

初期たわみ量=1/10000 (E00\_E2\_001)、片曲げ

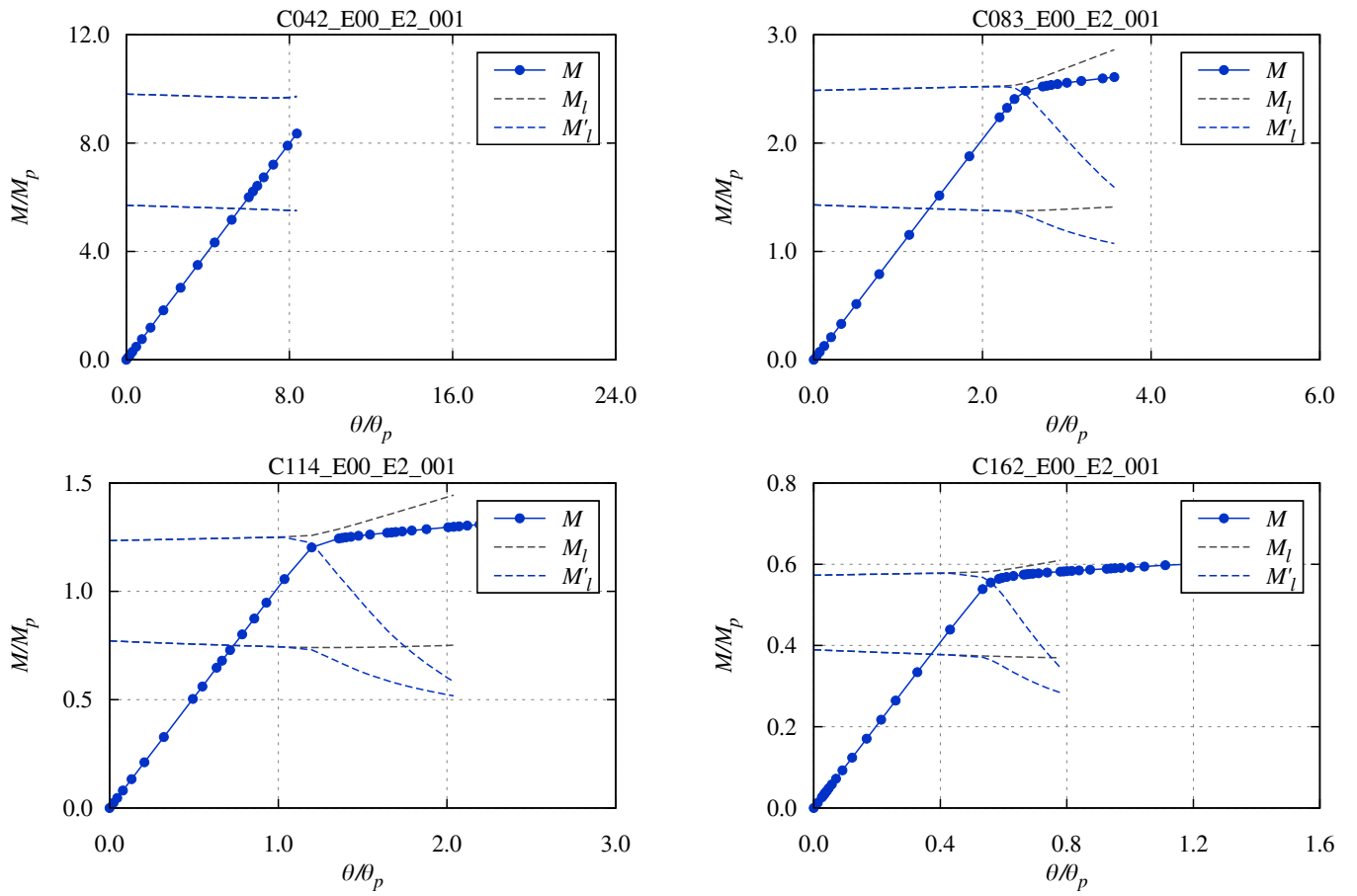


Fig. 4-52 Load-deformation curve: C\_E00\_E2\_001

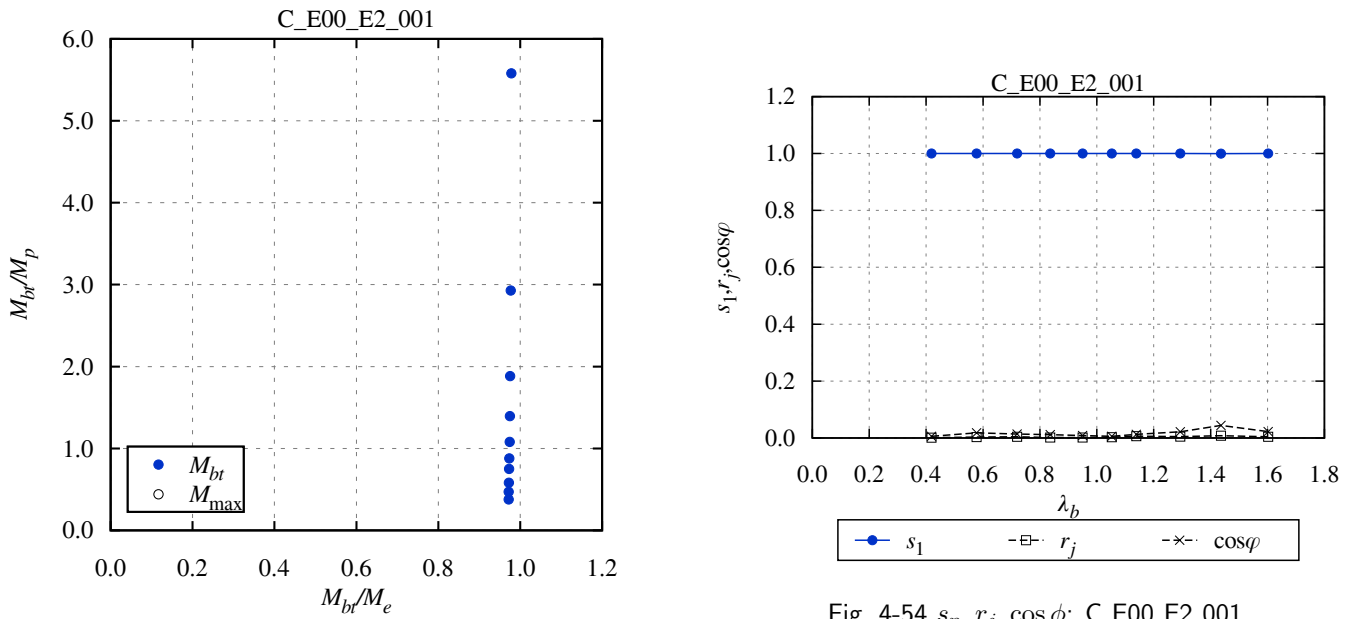


Fig. 4-54  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_E00\_E2\_001

Fig. 4-53 Macroscopic instability surface: C\_E00\_E2\_001

初期たわみ量=1/10000 (E00\_E2\_001)、一様曲げ

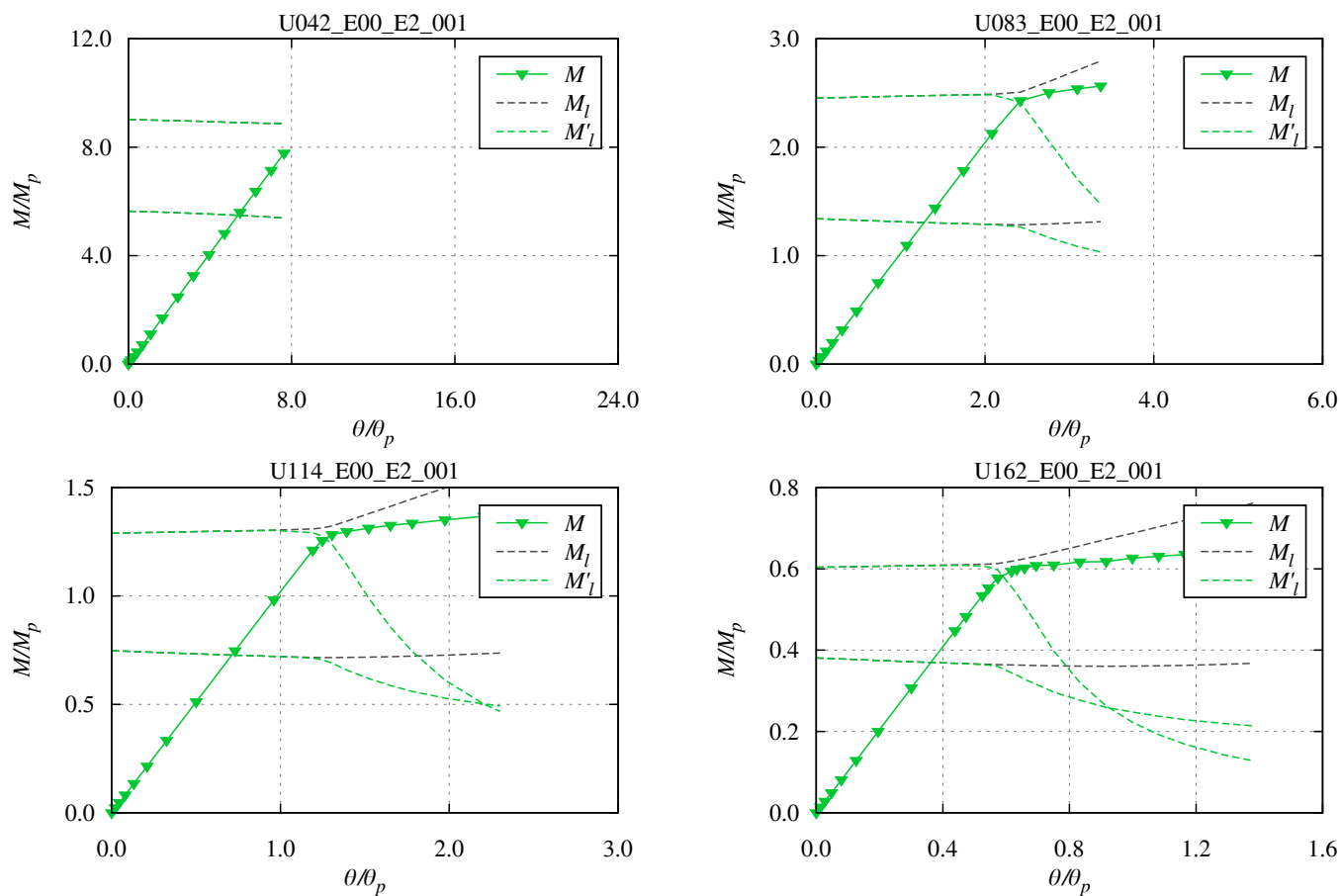


Fig. 4-55 Load-deformation curve: U\_E00\_E2\_001

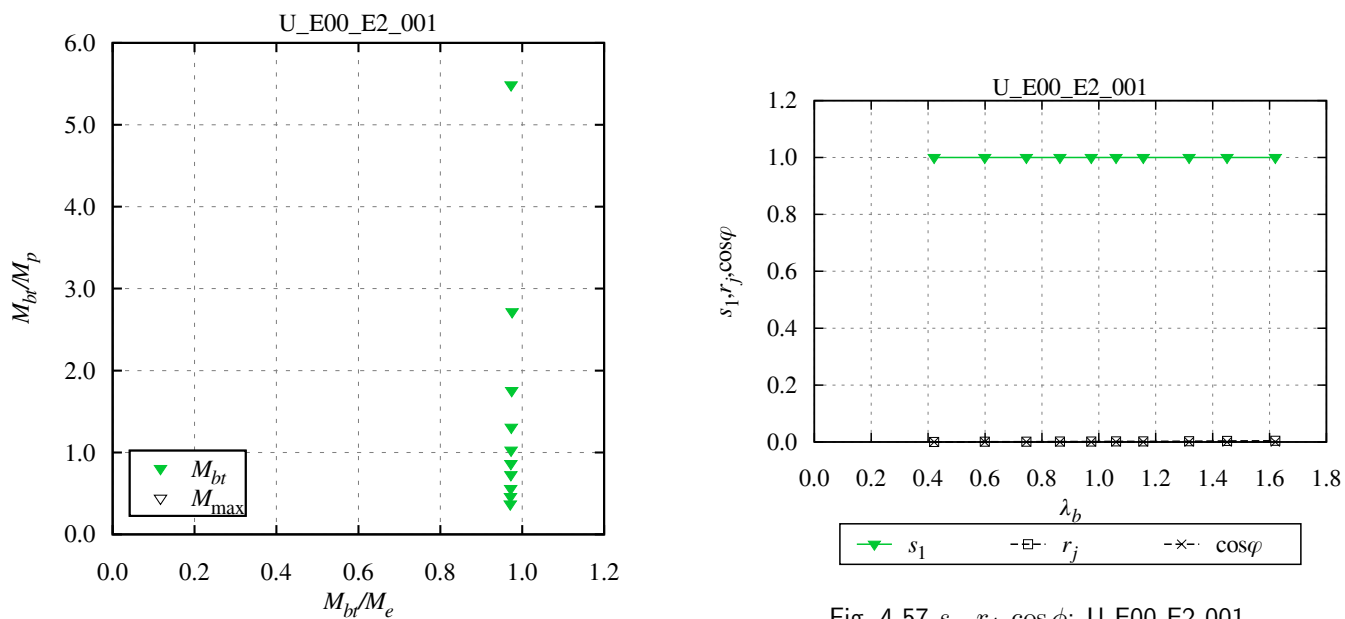


Fig. 4-56 Macroscopic instability surface: U\_E00\_E2\_001

Fig. 4-57  $s_n, r_j, \cos\phi$ : U\_E00\_E2\_001

初期たわみ量=1/2000 (E00\_E2\_005)、逆対称曲げ

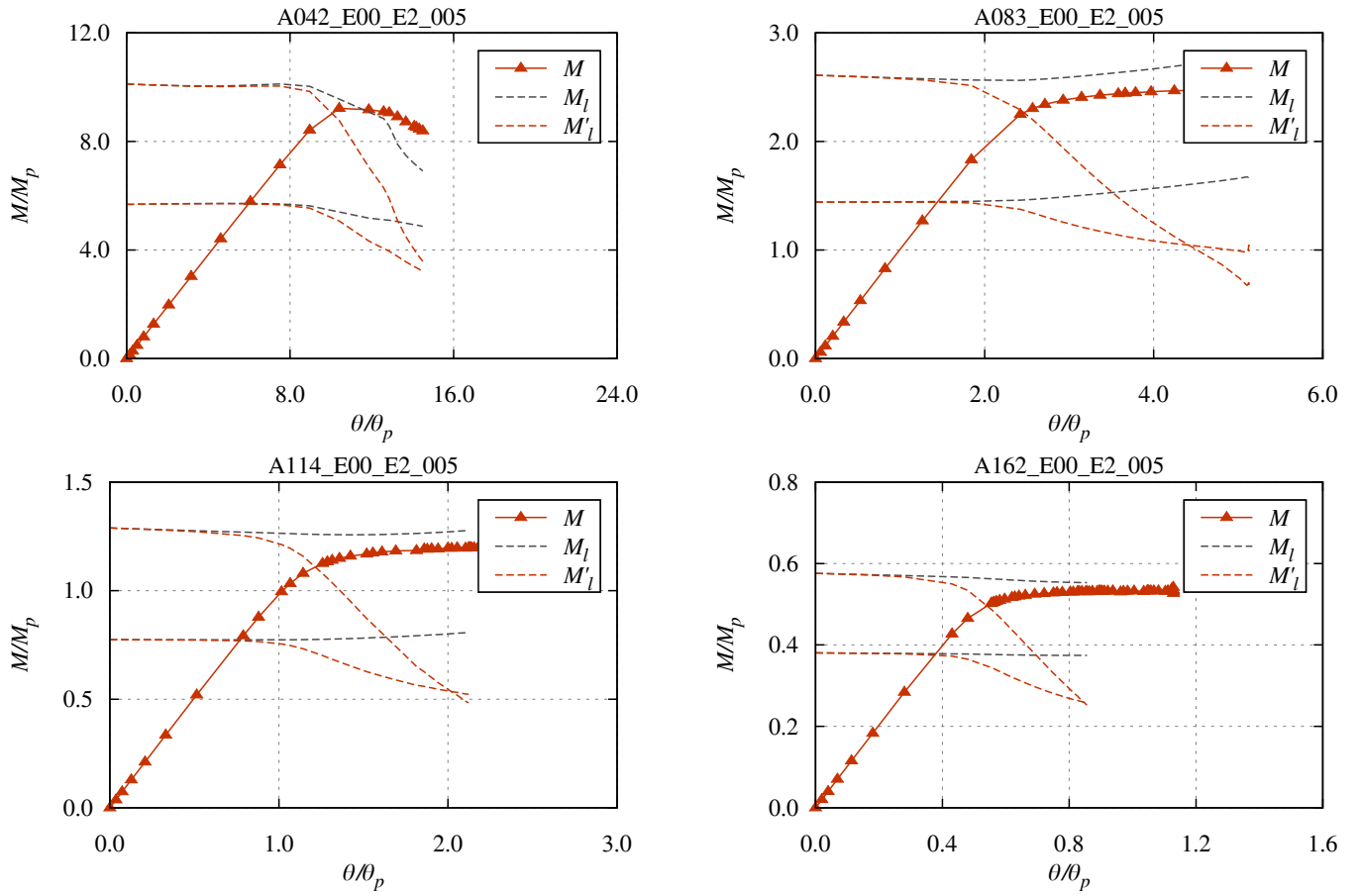


Fig. 4-58 Load-deformation curve: A\_E00.E2\_005

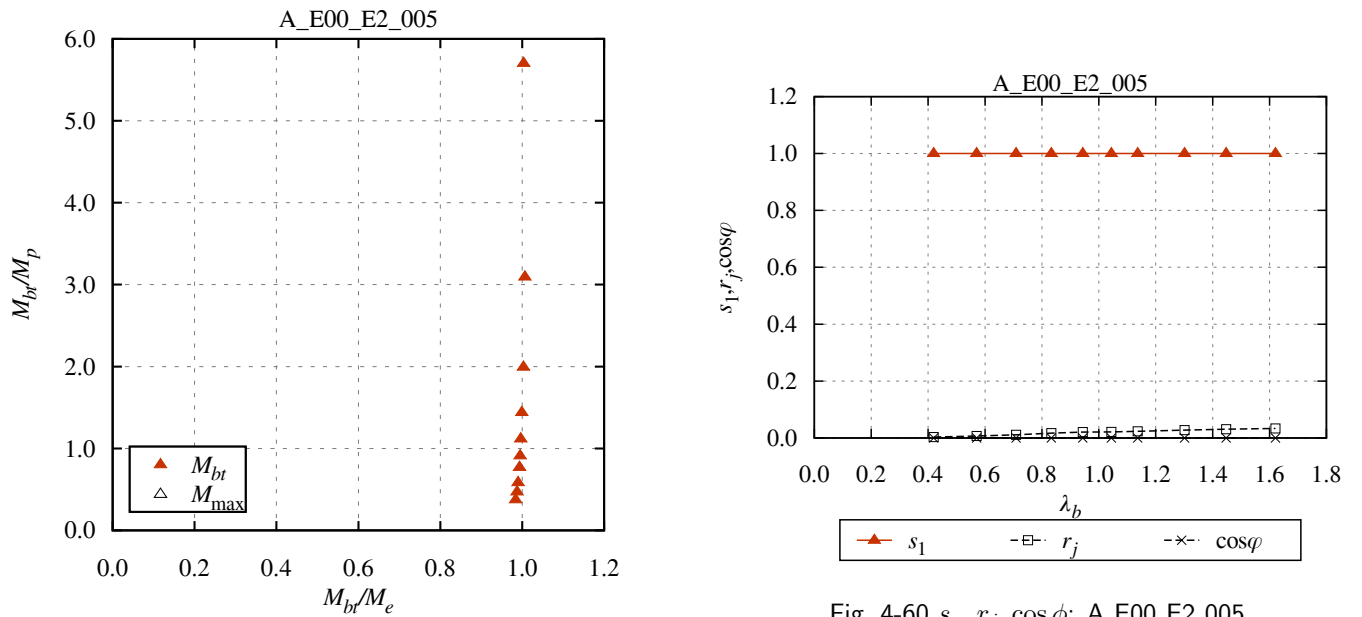


Fig. 4-59 Macroscopic instability surface: A\_E00.E2\_005

Fig. 4-60  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_E00.E2\_005



初期たわみ量=1/2000 (E00\_E2\_005)、片曲げ

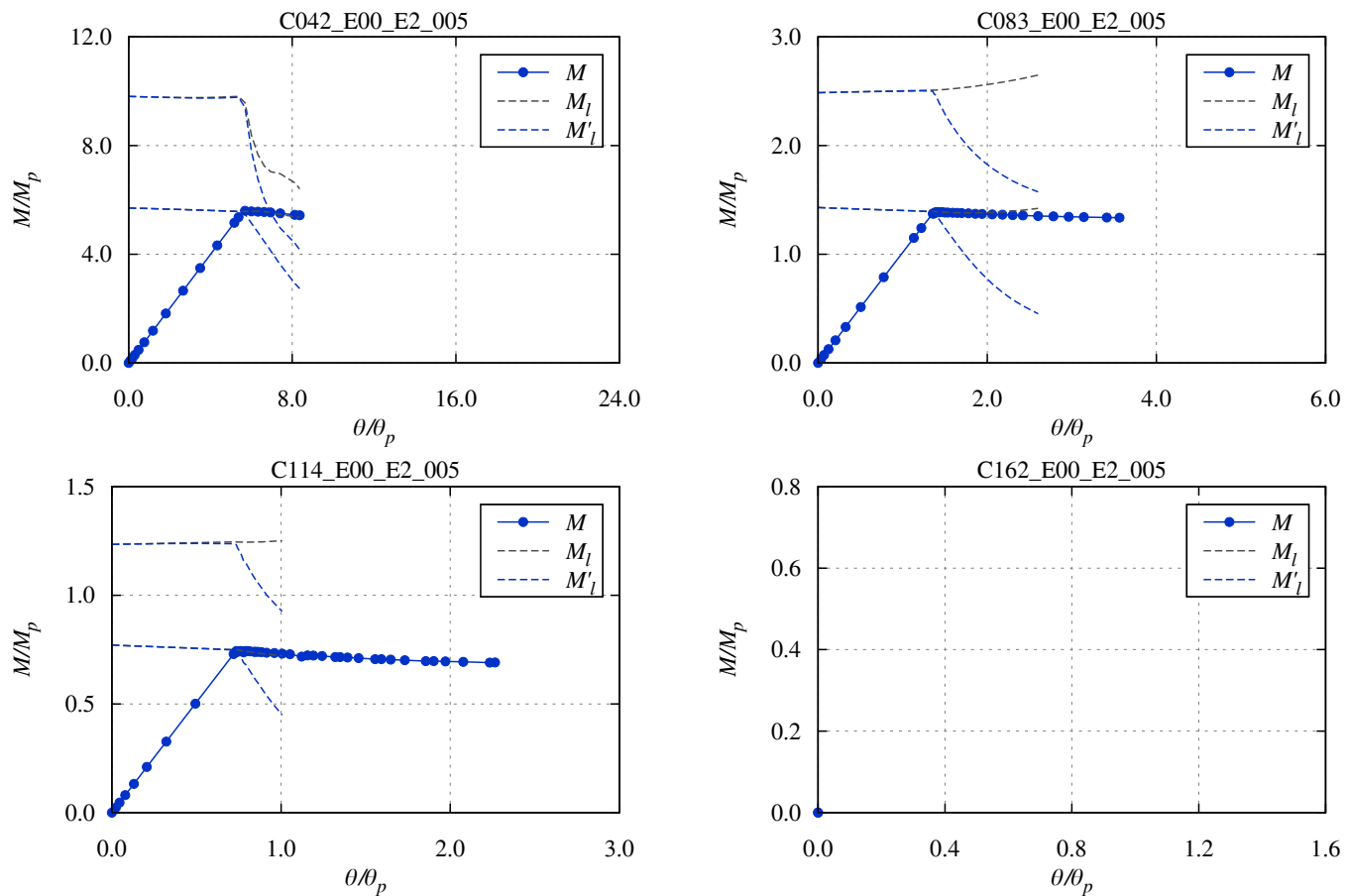


Fig. 4-61 Load-deformation curve: C\_E00.E2.005

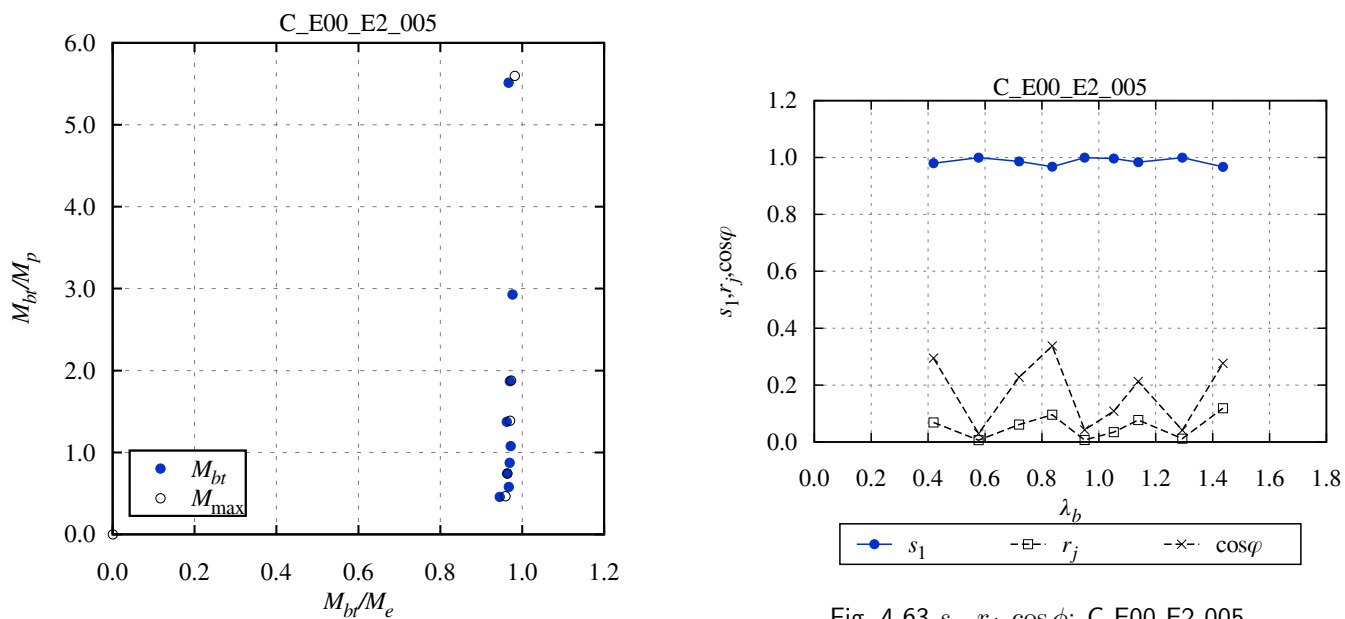


Fig. 4-62 Macroscopic instability surface: C\_E00.E2.005

Fig. 4-63  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_E00.E2.005

初期たわみ量=1/2000 (E00\_E2\_005)、一様曲げ

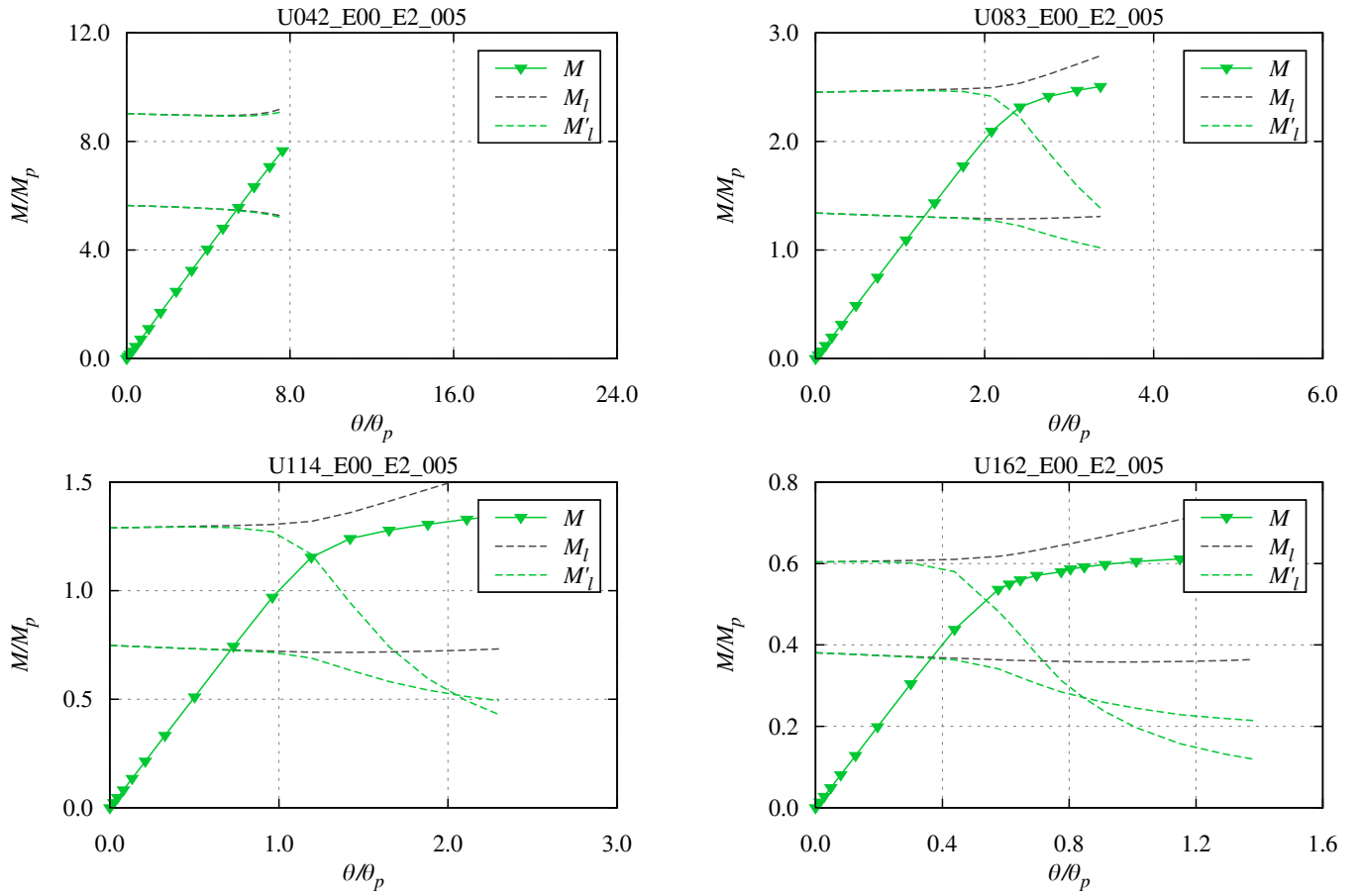


Fig. 4-64 Load-deformation curve: U\_E00\_E2\_005

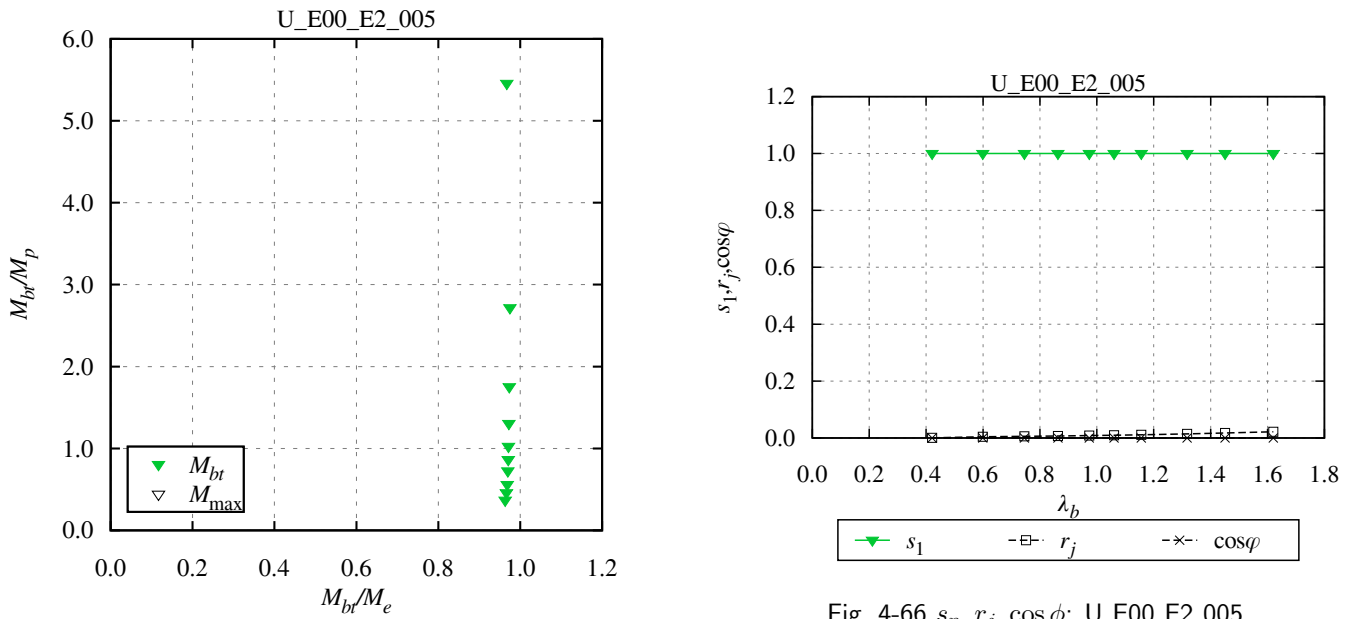


Fig. 4-65 Macroscopic instability surface: U\_E00\_E2\_005

Fig. 4-66  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_E00\_E2\_005

初期たわみ量=1/1000 (E00\_E2\_010)、逆対称曲げ

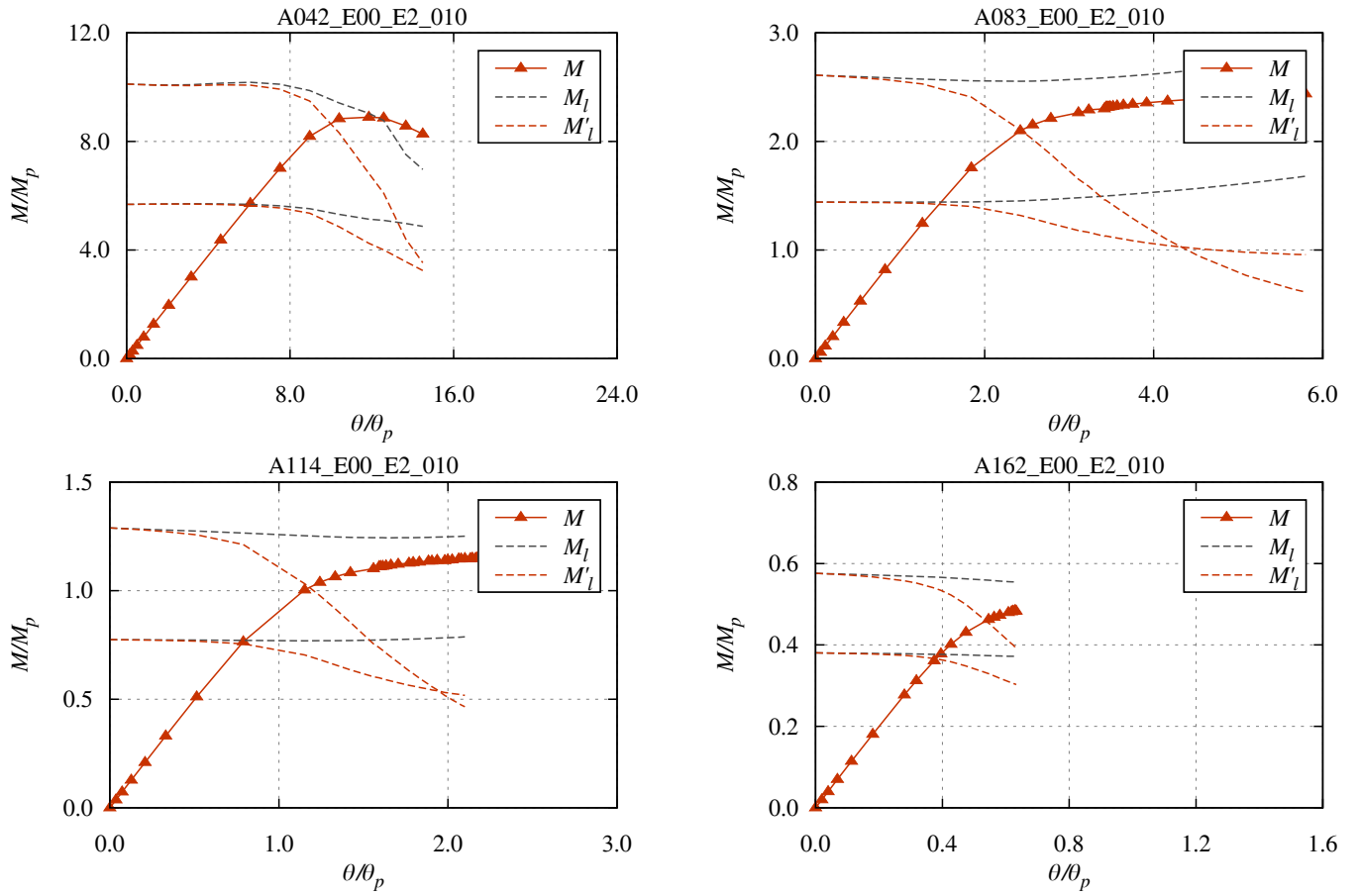


Fig. 4-67 Load-deformation curve: A\_E00.E2\_010

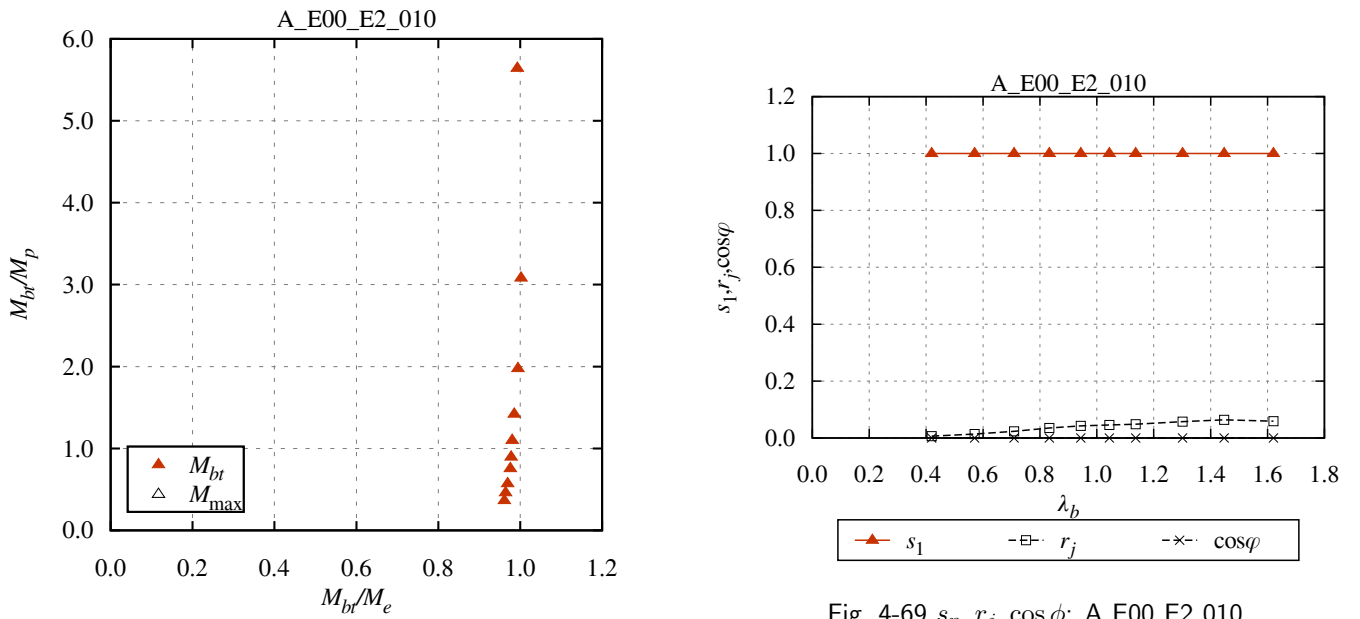


Fig. 4-69  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_E00.E2\_010

Fig. 4-68 Macroscopic instability surface: A\_E00.E2\_010

初期たわみ量=1/1000 (E00\_E2\_010)、片曲げ

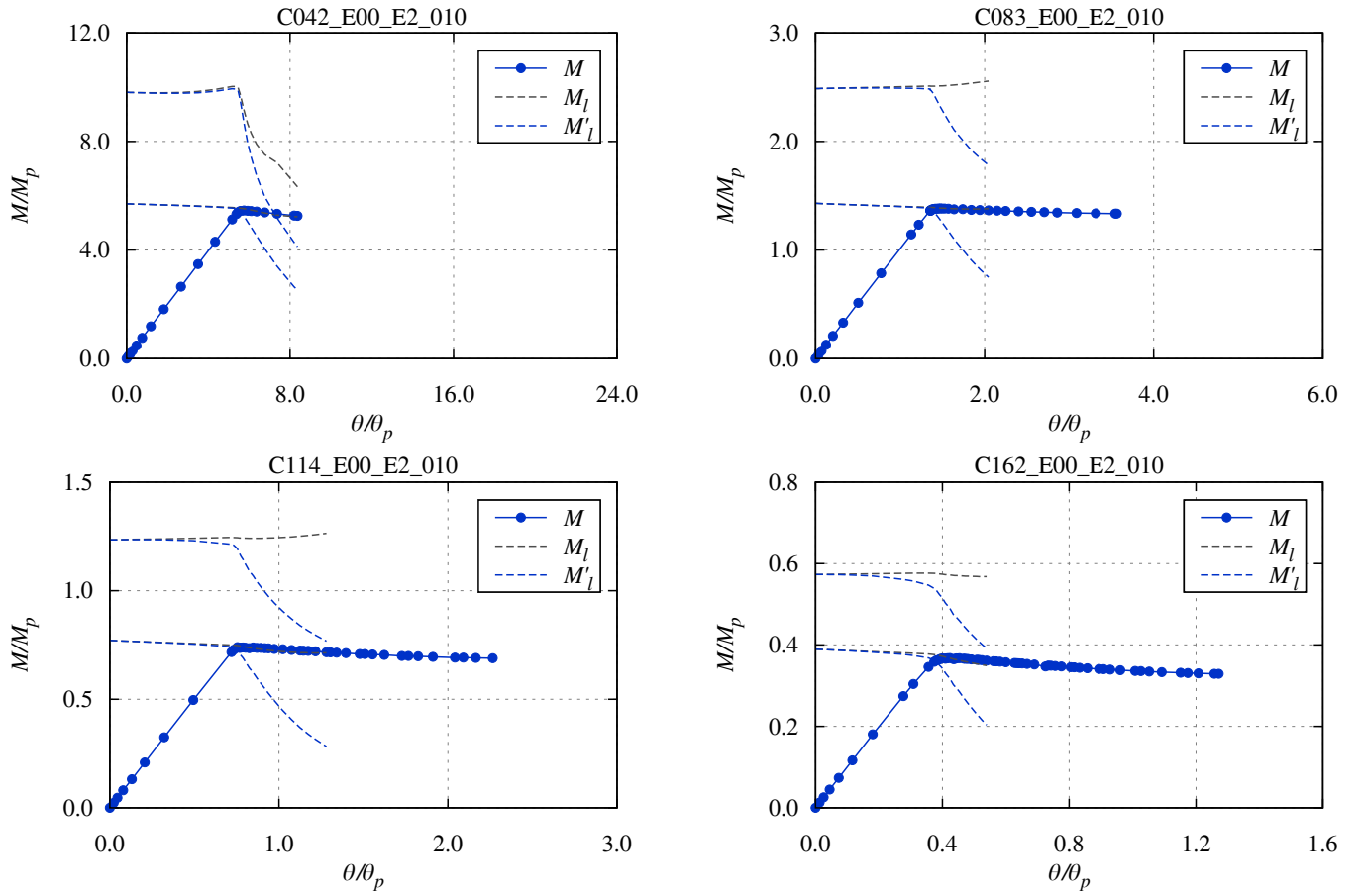


Fig. 4-70 Load-deformation curve: C\_E00.E2\_010

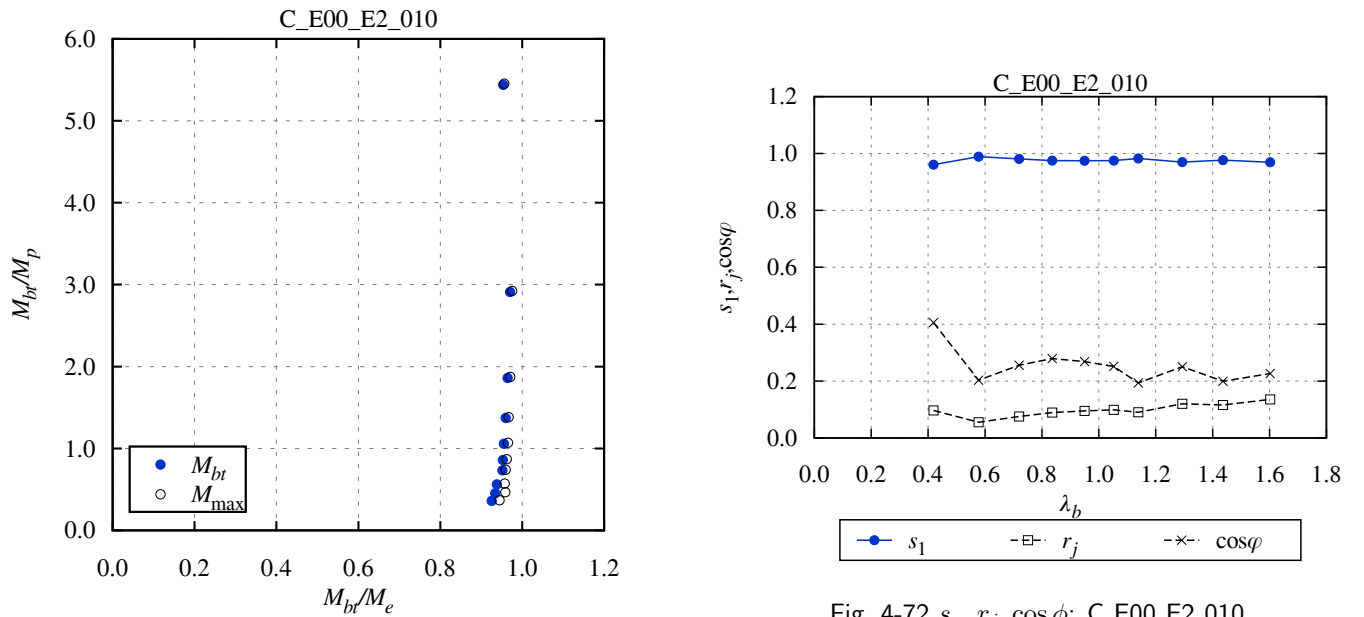


Fig. 4-72  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_E00.E2\_010

Fig. 4-71 Macroscopic instability surface: C\_E00.E2\_010

初期たわみ量=1/1000 (E00\_E2\_010)、一様曲げ

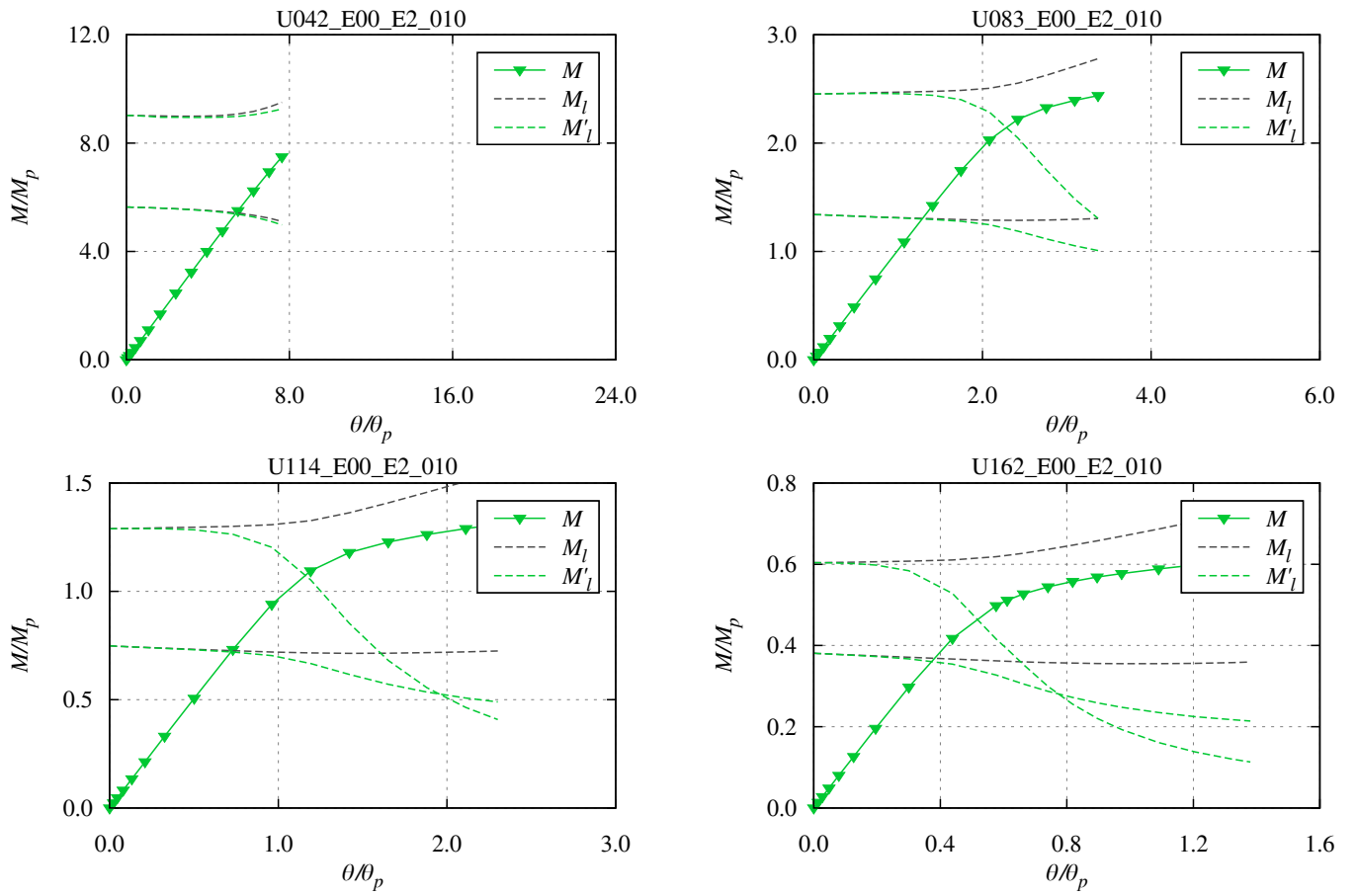


Fig. 4-73 Load-deformation curve: U\_E00\_E2\_010

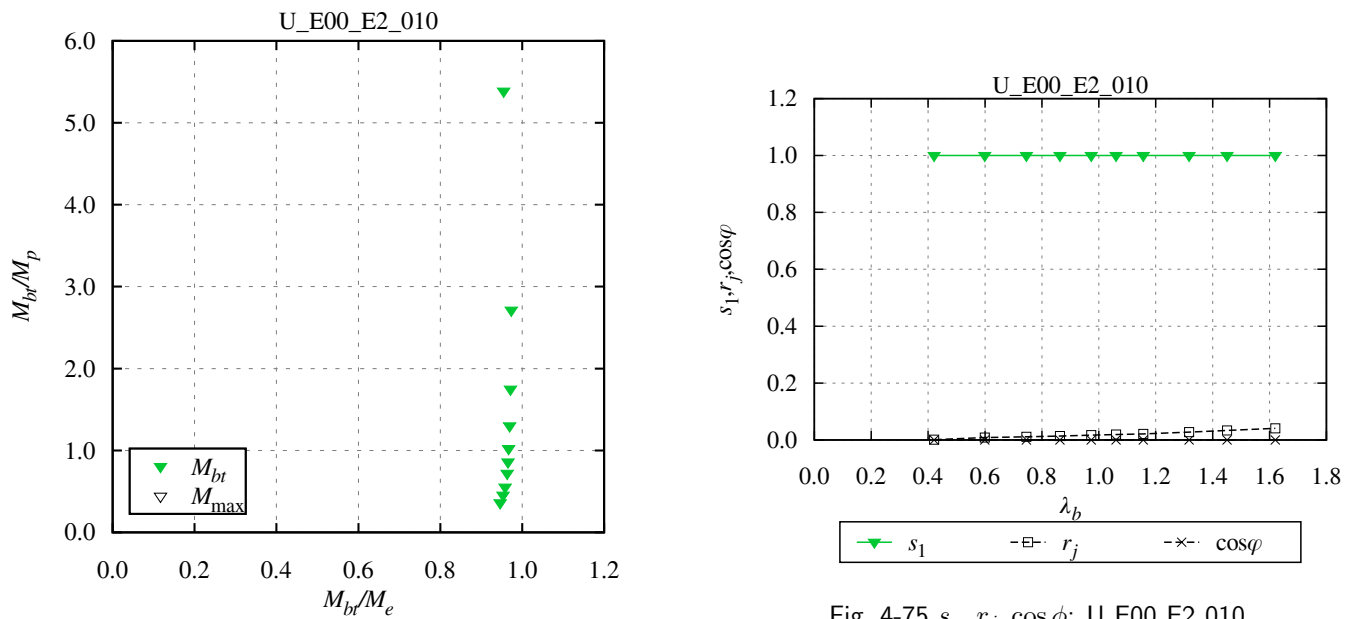


Fig. 4-74 Macroscopic instability surface: U\_E00\_E2\_010

Fig. 4-75  $s_n, r_j, \cos\phi$ : U\_E00\_E2\_010

初期たわみ量=1/500 (E00\_E2\_020)、逆対称曲げ

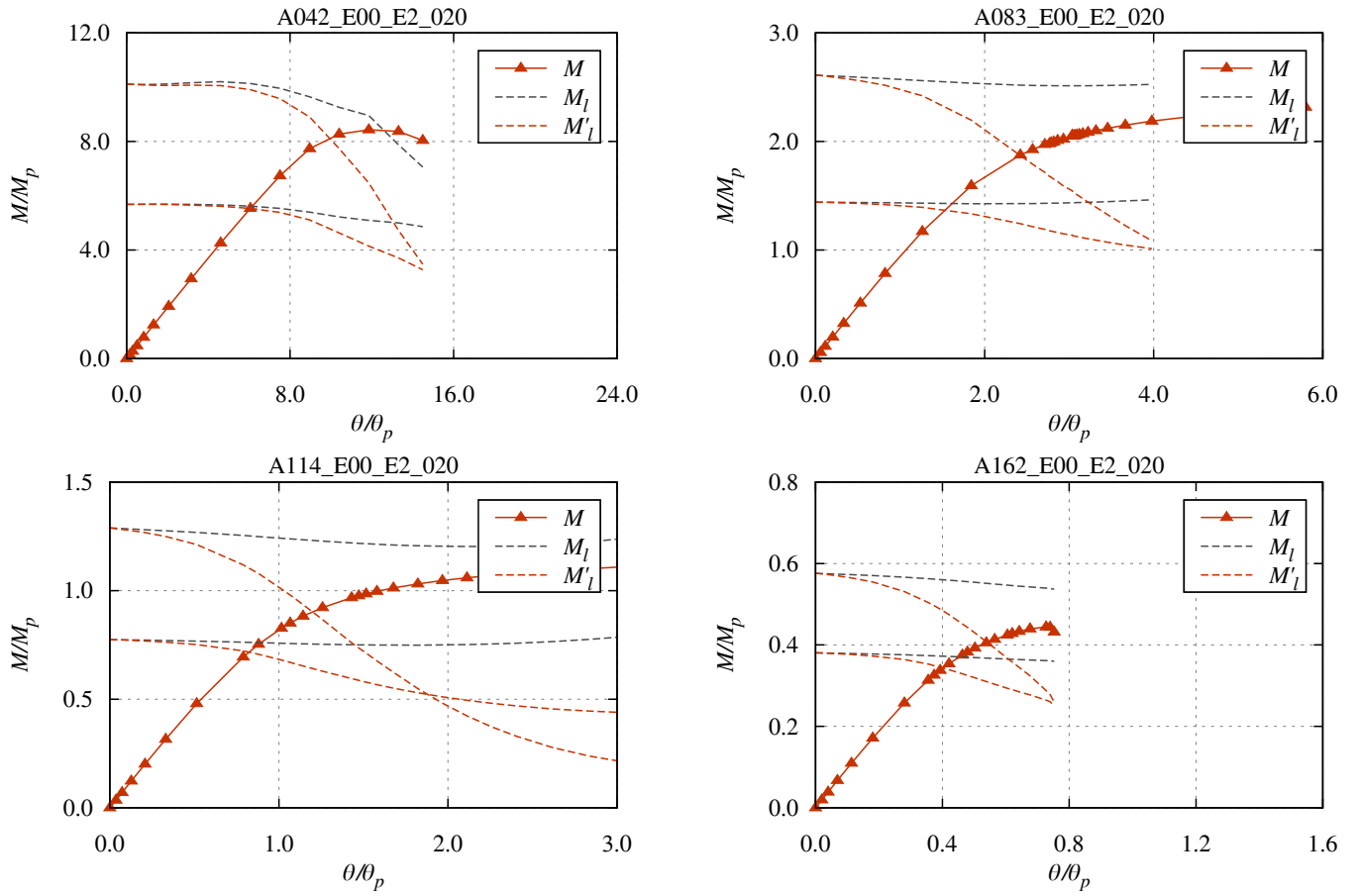


Fig. 4-76 Load-deformation curve: A\_E00\_E2\_020

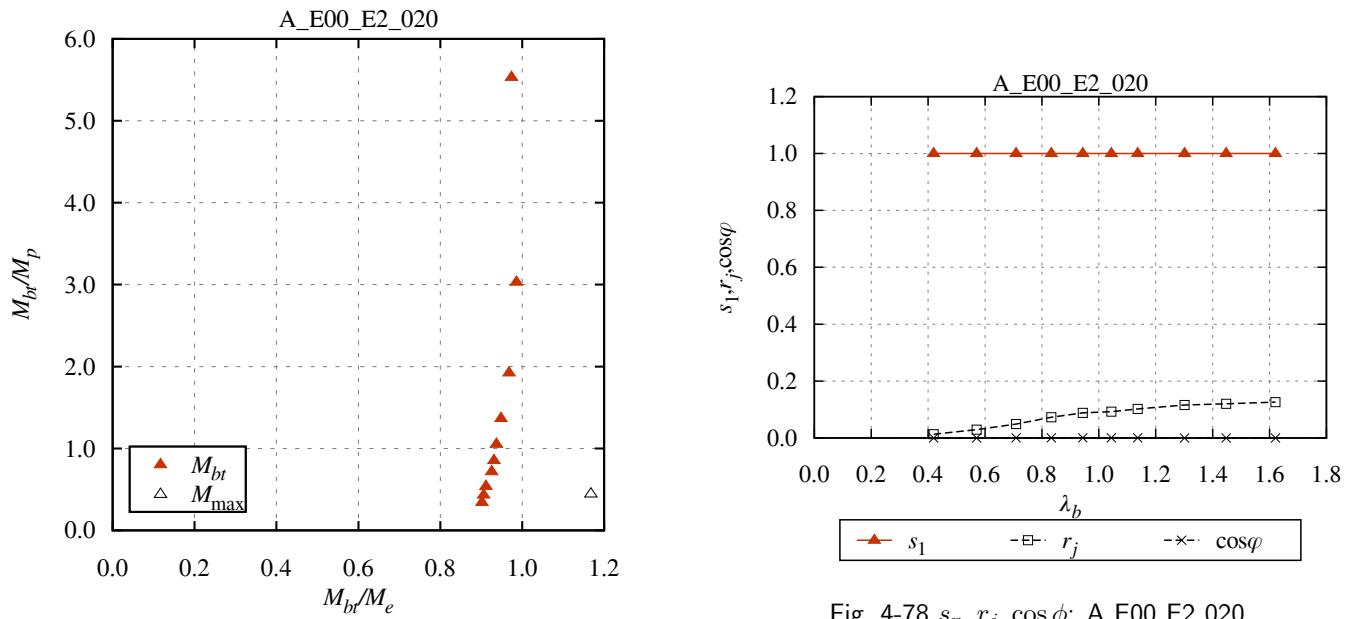


Fig. 4-78  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_E00\_E2\_020

Fig. 4-77 Macroscopic instability surface: A\_E00\_E2\_020

初期たわみ量=1/500 (E00\_E2\_020)、片曲げ

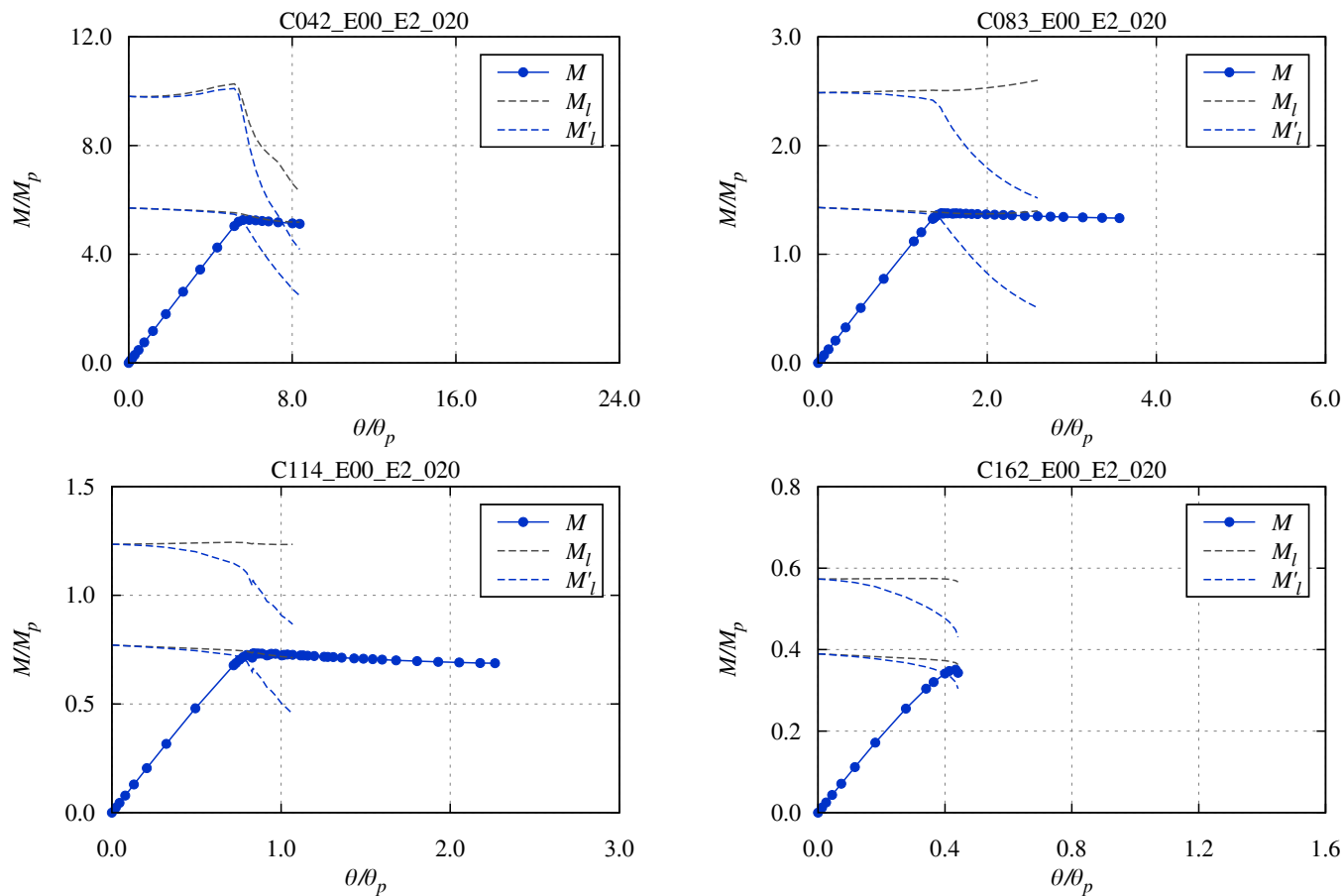


Fig. 4-79 Load-deformation curve: C\_E00\_E2\_020

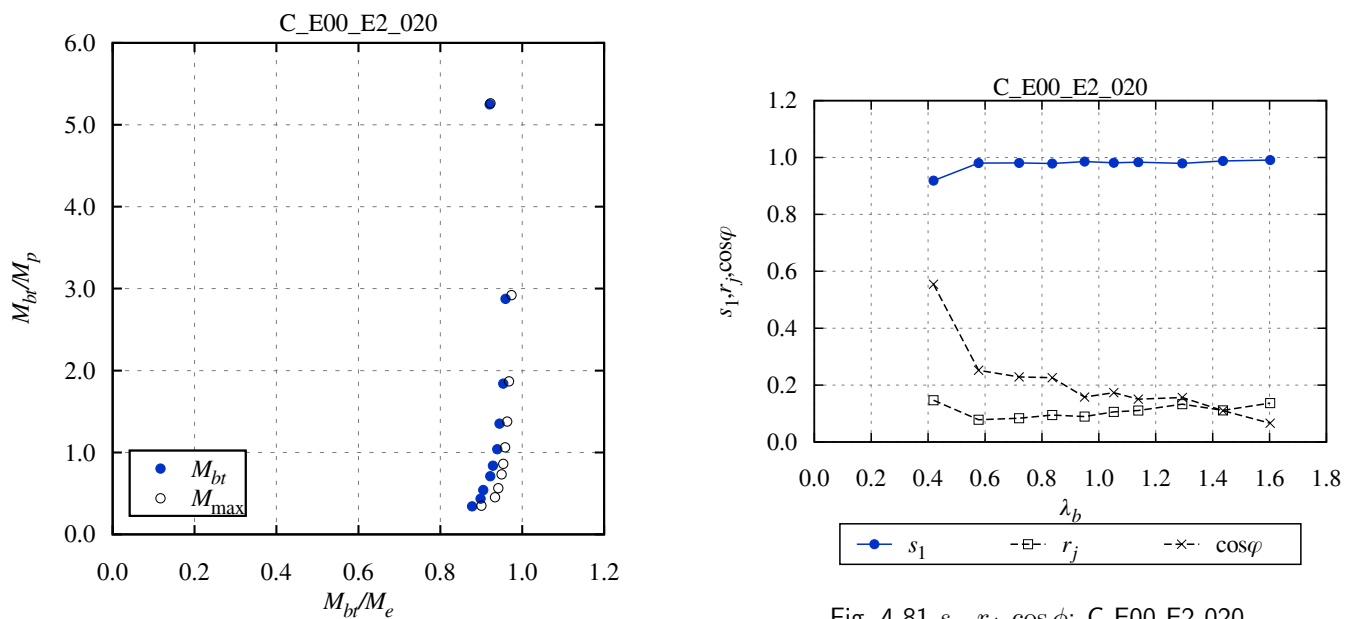


Fig. 4-81  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_E00\_E2\_020

Fig. 4-80 Macroscopic instability surface: C\_E00\_E2\_020

初期たわみ量=1/500 (E00\_E2\_020)、一様曲げ

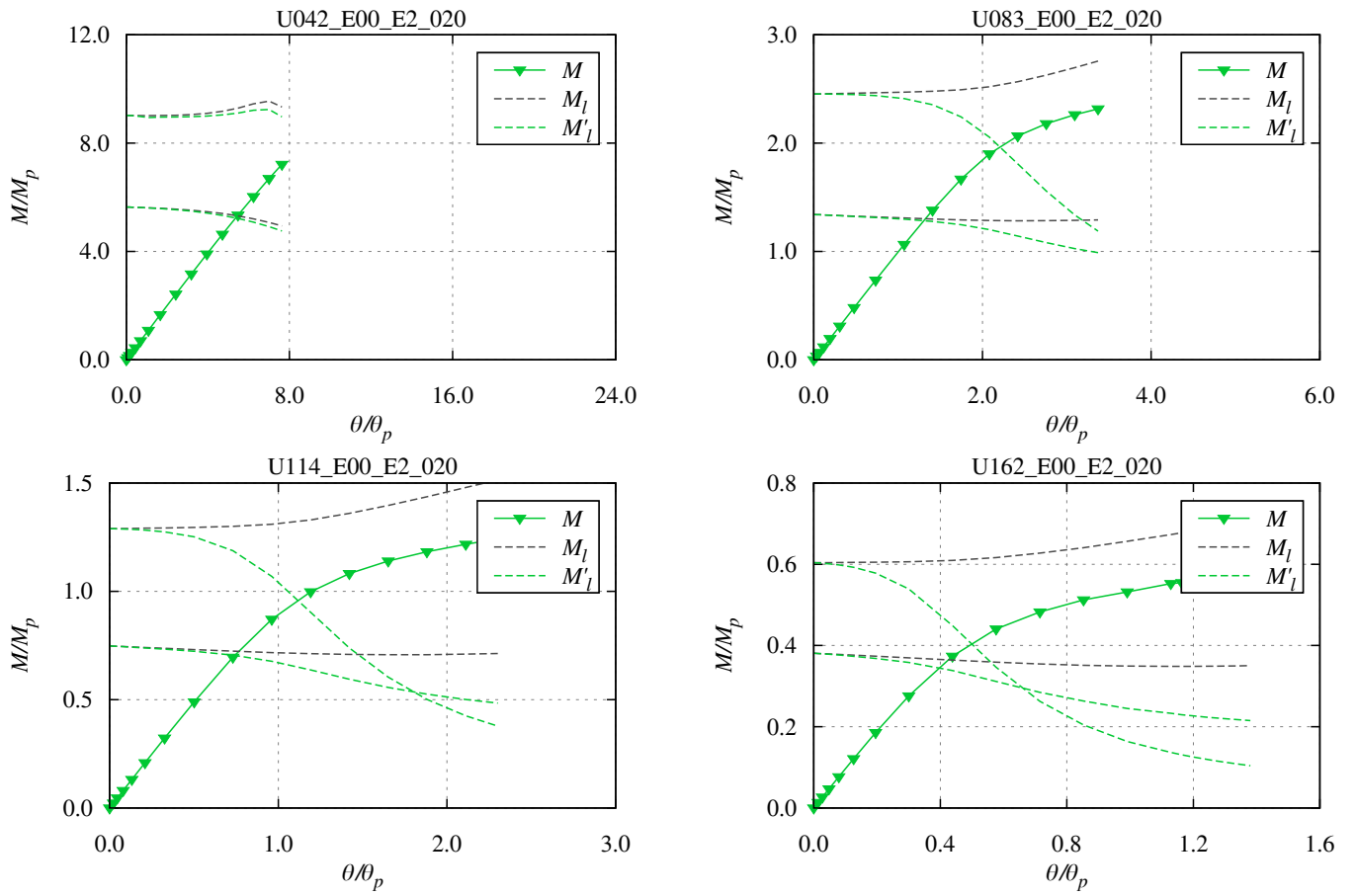


Fig. 4-82 Load-deformation curve: U\_E00\_E2\_020

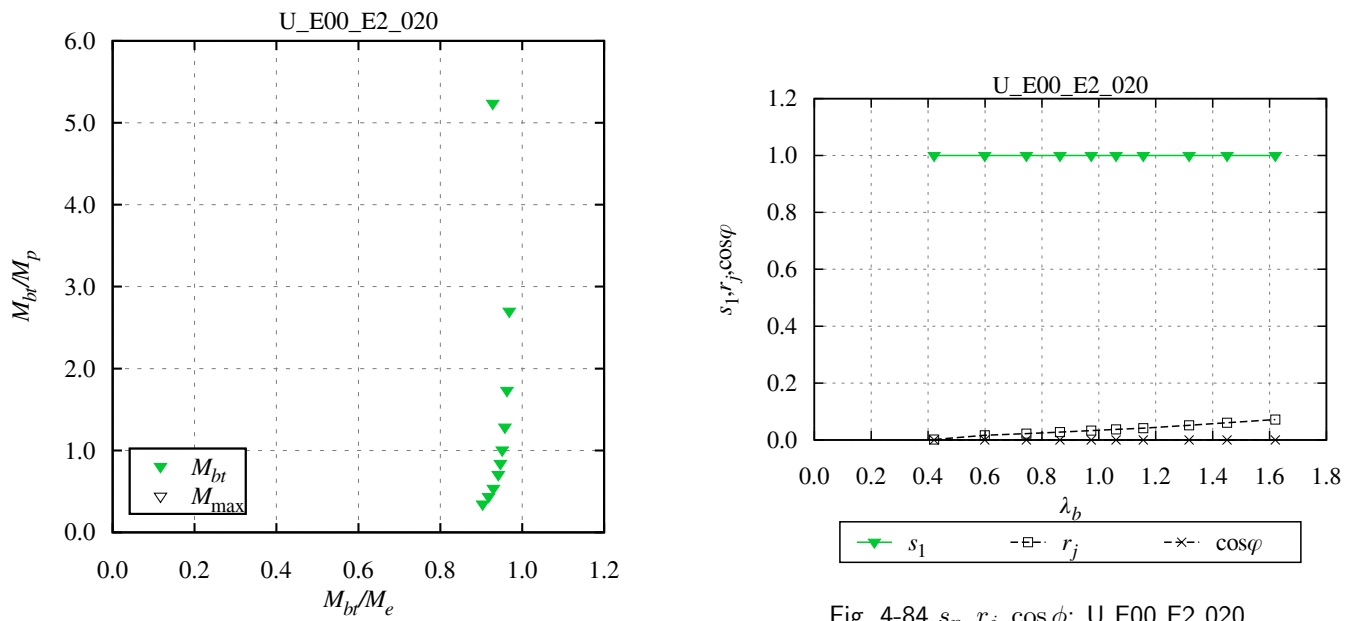


Fig. 4-84  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_E00\_E2\_020

Fig. 4-83 Macroscopic instability surface: U\_E00\_E2\_020



## 4.5.4 弾性モデル、残留応力なし、正弦半波形状 (E00.SH)

初期たわみ量=1/10000 (E00.SH.001)、逆対称曲げ

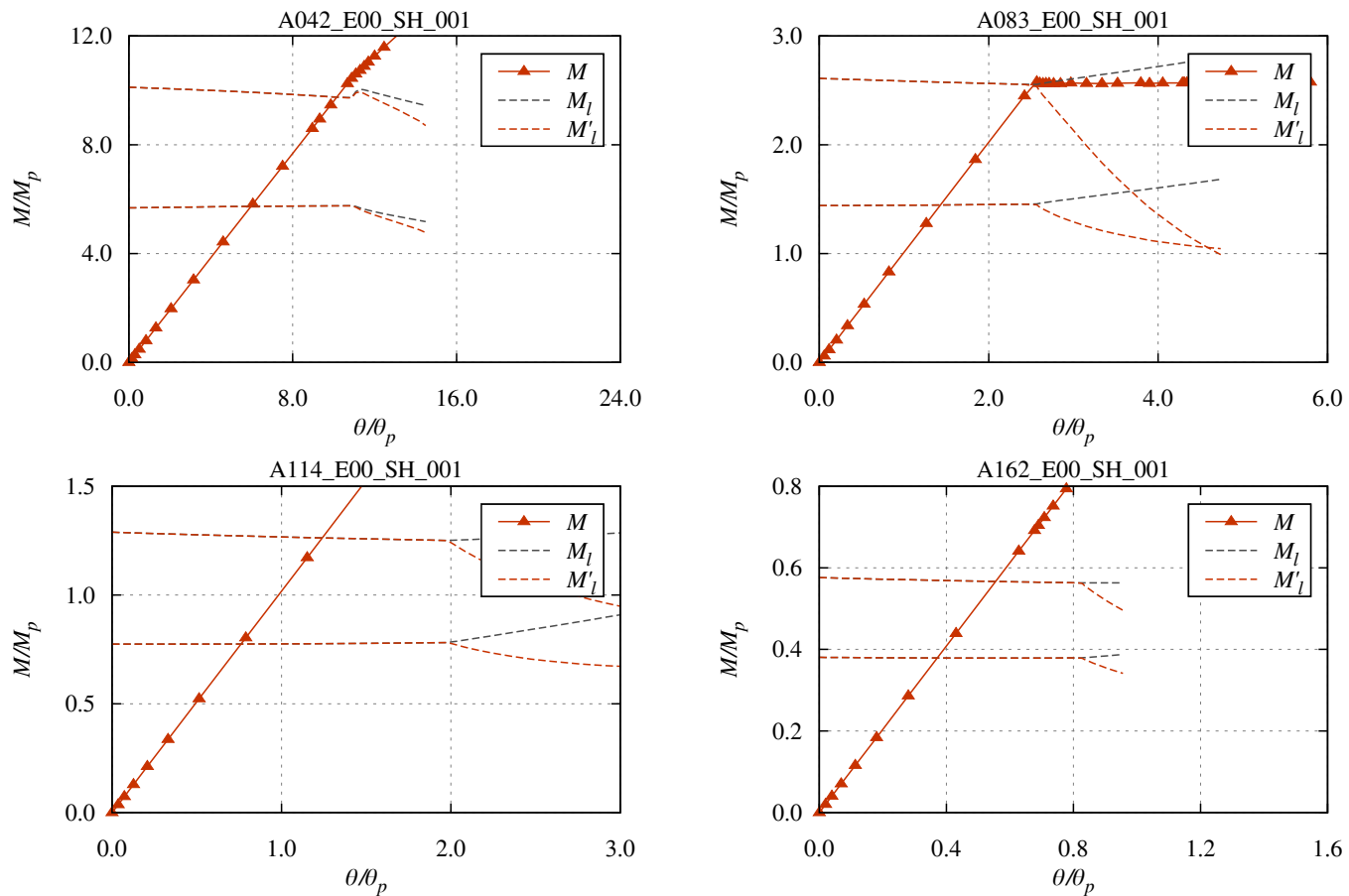


Fig. 4-85 Load-deformation curve: A\_E00.SH\_001

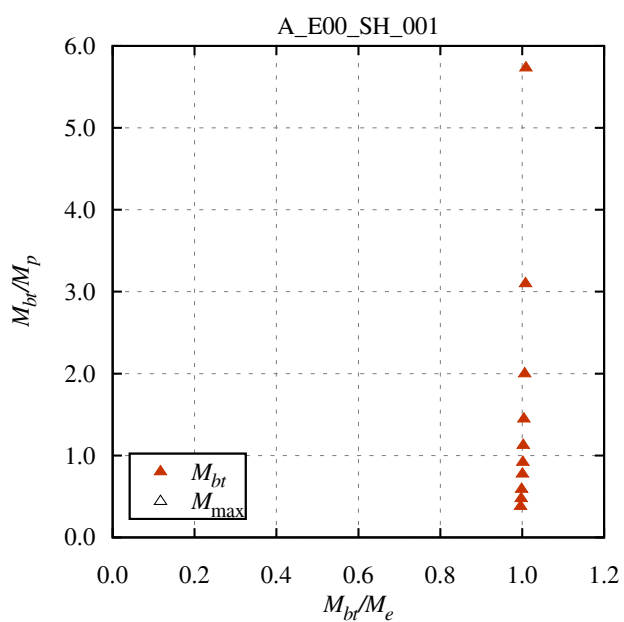
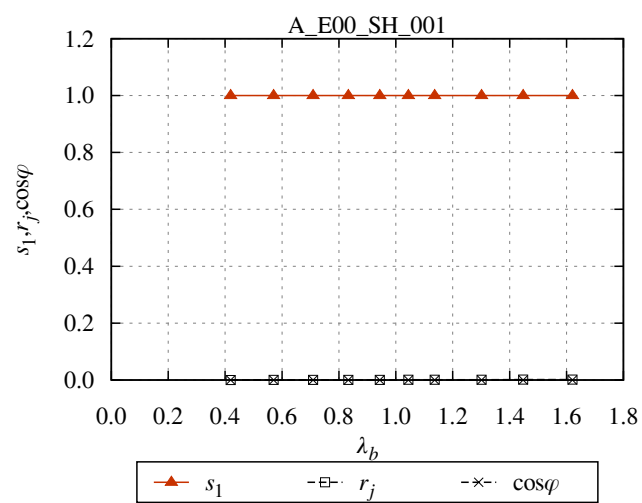


Fig. 4-86 Macroscopic instability surface: A\_E00.SH\_001

Fig. 4-87  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_E00.SH\_001

初期たわみ量=1/10000 (E00\_SH\_001)、片曲げ

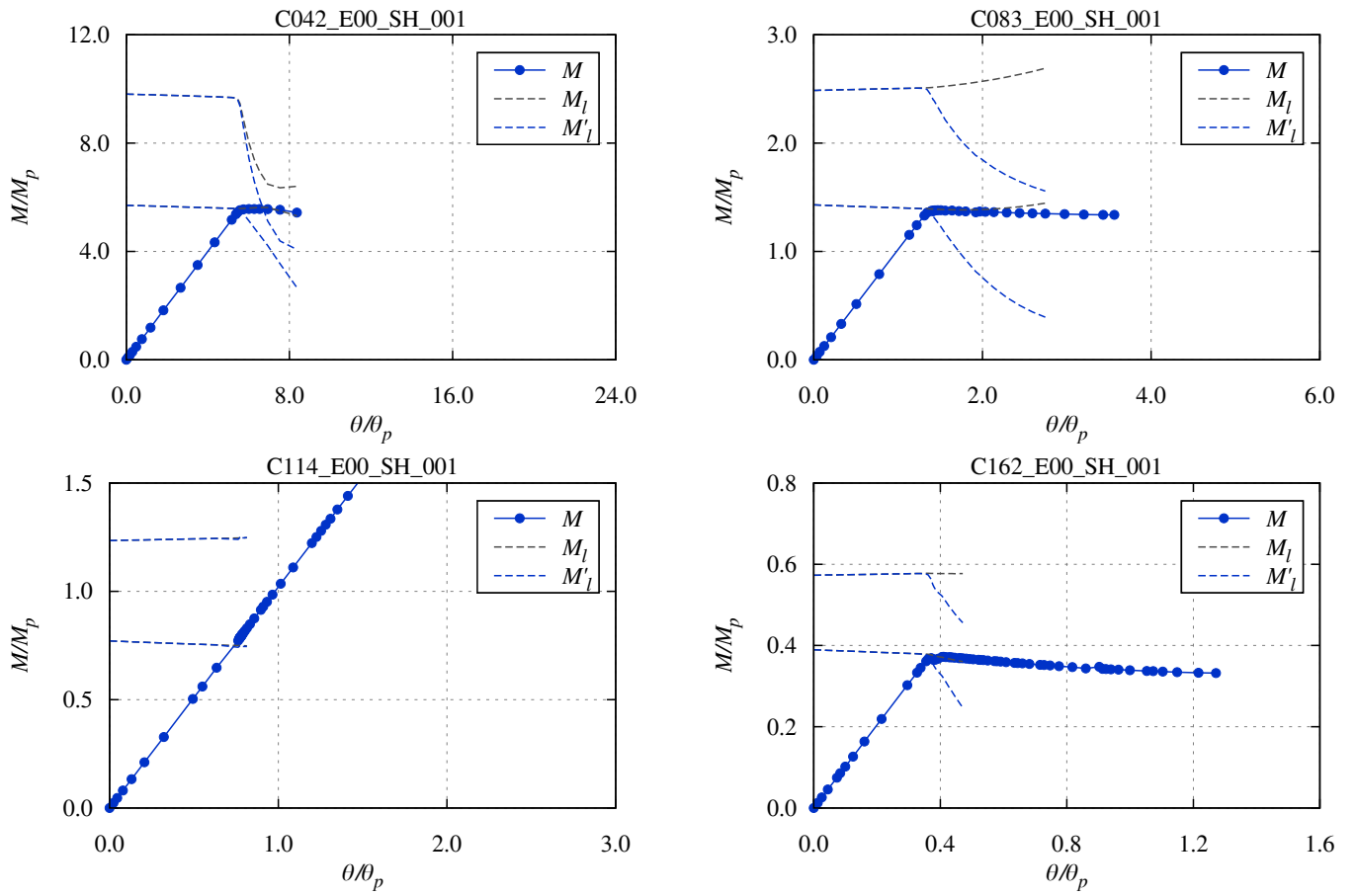


Fig. 4-88 Load-deformation curve: C\_E00\_SH\_001

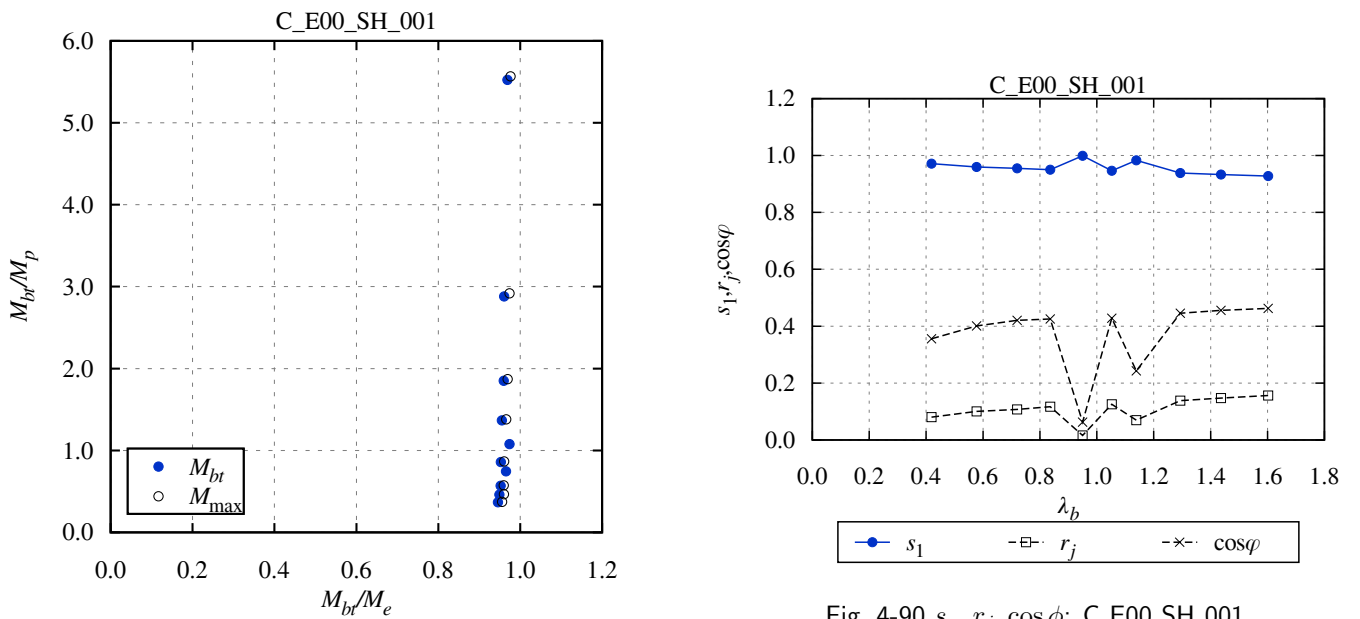


Fig. 4-89 Macroscopic instability surface: C\_E00\_SH\_001

Fig. 4-90  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_E00\_SH\_001

初期たわみ量=1/10000 (E00\_SH\_001)、一様曲げ

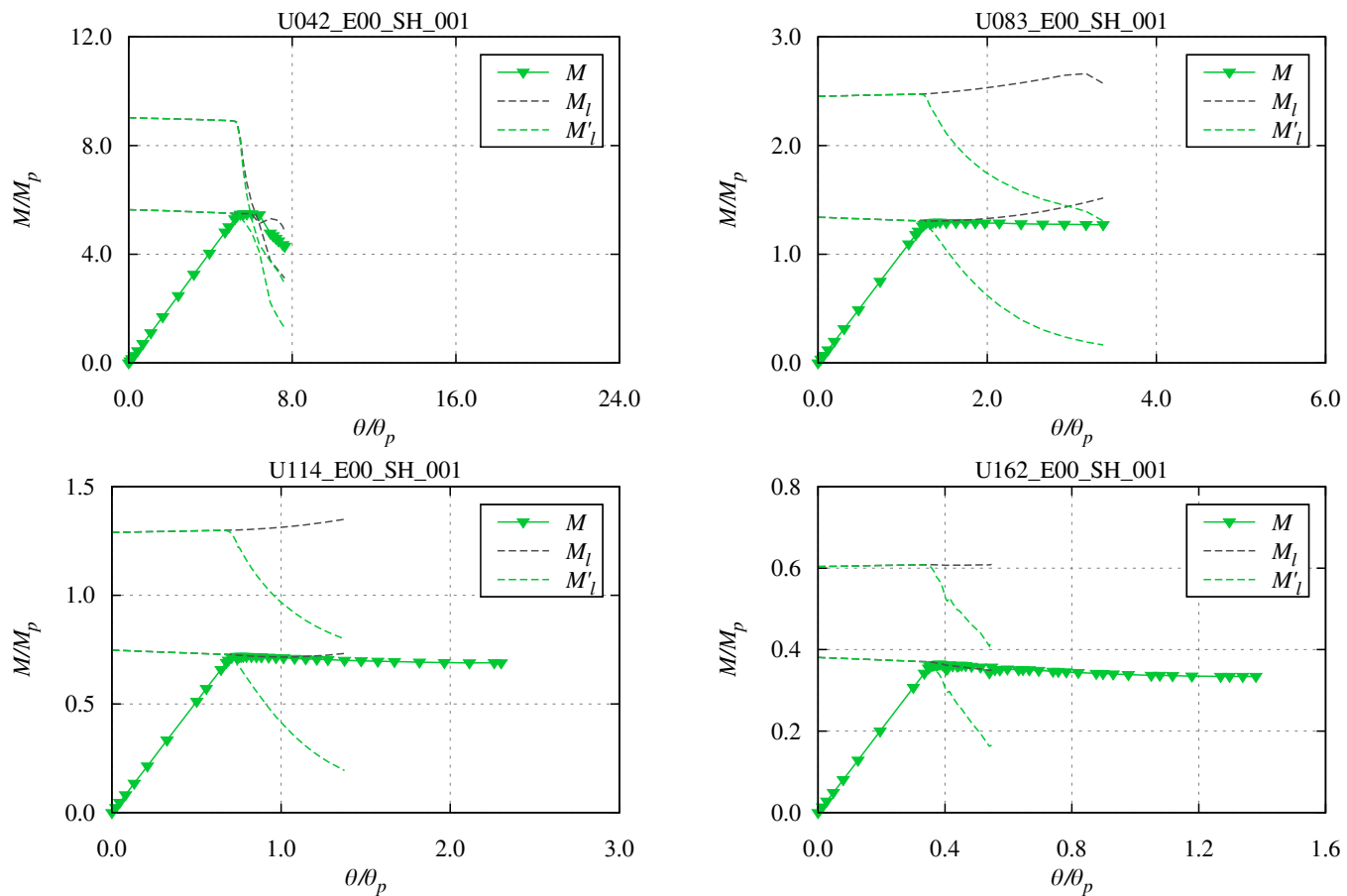


Fig. 4-91 Load-deformation curve: U\_E00\_SH\_001

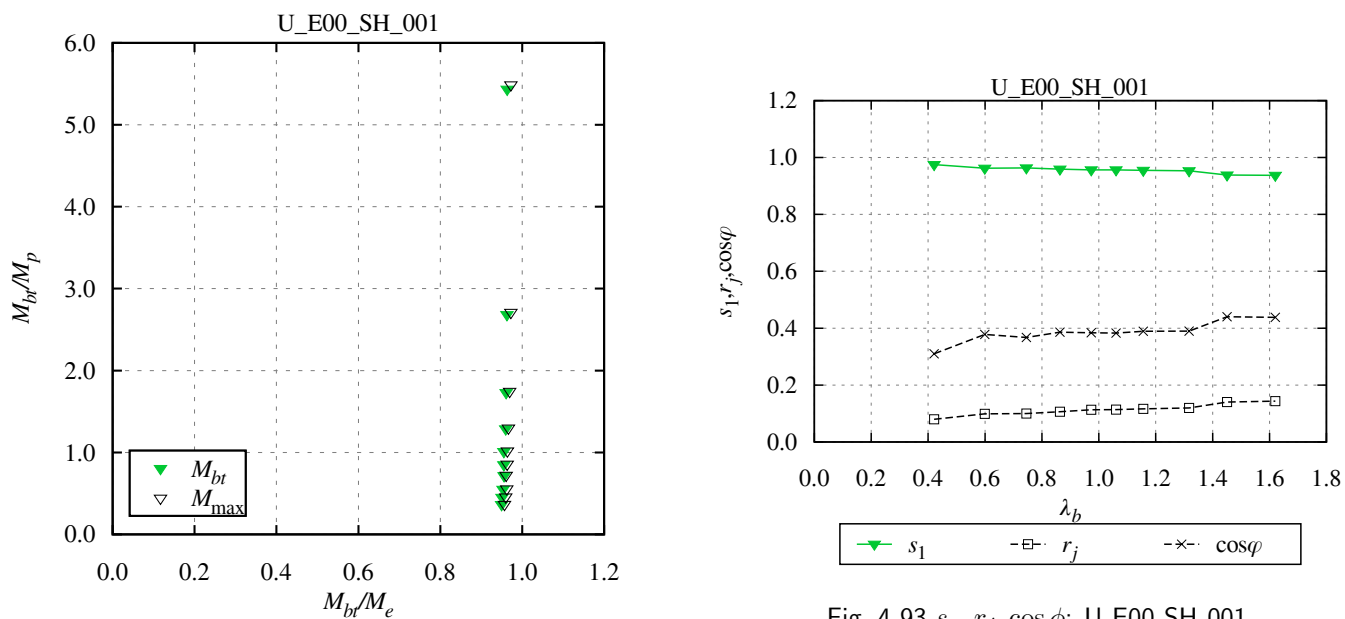


Fig. 4-92 Macroscopic instability surface: U\_E00\_SH\_001

Fig. 4-93  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_E00\_SH\_001

初期たわみ量=1/2000 (E00\_SH\_005)、逆対称曲げ

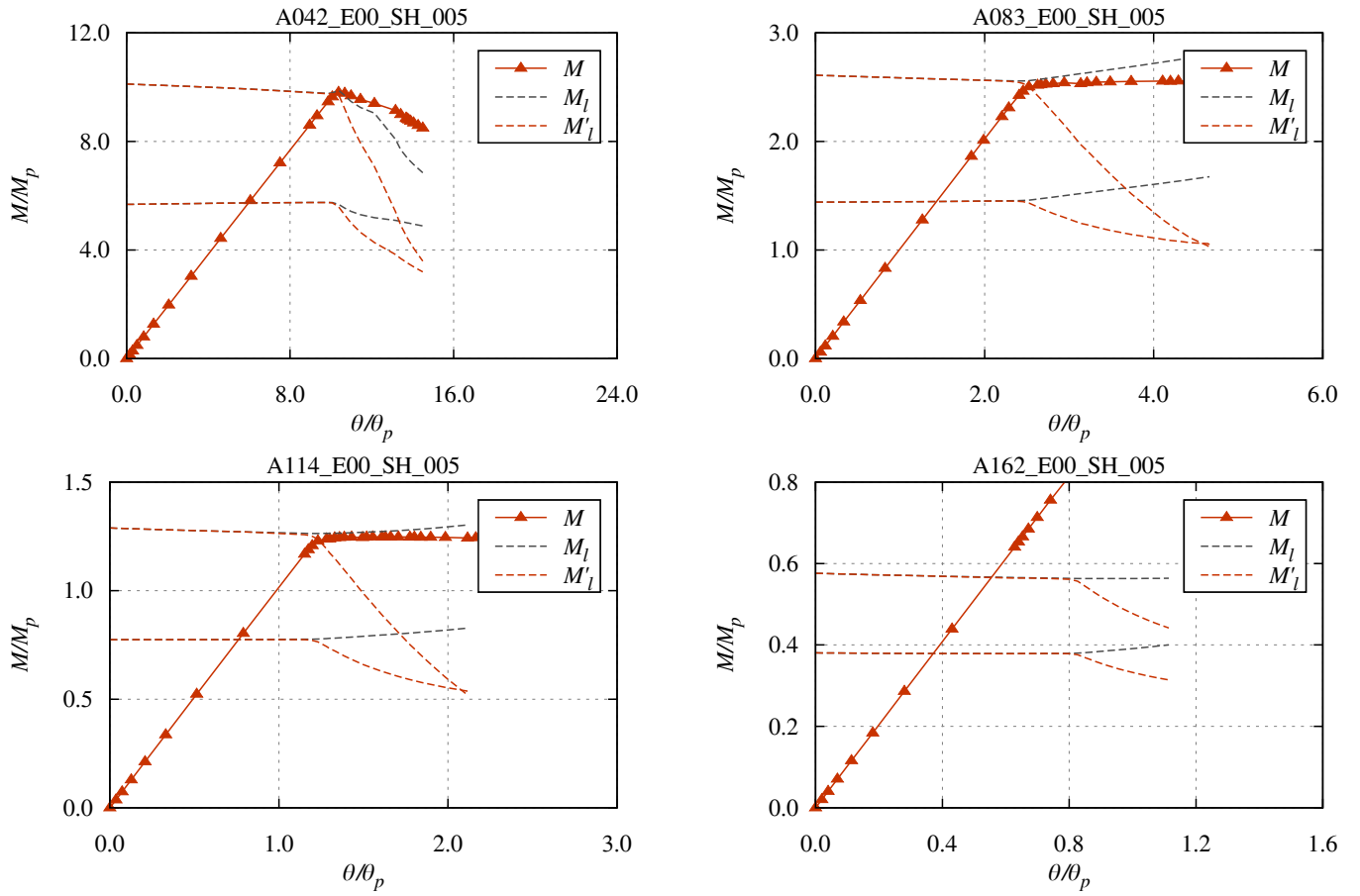


Fig. 4-94 Load-deformation curve: A\_E00\_SH\_005

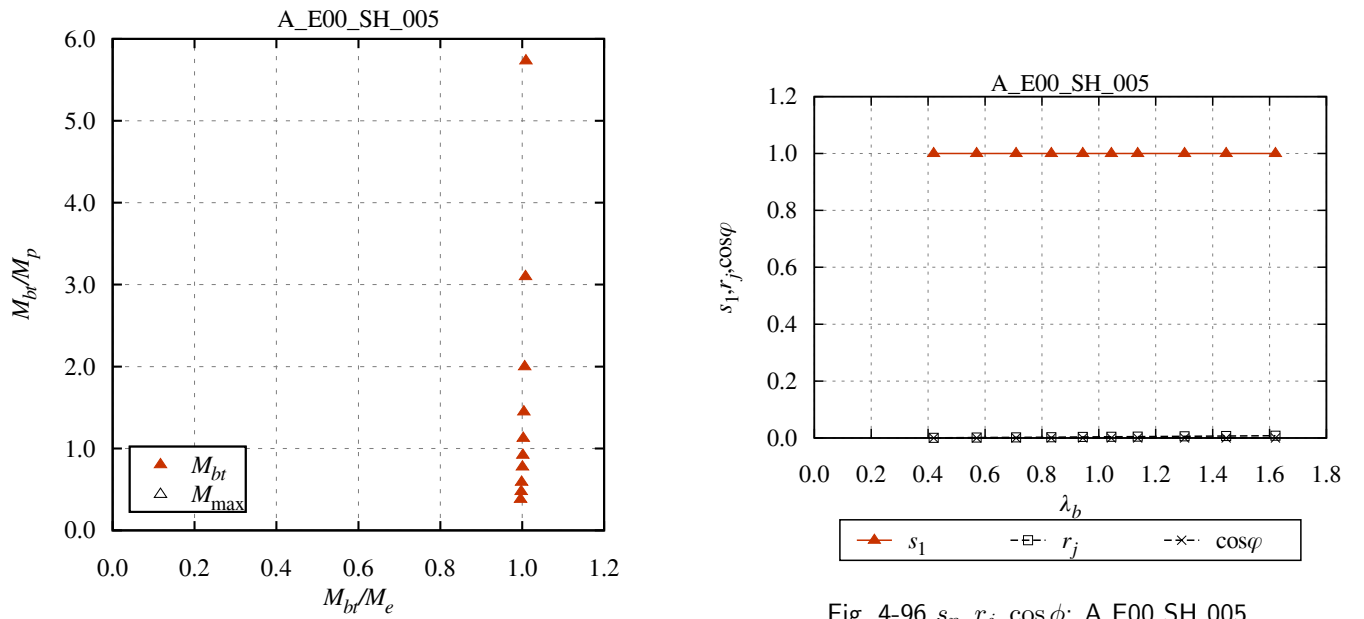


Fig. 4-95 Macroscopic instability surface: A\_E00\_SH\_005

Fig. 4-96  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_E00\_SH\_005

初期たわみ量=1/2000 (E00.SH.005)、片曲げ

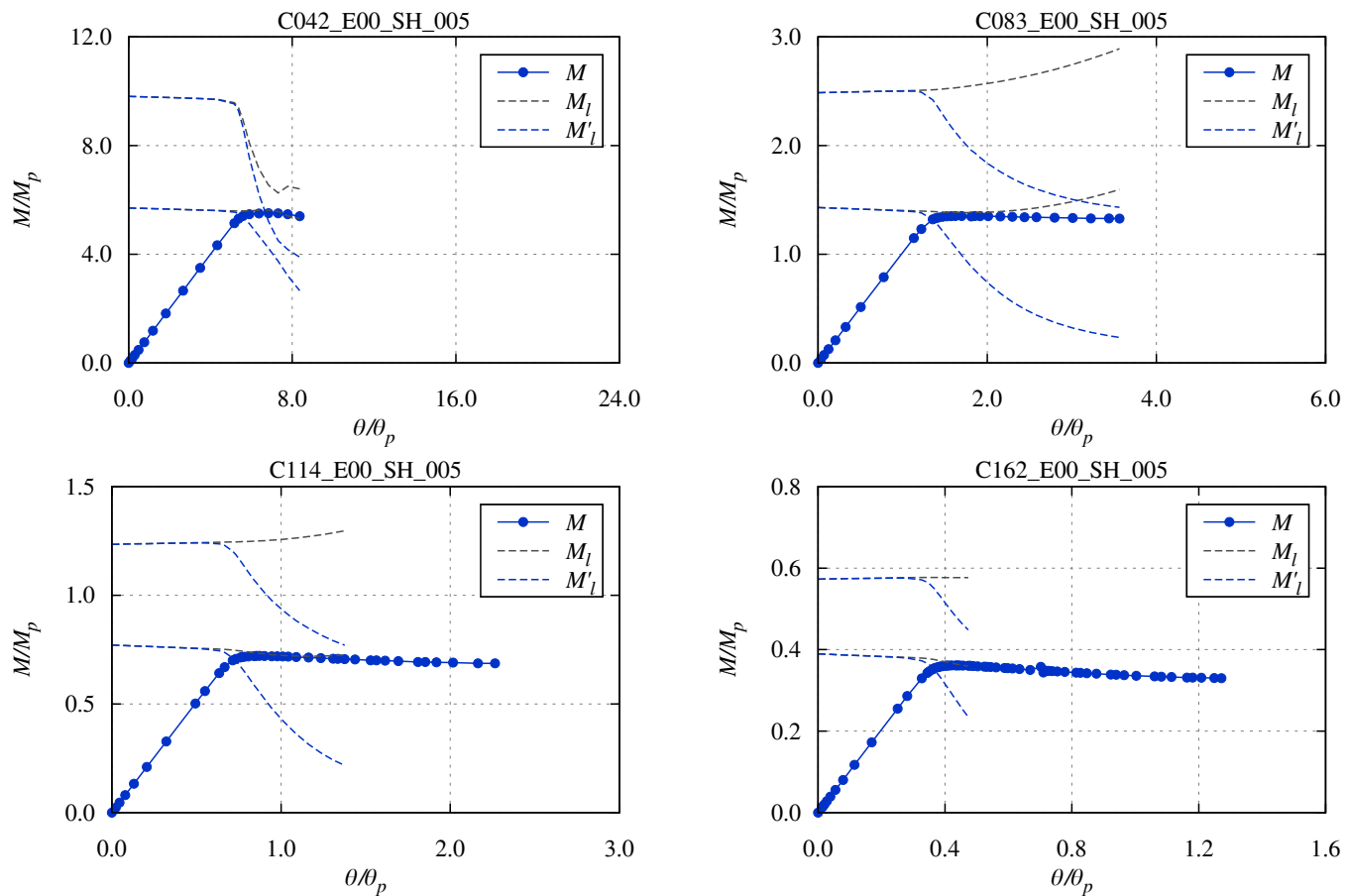


Fig. 4-97 Load-deformation curve: C\_E00.SH.005

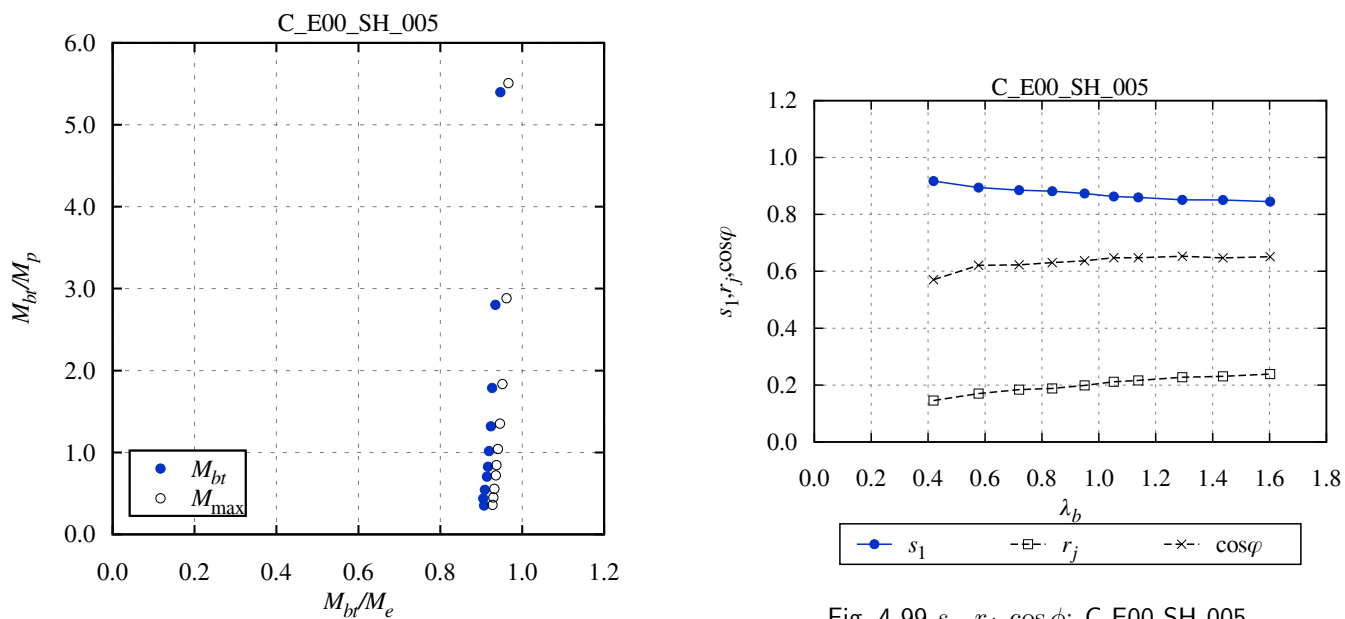


Fig. 4-99  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_E00.SH.005

Fig. 4-98 Macroscopic instability surface: C\_E00.SH.005

初期たわみ量=1/2000 (E00.SH.005)、一様曲げ

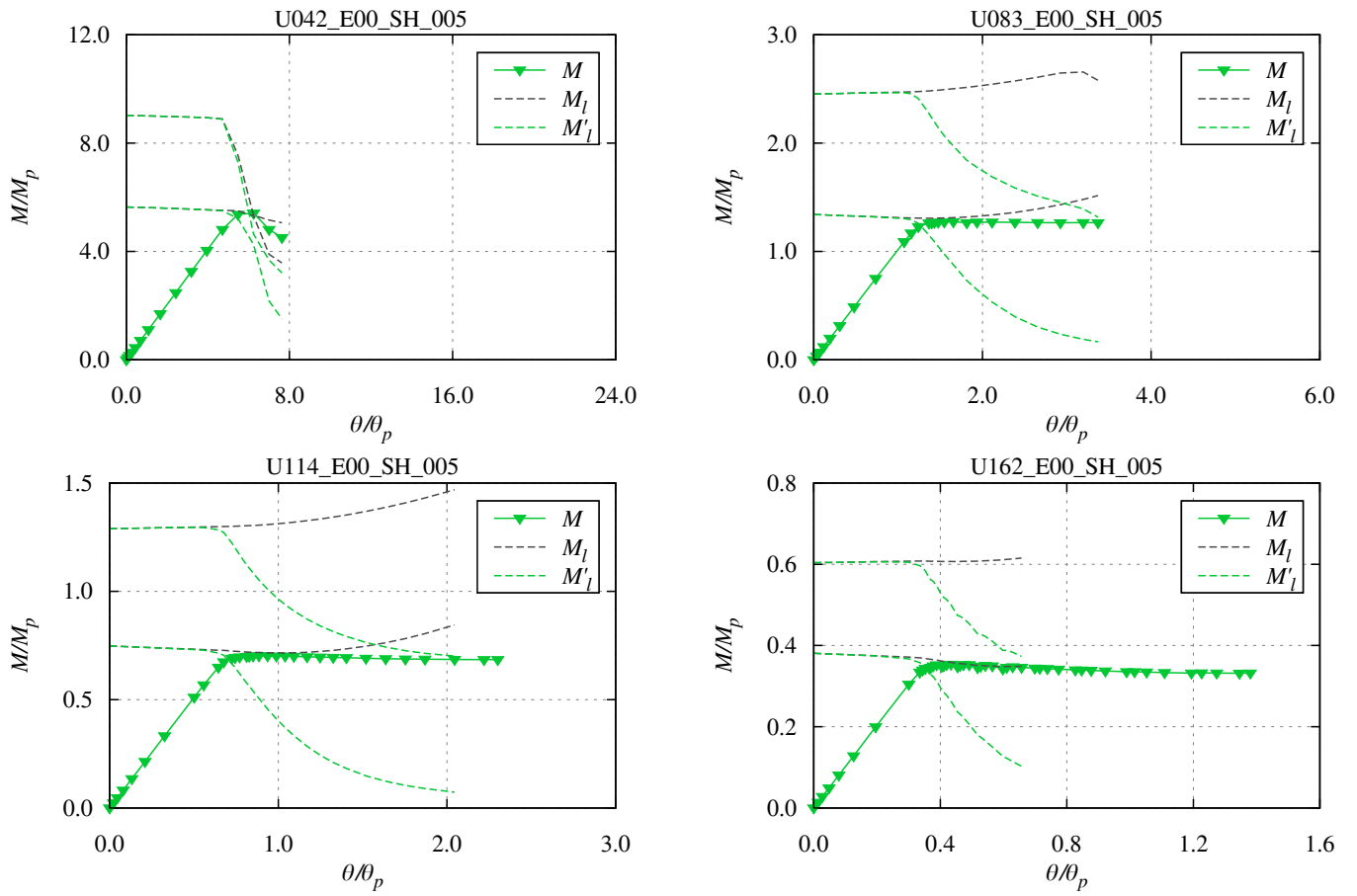


Fig. 4-100 Load-deformation curve: U.E00.SH.005

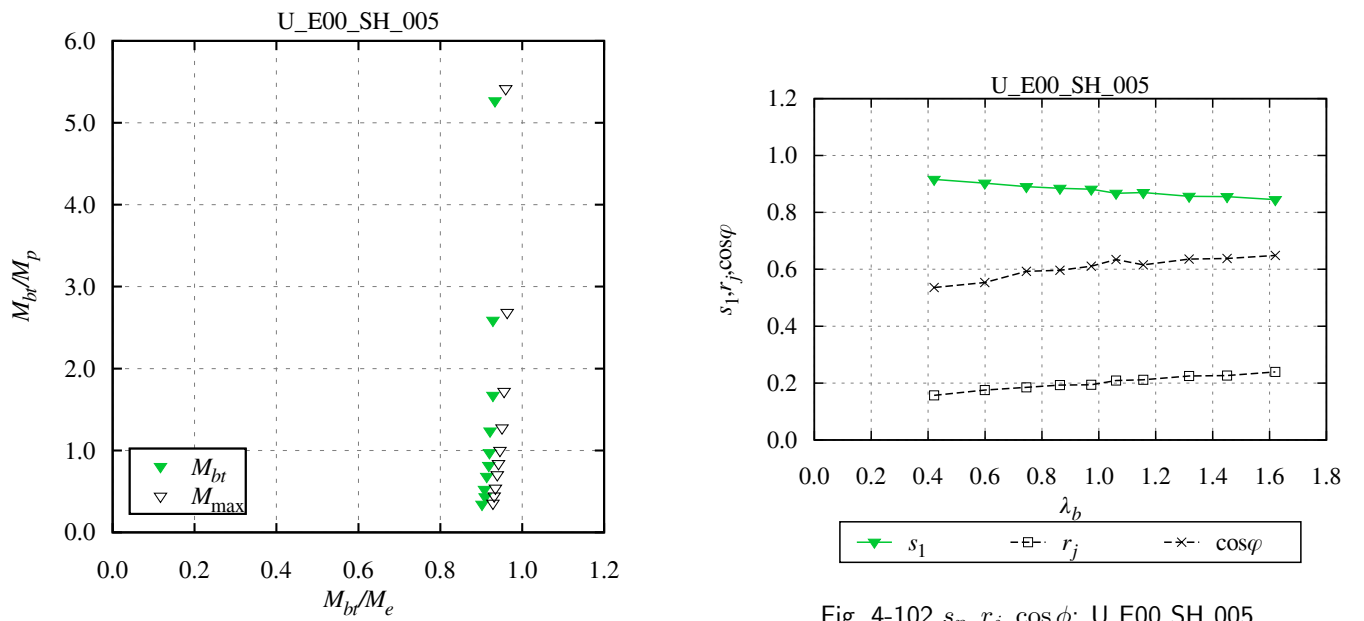


Fig. 4-102  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U.E00.SH.005

Fig. 4-101 Macroscopic instability surface: U.E00.SH.005

初期たわみ量=1/1000 (E00\_SH\_010)、逆対称曲げ

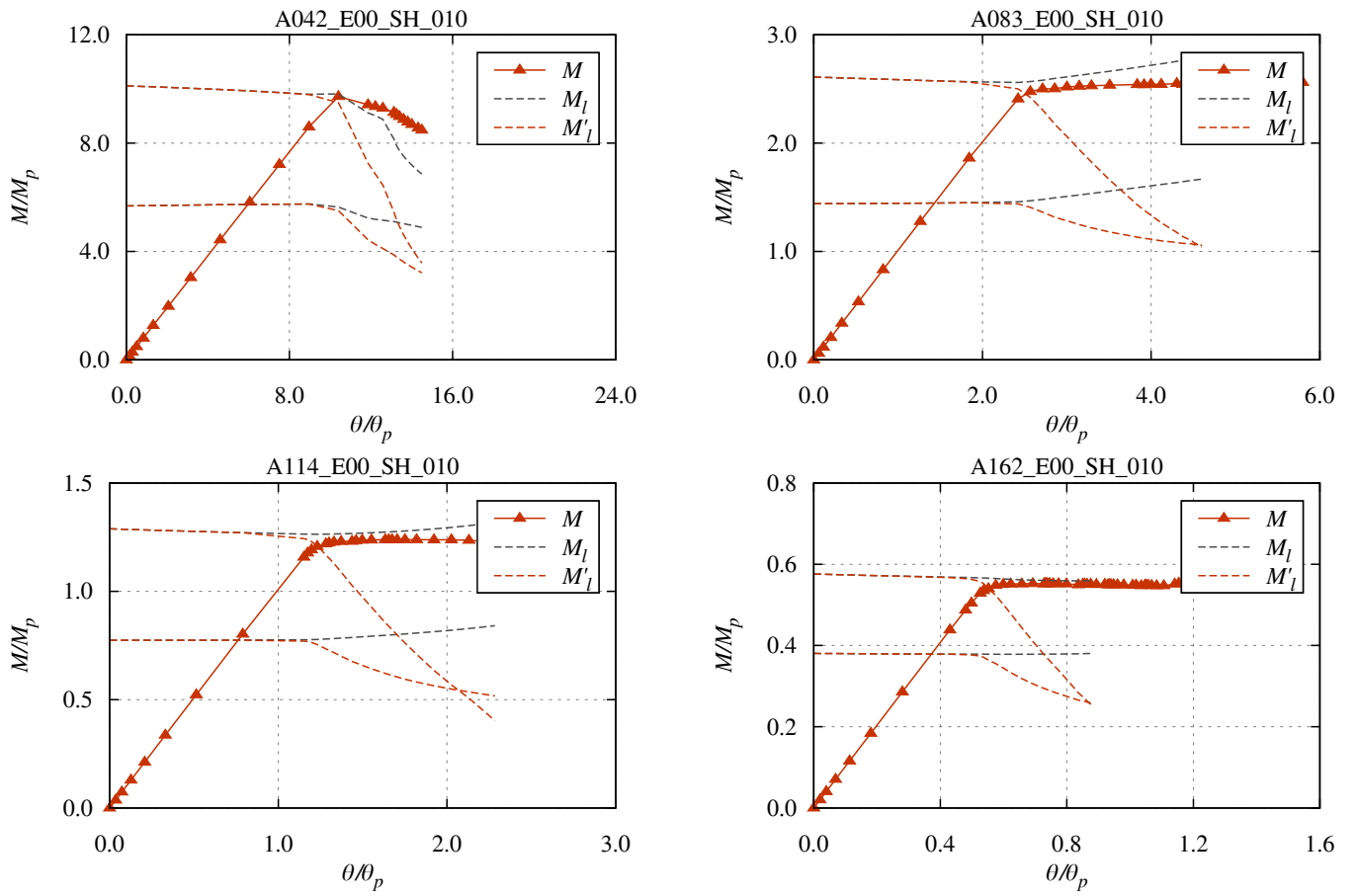


Fig. 4-103 Load-deformation curve: A.E00.SH.010

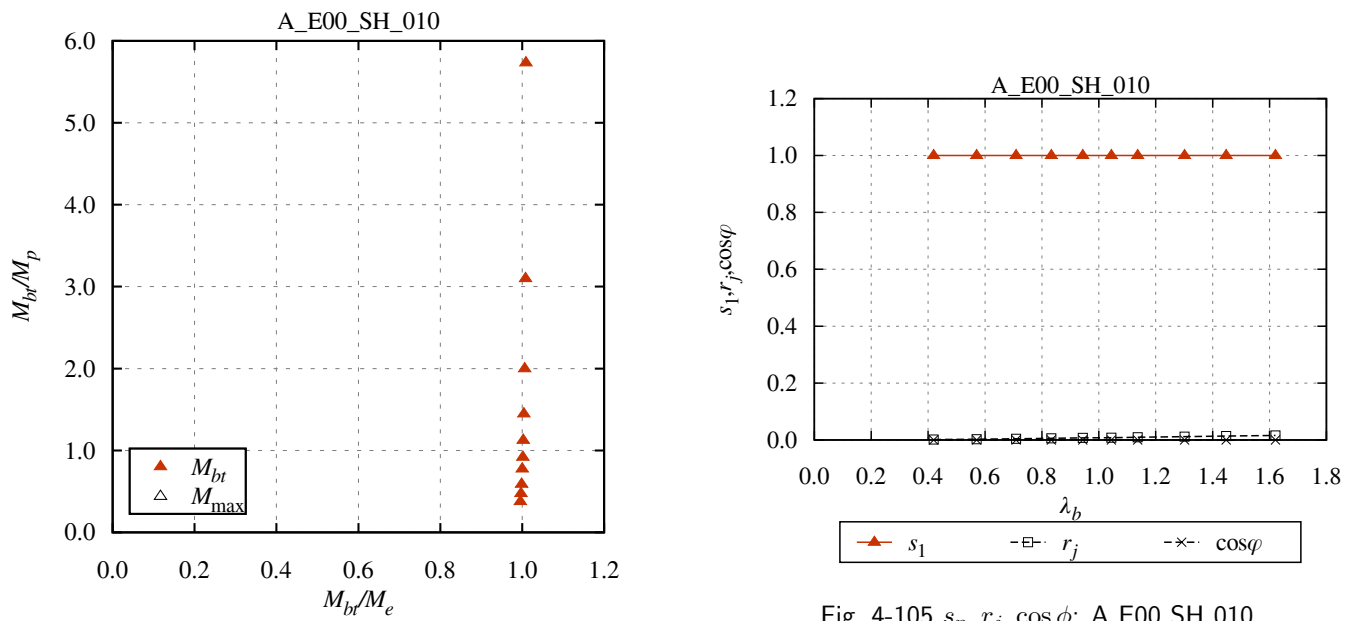


Fig. 4-105  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A.E00.SH.010

Fig. 4-104 Macroscopic instability surface: A.E00.SH.010

初期たわみ量=1/1000 (E00\_SH\_010)、片曲げ

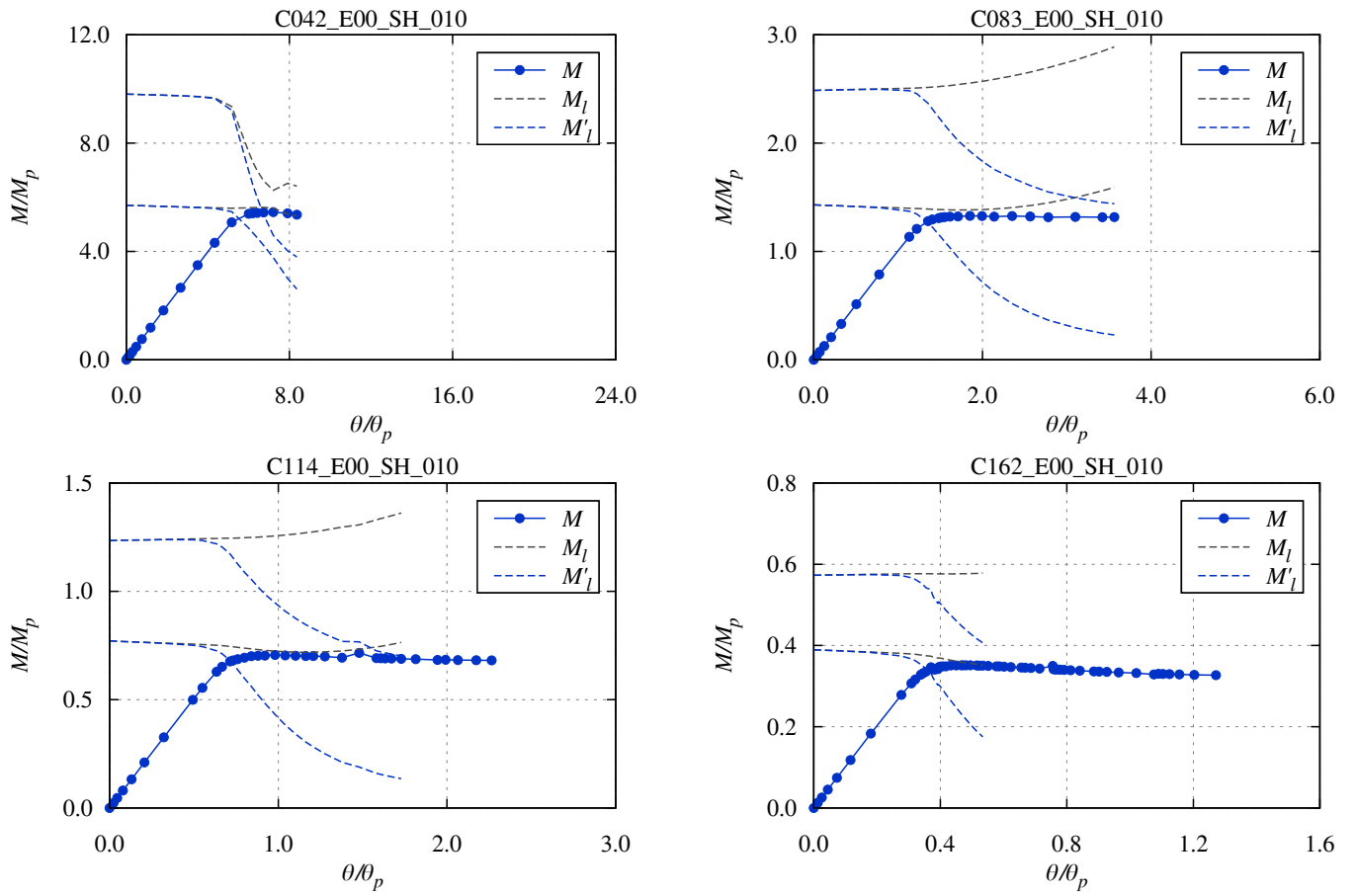


Fig. 4-106 Load-deformation curve: C.E00.SH.010

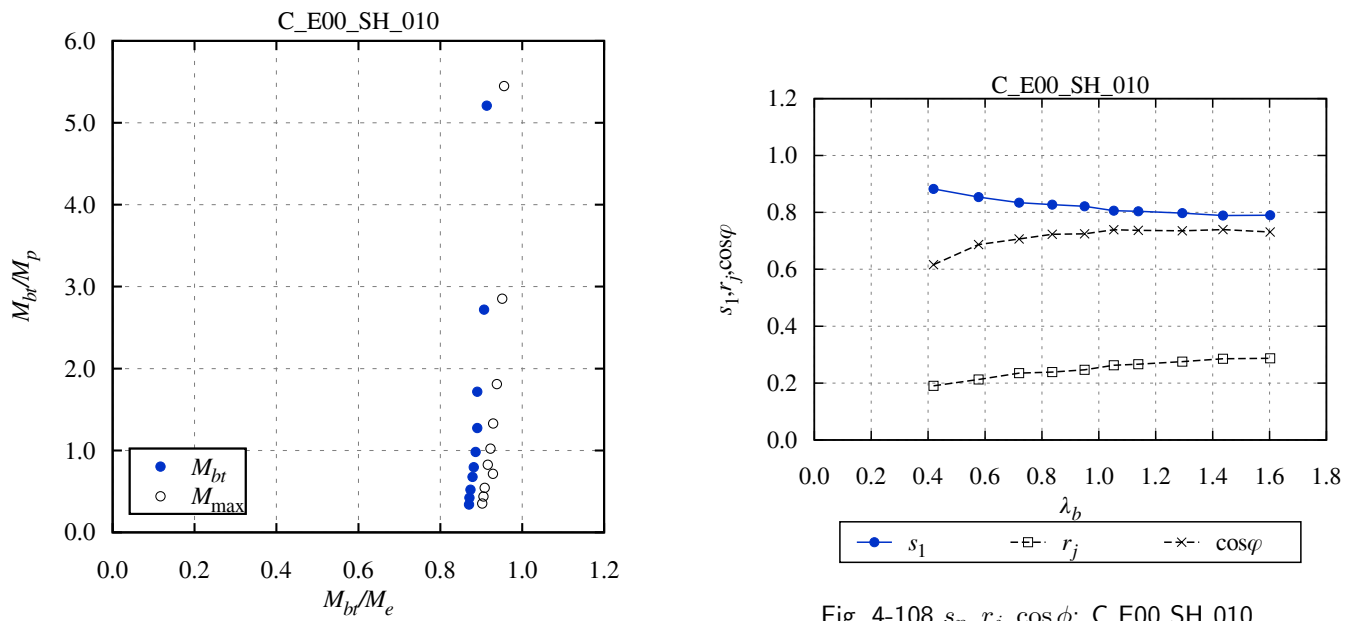


Fig. 4-108  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C.E00.SH.010

Fig. 4-107 Macroscopic instability surface: C.E00.SH.010



初期たわみ量=1/1000 (E00\_SH\_010)、一様曲げ

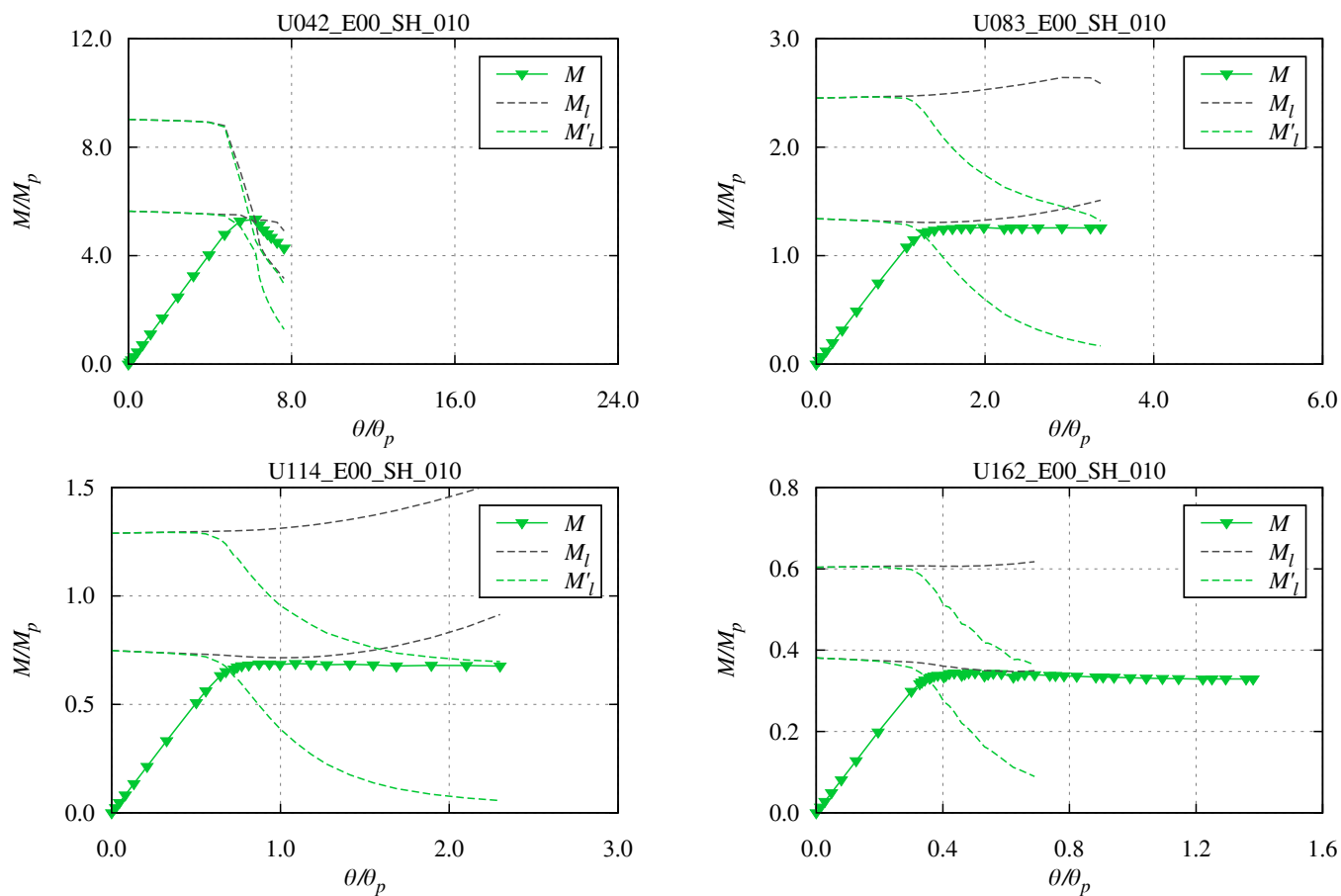


Fig. 4-109 Load-deformation curve: U.E00.SH.010

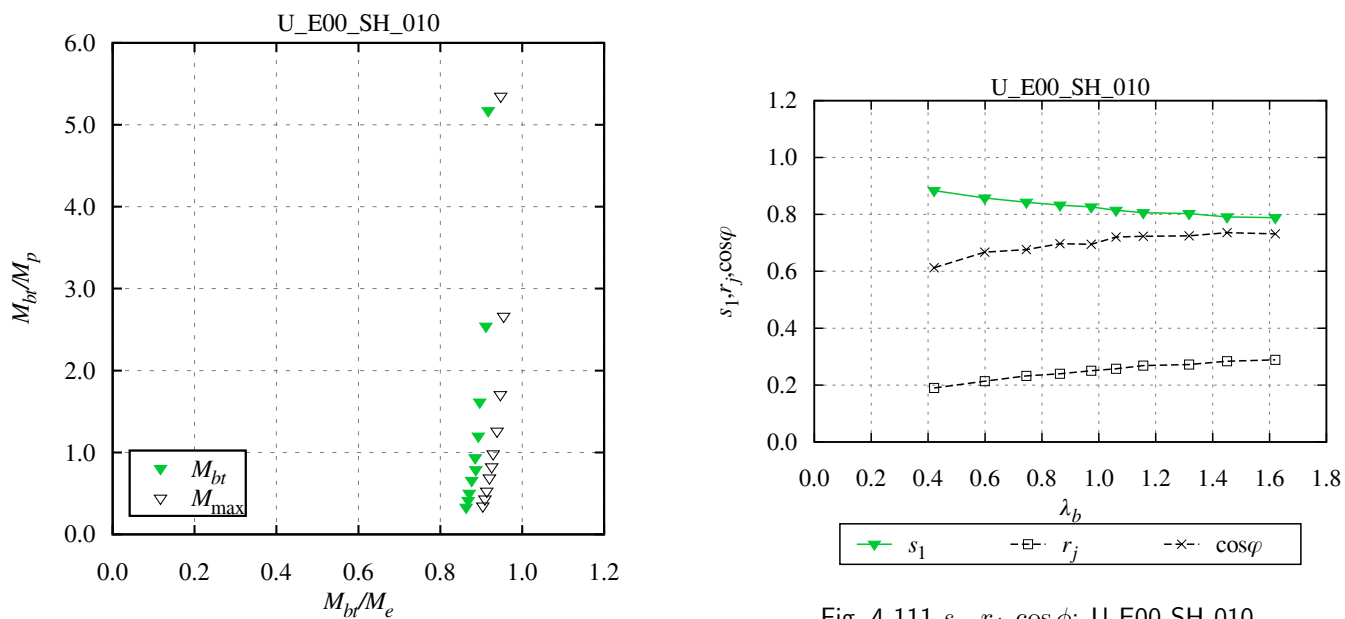


Fig. 4-111  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U.E00.SH.010

Fig. 4-110 Macroscopic instability surface: U.E00.SH.010

初期たわみ量=1/500 (E00.SH.020)、逆対称曲げ

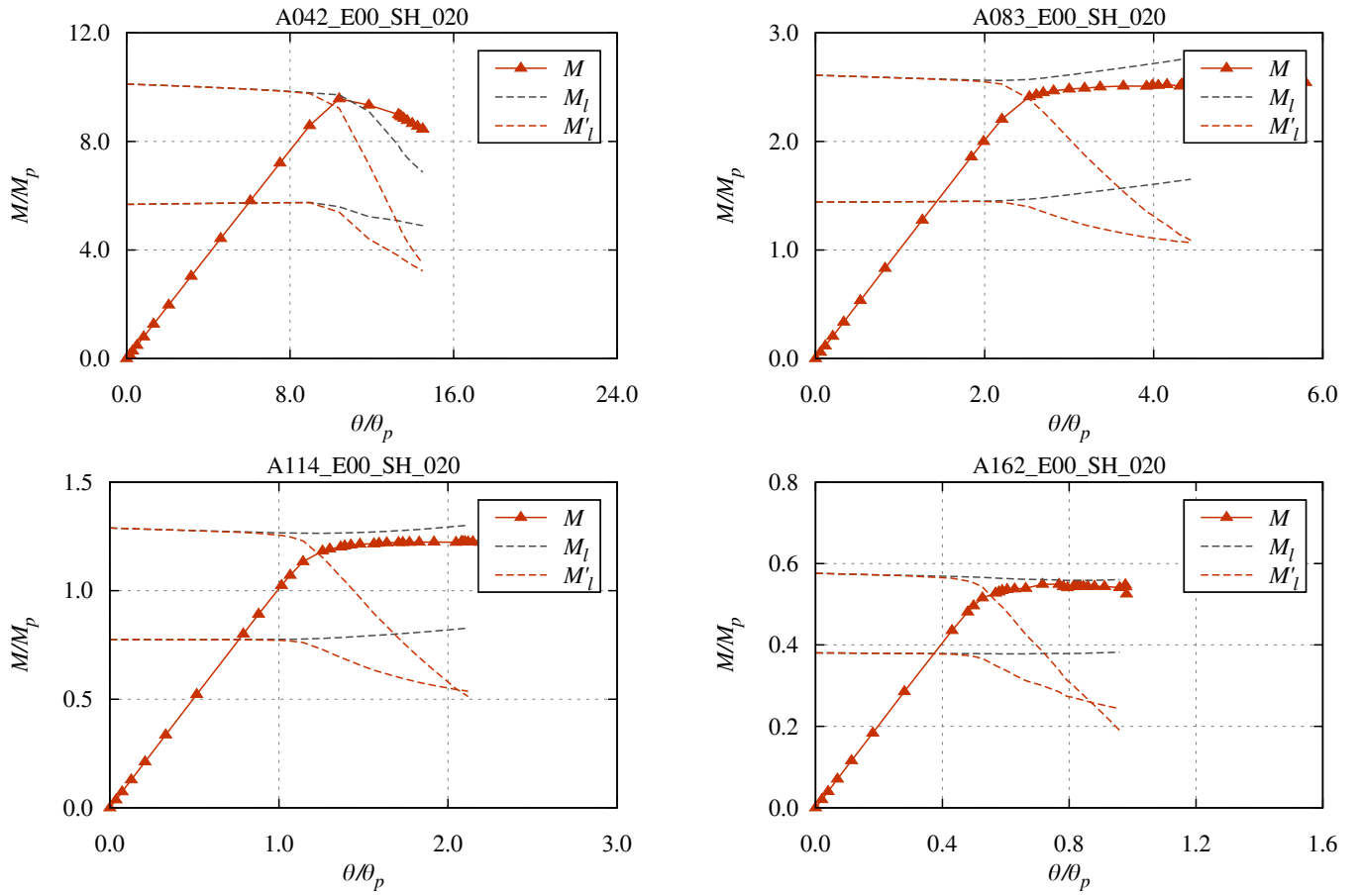


Fig. 4-112 Load-deformation curve: A.E00.SH.020

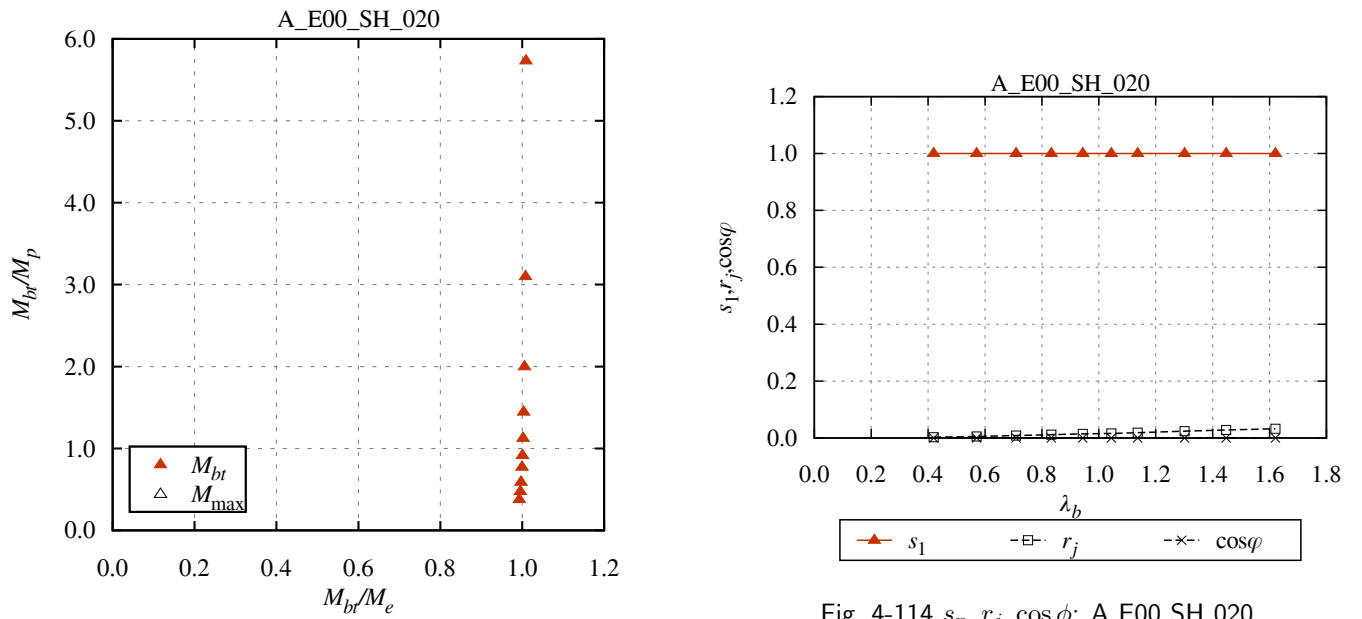


Fig. 4-113 Macroscopic instability surface: A.E00.SH.020

Fig. 4-114  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A.E00.SH.020

初期たわみ量=1/500 (E00\_SH\_020)、片曲げ

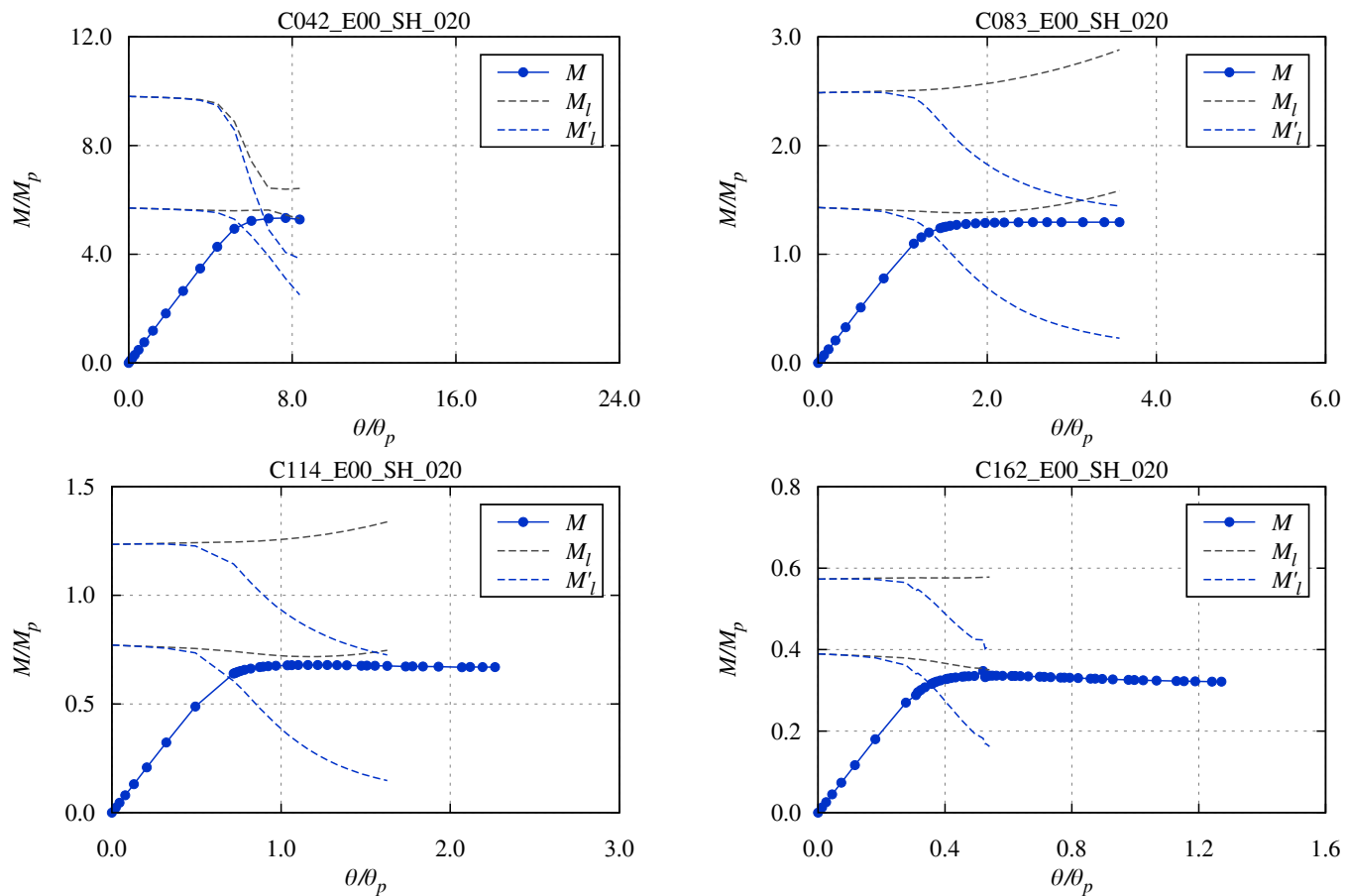


Fig. 4-115 Load-deformation curve: C.E00.SH.020

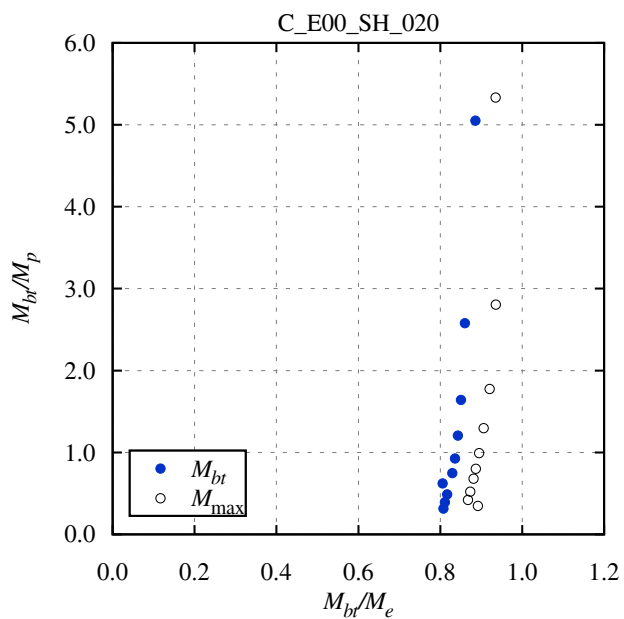


Fig. 4-116 Macroscopic instability surface: C.E00.SH.020

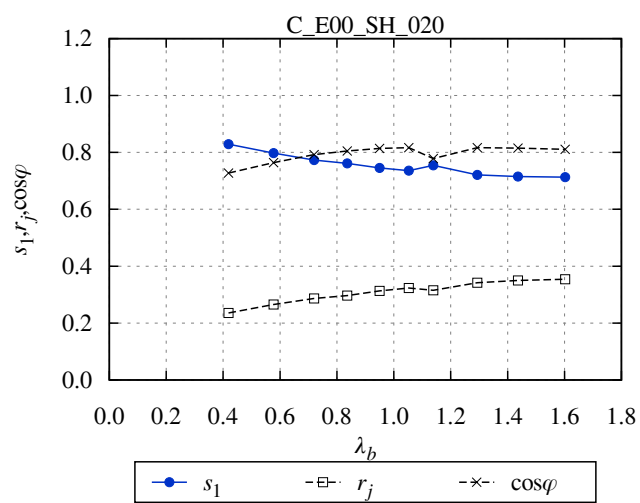


Fig. 4-117  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C.E00.SH.020

初期たわみ量=1/500 (E00\_SH\_020)、一様曲げ

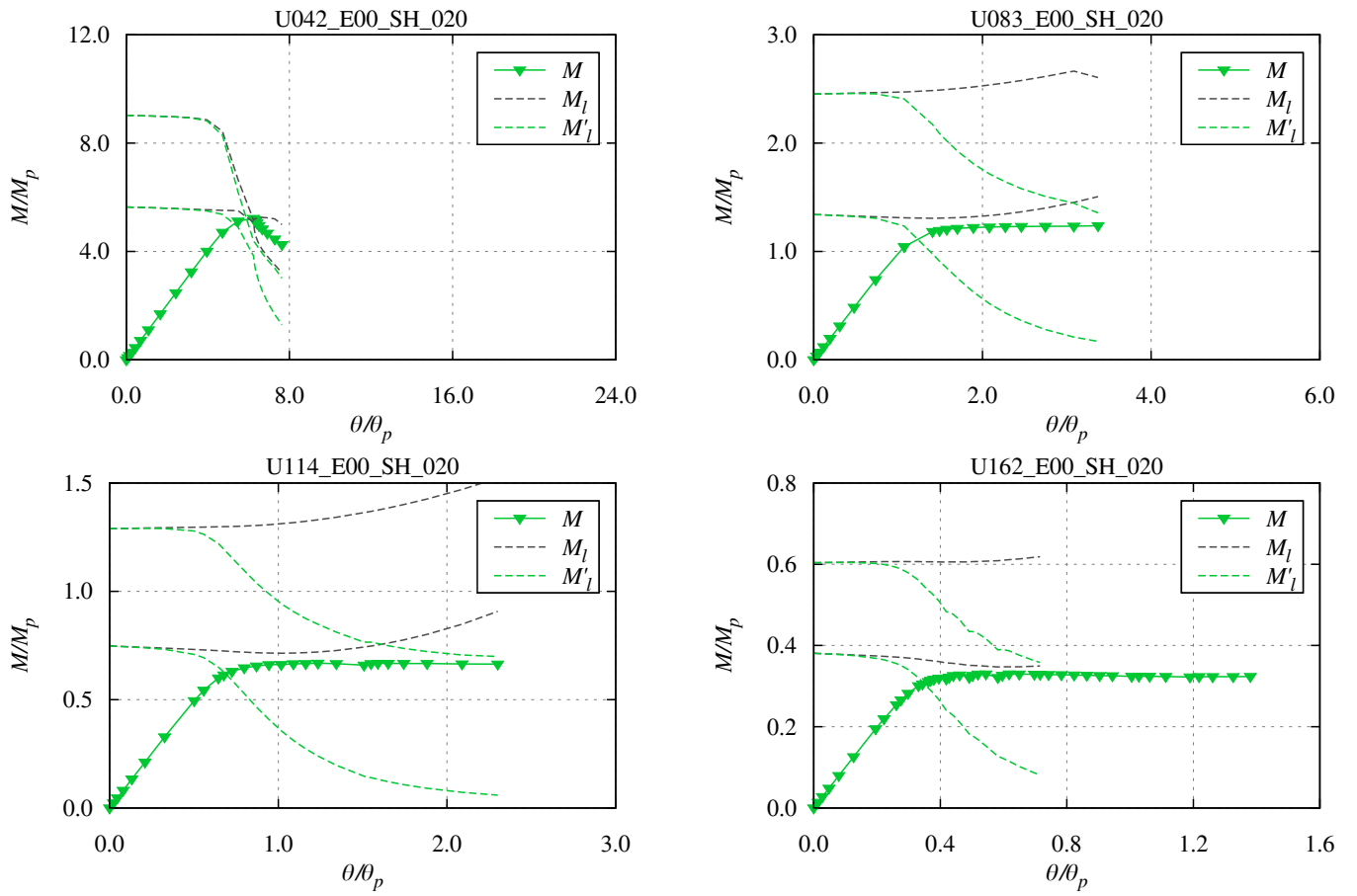


Fig. 4-118 Load-deformation curve: U.E00.SH.020

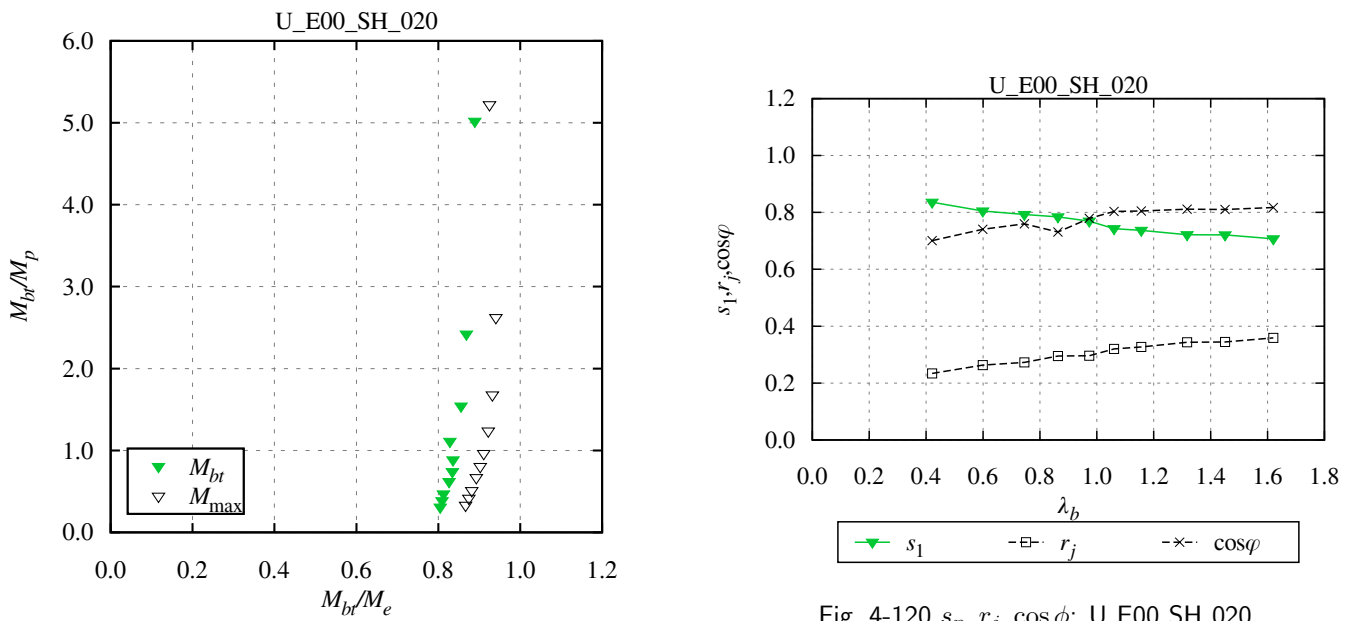


Fig. 4-120  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U.E00.SH.020

Fig. 4-119 Macroscopic instability surface: U.E00.SH.020

## 4.6 面外変形に対する初期たわみの影響

### 4.6.1 初期たわみ形状の影響

#### 初期たわみ形状と座屈モード形状の関係

4.5.2 項で取り上げた弾性一次座屈モード形状初期たわみを有するモデル (E1) では、曲げモーメント分布、初期たわみ量、梁スパンによらず、一次の剛性低下曲線との交点付近で荷重変形曲線の剛性が大きく低下している。それに対し、4.5.3 項と 4.5.4 項で取り上げた弾性二次座屈モード形状 (E2) や正弦半波形状 (SH) の初期たわみを有するモデルでは、曲げモーメント分布によって、一次の剛性低下曲線との交点付近では剛性低下が生じず、二次の剛性低下曲線との交点付近で大きな剛性低下が生じるものが存在しており、幾何学的非線形性による剛性低下には、初期たわみ形状の影響がみられる。

E2 モデルと SH モデルのうち、一次の剛性低下曲線との交点付近で荷重変形曲線の剛性低下が生じないモデルを列挙すると、

1. E2、逆対称曲げ
2. E2、初期たわみ量  $1/10000$ 、片曲げ
3. E2、初期たわみ量  $1/5000$ 、片曲げ、 $\lambda_b = 0.57, 0.94, 1.04, 1.30$
4. E2、一様曲げ
5. SH、逆対称曲げ
6. SH、初期たわみ量  $1/10000$ 、片曲げ、 $\lambda_b = 0.94, 1.14$

となっている。初期たわみ形状と曲げモーメント分布の組み合わせに着目すると、「E2、逆対称曲げ」、「SH、逆対称曲げ」、「E2、一様曲げ」では、初期たわみ量によらず一次モードでの剛性低下が生じていないのに対し、「E2、片曲げ」と「SH、片曲げ」では、初期たわみ量が大きくなると一次モードでの剛性低下が生じている。

ここで、4.5.1 項に示した、一次モード形状  $e_1$ 、二次モード形状  $e_2$ 、正弦半波形状  $v_s$  の内積、 $\langle e_1, v_s \rangle$ 、 $\langle e_2, v_s \rangle$ 、 $\langle e_1, e_2 \rangle$  の値を確認すると、曲げモーメント分布に応じて、値が 0 であるか否かが異なっており、逆対称曲げモデルでは  $\langle e_1, v_s \rangle = 0$  かつ  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ 、一様曲げモデルでは  $\langle e_2, v_s \rangle = 0$  かつ  $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$  であるのに対し、片曲げモデルではいずれの値も 0 になっていない。初期たわみ形状を表すベクトルと  $e_1$  の内積が 0 になる初期たわみ形状と曲げモーメント分布の組み合わせは、上述の初期たわみ量によらず一次モードでの剛性低下が生じない組み合わせと一致していることがわかる。

座屈モードベクトルは、解析モデルの剛性マトリックス  $K_E$  と幾何剛性マトリックス  $K_G$  を用いた一般化固有値問題の解であるため、次数の異なる座屈モードベクトル同士は、 $K_E$  あるいは  $K_G$  を介して、 $\langle e_i, K_E e_j \rangle = 0 (i \neq j)$  あるいは  $\langle e_i, K_G e_j \rangle = 0 (i \neq j)$  のかたちでは直交するが、一般には、

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 (i \neq j) \quad (4-8)$$

のかたちで直交するとは限らない。以下では、(4-8) 式が成立することを「 $e_i$  と  $e_j$  が直交する」と表現することにとすると、 $e_1$  と  $e_2$  が直交しない場合、初期たわみ量  $a_2/l_b$  の弾性二次座屈モード形状初期たわみの中には、初期たわみ量

$$a_1/l_b = a_2/l_b \times \langle e_1, e_2 \rangle \quad (4-9)$$

の弾性一次座屈モード形状の初期たわみが含まれているとみなせる。一方、 $e_1$  と  $e_2$  が直交する場合には、(4-9) 式において  $a_1 = 0$  となり、弾性一次座屈モード形状の初期たわみは含まれていないとみなせる。

初期たわみが弾性一次座屈モード形状を含む場合には、E00\_E1 モデルと同様に、 $e_1$  の方向への変形が進むことで、一次モードでの剛性低下が生じることになるのに対し、初期たわみが弾性一次座屈モード形状を含まない場合には、変形は  $e_1$  の方向には進まず、一次モードでの剛性低下が生じないと考えられる。一次モードを含まない場合でも、変形は  $e_2$  の方向へは進行するため、二次モードでの剛性低下は生じることになる。同様に考えると、初期たわみを表すベクトル  $v_{init}$  と座屈モードベクトルの直交性を調べることで剛性低下が生じるか否かを判定することができ、幾何学的非線形性による剛性低下は  $\langle v_{init}, e_n \rangle \neq 0$  となる最小の次数で生じると推測できる。

$\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_1 \rangle \neq 0$  となる場合でも、初期たわみ量が小さいモデルでは一次モードでの剛性低下が生じないことがあるが、これは、元々の初期たわみ量が小さいことに加え、(4-9) 式のように、一次モードにとっての初期たわみ量は内積が掛けられることでさらに小さくなり、 $\mathbf{e}_1$  の方向への変形がほとんど進行しないためだと考えられる。初期たわみ量を含めた定量的な考察は次節で行う。

#### $s_n$ に対する初期たわみ形状の影響

$\lambda_b = 0.83$ 、初期たわみ量  $1/500$  の場合について、初期たわみ形状が異なるモデル同士で、 $M_{bt}$  に達した時点での  $s_n$  をまとめたグラフを Fig.4-121 に示す。荷重変形曲線で剛性低下が生じる最低次数のプロットを色塗りで示し、それ以外のプロットを白抜きで示している。色塗りのプロットはすべて  $s_n < 1.0$  となっており、荷重変形曲線での剛性低下と  $s_n$  の減少が対応していることがわかる。 $s_n$  の値としては、 $s_n = 0.7$  前後のものが多いものの、E2( $s_1$ ) の片曲げモデル (青丸) のように  $s_n$  がほとんど減少しないものもあり、剛性低下が生じる場合の  $s_n$  の値にも初期たわみ形状の影響がみられる。(4-7) 式で示したように、 $s_n$  は  $s_n = 1 - r_j \cos \phi$  のかたちで、変形と座屈モードに占める梁端回転角の割合の比  $r_j = (e_{nj}/\|\mathbf{e}_n\|)/(d_j/\|\mathbf{d}\|)$  と変形と座屈モードの方向の一致度を表す  $\cos \phi = \langle \mathbf{d}, \mathbf{e}_n \rangle / (\|\mathbf{d}\| \|\mathbf{e}_n\|)$  に分けることができるため、以下では、 $s_n$  に対する初期たわみ形状の影響を把握することを目的として、梁端回転角の増加に伴う  $s_n$ 、 $r_j$ 、 $\cos \phi$  の値の推移を詳細にみていく。

Fig.4-121 の各モデルについて、梁端回転角の増加に対する  $s_n$  の変化を比較すると、Fig.4-122 ~ Fig.4-124 のようになる。緑色は初期たわみ形状の違いを表しており、 $s_1$  を実線と色塗りプロット、 $s_2$  を破線と白抜きプロットで示している。横軸は  $\theta_p$  の代わりに座屈モーメントに対応する梁端回転角  $\theta_e$  で基準化している。一次モードと二次モードでは座屈モーメントが 1.8 倍程度異なるため、一次モードの曲線の  $\theta/\theta_e = 1.0$  と二次モードの曲線の  $\theta/\theta_e = 1.0/1.8 = 0.56$  が概ね同じ梁端回転角に対応している。

E1 モデルの  $s_1$  は、逆対称曲げモデルの値が他の曲げモーメントに比べるとやや大きめの値となっているが、 $\theta/\theta_p = 0.5$  から  $\theta/\theta_p = 1.0$  にかけて大きく減少し、 $\theta/\theta_p = 1.0$  付近で勾配が最大となる点は、すべての曲げモーメント分布で共通している。 $s_1$  は変形ベクトルを用いて算出しているため、 $\theta/\theta_p = 1.0$  付近で勾配が最大となることは、初期たわみを有しない梁が弾性座屈するときの梁端回転角と、初期たわみを有する梁の座屈モード方向への変形増分が最大となるときの梁端回転角が同程度であることを意味している。

E2 モデルと SH モデルは曲げモーメント分布によって  $s_1$  と  $s_2$  の推移が異なるため、それぞれについて分析を行う。  
逆対称曲げの場合 逆対称曲げモデルでは、E2 モデル、SH モデルとも、 $s_1$  は常に 1.0 であるのに対し、 $s_2$  は減少している。E2 モデルの  $s_2$  (橙色) は E1 モデルの  $s_1$  (赤色) と同様の傾向を示しているが、全体として低い値となっている。SH モデルの  $s_2$  (紫色) は E2 モデルの  $s_2$  とは傾向が異なっており、 $\theta/\theta_e = 0.7$  付近まではほぼ減少がみられず、その後急激に値が減少している。

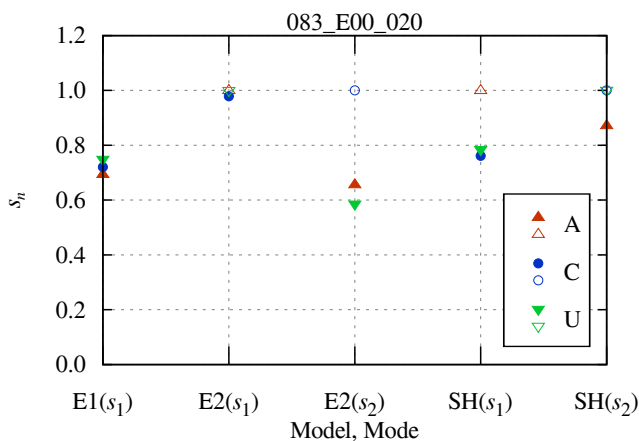
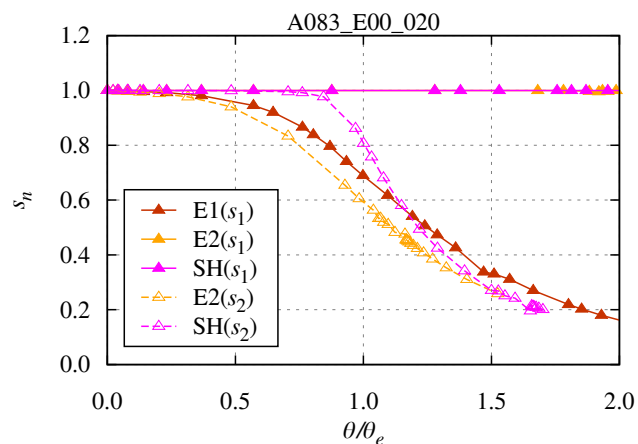
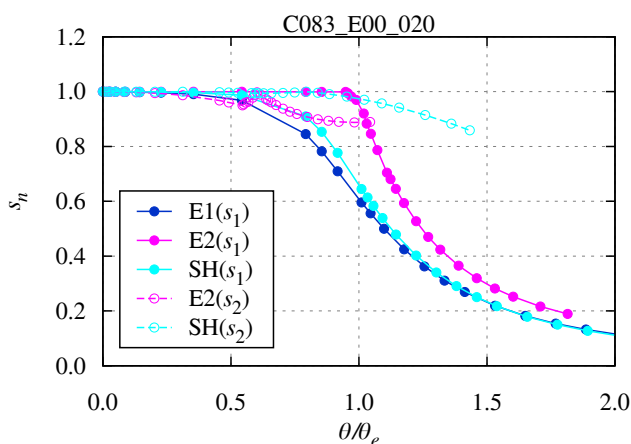
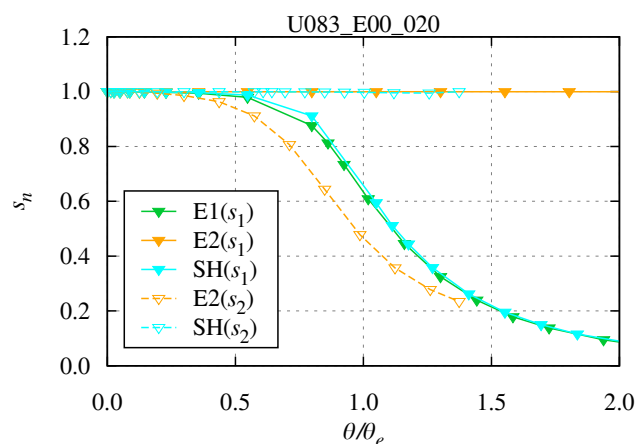
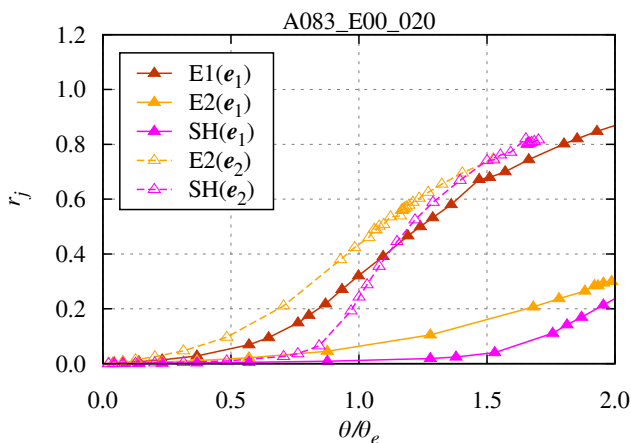
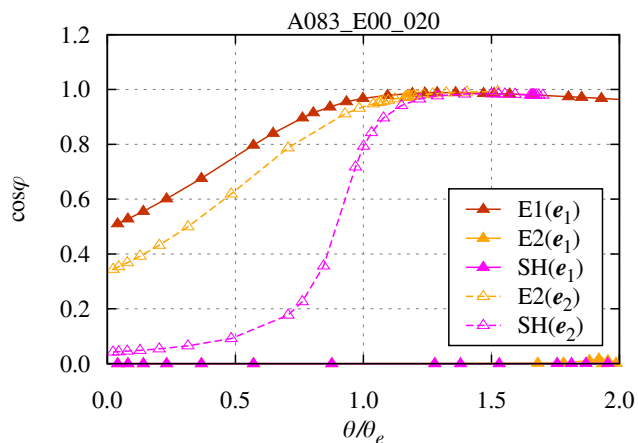
$s_n$  の推移をより詳細に分析するために、逆対称曲げモデルの  $r_j$  と  $\cos \phi$  を比較したものを Fig.4-125 と Fig.4-126 に示す。

$r_j$  の値は、E1 モデルの一次モード、E2 モデルの二次モード、SH モデルの二次モードでは  $\theta/\theta_e$  が小さい範囲から増加している。E2 モデルと SH モデルの一次モードでは  $\theta/\theta_e$  が 1.5 を超えたあたりから増加しており、一次モードと二次モードで横軸の値が 1.8 倍程度異なることを考慮すると、二次モードの値の増加に付随して一次モードの値も増加していると考えられる。一方、 $\cos \phi$  の値は、E2 モデルと SH モデルの一次モードで常に 0 になっており、 $s_1$  が 1.0 から減少しないのは、変形ベクトル  $\mathbf{d}$  と座屈モードベクトル  $\mathbf{e}_1$  の向きが常に直交したまま変形が進行するためであることがわかる。

E1 モデルの一次モード (赤実線) と E2 モデルの二次モード (橙破線) を比較すると、 $\cos \phi$  は E1 モデルの方が値が大きい。結果として、Fig.4-122 では E2 モデルの方が  $s_n$  の値が小さくなっているため、 $r_j$  の値が大きいことの方が  $s_n$  に対する影響が大きいと言える。

SH モデルの二次モード (紫破線) は、 $r_j$ 、 $\cos \phi$  とも、E1 モデルの一次モードや E2 モデルの二次モードの曲線と傾向が異なり、梁端回転角が小さい範囲では値が小さく、 $\theta/\theta_e = 0.7$  を超えたあたりから値が増加している。これは、4.5.1 項より、A083 モデルの二次モード  $\mathbf{e}_2$  と正弦半波  $\mathbf{v}_s$  の内積の値が  $\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_s \rangle = 0.402$  であることから、(4-9) 式のように、初期たわみに含まれる二次モード形状の成分が半分以下であることを反映していると考えられる。

片曲げの場合 片曲げモデルでは、E2 モデル、SH モデルとも、 $s_1$  が減少している。SH モデルの  $s_1$  (水色) は E1 モデルの  $s_1$  (青色) と似た傾向を示しているが、 $\theta/\theta_e \leq 1.5$  の範囲では SH モデルの方がやや値が大きい。それに対し、E2 モデルの


 Fig. 4-121  $s_n$  ( $M = M_{bt}$ ): 083\_E00\_020

 Fig. 4-122  $\theta/\theta_e - s_n$ : A083\_E00\_020

 Fig. 4-123  $\theta/\theta_e - s_n$ : C083\_E00\_020

 Fig. 4-124  $\theta/\theta_e - s_n$ : U083\_E00\_020

 Fig. 4-125  $\theta/\theta_e - r_j$ : A083\_E00\_020

 Fig. 4-126  $\theta/\theta_e - \cos \phi$ : A083\_E00\_020

$s_1$  (紫色) は  $\theta/\theta_e = 1.0$  付近まで減少がみられず、その後急激に減少している。

$s_2$  は、E2 モデル、SH モデルとも高い値で推移しているが、 $\theta/\theta_e \leq 1.0$  の範囲では E2 モデルのみが減少していることと、E2 モデルでは  $\theta/\theta_e = 0.5$  を超えた時点で  $s_2$  の値が増加する現象が現れることの 2 点が異なっている。一次モードと二次モードの曲線の横軸の違いを考慮すると、E2 モデルで  $s_2$  の値が増加する梁端回転角と  $s_1$  の値が減少し始める梁端回転角は一致しており、一次モードと二次モードが直交しない場合には、幾何学的非線形性による剛性低下にモード間の影響があるとみなせる。E2 モデルと SH モデルはともに初期たわみ形状に一次モードが含まれるため、最終的にはいずれのモデルで

も一次モードでの剛性低下が生じるが、E2 モデルでは、 $\langle e_2, e_1 \rangle = 0.5 < \langle e_2, e_2 \rangle = 1.0$  より、初期たわみ形状が一次モードよりも二次モードに近いと、載荷開始当初は二次モードでの剛性低下が生じることで、一次モードでの剛性低下が抑制されるのに対し、SH モデルでは、 $\langle v_s, e_1 \rangle = 0.800 > \langle v_s, e_1 \rangle = 0.599$  より、初期たわみ形状が二次モードよりも一次モードに近いと、常に一次モードでの剛性低下が生じることになると考えられる。

片曲げモデルについて  $r_j$  と  $\cos \phi$  を比較したものを Fig.4-127 と Fig.4-128 に示す。

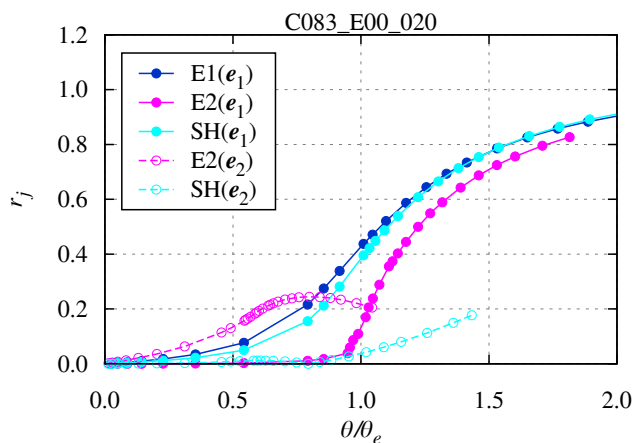


Fig. 4-127  $\theta/\theta_e - r_j$ : C083\_E00\_020

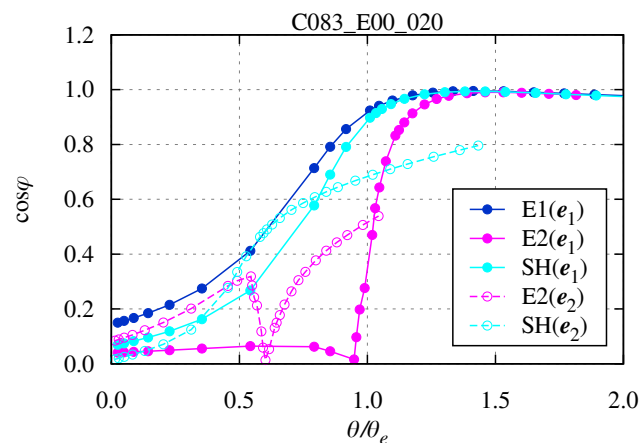


Fig. 4-128  $\theta/\theta_e - \cos \phi$ : C083\_E00\_020

逆対称曲げモデルと異なり、一次モードと二次モードが直交せず、いずれのモードも正弦半波形状とも直交しないため、 $r_j$  だけでなく  $\cos \phi$  の値もすべてのモデルで増加している。

梁端回転角の小さい範囲における E2 モデルと SH モデルの  $r_j$  の値をみると、E2 モデルでは二次モード、SH モデルでは一次モードの値の増加が大きく、載荷初期段階では初期たわみ形状と形状に近いモードで剛性低下が生じることがわかる。梁端回転角が大きくなると E2 モデルと SH モデルで傾向の違いが現れており、SH モデルではそのまま一次モードの値が増加し続け、二次モードの値は小さいままであるのに対し、E2 モデルでは二次モードの値の増加が緩やかになると同時に一次モードの値が急激に増加している。これは、初期たわみ形状と形状の近いモードが高次モードであっても、一次モードの成分を含んでいる場合には一次モードで剛性低下が生じることを意味している。 $\cos \phi$  のグラフをみると、E2 モデルの二次モードの値が  $\theta/\theta_e = 0.5$  を超えたところで大きく減少する一方で一次モードの値が  $\theta/\theta_e = 1.0$  の手前で大きく増加しており、載荷開始当初は二次モードの方向へ変形が進むが、梁端モーメントが一次モードの  $M_e$  に近づくと、二次モードの方向への変形が減少しながら急激に一次モードの方向への変形が進むことで、一次モードでの剛性低下が生じていることがわかる。SH モデルでは、 $\cos \phi$  の値は一次モードと二次モードとも同程度の増加がみられるが、上記のとおり  $r_j$  の値は一次モードの方が二次モードより顕著に大きくなっており、このことが  $s_n$  の値の差につながっていることがわかる。

以上をまとめると、

1. 載荷初期段階では初期たわみと形状の近いモードで剛性低下が先行して生じる
2. 初期たわみ形状が一次モードの成分を含む場合には、最終的には一次モードで剛性低下が生じる
3. 初期たわみと最も形状の近いモードが高次モードである場合には、載荷初期段階では一次モードでの剛性低下が抑制される

となる。剛性低下が一次モードで生じるにも関わらず Fig.4-121 で  $E2(s_1)$  の値がほとんど減少していないことは、3 点目のように、E2 モデルの変形が二次モードの方向に進んだ後で一次モードの方向に進むことを反映している。

一様曲げの場合 一様曲げモデルでは、SH モデルの  $s_1$  と E2 モデルの  $s_2$  で値の減少がみられ、SH モデルの  $s_2$  と E2 モデルの  $s_1$  は常に 1.0 となっている。SH モデルの  $s_1$  の曲線は E1 モデルの  $s_1$  とほぼ一致しているのに対し、E2 モデルの  $s_2$



の曲線は両者よりも下に位置している。

一様曲げモデルについて  $r_j$  と  $\cos \phi$  を比較したものを Fig.4-129 と Fig.4-130 に示す。

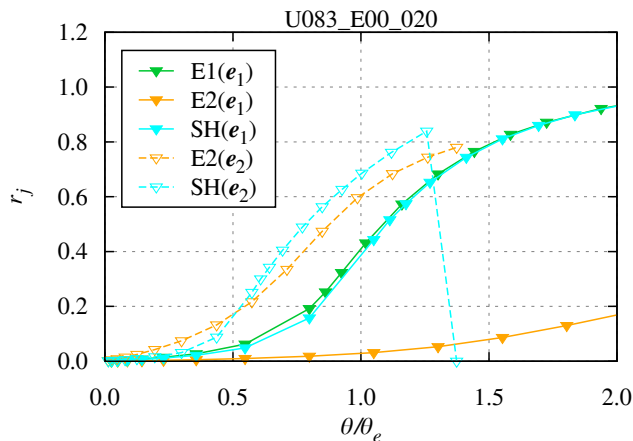


Fig. 4-129  $\theta/\theta_e - r_j$ : U083\_E00\_020

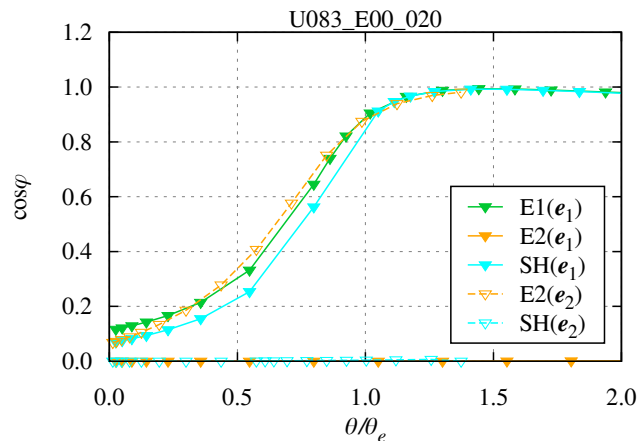


Fig. 4-130  $\theta/\theta_e - \cos \phi$ : U083\_E00\_020

$r_j$  の推移をみると、E1 モデルと SH モデルの一次モード (緑実線、水実線) の値はほぼ一致しており、E2 モデルと SH モデルの二次モードの値 (橙破線、水破線) はそれよりも高い値となっている。 $\cos \phi$  に関しては、E1 モデルと SH モデルの一次モードと E2 モデルの二次モードの曲線が概ね一致しており、E2 モデルの一次モードと SH モデルの二次モードの値は 0 となっている。Fig.4-124 で、E2 モデルの  $s_2$  (橙破線) が E1 モデルの  $s_1$  (緑実線) よりも小さいのは  $r_j$  の違いによるものであり、E2 モデルと SH モデルの二次モードで、 $r_j$  の傾向が同様であるのに  $s_n$  の傾向が異なるのは、 $\cos \phi$  の違いによるものであることがわかる。

#### 4.6.2 初期たわみ量の影響

E1 モデルの  $\lambda_b = 0.83$  の場合について、初期たわみ量が異なるモデル同士で、梁端回転角の増加に対する  $s_n$  の変化を比較すると、Fig.4-131～Fig.4-133 のようになる。線色は初期たわみ量の違いを表している。前節と同じく、横軸は  $\theta_e$  で基準化している。また、Fig.4-131～Fig.4-133 の各モデルについて、 $M_{bt}$  に達した時点での  $s_1$  と初期たわみ量  $a/l_b$  の関係を表すグラフを Fig.4-134 に示す。

曲げモーメント分布によらない共通の傾向として、以下の点が挙げられる。

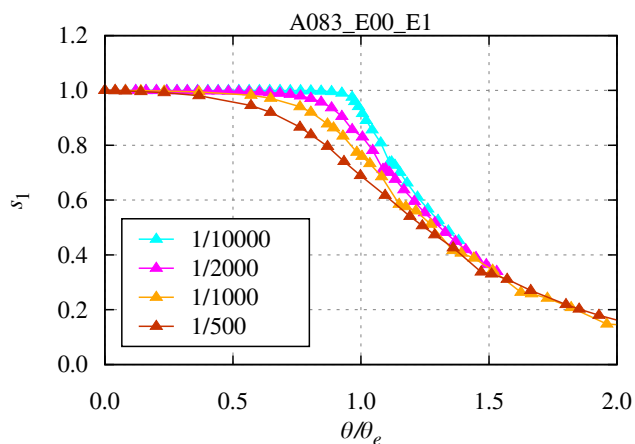
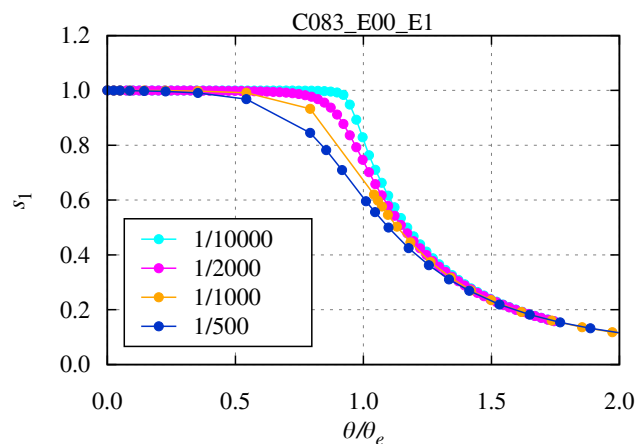
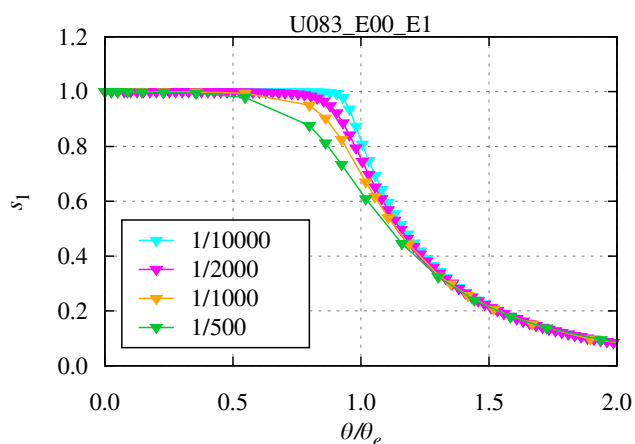
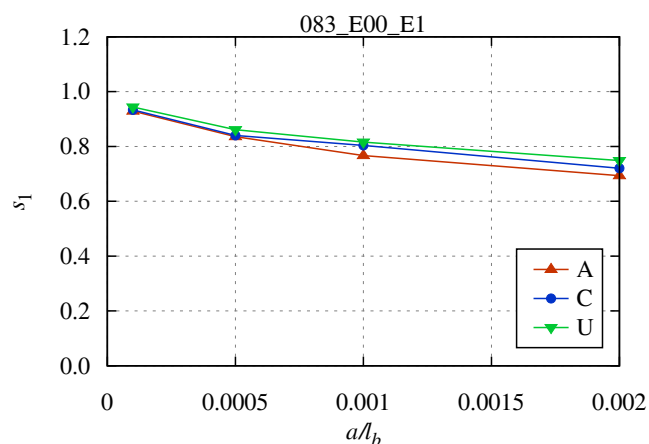
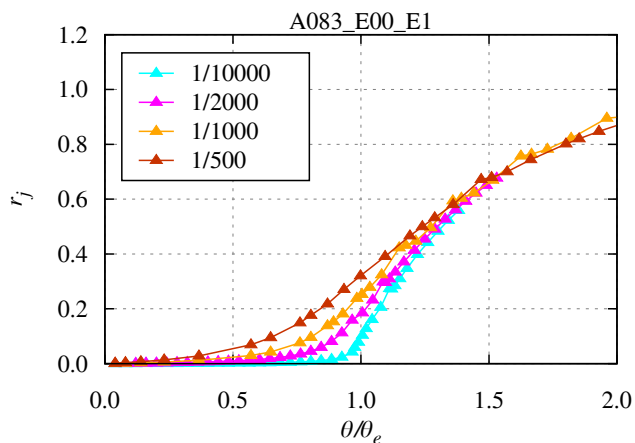
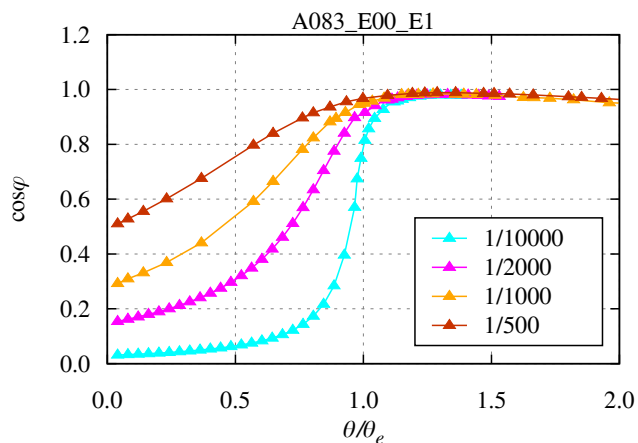
1. 初期たわみ量が多いほど  $s_1$  が減少し始めるときの梁端回転角が小さく、減少の勾配が緩やかである。
2.  $\theta/\theta_e \geq 1.5$  では初期たわみ量によらず  $s_1$  の値は一致する。

すなわち、初期たわみ量が多いほど、変形がより小さい段階から幾何学的非線形性による剛性低下の影響が現れ始め、影響の大きさとしても大きいですが、変形が十分に進行した段階ではその差がなくなっている。

曲げモーメント分布による違いはそれほど大きくはないが、片曲げモデルと一様曲げモデルの曲線がほぼ一致しているのに対し、逆対称曲げモデルは  $\theta/\theta_e = 0.8$  付近を境にして、それよりも梁端回転角が小さい範囲では  $s_1$  の値がやや小さく、梁端回転角が大きい範囲では  $s_1$  の値がやや大きくなっている。 $M = M_{bt}$  時点での  $s_1$  の値も、初期たわみ量が大きくなるにつれて曲げモーメント分布による差が広がる傾向にあるものの、全体としては概ね一致しており、初期たわみ量が多いほど  $s_1$  は小さくなっている。

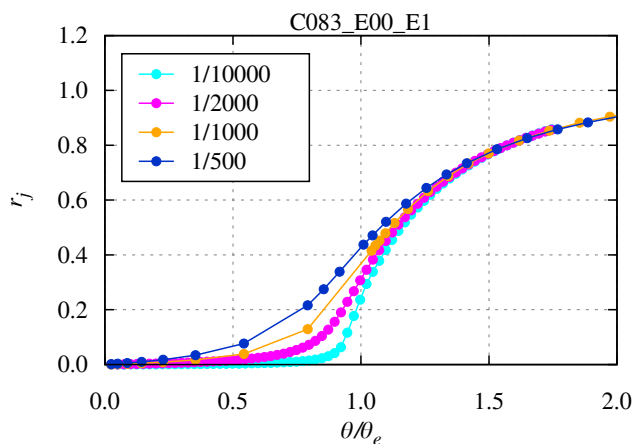
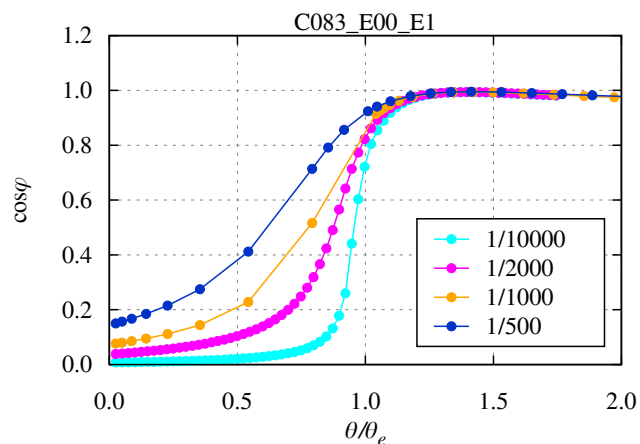
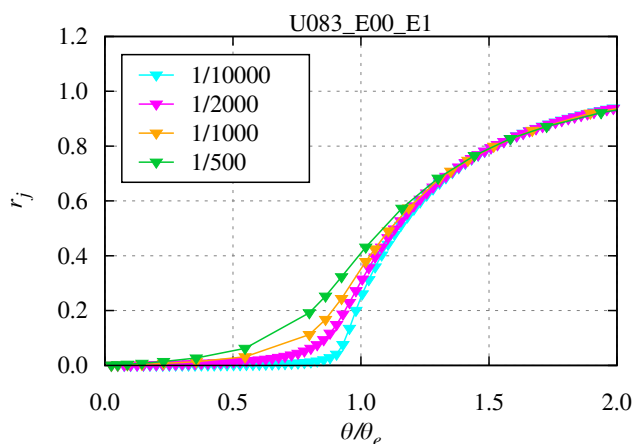
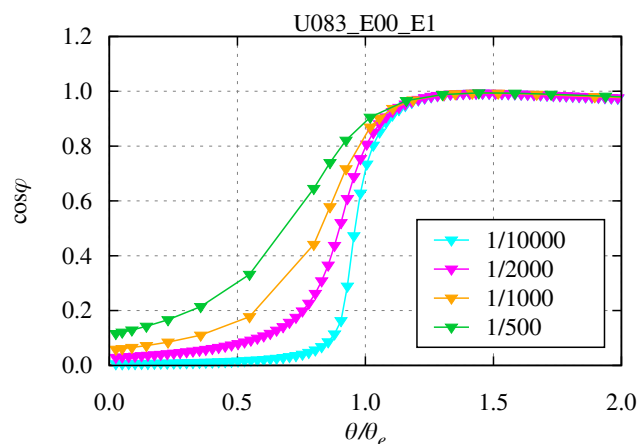
$s_1$  の違いを  $r_j$  と  $\cos \phi$  に分けて比較すると、Fig.4-135～Fig.4-140 のようになる。

$r_j$  の値は、逆対称曲げモデルがやや小さめではあるものの、曲げモーメント分布による違いはそれほど大きくない。いずれの曲げモーメント分布でも、初期たわみ量が多いほど  $r_j$  が大きく、 $\theta/\theta_e \geq 1.5$  の範囲では初期たわみ量によらず同じ値


Fig. 4-131  $\theta/\theta_e - s_1$ : A083\_E00\_E1

Fig. 4-132  $\theta/\theta_e - s_1$ : C083\_E00\_E1

Fig. 4-133  $\theta/\theta_e - s_1$ : U083\_E00\_E1

Fig. 4-134  $a/l_b - s_1$  ( $M = M_{bt}$ ): 083\_E00\_E1

Fig. 4-135  $\theta/\theta_e - r_j$ : A083\_E00\_E1

Fig. 4-136  $\theta/\theta_e - \cos \phi$ : A083\_E00\_E1

となっている。

一方、 $\cos \phi$  の値は、梁端回転角が大きい範囲 ( $\theta/\theta_e \geq 1.3$  程度) では曲げモーメント分布や初期たわみ量によらず、いずれのモデルでも概ね  $\cos \phi = 1.0$  となっているが、梁端回転角が小さい範囲では曲げモーメント分布や初期たわみ量の影響がみられる。载荷開始当初の  $\cos \phi$  の値は、初期たわみ量に概ね比例して大きくなる傾向にある。その値は、初期たわみ量 1/500 モデルの場合、片曲げモデルや一様曲げモデルでは 0.2 以下であるのに対し、逆対称曲げモデルでは 0.5 を超えており、 $\cos \phi$  は全体として逆対称曲げモデルの値が大きくなっている。このことは、 $\theta/\theta_e \leq 0.8$  の範囲で逆対称曲げモデルの

Fig. 4-137  $\theta/\theta_e - r_j$ : C083\_E00\_E1Fig. 4-138  $\theta/\theta_e - \cos \phi$ : C083\_E00\_E1Fig. 4-139  $\theta/\theta_e - r_j$ : U083\_E00\_E1Fig. 4-140  $\theta/\theta_e - \cos \phi$ : U083\_E00\_E1

$s_1$  の値が他の曲げモーメント分布に比べて小さいこととして現れているが、 $\theta/\theta_e \geq 0.8$  の範囲では片曲げモデルや一様曲げモデルの  $\cos \phi$  の値も増加することで  $s_1$  には  $r_j$  の大小関係が反映され、逆対称曲げモデルの方が  $s_1$  が大きくなっている。

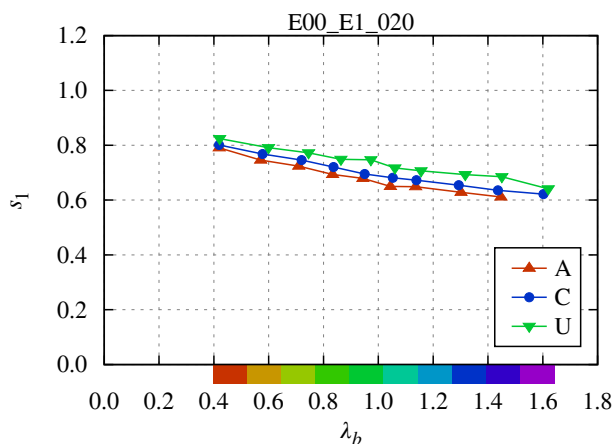
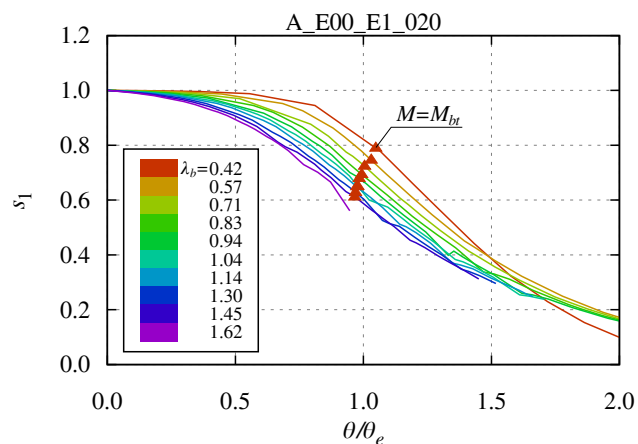
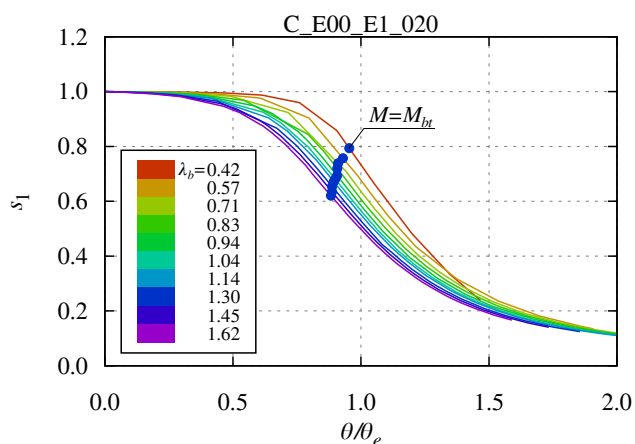
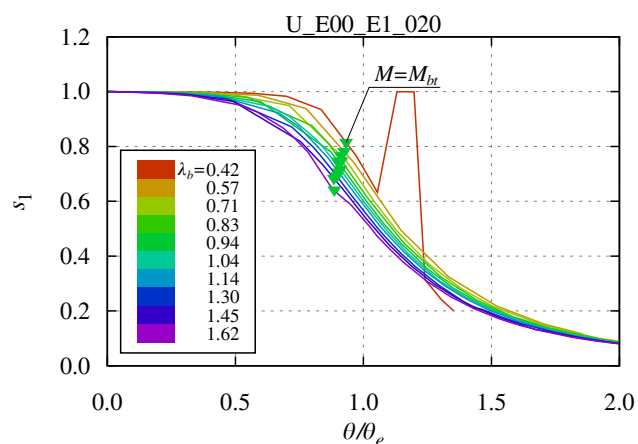
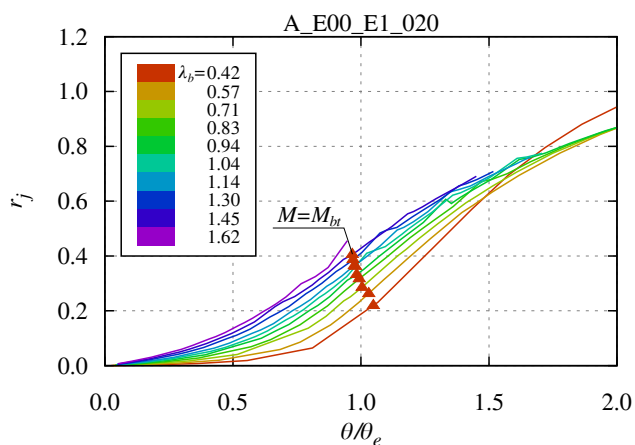
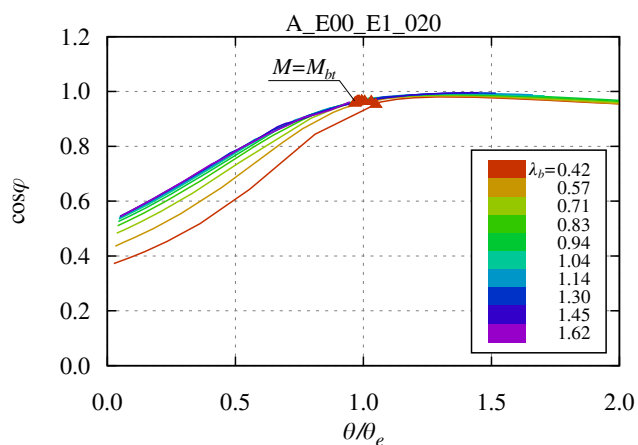
#### 4.6.3 横座屈細長比の影響

E1 モデル、初期たわみ量 1/500 の場合について、横座屈細長比  $\lambda_b$  に対する  $s_1$  の関係を Fig.4-141 に示す。いずれの曲げモーメント分布でも  $\lambda_b$  が大きいほど  $s_1$  が小さくなっており、初期たわみ量が同じでも梁スパンが長いほど剛性低下量が大きくなることを表している。また、 $\lambda_b$  が同じモデルでは、一様曲げ、片曲げ、逆対称曲げの順に  $s_1$  の値が小さくなっており、モーメント勾配が大きいほど面外変形量がやや大きくなっている。

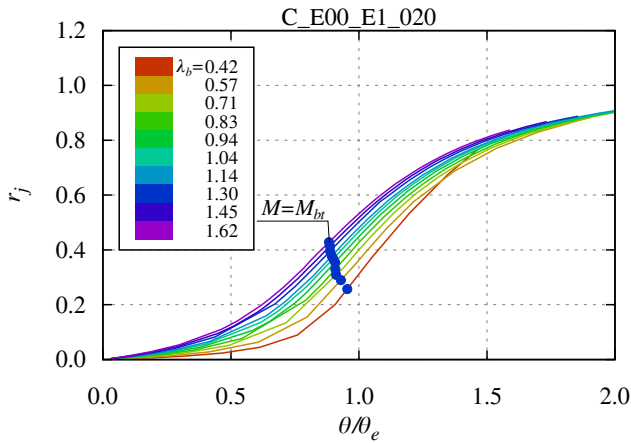
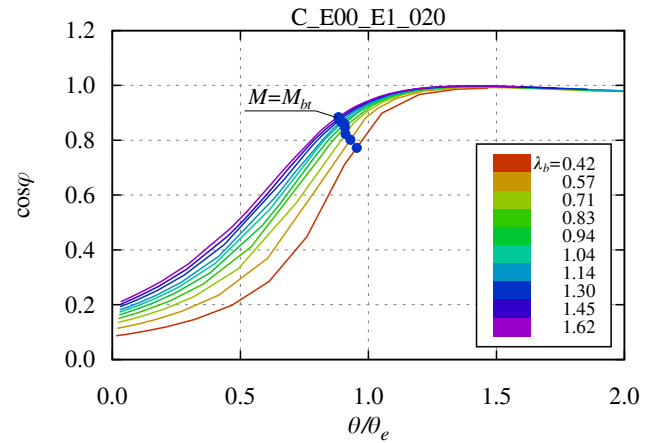
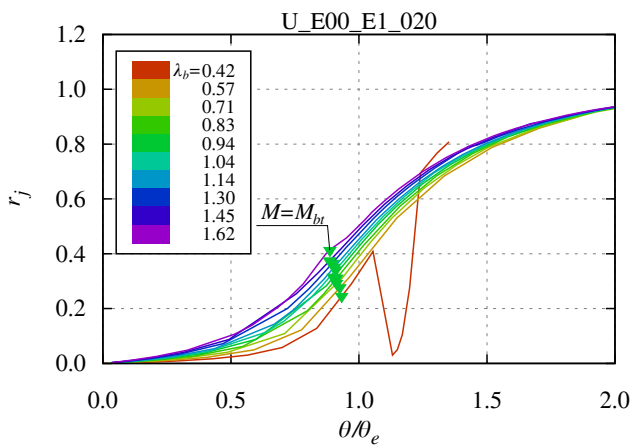
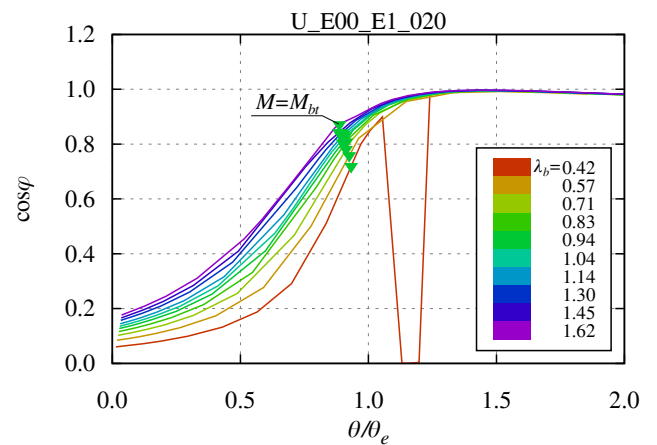
Fig.4-141 の各モデルについて、梁端回転角の増加に対する  $s_n$  の変化を比較したものを Fig.4-142 ~Fig.4-144 に示す。線色は横座屈細長比の違いを表しており、各曲線には  $M = M_{bt}$  となる時点をプロットで示している。

一様曲げモデルの  $\lambda_b = 0.42$  のグラフ (赤色) において、 $\theta/\theta_e$  が 1.0 を超えた時点で  $s_1 = 1.0$  となる範囲が存在しているが、この範囲では一次モードに対応する座屈モード形状が横座屈ではなく梁スパン中央部でのフランジの局部座屈となっており、横座屈の場合と傾向が大きく異なっている。その他のモデルでは、 $\theta/\theta_e \geq 1.2$  の範囲における  $\lambda_b = 0.42$  の曲線を除けば、 $\lambda_b$  が大きいほど  $s_1$  が小さく、 $\lambda_b$  の違いによる  $s_1$  の差が  $\theta/\theta_e = 1.0$  付近で最大となる傾向は共通している。曲げモーメント分布による違いとして、いずれの  $\lambda_b$  についても、モーメント勾配の大きい逆対称曲げモデルの  $s_1$  の減少勾配が緩やかであることが挙げられるが、 $M = M_{bt}$  となる時点での梁端回転角は逆対称曲げモデルが一番大きく、結果として  $M = M_{bt}$  となる時点での  $s_1$  の値の差は比較的小さくおさまっている。

$s_1$  の違いを  $r_j$  と  $\cos \phi$  に分けて比較すると、Fig.4-135~Fig.4-140 のようになる。Fig.4-142 と同様に、線色は横座屈細長比の違いを表しており、各曲線には  $M = M_{bt}$  となる時点をプロットで示している。


Fig. 4-141  $\lambda_b - s_1$  ( $M = M_{bt}$ ): E00\_E1\_020

Fig. 4-142  $\theta/\theta_e - s_1$ : A\_E00\_E1\_020

Fig. 4-143  $\theta/\theta_e - s_1$ : C\_E00\_E1\_020

Fig. 4-144  $\theta/\theta_e - s_1$ : U\_E00\_E1\_020

Fig. 4-145  $r_j$ : A\_E00\_E1\_020

Fig. 4-146  $\cos \phi$ : A\_E00\_E1\_020

$r_j$ 、 $\cos \phi$ とも、概ね  $\lambda_b$  が大きいほど値が大きい傾向にある。逆対称曲げモデルでは  $M = M_{bt}$  の時点での  $\cos \phi$  の値は  $\lambda_b$  によらずほぼ一致しており、 $\lambda_b$  の違いによる  $s_1$  の値の差は  $r_j$  の差を反映していることがわかる。片曲げモデルと一様曲げモデルについても、 $r_j$  は 0.2~0.4 程度の範囲に分布しており最大で 2 倍近い差があるのに対し、 $\cos \phi$  は 0.7~0.9 の範囲に分布しており最大でも 30% 程度の差であることから、 $\cos \phi$  よりも  $r_j$  の差の方が  $\lambda_b$  の違いによる  $s_1$  の差に対する影響が大きいと言える。


 Fig. 4-147  $r_j$ : C\_E00\_E1\_020

 Fig. 4-148  $\cos \phi$ : C\_E00\_E1\_020

 Fig. 4-149  $r_j$ : U\_E00\_E1\_020

 Fig. 4-150  $\cos \phi$ : U\_E00\_E1\_020

## 4.7 巨視的不安定曲面に対する初期たわみの影響

前節までに、初期たわみ形状、初期たわみ量、横座屈細長比の各要因に分けて、初期たわみが面外変形に与える影響について検討した。本節では、面外変形量の指標である  $s_n$  と巨視的不安定曲面において幾何学的非線形性の影響を表す  $M_{bt}/M_e$  を関連付けることで、巨視的不安定曲面に対する初期たわみの影響について考察する。

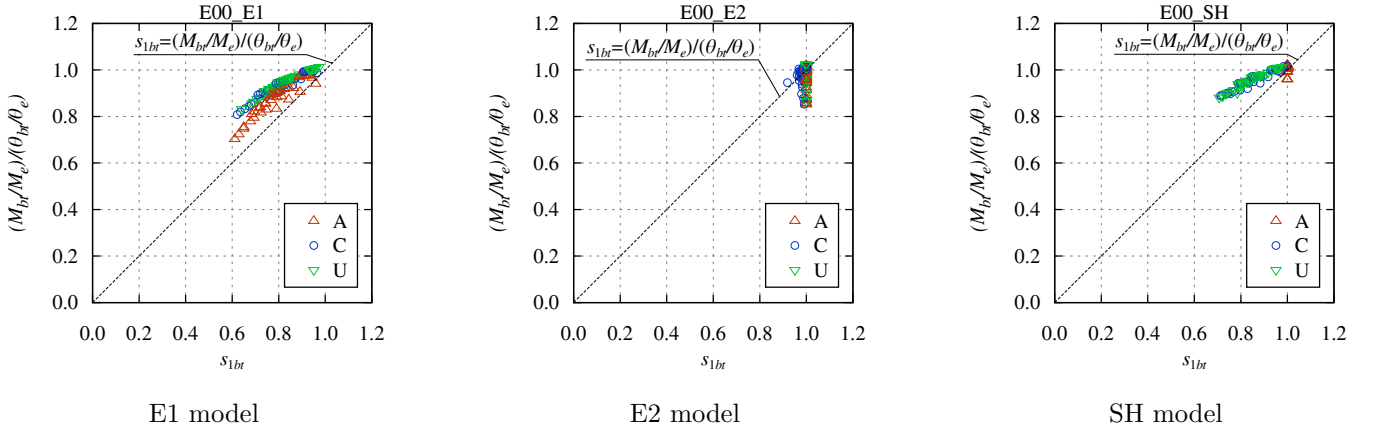
$M = M_{bt}$  となる時点での  $s_1$  と梁端回転角を  $s_{1bt}$  と  $\theta_{bt}$  としたとき、(4-5) 式で定義し直した瞬間剛性が常に一定であれば、 $M_{bt}/(s_{1bt}\theta_{bt}) = M_e/\theta_e$  より  $s_{1bt} = (M_{bt}/M_e)/(\theta_{bt}/\theta_e)$  となるが、 $s_{1bt}$  と  $(M_{bt}/M_e)/(\theta_{bt}/\theta_e)$  の関係をプロットしてみると Fig.4-151 のようになり、両者は必ずしも一致しない。

$s_{1bt}$  と  $(M_{bt}/M_e)/(\theta_{bt}/\theta_e)$  が一致しないことには、

1. 横座屈モーメント  $M_l$  の増減の影響は  $M_{bt}/M_e$  のみに反映されること
2. 高次モードでの剛性低下の影響は  $M_{bt}/M_e$  のみに反映されること
3. (4-5) 式が含意する面外変形による梁端モーメントの増加を 0 とする仮定が実際には成立しないこと

の 3 つの要因が考えられる。

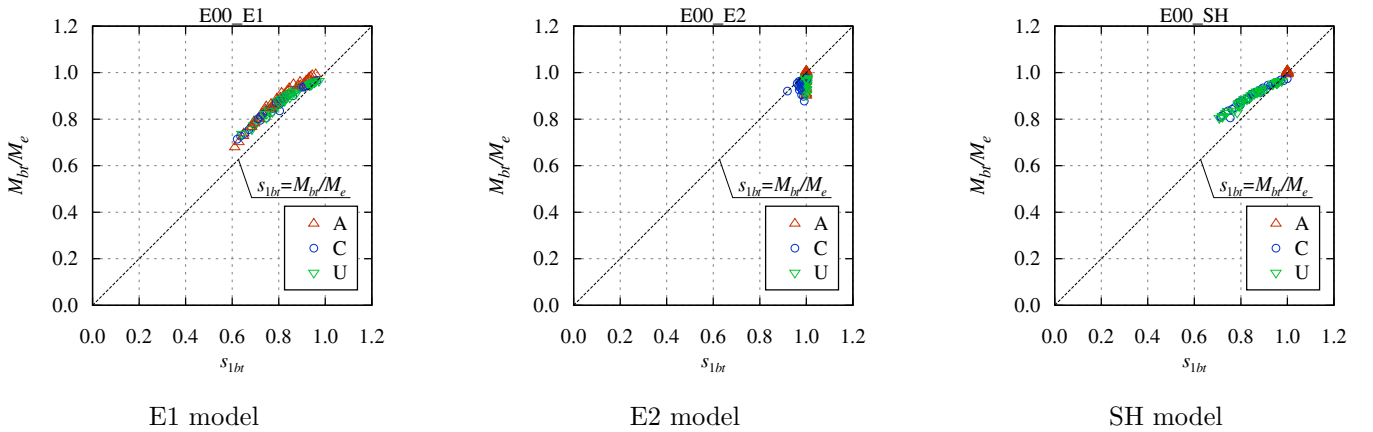
1 点目は、逐次座屈固有値解析法の手順 2 で変形形状を考慮して座屈固有値解析を行っていることで、材料非線形性の影響がない場合でも座屈固有値が変化するためであり、 $s_{1bt}$  が一定でも固有値が減少すると  $M_{bt}/M_e$  は減少する。ただし、4.5 節の荷重変形曲線からもわかるように、 $M_l$  の増減の影響が大きくなるのは  $M = M_{bt}$  時点よりも梁端回転角が大きい範囲であり、影響はわずかであると言える。


 Fig. 4-151  $s_{1bt} - (M_{bt}/M_e)/(\theta_{bt}/\theta_e)$ 

2点目は、逆対称曲げのE2モデルやSHモデルのように、一次モードの方向への面外変形がなく、二次モードの方向への面外変形が生じる場合に影響が顕著になる。この場合、 $s_{1bt} = 1.0$ であるのに対し、二次モードでの剛性低下の影響で一次モードに対応する $M_{bt}$ が減少するため、 $s_{1bt} > (M_{bt}/M_e)/(\theta_{bt}/\theta_e)$ となる。

3点目は影響が最も大きく、面外変形による梁端モーメントの増加を0と仮定することによって $s_1$ と $\theta$ から予測される梁端モーメントは実際の梁端モーメントよりも小さくなるため、 $s_{1bt}\theta_{bt}/\theta_e < M_{bt}/M_e$ 、すなわち $s_{1bt} < (M_{bt}/M_e)/(\theta_{bt}/\theta_e)$ となる。この影響は面外変形量が大いほど大きくなるため、 $s_{1bt}$ が小さいほど $s_{1bt} = (M_{bt}/M_e)/(\theta_{bt}/\theta_e)$ の直線からの乖離は大きくなる。

ここで、 $s_{1bt}$ と $M_{bt}/M_e$ の関係をプロットするとFig.4-152のようになり、初期たわみ形状による傾向の違いはあるものの、初期たわみ量、曲げモーメント分布、横座屈細長比による違いは小さく、 $M_{bt}/M_e$ に対する初期たわみの影響は $s_n$ に対する初期たわみの影響と同様のものになると考えられる(初期たわみ形状による影響を除く)。以下では、前節までの検討を元にして、幾何学的非線形性のみを有する場合の巨視的不安定曲面に対する各パラメタの影響について考察する。


 Fig. 4-152  $s_{1bt} - M_{bt}/M_e$ 

#### 4.7.1 横座屈細長比の影響

E1モデル、初期たわみ量 $1/500$ の場合について $M_{bt}/M_e$ と $\lambda_b$ の関係をFig.4-153に示す。Fig.4-141と同様に両者は概ね線形関係にあり、 $\lambda_b$ が大きいほど幾何学的非線形性による剛性低下が大きいことがわかる。同図には荷重増分解析で得られた最大耐力 $M_{max}$ を白抜きプロットで示している。4.5.2項の荷重変形曲線からわかるように、逆対称曲げモデルでは剛性が大きく低下した後も緩やかに荷重が上がり続けるため、 $M_{max}$ は $M_{bt}$ を大幅に上回っているが、片曲げモデルと一様曲



げモデルでは剛性低下後の荷重増加がわずかであるため、横座屈細長比の大きさに関わらず  $M_{bt} = 0.9M_{\max}$  程度となっており、 $M_{\max}$  も  $\lambda_b$  が大きいほど小さくなるのがわかる。

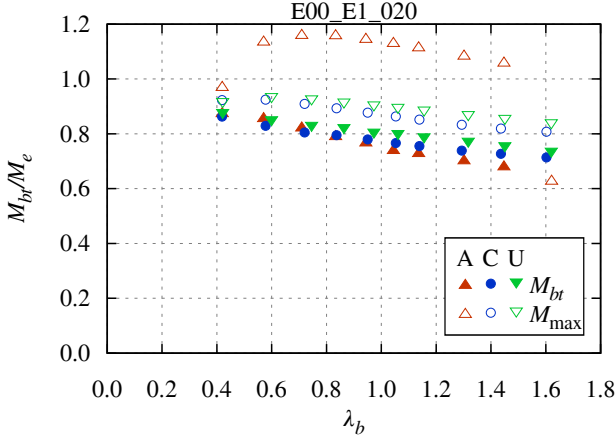


Fig. 4-153  $\lambda_b - M_{bt}/M_e$ : E00\_E1\_020

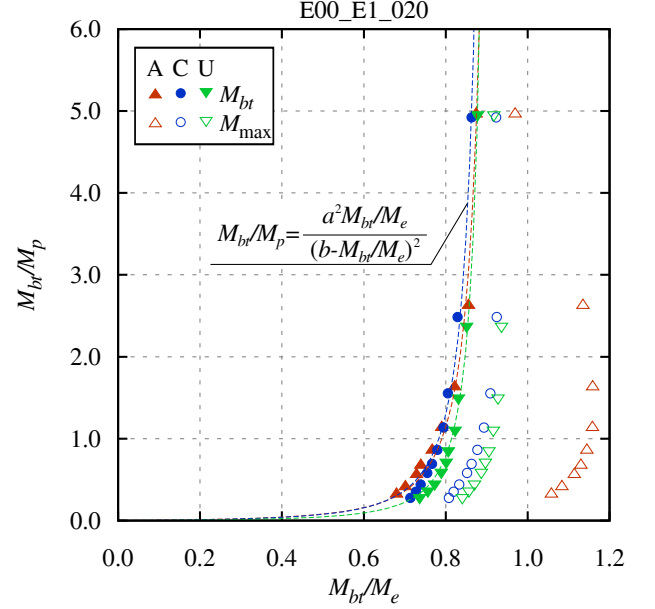


Fig. 4-154 Macroscopic instability surface: E00\_E1\_020

$M_{bt}/M_e = b - a\lambda_b$  とすると、 $\lambda_b = \sqrt{M_p/M_e} = \sqrt{(M_{bt}/M_e)/(M_{bt}/M_p)}$  より、

$$M_{bt}/M_p = (a^2 M_{bt}/M_e) / (b - M_{bt}/M_e)^2 \quad (4-10)$$

となるので、 $M_{bt}/M_e$  と  $\lambda_b$  の線形関係が仮定できる場合には、巨視的不安定曲面は (4-10) 式のかたちの関数で近似することができる (Fig.4-154)。

#### 4.7.2 初期たわみ形状の影響

4.6.1 項で述べたように、初期たわみベクトル  $\mathbf{v}_{\text{init}}$  と  $n$  次モードベクトル  $\mathbf{e}_n$  の内積を取ったとき、 $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_n \rangle \neq 0$  であれば  $\mathbf{e}_n$  の方向に面外変形が進行し、

- (a)  $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_n \rangle \neq 0$  となる最小次数
- (b)  $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_n \rangle$  が最大となる次数

によって、面外変形の進展状況と最大曲げ耐力の予測下限値となる  $M_{bt}$  の次数が決まる。

1. (a)、(b) がともに一次モードの場合 (逆対称曲げ: E1、片曲げ: E1、SH、一様曲げ: E1、SH)

面外変形は一次モードの方向に進行し、一次モードの  $M_{bt}$  が最大曲げ耐力の予測下限値となる。

2. (a) が一次モードで (b) が高次モードの場合 (片曲げ: E2)

面外変形は、载荷開始当初は高次モードの方向に進行するが、梁端モーメントが一次モードの座屈モーメントに近づくと急激に一次モードの方向に進行するようになり、一次モードの  $M_{bt}$  が最大曲げ耐力の予測下限値となる。「1. (a)、(b) がともに一次モードの場合」に比べると  $M = M_{bt}$  となる時点での面外変形量が小さいため、 $M_{bt}/M_e$  の値が高くなる傾向にある。

## 3. (a)、(b) がともに高次モードの場合 (逆対称曲げ: E2、SH、一様曲げ: E2)

面外変形は高次モードの方向に進行し、高次モードの  $M_{bt}$  が最大曲げ耐力の予測下限値となる。一次モードの方向への面外変形量が 0 であっても、高次モードでの剛性低下の影響により一次モードの  $M_{bt}$  が低下するため、巨視的不安定曲面の横軸の値は 1.0 にならず、Fig.4-152 の E2 モデルでは逆対称曲げ (A) と一様曲げ (U) のプロットが  $s_{1bt} = M_{bt}/M_e$  の直線よりも下にきている。

解析では一次モードの方向へ面外変形が進行しないため、一次モードでは座屈が生じない結果が得られるが、実現象としては一次モードベクトル  $\mathbf{e}_1$  に対して厳密に  $\langle \mathbf{v}_{init}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$  となるような初期たわみを設定することは困難である。そこで、(a) が高次モードとなる場合も「2. (a) が一次モードで (b) が高次モードの場合」とみなし、一次モードの  $M_{bt}$  を最大曲げ耐力の予測下限値とするのが妥当であると考えられる。

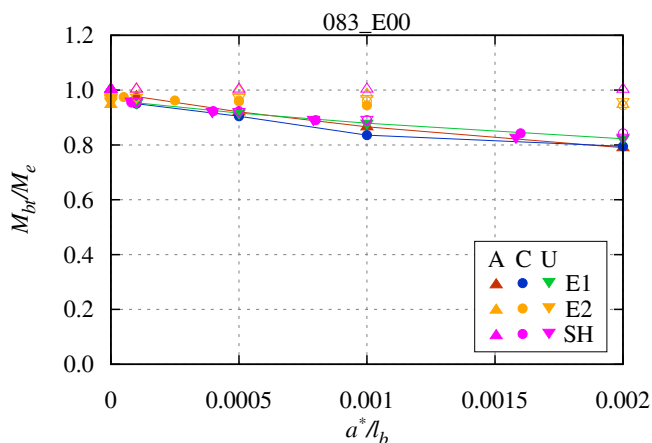
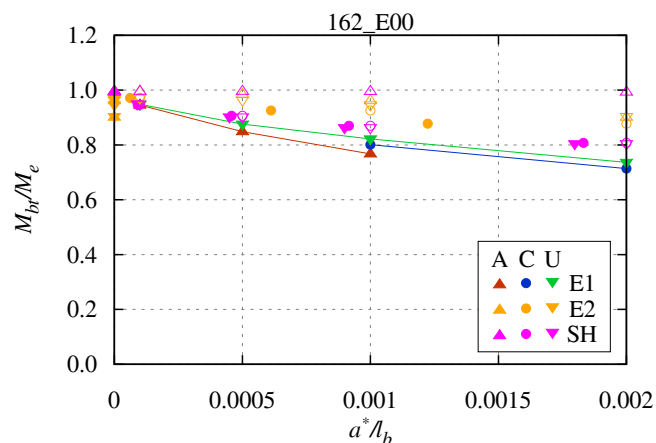
## 4.7.3 初期たわみ量の影響

(4-9) 式と同様に考えると、初期たわみベクトル  $\mathbf{v}_{init} = a \times \mathbf{v}_{shape}$  の中には初期たわみ量  $a_1/l_b = a/l_b \langle \mathbf{v}_{shape}, \mathbf{e}_1 \rangle$  の弾性一次座屈モード形状の初期たわみが含まれているとみなせるため、幾何学的非線形性による剛性低下には、初期たわみ量  $a/l_b$  に加え  $\langle \mathbf{v}_{shape}, \mathbf{e}_1 \rangle$  の影響があると考えられる。

そこで、弾性一次座屈モード方向への初期たわみ量を

$$a^*/l_b = a/l_b \times \langle \mathbf{v}_{shape}, \mathbf{e}_1 \rangle / \|\mathbf{v}_{shape}\| \|\mathbf{e}_1\| \quad (4-11)$$

と定義し、 $a^*/l_b$  と  $M_{bt}/M_e$  の関係をプロットすると Fig.4-155、Fig.4-156 のようになる。図中には白抜きプロットで  $a/l_b$  を用いた場合を示している。

Fig. 4-155  $a^*/l_b - M_{bt}/M_e$ :  $\lambda_b = 0.83$ Fig. 4-156  $a^*/l_b - M_{bt}/M_e$ :  $\lambda_b = 1.62$ 

初期たわみ量として  $a/l_b$  の代わりに  $a^*/l_b$  を用いることで、初期たわみ量と  $M_{bt}/M_e$  の関係の初期たわみ形状による差は減少している。完全には一致していないものの、E2 モデルや SH モデルのプロットは E1 モデルのプロット同士をつなぐ直線よりも上にきているため、初期たわみ形状が弾性一次座屈モード形状でない場合には、初期たわみ量  $a^*/l_b$  の弾性一次座屈モード形状初期たわみを有するものとして幾何学的非線形性の影響を考慮することで、最大曲げ耐力を安全側に評価できることがわかる。

全体的な傾向としては、 $a^*/l_b$  が大きいほど  $M_{bt}/M_e$  は小さくなっており、 $a^*/l_b \leq 1/1000$  の範囲では両者は概ね線形関係にあるが、 $a^*/l_b > 1/1000$  の範囲では  $a^*/l_b$  が大きくなるにつれて  $a^*/l_b$  の増加に対する  $M_{bt}/M_e$  の減少は緩やかになっている。



## 4.8 結

本章では、幾何学的非線形性による剛性低下のみを有する場合について、逐次座屈固有値解析法を用いた検討結果を示した。

幾何学的非線形性による剛性低下の影響は、座屈モード形状を基準として設定した面外方向への変形量を用いて定量化しており、面外変形量が多いほど座屈モーメントが低下するものとみなすことで分岐モーメント  $M_{bt}$  を求めている。材料非線形性による剛性低下のみを有する場合の分岐モーメント  $M_{bt}$  は、荷重変形曲線の釣合経路が分岐する点における荷重であったが、幾何学的非線形性による剛性低下のみを有する場合の  $M_{bt}$  は、梁端回転角の全変形を面内変形と面外変形に分離したとき、全変形と同等の変形量が面内変形のみで生じるとした場合に必要なとされる仮想的な荷重  $M'$  が座屈モーメント  $M_l$  に達するときの荷重である。材料の塑性化が生じない場合には、梁端回転角を増加させていくと、全変形に占める面外変形の割合が急激に増大しながら荷重が緩やかに座屈モーメントに漸近するが、 $M_{bt}$  を評価する際に面外変形の割合が急増する領域での荷重の増加を無視することになるため、 $M_{bt}$  は解析で得られる最大荷重  $M_{\max}$  を過小評価することになる。 $M_{bt}$  を用いた最大曲げ耐力評価では、この過小評価となる部分を含めて幾何学的非線形性による座屈モーメントの低下とみなしていると言える。

曲げモーメント分布と初期たわみの組み合わせによって面外変形の進展状況と  $M_{bt}$  の低下量が変化するため、曲げモーメント分布 (3 通り)、初期たわみ形状 (3 通り)、初期たわみ量 (4 通り) が面外変形と  $M_{bt}$  に与える影響について考察した。

本章で得られた知見を以下に示す。

1. 初期たわみベクトルを  $\mathbf{v}_{\text{init}}$ 、 $n$  次座屈モードベクトルを  $\mathbf{e}_n$  とすると、最大曲げ耐力の予測下限値となるのは、 $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_n \rangle \neq 0$  となる最小の次数  $n$  に対応する  $M_{bt}$  である。これは、初期たわみが  $n$  次座屈モード成分を含む場合に限り  $n$  次座屈モードの方向への面外変形が進行するためである。
2. 載荷開始当初は  $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_n \rangle$  が最大となる次数の座屈モードの方向に面外変形が進行する。1. と合わせると、面外変形の進展状況と  $M_{bt}$  の低下量は、
  - (a)  $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_n \rangle \neq 0$  となる最小次数
  - (b)  $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_n \rangle$  が最大となる次数
 によって決まることになる。(a) と (b) が異なる場合には、載荷途中で面外変形の方向が変化する場合が存在する (片曲げ、E2 モデル)。
3. 弾性一次座屈モード形状の初期たわみを有する場合、初期たわみ量  $a/l_b \leq 1/1000$  の範囲では、概ね  $a/l_b$  の大きさに比例して面外変形量と  $M_{bt}$  の低下量が増大する。 $a/l_b > 1/1000$  の範囲では  $a/l_b$  の増加に対する面外変形量や  $M_{bt}$  の低下量の増大は緩やかになる。一般的な形状の初期たわみを有する場合には、(4-11) 式によって計算される弾性一次座屈モード方向への初期たわみ量  $a^*/l_b$  を用いることで、 $M_{bt}$  の低下量を安全側に評価できる。
4. 初期たわみ量が同じでも、横座屈細長比  $\lambda_b$  が大きいほど面外変形量や  $M_{bt}$  の低下量が大きくなる傾向にある。初期たわみ量が一定として  $\lambda_b$  を変化したモデルの巨視的不安定曲面は、(4-10) 式のかたちの関数で近似することができる。

## 5 材料非線形性と幾何学的非線形性の連成を考慮した最大曲げ耐力評価

### 5.1 序

前章までに、材料非線形性と幾何学的非線形性のいずれか一方による剛性低下のみが生じる場合について、逐次座屈固有値解析法を用いた検討を行い、曲げモーメント分布や残留応力、初期たわみなどが剛性低下に与える影響について考察してきた。

実際の構造物では塑性化と面外変形が同時に生じるため、前章まででは問題とならなかった、面外変形に伴う塑性化進展状況の変化や、塑性化に伴う面外変形進展状況の変化の影響を考慮する必要が出てくる。

本章では、材料非線形性と幾何学的非線形性の両方による剛性低下が生じる場合について、逐次座屈固有値解析法を用いた検討を行い、塑性化と面外変形が同時に進行する状況において、各パラメタが剛性低下に与える影響について考察する。

### 5.2 解析モデル

#### 5.2.1 概要

有限要素解析モデルは第3章、第4章で述べたものと同様である。本章では塑性化と面外変形の両方の影響がある場合を対象とするため、材料特性はバイリニアモデル (B)、残留応力は導入しないモデル (B00) と導入するモデル (B03)、初期たわみは第4章と同様の条件で設定したモデルについて検討する。

### 5.3 解析手順

前節で示した解析モデルを用い、次のような一連の解析を行う。

#### 手順 1

材料非線形性および幾何学的非線形性を考慮した荷重増分解析を行う

#### 手順 2

荷重増分解析の各段階について、塑性化による剛性低下と変形形状を考慮した座屈固有値解析を行い、座屈固有値から材料非線形性による剛性低下量を求める

#### 手順 3

手順 1 で得られた変形ベクトルと手順 2 で得られた固有ベクトルから幾何学的非線形性による剛性低下量を求める

一連の解析はプログラムを用いて行っており、具体的な処理としては次のようになる。

1. 所定のパラメタを有する解析モデルを作成する
2. 弾性横座屈モーメント  $M_e$  と、弾性座屈モード形状の初期たわみを有するモデルの初期たわみ形状を求めるために、線形座屈固有値解析を行う
3. 大変形の定式を使用した静的応力解析を行う (手順 1)
4. 静的応力解析の各インクリメントについて、静的応力解析用と同じモデルを新たに生成し、
  - (a) 各要素について、塑性化の有無に応じて材質を再設定する
  - (b) 当該インクリメントにおける変形形状  $\mathbf{d}$  を初期たわみとして再設定する
  - (c) 横座屈モーメント  $M_l$  と座屈モード形状  $\mathbf{e}_n$  を求めるために、線形座屈固有値解析を行う (手順 2、3.4 節)
  - (d)  $\mathbf{d}$  と  $\mathbf{e}_n$  から、幾何学的非線形性による剛性低下量を求める (手順 3、4.4 節)

#### 5.4 材料非線形性と幾何学的非線形性による剛性低下の影響の定量的評価

材料非線形性と幾何学的非線形性の両方の影響がある場合も、座屈モーメント  $M_l$  や面外変形を考慮して低減した座屈モーメント  $M'_l$  の求め方は3章や4章で述べた方法と同様であり、荷重変形曲線と剛性低下曲線はFig.5-1 になる。

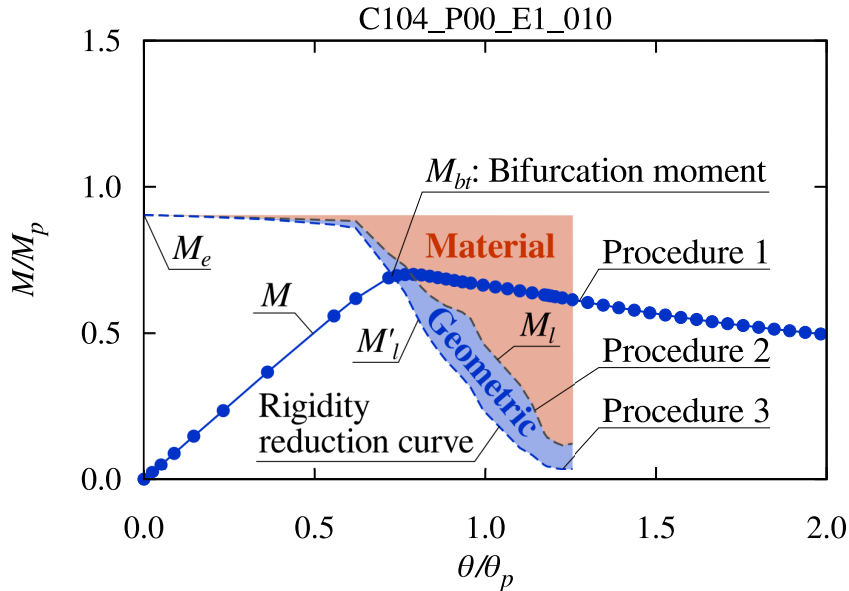


Fig. 5-1 Stiffness decrease curve: C104\_P00\_E1\_010

$M_l$  の灰破線は材料非線形性による剛性低下の影響のみを含んでおり、 $M'_l$  の青破線 (剛性低下曲線) は材料非線形性と幾何学的非線形性の両方の影響を含んでいるため、赤領域で示した  $M = M_e$  の横線と灰破線の間が材料非線形性の影響、青領域で示した灰破線と青破線の間が幾何学的非線形性の影響を表している。例示したモデルでは青領域よりも赤領域の方が大きく、幾何学的非線形性よりも材料非線形性による剛性低下の方が大きいことがわかる。また、荷重変形曲線と剛性低下曲線の交点の直前で剛性低下曲線と灰破線の差が広がっており、荷重が  $M_{bt}$  に達する直前に座屈モード方向への変形が急激に進行していることがわかる。

第4章で述べたとおり、指標  $s_n$  を用いた幾何学的非線形性による剛性低下の定量化は、剛性低下が幾何学的非線形性のみによって生じると仮定しているため、材料非線形性による剛性低下を含む場合には、厳密には整合しない結果となる。しかし、本論文では手法の簡便性を優先し、材料非線形性と幾何学的非線形性の両方による剛性低下を含む場合にも、幾何学的非線形性による影響を  $s_n$  を用いて評価できるものと仮定し、5.5節において  $M_{bt}$  が解析によって得られる最大荷重  $M_{max}$  と対応することを示すことで、この仮定の妥当性を確認する。

#### 5.5 解析結果

幾何学的非線形性のみを有する場合の解析結果について、残留応力、初期たわみ形状、初期たわみ量、曲げモーメント分布、梁スパンごとの荷重変形曲線、巨視的不安定曲面、 $M_{bt}$  に達した時点での  $s_1$ 、 $r_j$ 、 $\cos \phi$  の値と横座屈細長比  $\lambda_b$  の関係を表すグラフを示す。荷重変形曲線については、 $\lambda_b = 0.42, 0.83, 1.14, 1.62$  の4モデルのみ示している。巨視的不安定曲面には  $M_{bt}$  に加えて白抜きプロットで  $M_{max}$  を示している。

### 5.5.1 バイリニアモデル、残留応力なし、弾性一次座屈モード形状 (B00.E1)

初期たわみ量=1/10000 (B00.E1.001)、逆対称曲げ

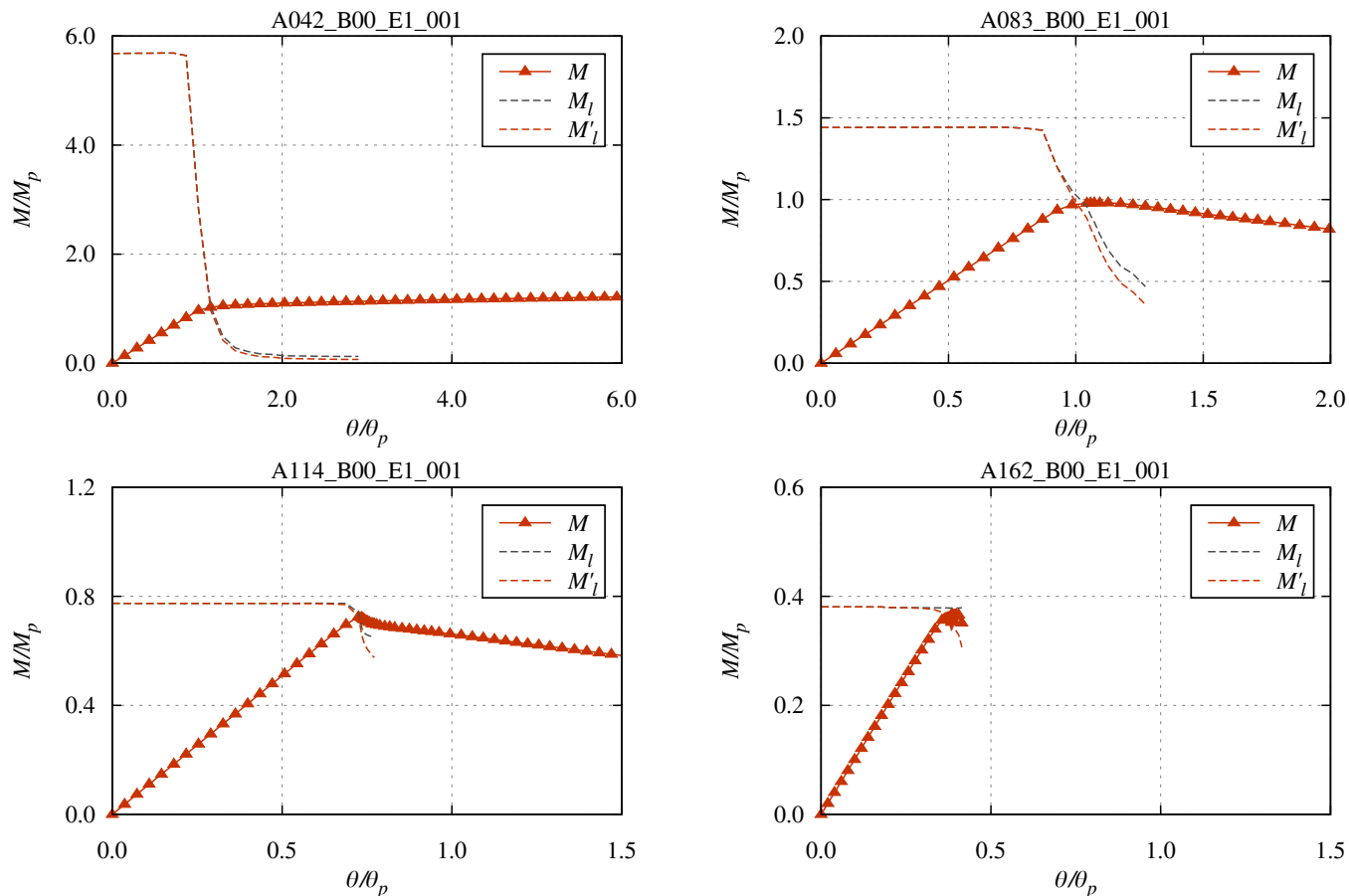


Fig. 5-2 Load-deformation curve: A\_B00.E1.001

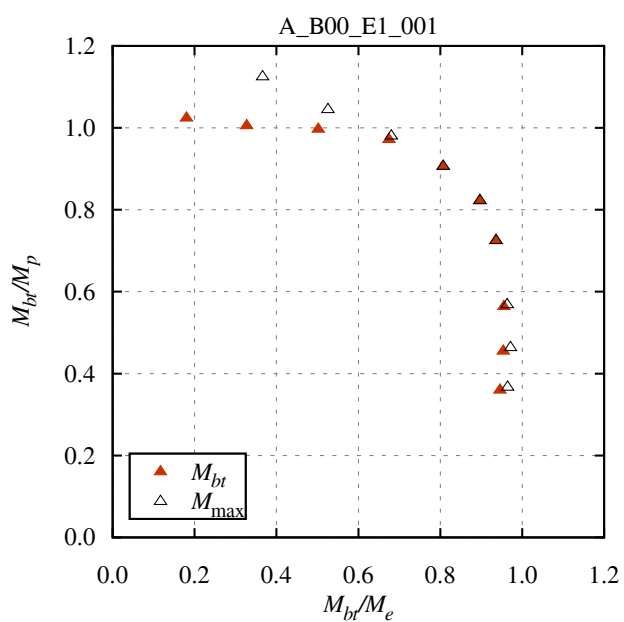


Fig. 5-3 Macroscopic instability surface: A\_B00.E1.001

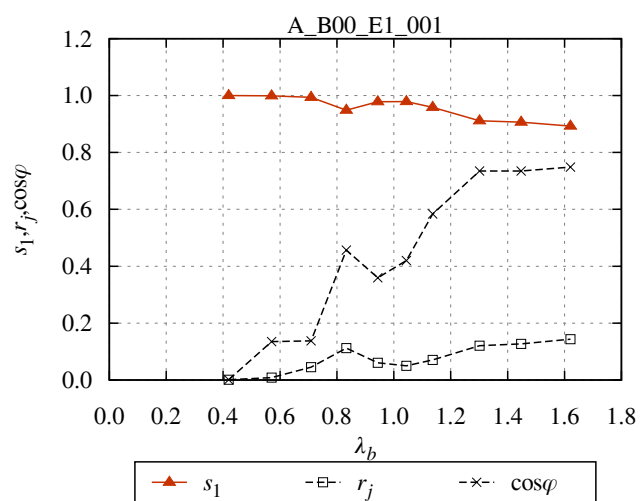


Fig. 5-4  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_B00.E1.001

初期たわみ量=1/10000 (B00\_E1\_001)、片曲げ

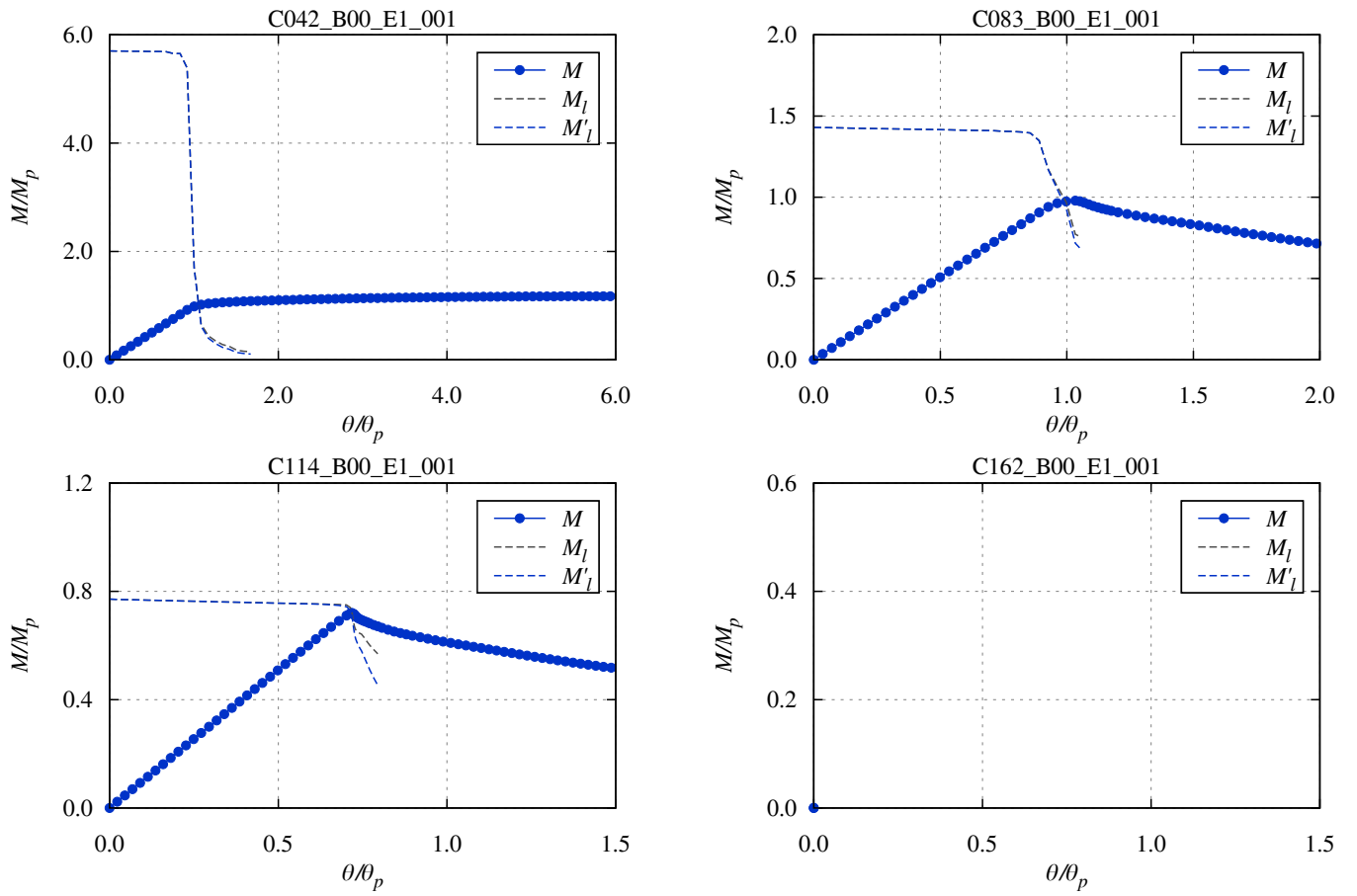


Fig. 5-5 Load-deformation curve: C.B00.E1.001

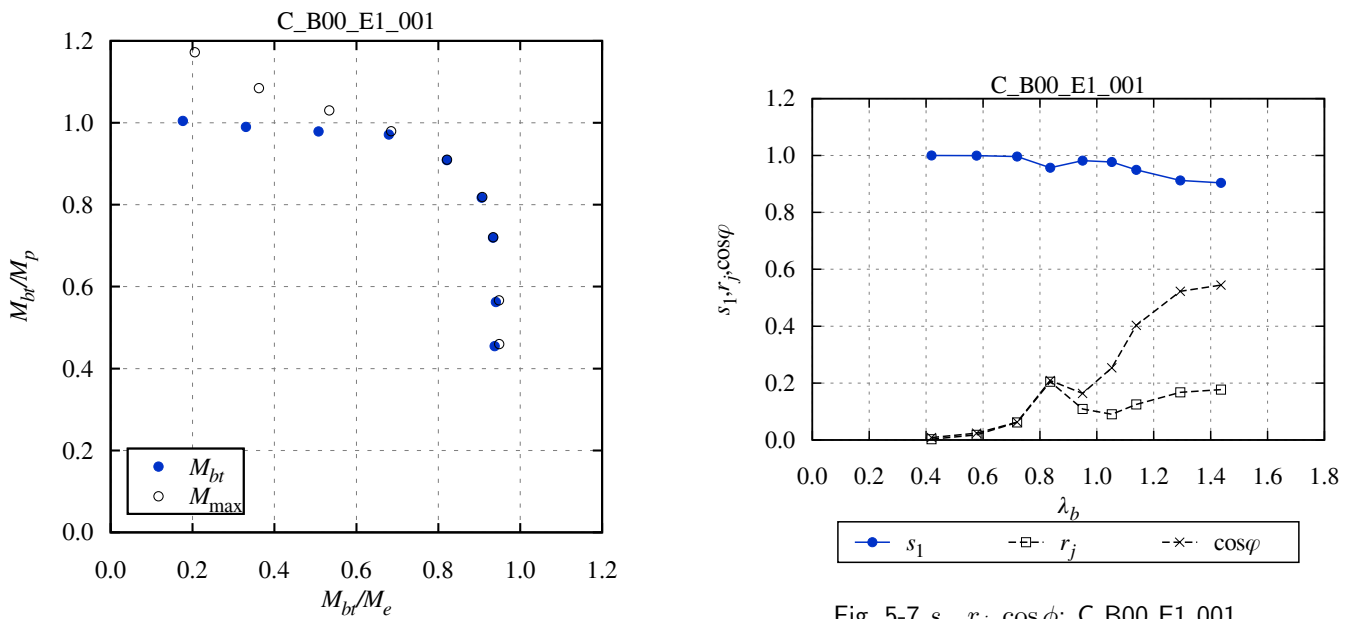


Fig. 5-7  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C.B00.E1.001

Fig. 5-6 Macroscopic instability surface: C.B00.E1.001

初期たわみ量=1/10000 (B00\_E1\_001)、一様曲げ

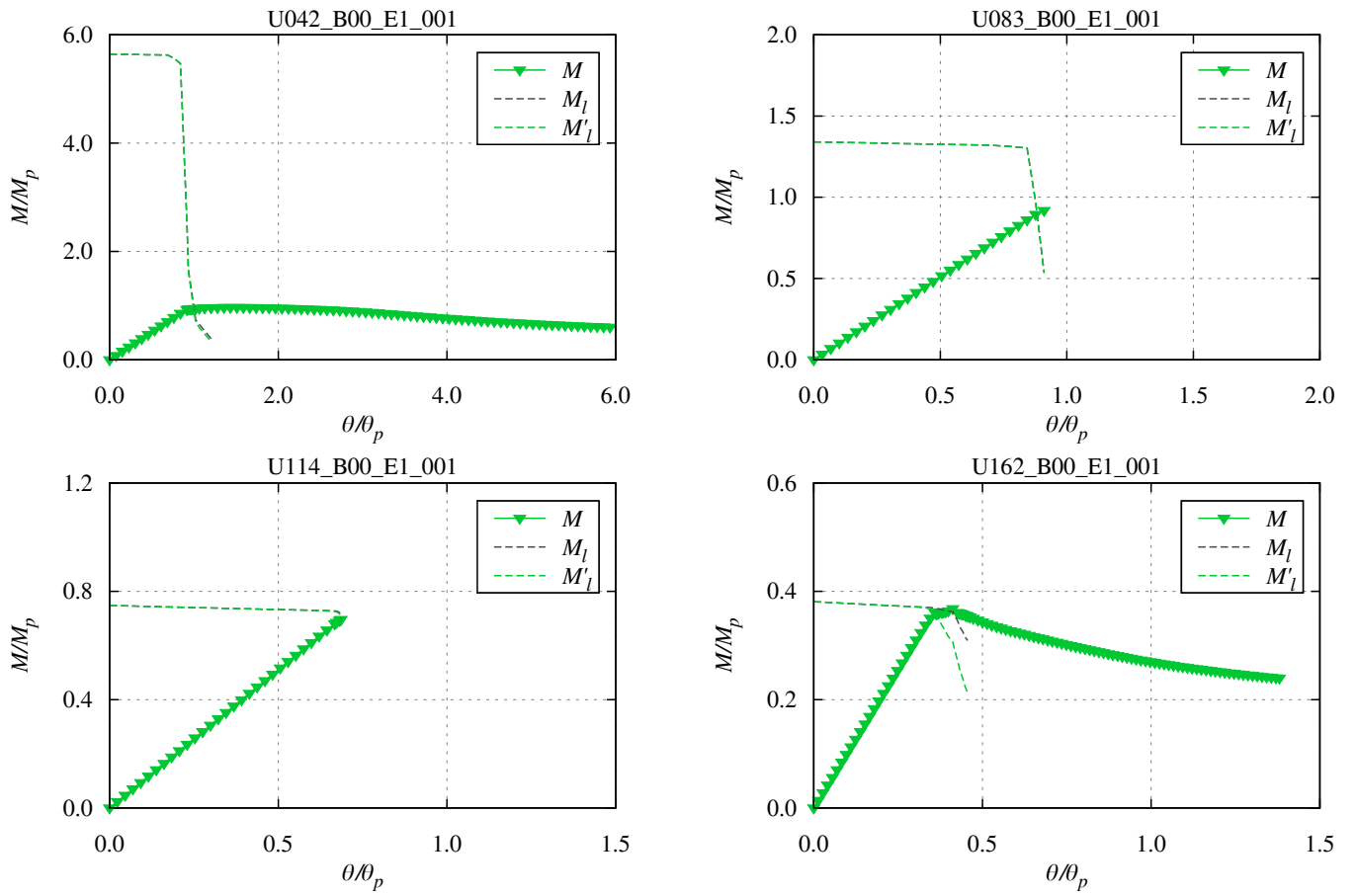


Fig. 5-8 Load-deformation curve: U\_B00\_E1\_001

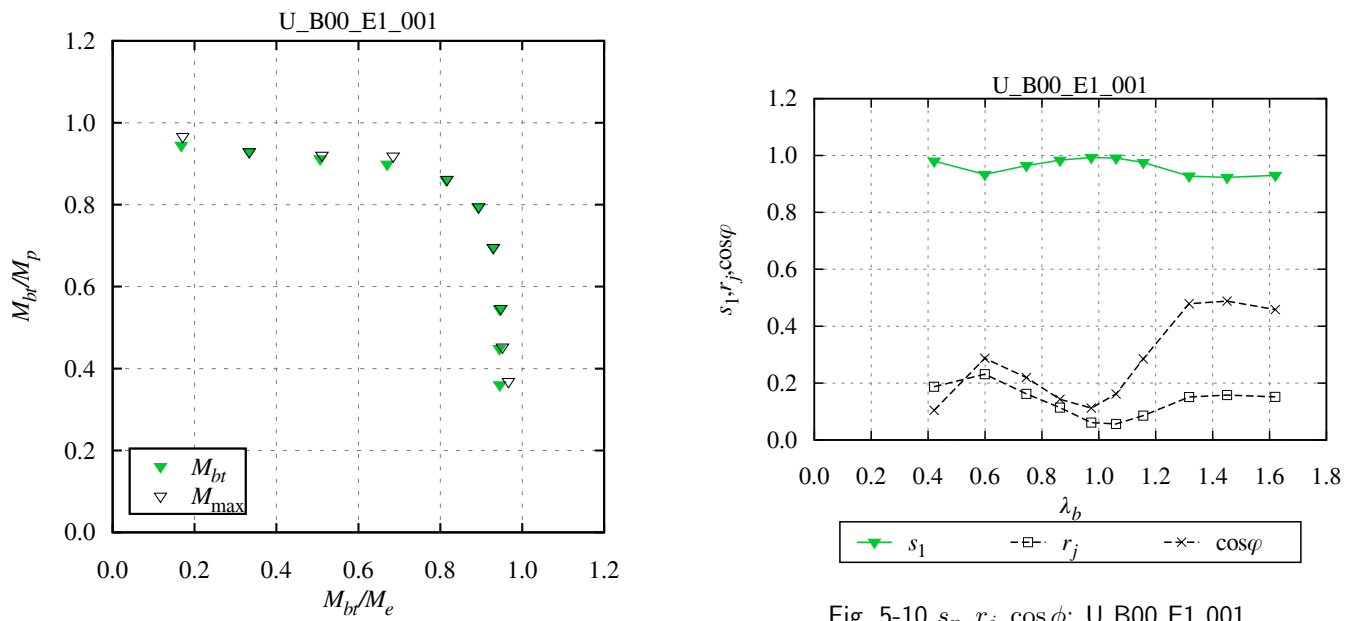


Fig. 5-10  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B00\_E1\_001

Fig. 5-9 Macroscopic instability surface: U\_B00\_E1\_001

初期たわみ量=1/2000 (B00\_E1\_005)、逆対称曲げ

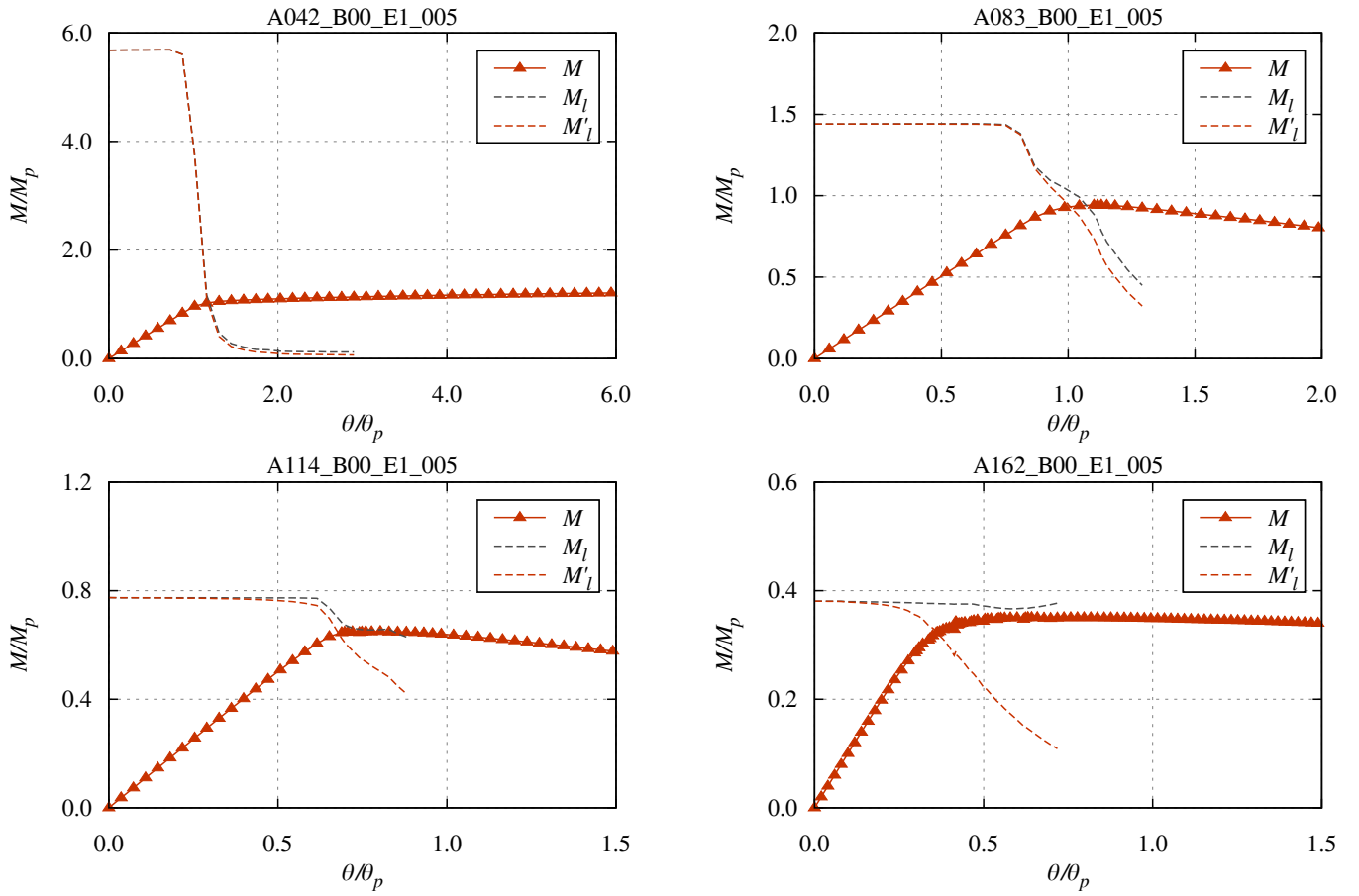


Fig. 5-11 Load-deformation curve: A\_B00.E1\_005

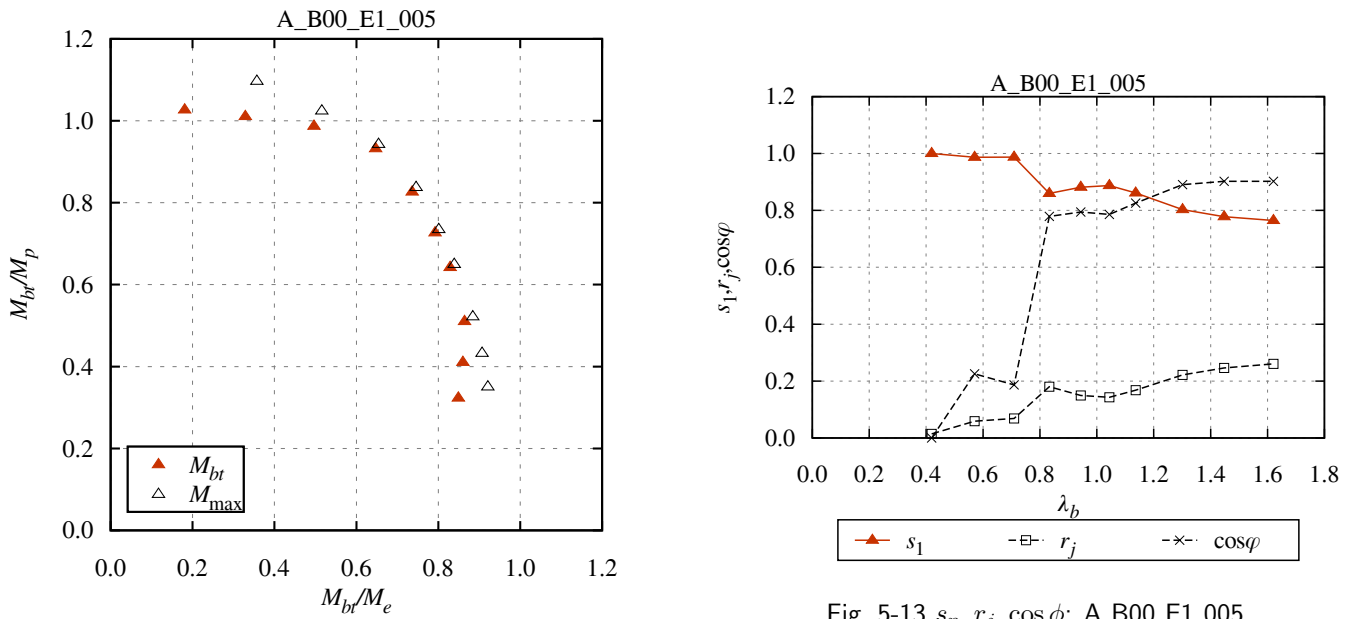


Fig. 5-13  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_B00.E1\_005

Fig. 5-12 Macroscopic instability surface: A\_B00.E1\_005

初期たわみ量=1/2000 (B00\_E1\_005)、片曲げ

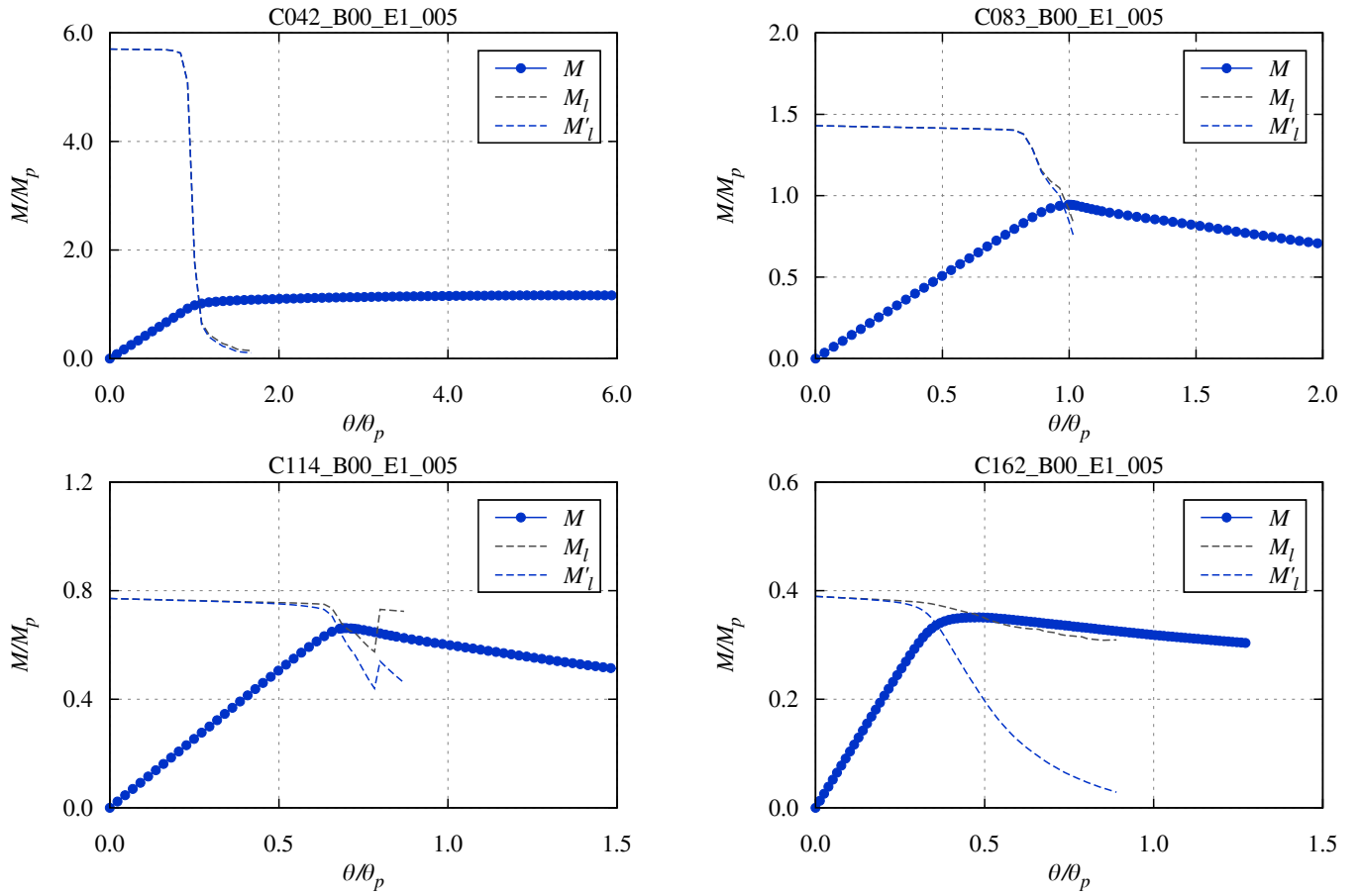


Fig. 5-14 Load-deformation curve: C\_B00.E1\_005

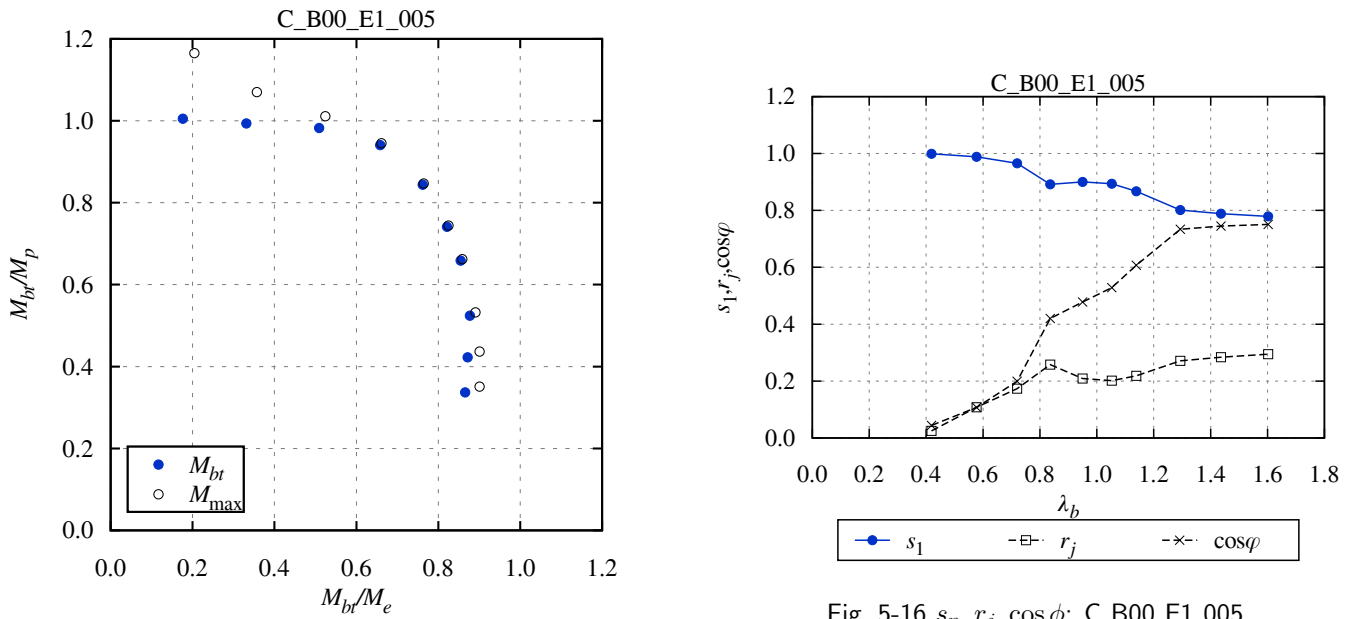


Fig. 5-16  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_B00.E1\_005

Fig. 5-15 Macroscopic instability surface: C\_B00.E1\_005



初期たわみ量=1/2000 (B00\_E1\_005)、一様曲げ

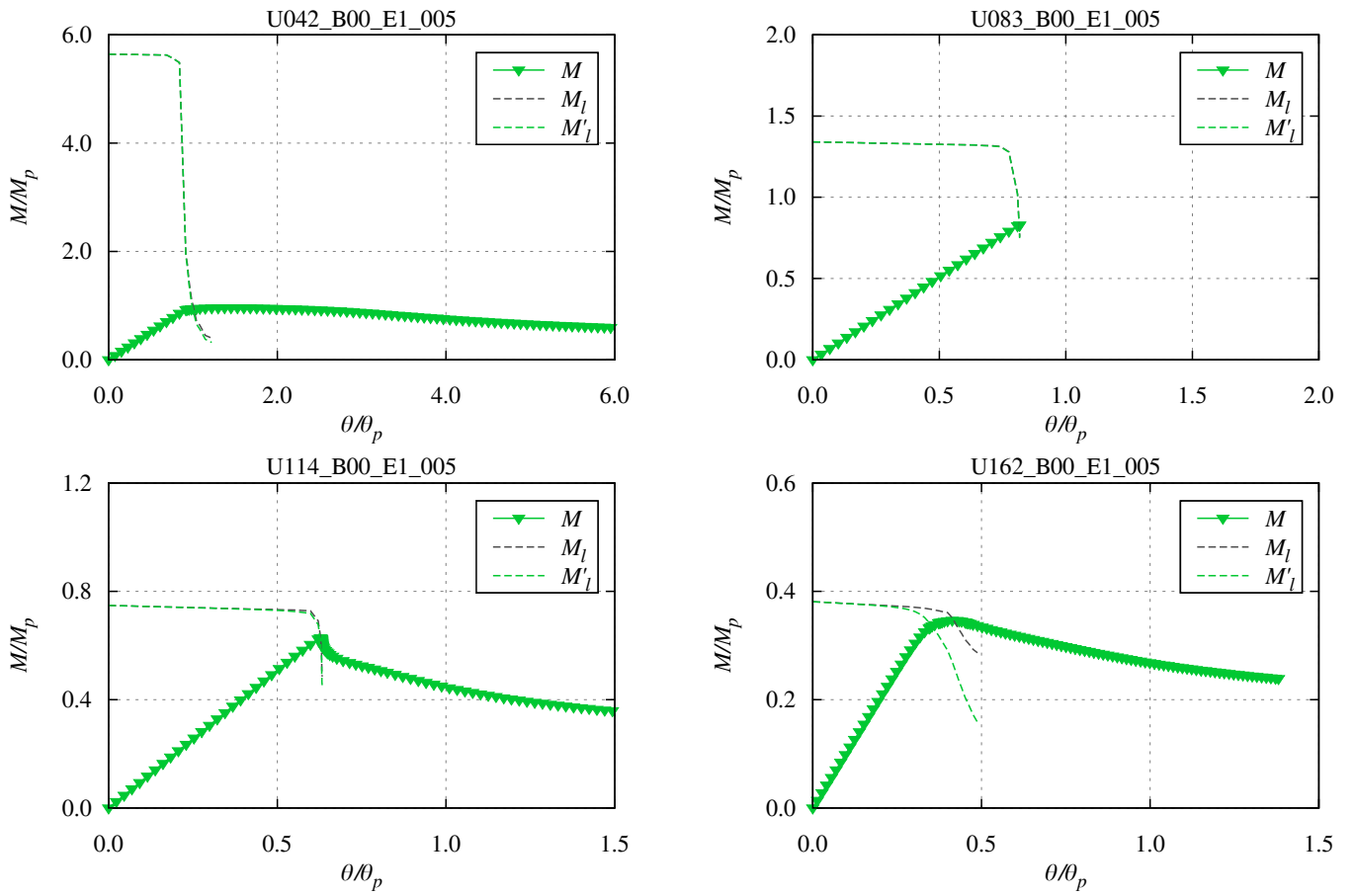


Fig. 5-17 Load-deformation curve: U\_B00.E1\_005

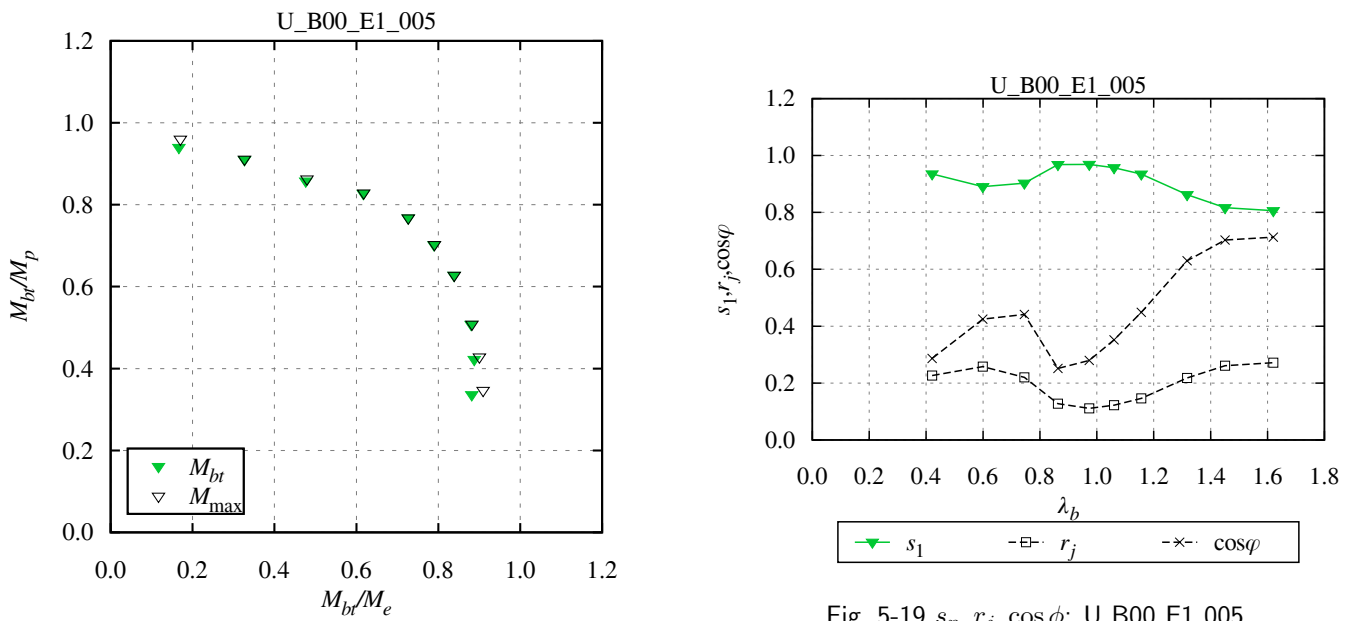


Fig. 5-19  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B00.E1\_005

Fig. 5-18 Macroscopic instability surface: U\_B00.E1\_005

初期たわみ量=1/1000 (B00\_E1\_010)、逆対称曲げ

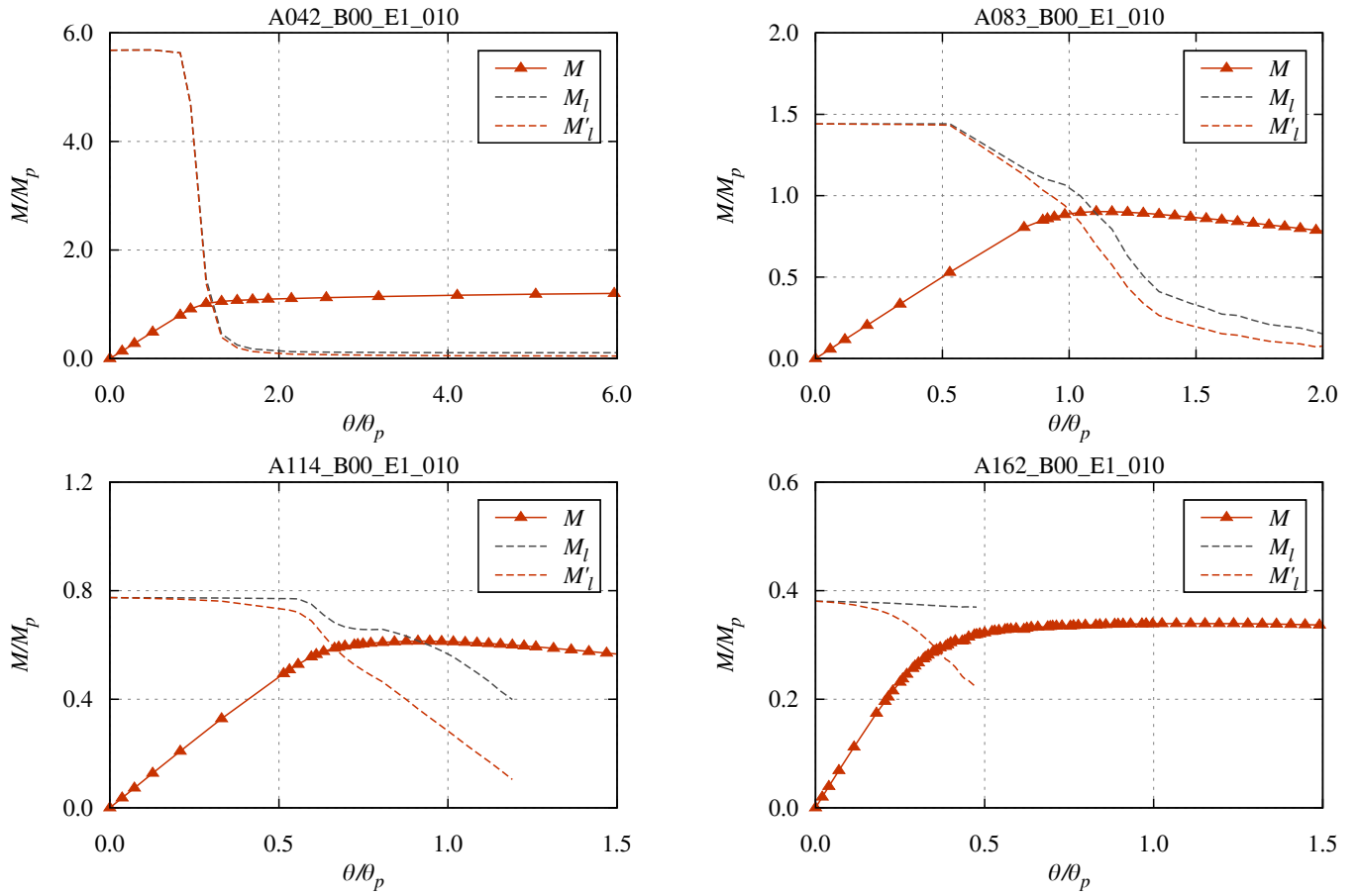


Fig. 5-20 Load-deformation curve: A\_B00.E1\_010

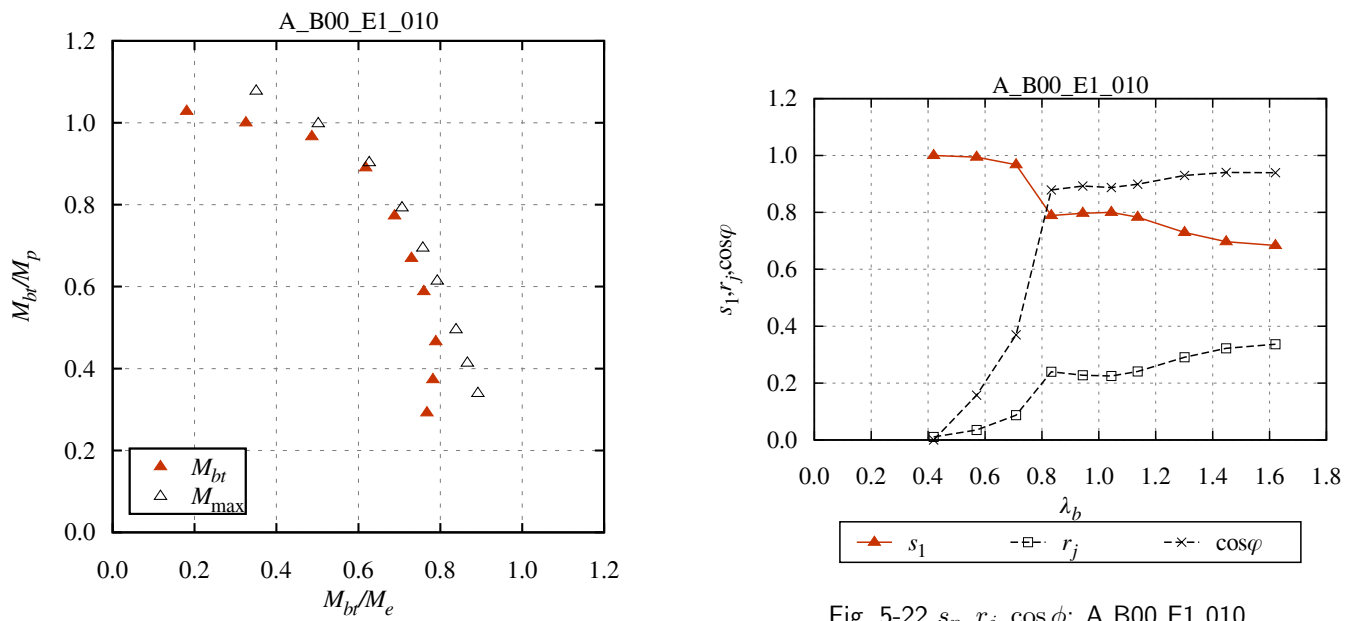


Fig. 5-21 Macroscopic instability surface: A\_B00.E1\_010

Fig. 5-22  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_B00.E1\_010

初期たわみ量=1/1000 (B00\_E1\_010)、片曲げ

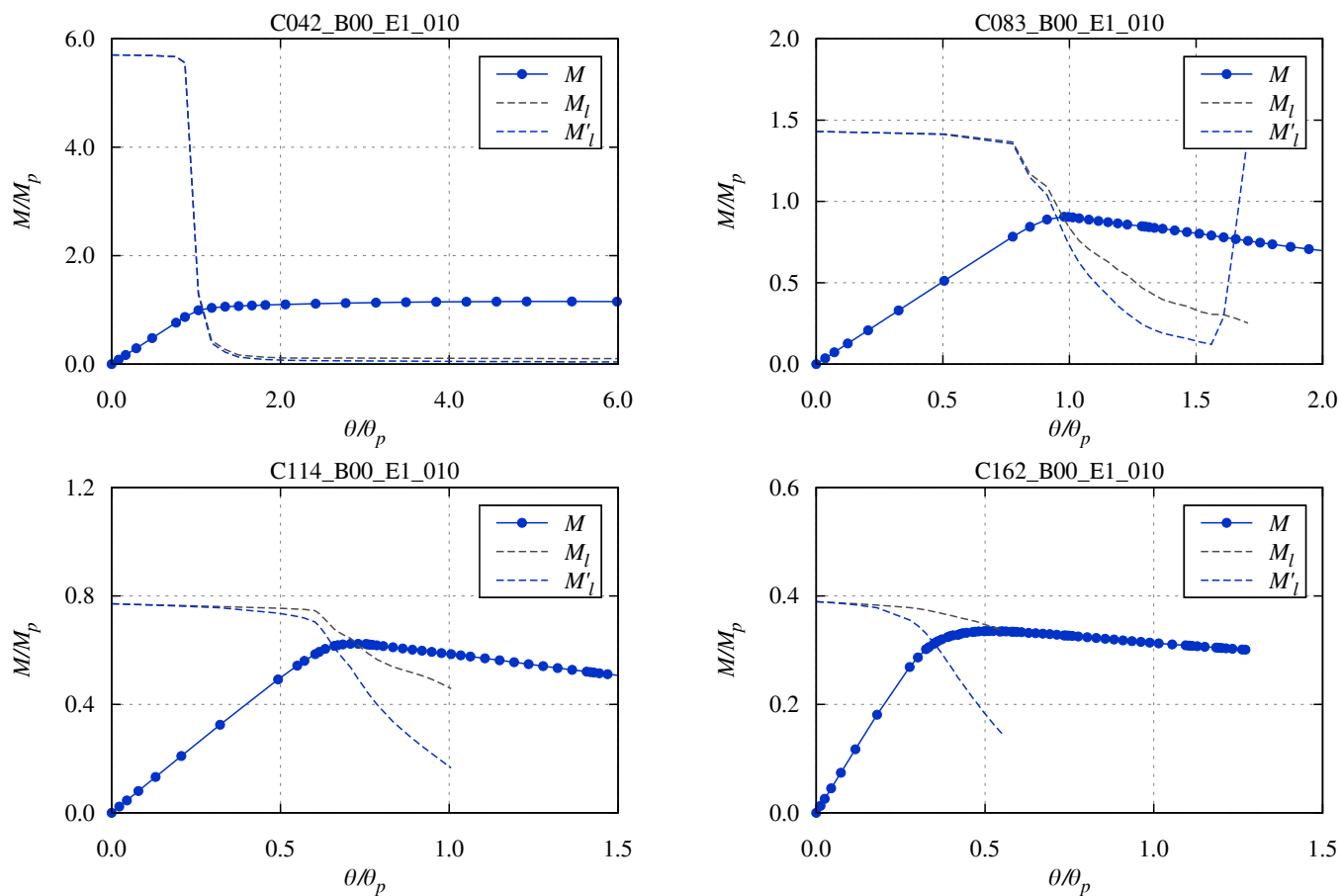


Fig. 5-23 Load-deformation curve: C\_B00.E1.010

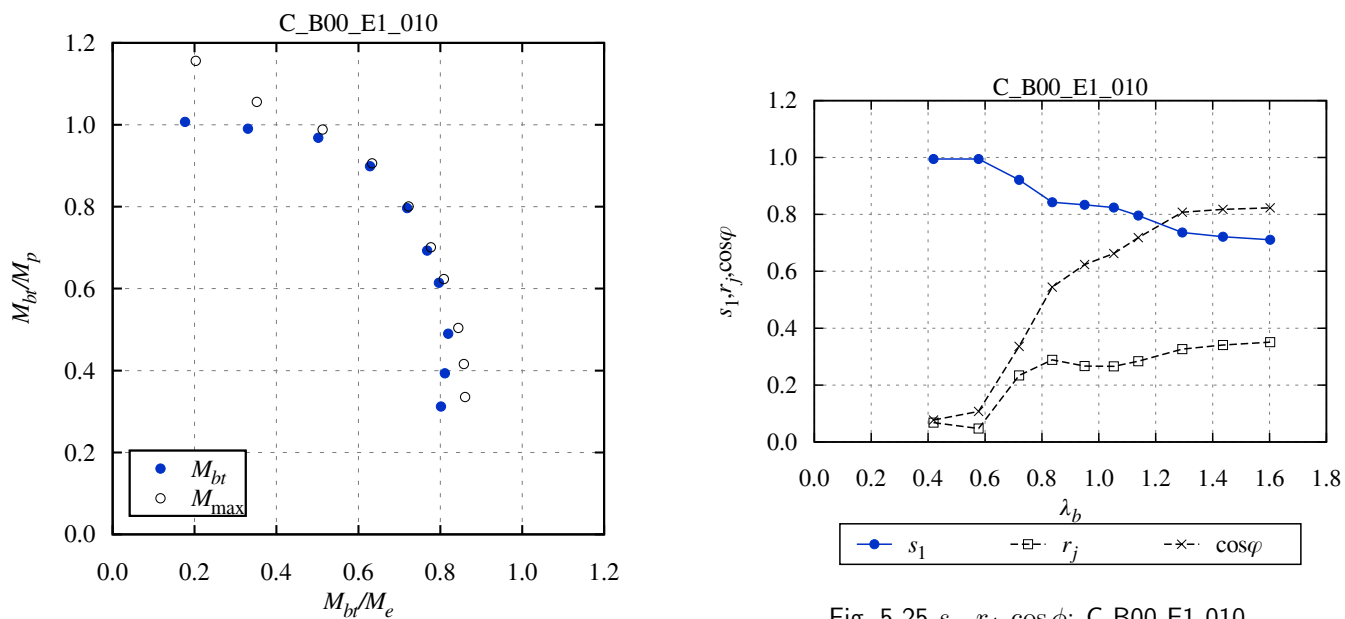


Fig. 5-24 Macroscopic instability surface: C\_B00.E1.010

Fig. 5-25  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_B00.E1.010

初期たわみ量=1/1000 (B00\_E1\_010)、一様曲げ

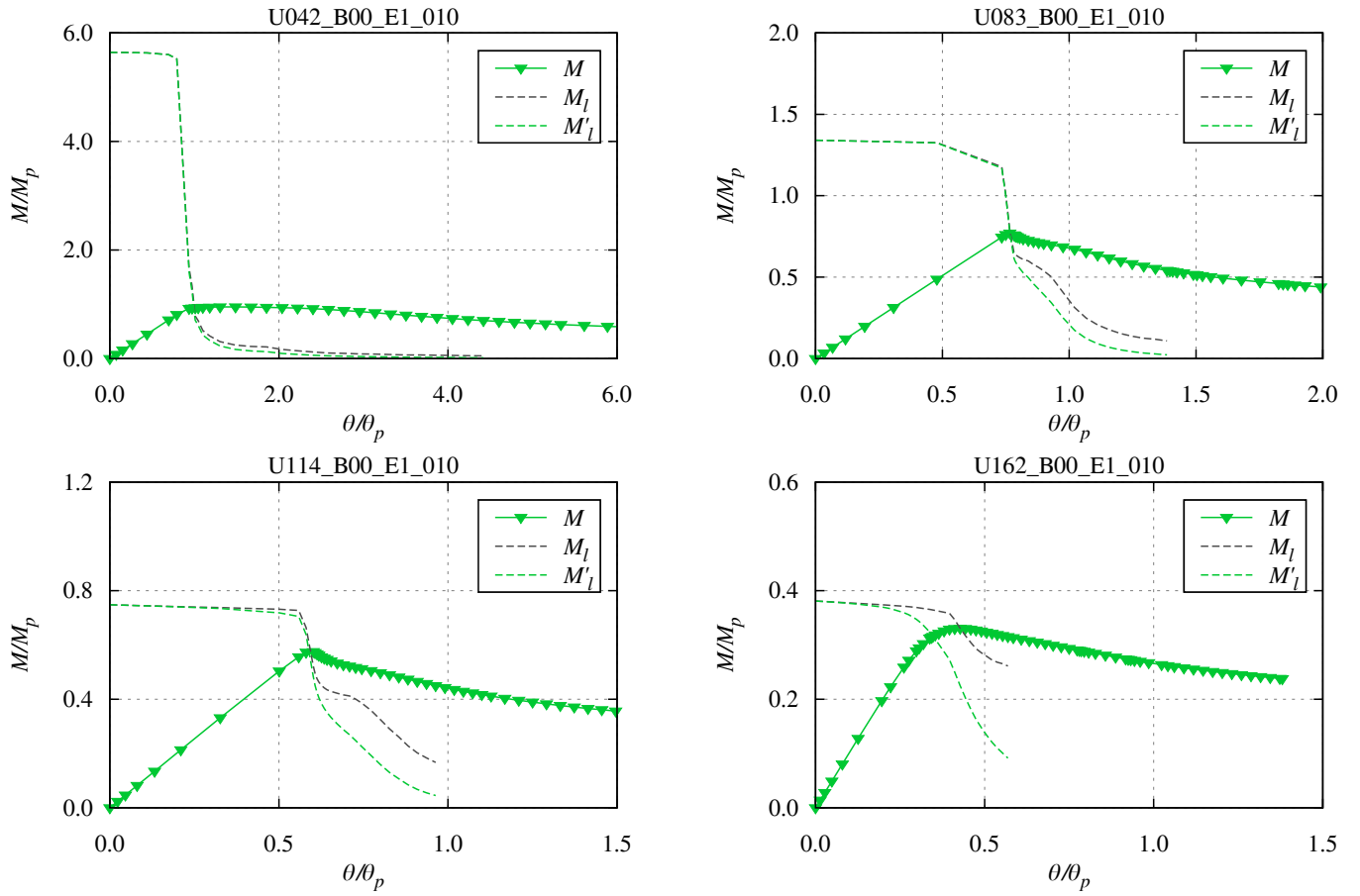


Fig. 5-26 Load-deformation curve: U\_B00.E1\_010

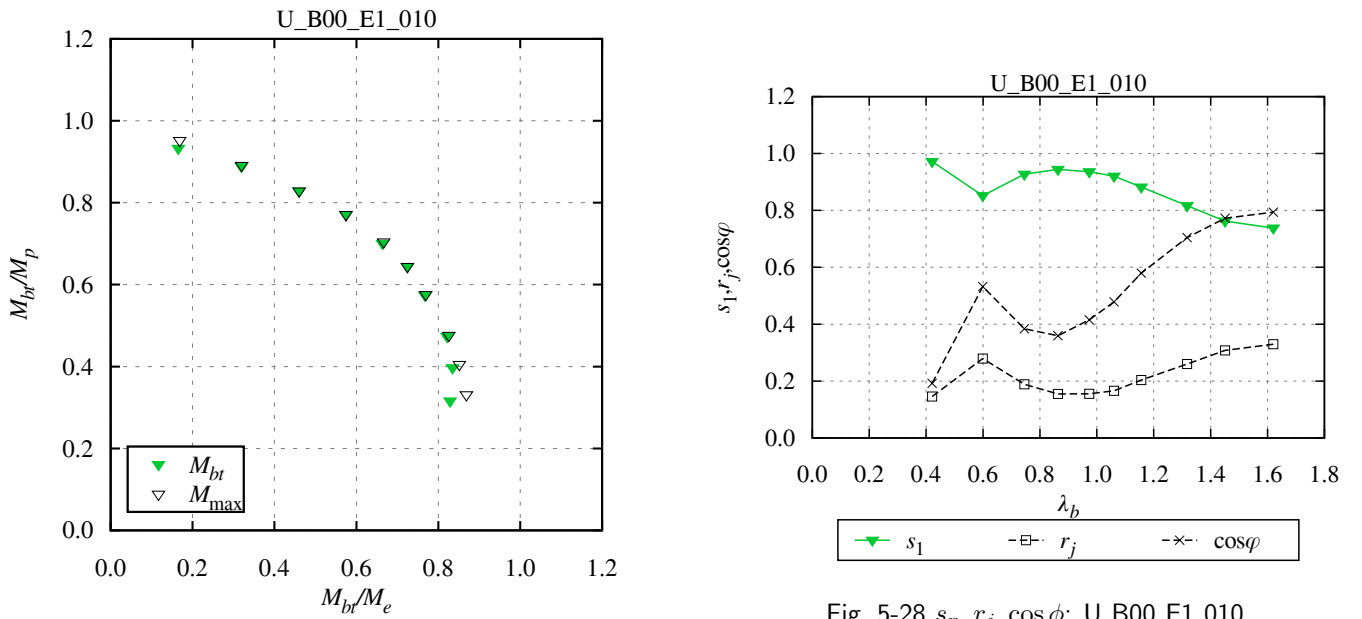


Fig. 5-28  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B00.E1\_010

Fig. 5-27 Macroscopic instability surface: U\_B00.E1\_010

初期たわみ量=1/500 (B00\_E1\_020)、逆対称曲げ

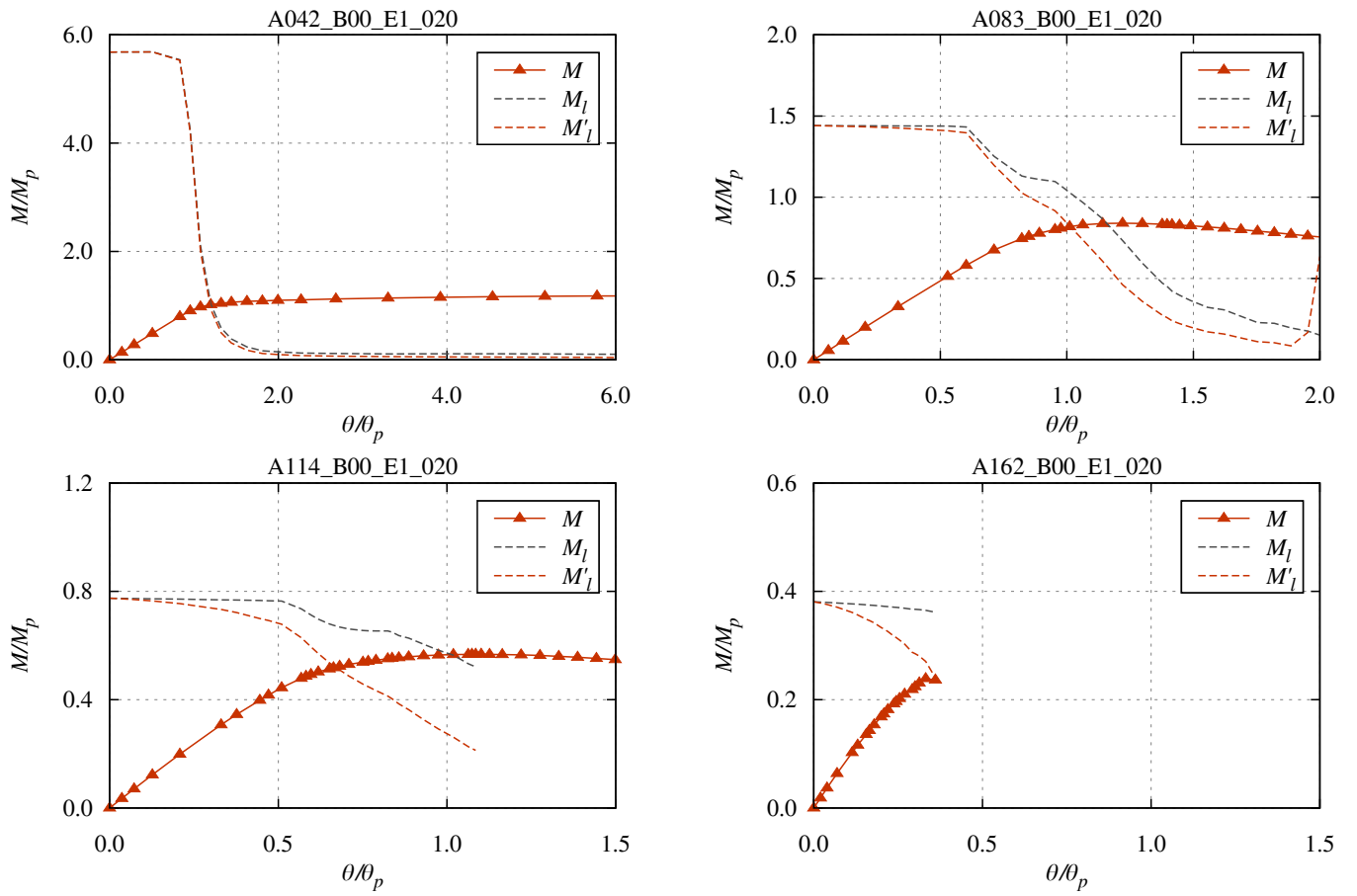


Fig. 5-29 Load-deformation curve: A\_B00.E1\_020

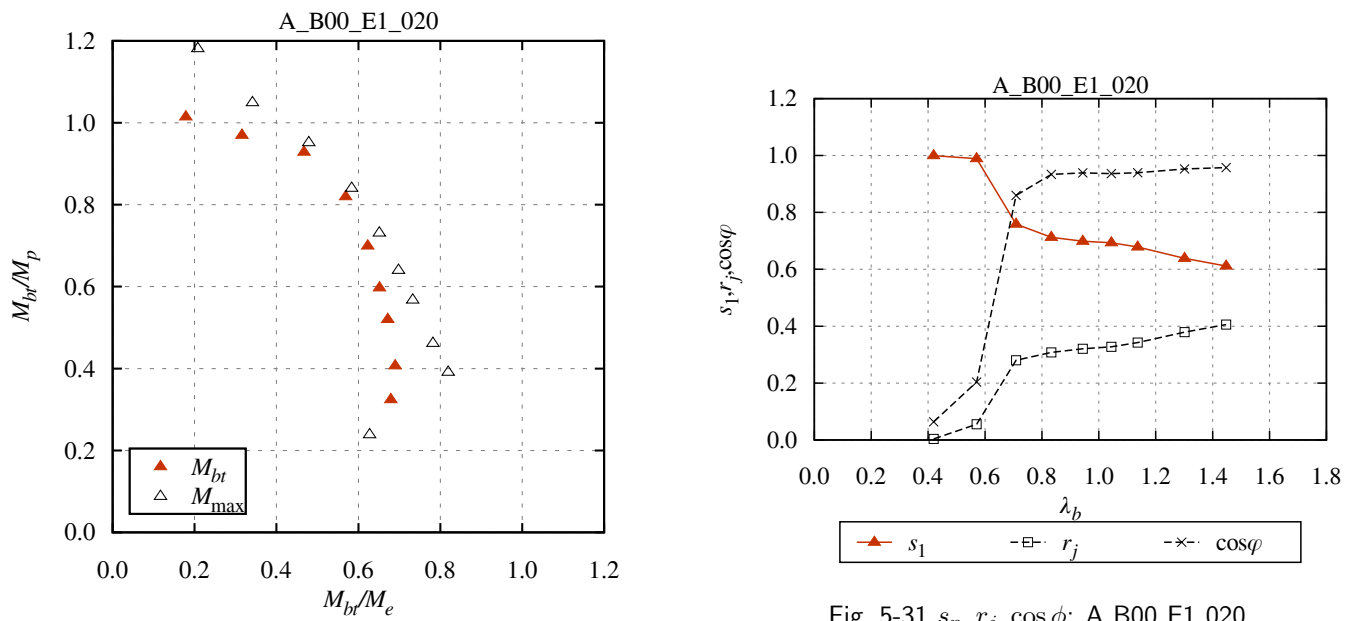


Fig. 5-31  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_B00.E1\_020

Fig. 5-30 Macroscopic instability surface: A\_B00.E1\_020

初期たわみ量=1/500 (B00\_E1\_020)、片曲げ

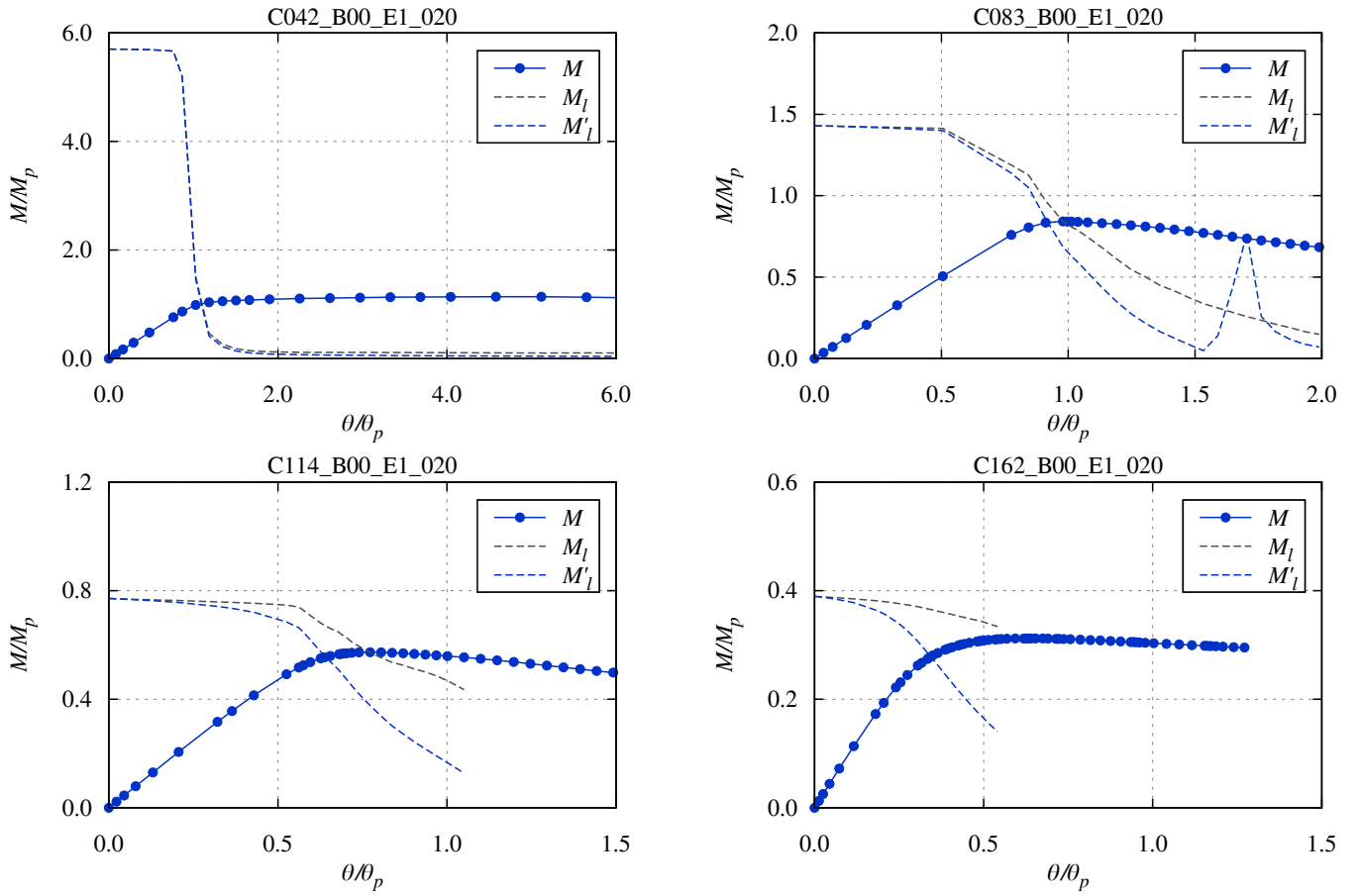


Fig. 5-32 Load-deformation curve: C\_B00.E1\_020

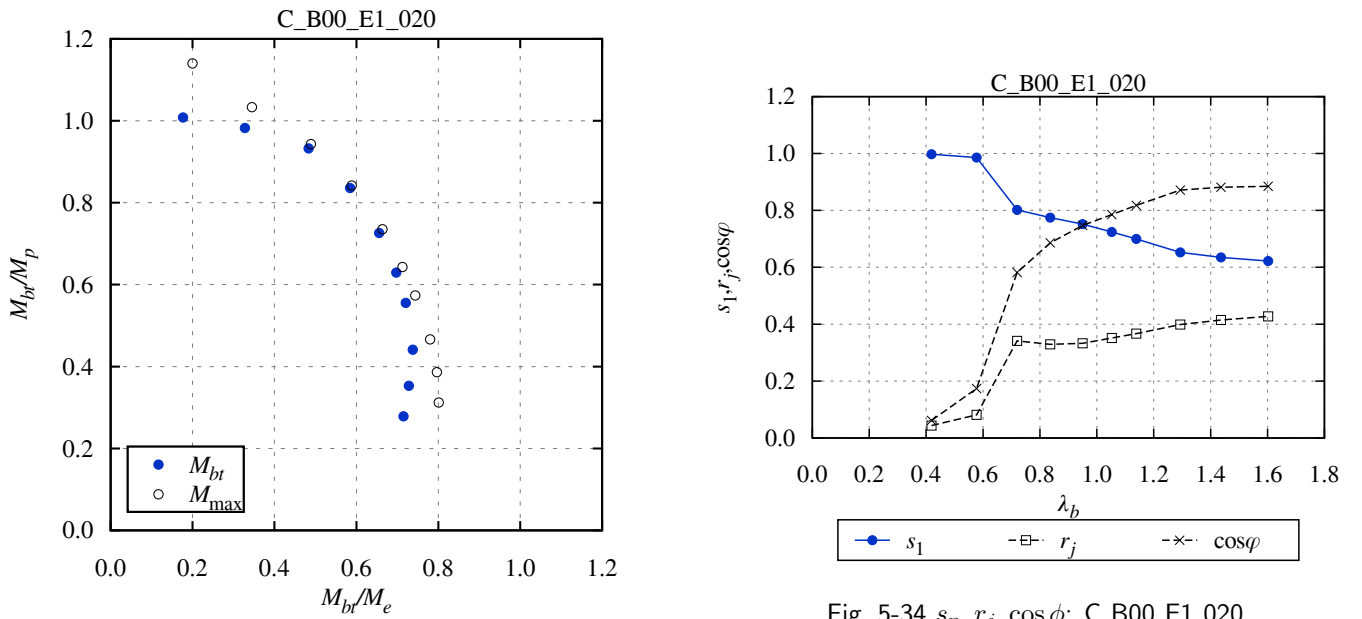


Fig. 5-34  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_B00.E1\_020

Fig. 5-33 Macroscopic instability surface: C\_B00.E1\_020

初期たわみ量=1/500 (B00\_E1\_020)、一様曲げ

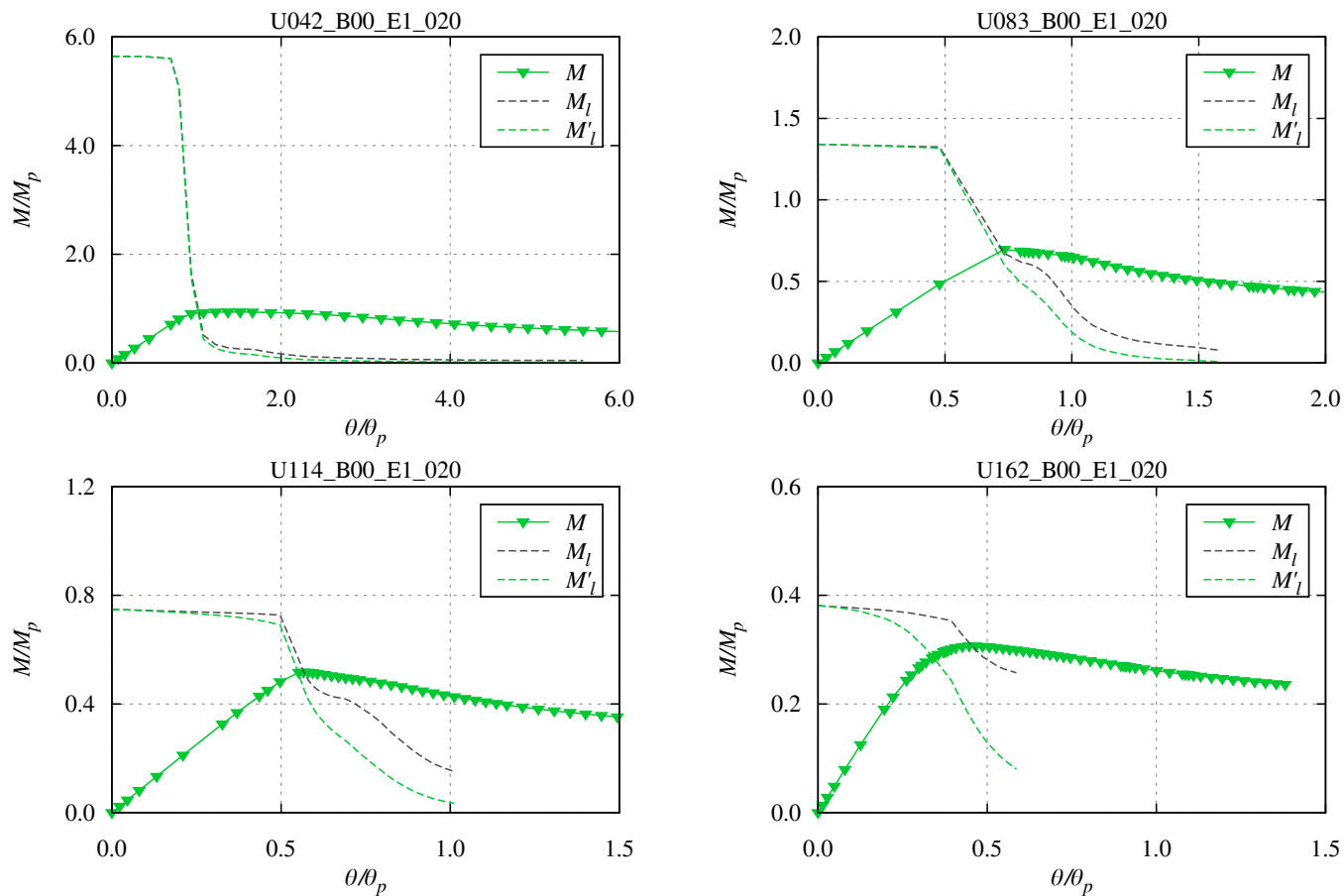


Fig. 5-35 Load-deformation curve: U\_B00.E1\_020

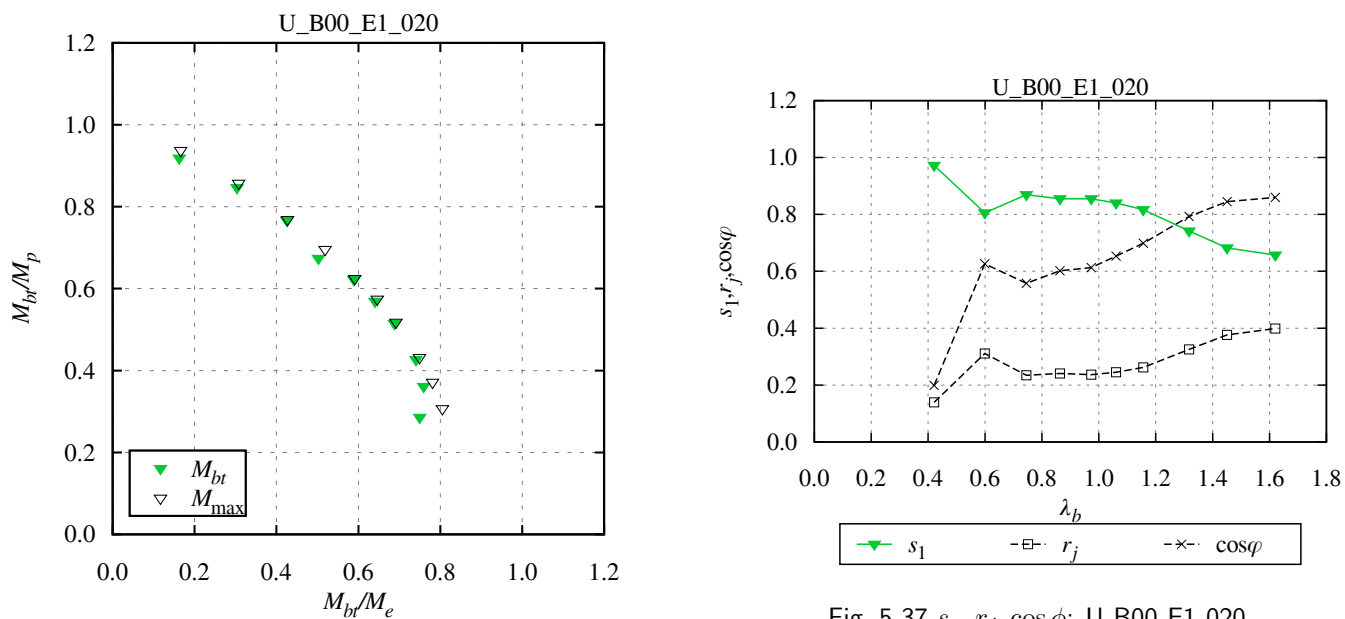


Fig. 5-36 Macroscopic instability surface: U\_B00.E1\_020

Fig. 5-37  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B00.E1\_020

### 5.5.2 バイリニアモデル、残留応力なし、弾性二次座屈モード形状 (B00.E2)

初期たわみ量=1/2000 (B00.E2.005)、逆対称曲げ

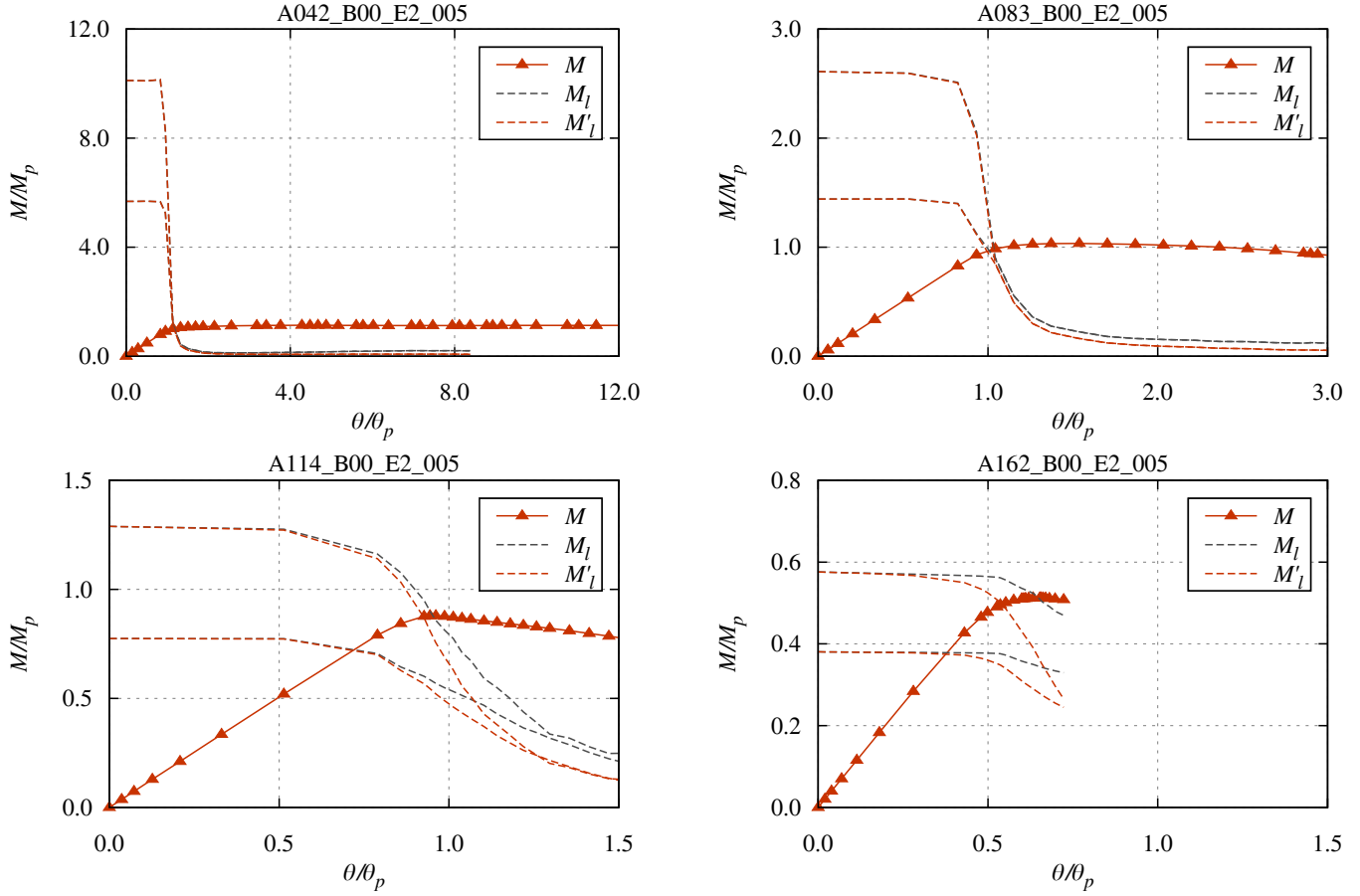


Fig. 5-38 Load-deformation curve: A\_B00.E2.005

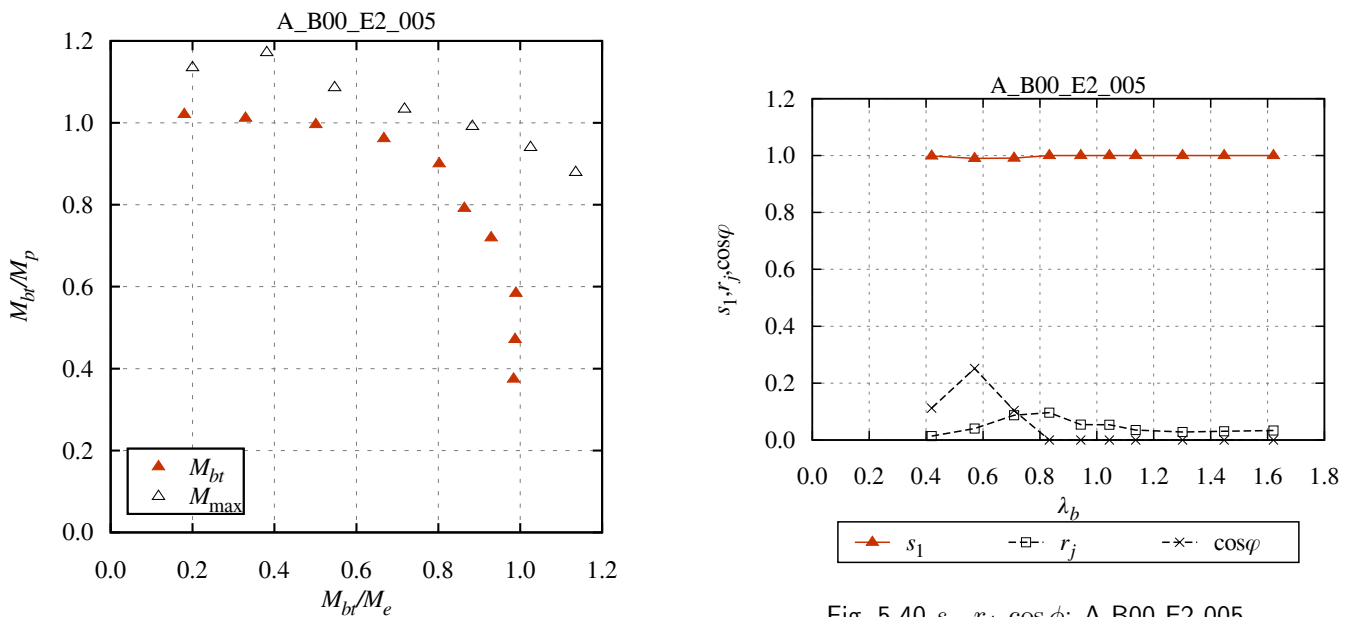


Fig. 5-39 Macroscopic instability surface: A\_B00.E2.005

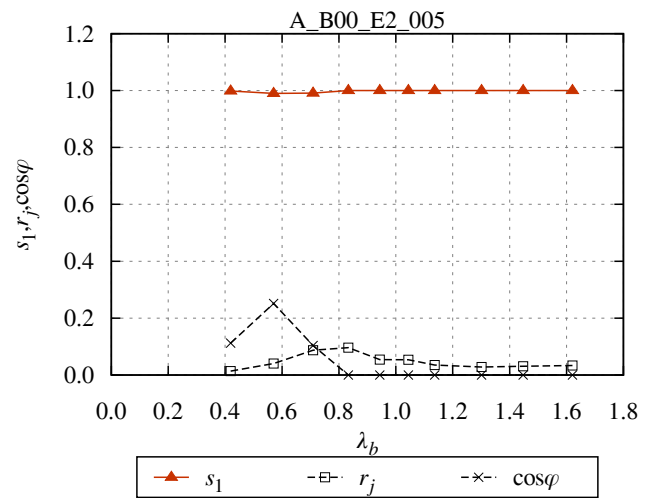


Fig. 5-40  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_B00.E2.005



初期たわみ量=1/2000 (B00\_E2\_005)、片曲げ

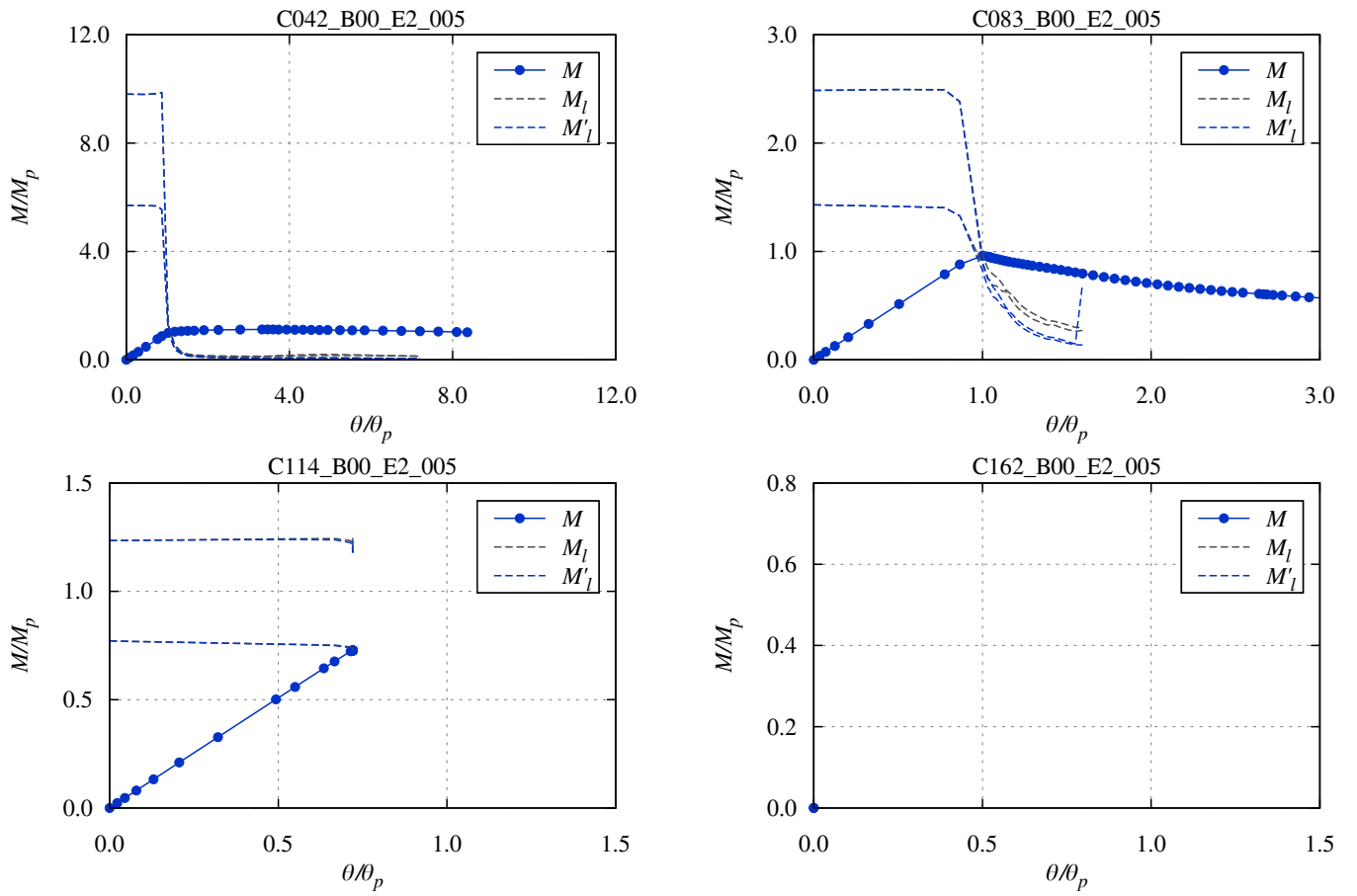


Fig. 5-41 Load-deformation curve: C\_B00.E2\_005

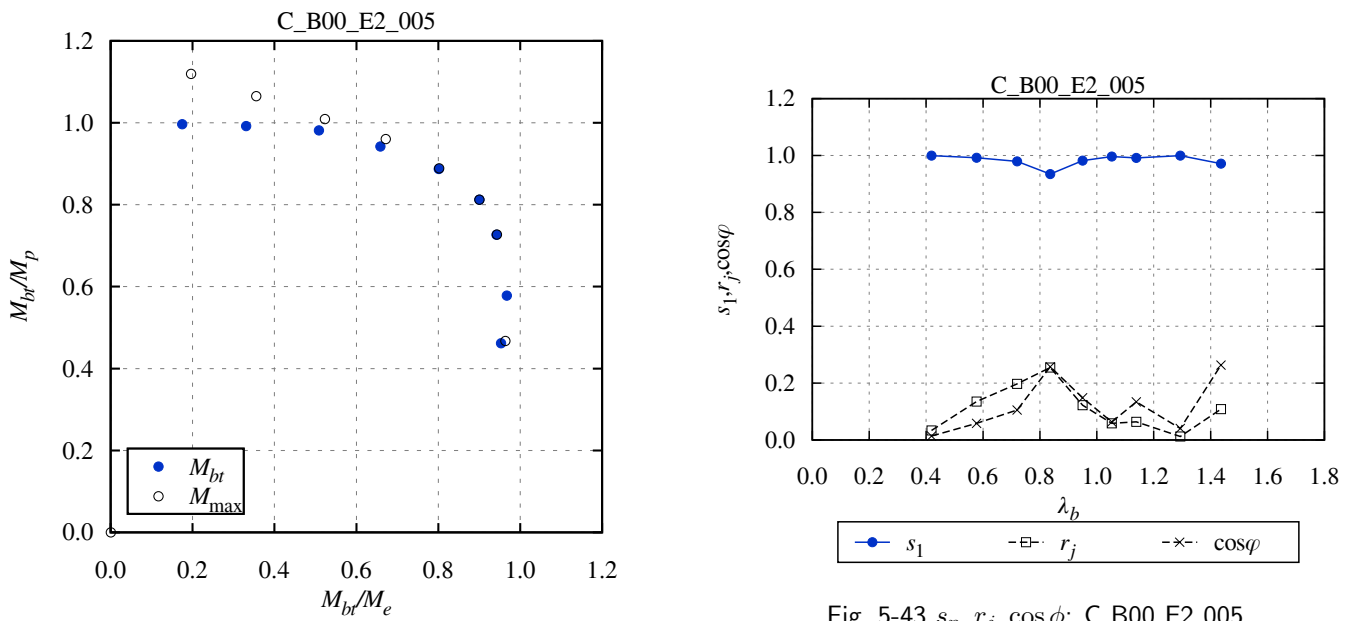


Fig. 5-42 Macroscopic instability surface: C\_B00.E2\_005

Fig. 5-43  $s_n, r_j, \cos\phi$ : C\_B00.E2\_005

初期たわみ量=1/2000 (B00\_E2\_005)、一様曲げ

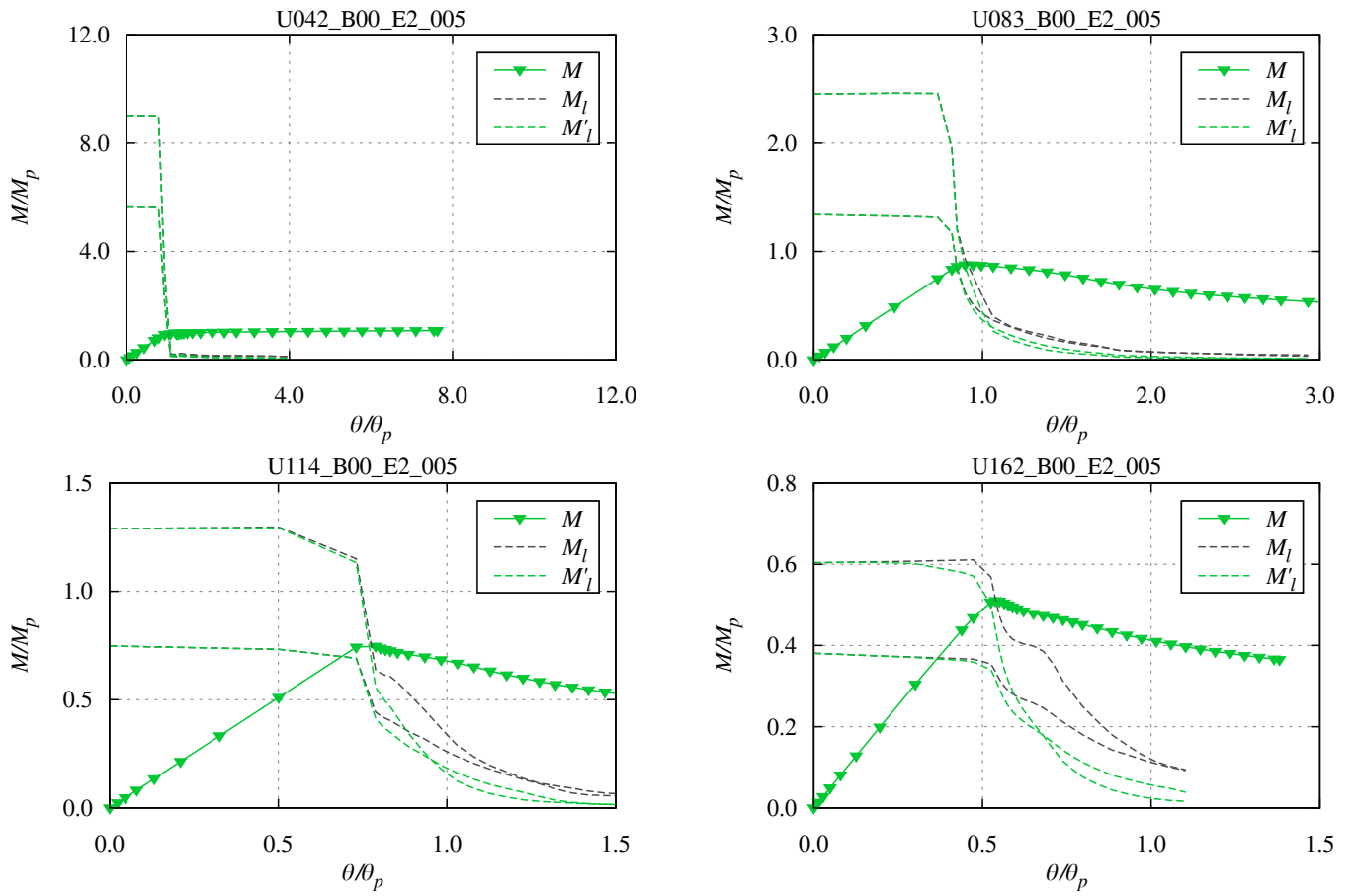


Fig. 5-44 Load-deformation curve: U\_B00.E2\_005

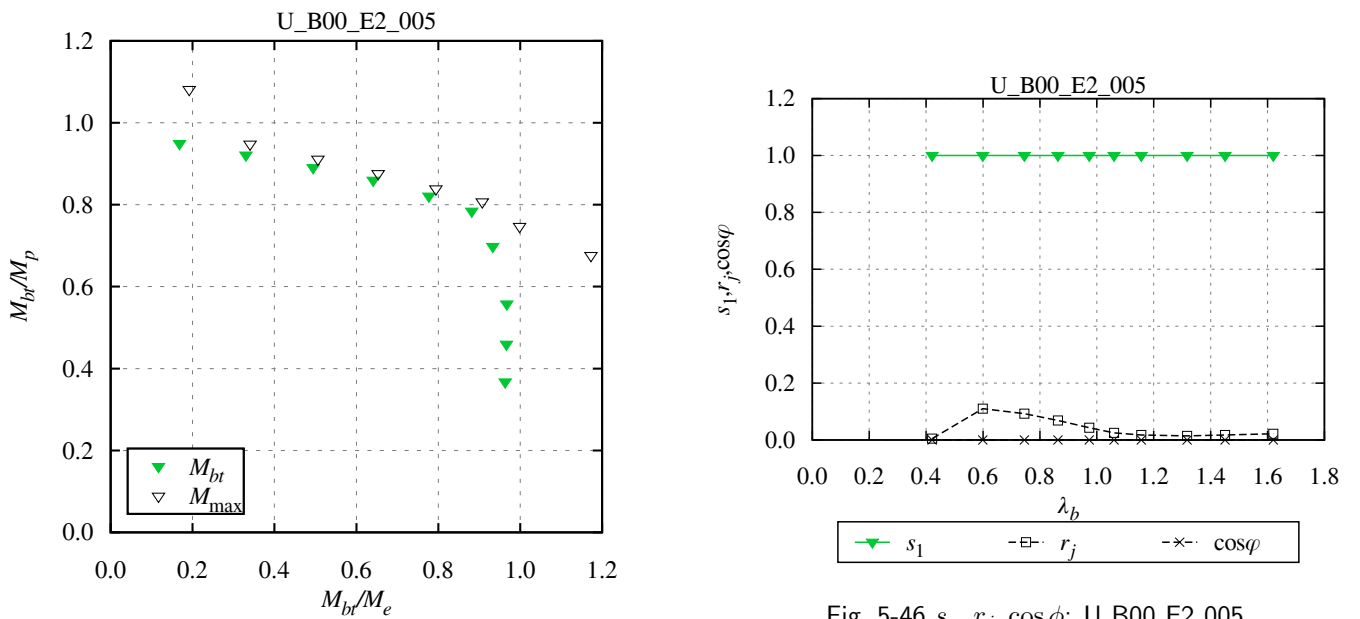


Fig. 5-45 Macroscopic instability surface: U\_B00.E2\_005

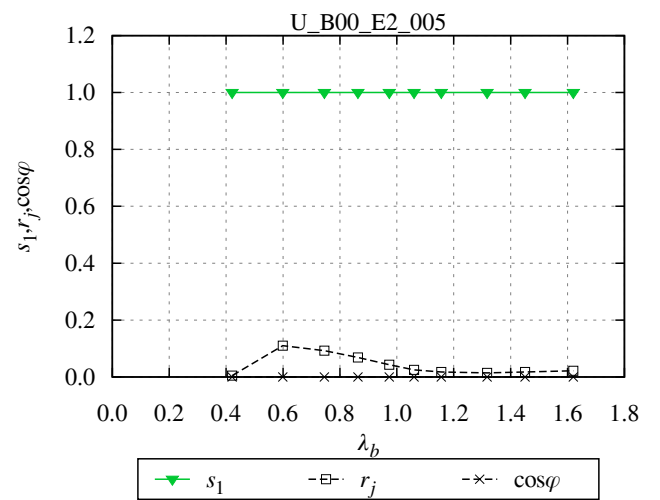


Fig. 5-46  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B00.E2\_005

初期たわみ量=1/1000 (B00\_E2\_010)、逆対称曲げ

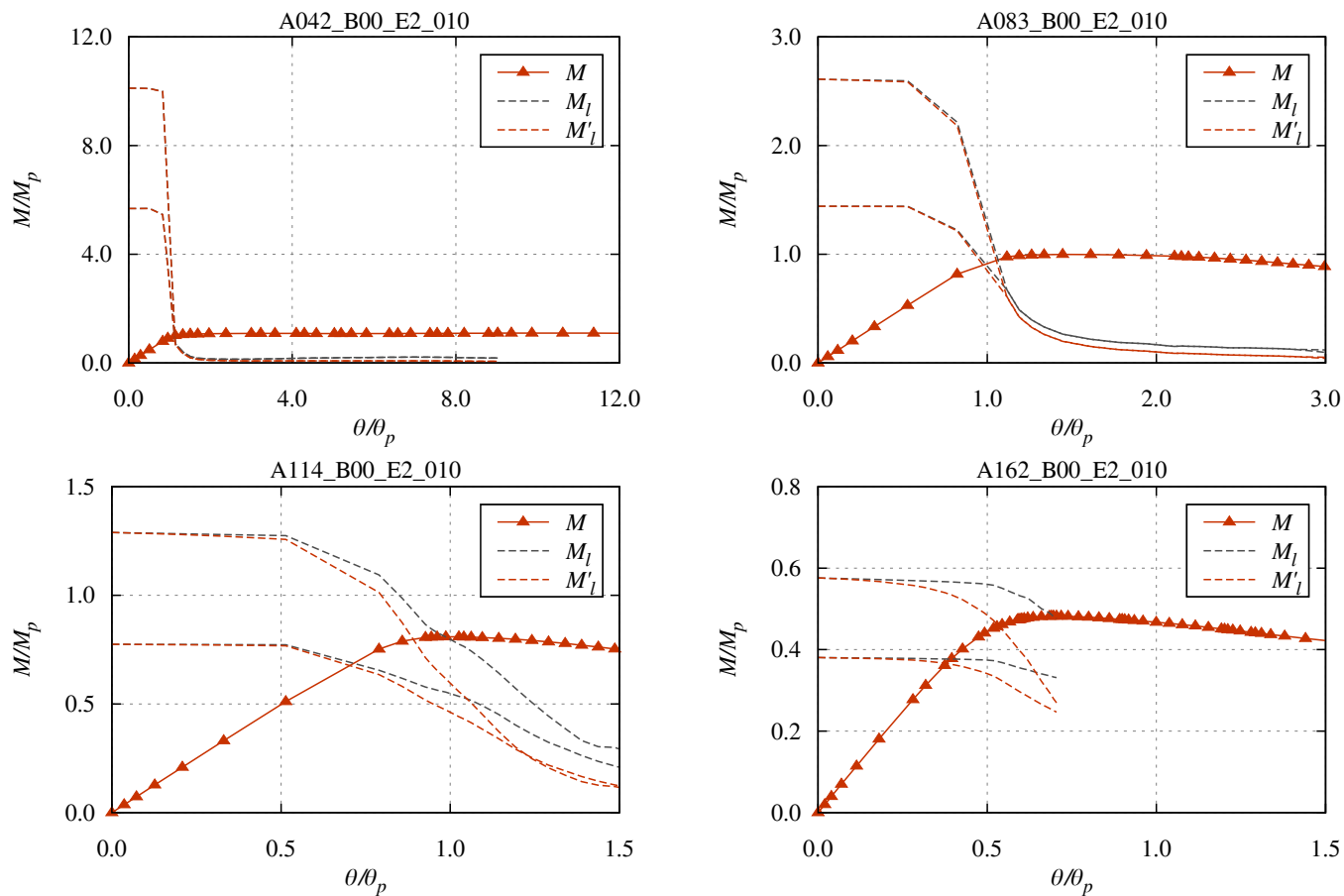


Fig. 5-47 Load-deformation curve: A\_B00.E2.010

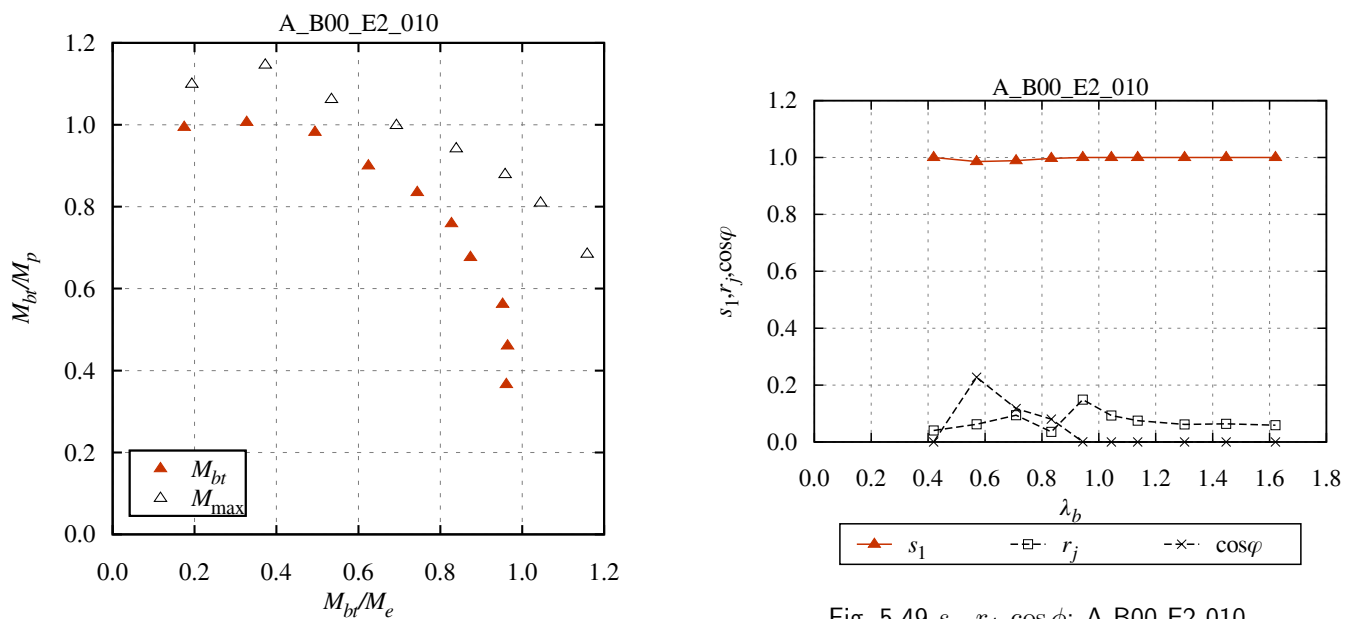


Fig. 5-49  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_B00.E2.010

Fig. 5-48 Macroscopic instability surface: A\_B00.E2.010

初期たわみ量=1/1000 (B00\_E2\_010)、片曲げ

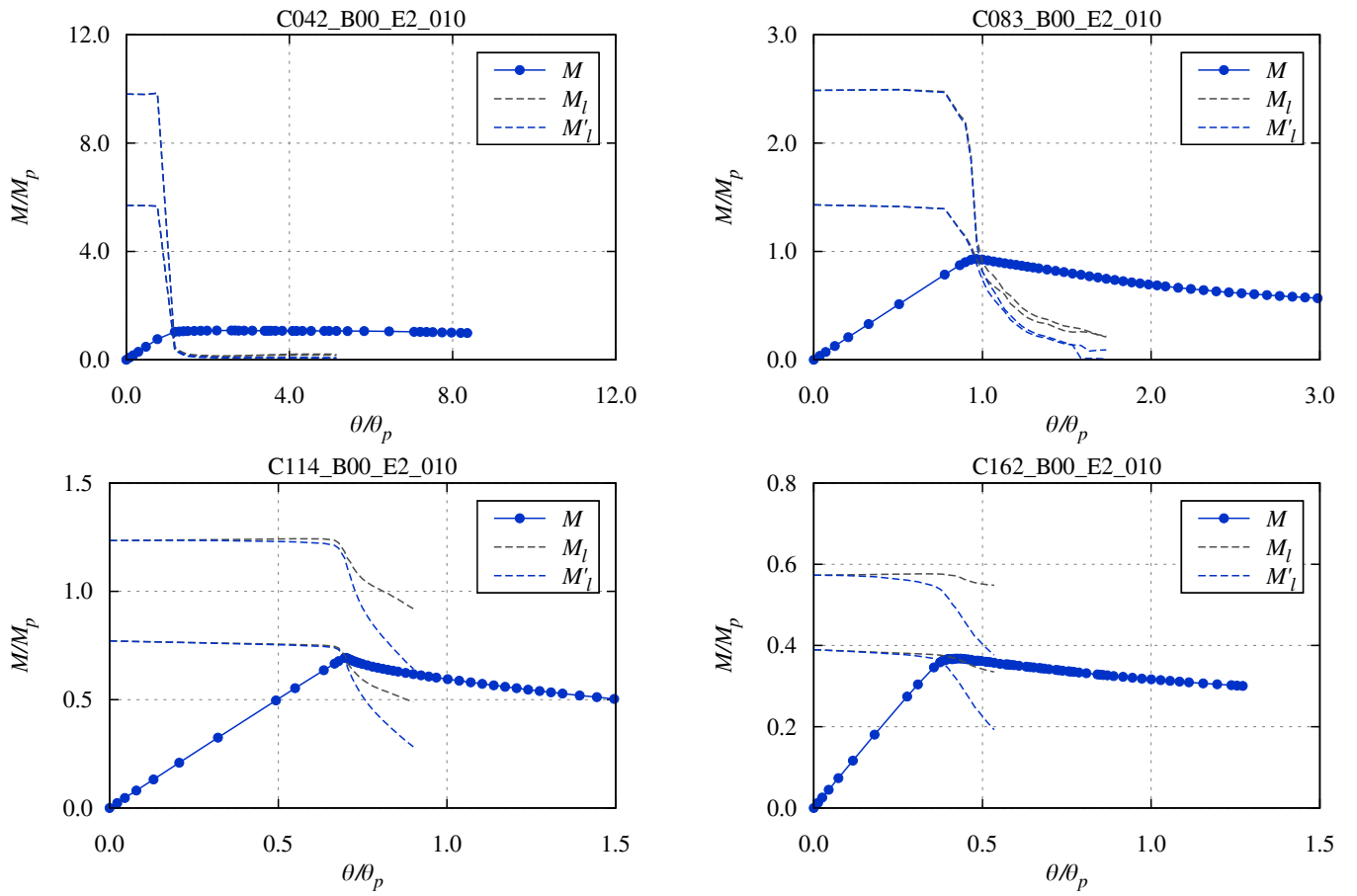


Fig. 5-50 Load-deformation curve: C\_B00.E2\_010

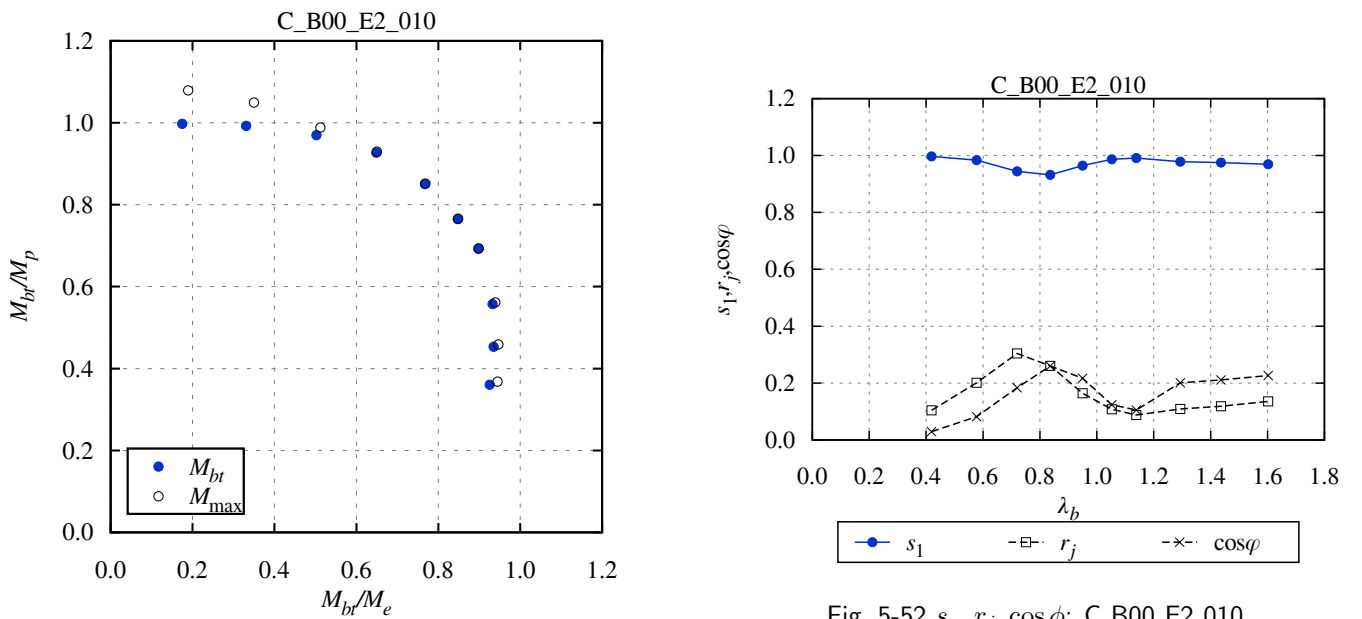


Fig. 5-51 Macroscopic instability surface: C\_B00.E2\_010

Fig. 5-52  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_B00.E2\_010

初期たわみ量=1/1000 (B00\_E2\_010)、一様曲げ

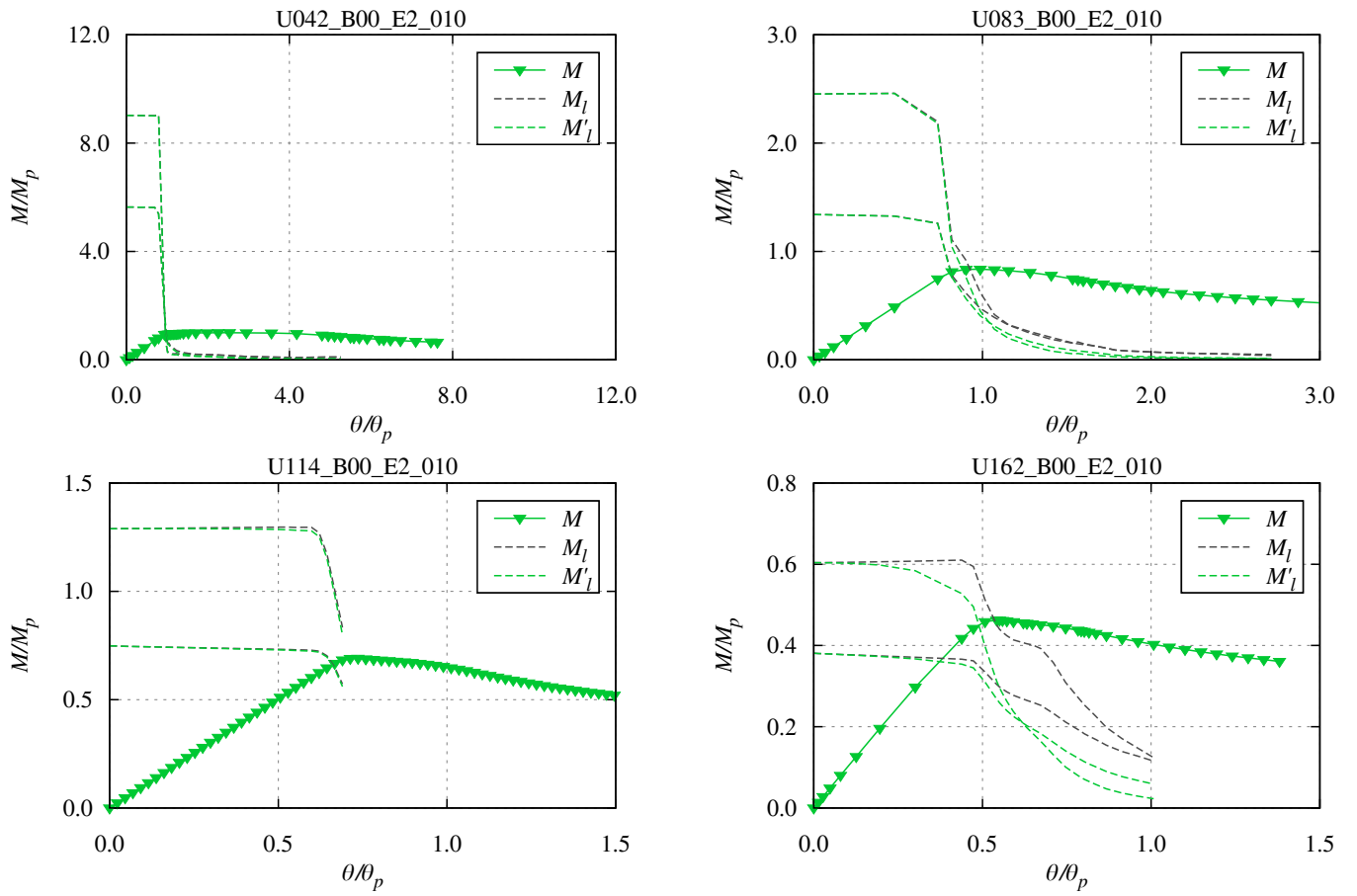


Fig. 5-53 Load-deformation curve: U\_B00.E2.010

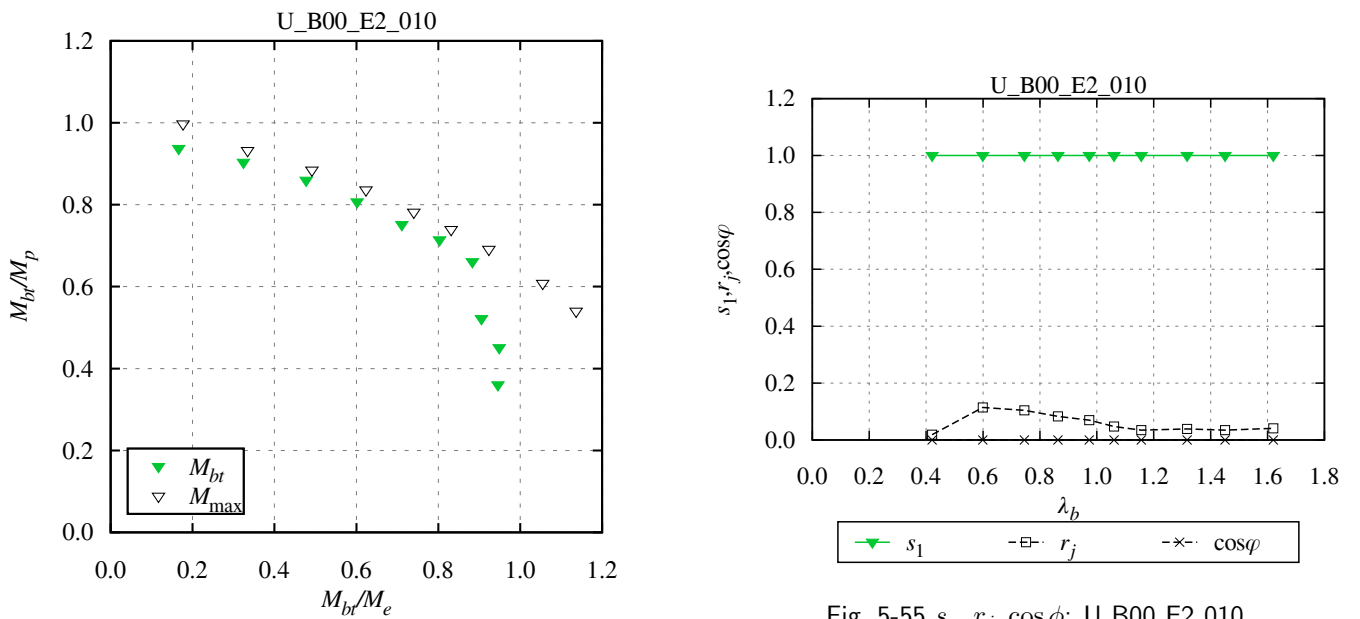


Fig. 5-54 Macroscopic instability surface: U\_B00.E2.010

Fig. 5-55  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B00.E2.010

初期たわみ量=1/500 (B00\_E2\_020)、逆対称曲げ

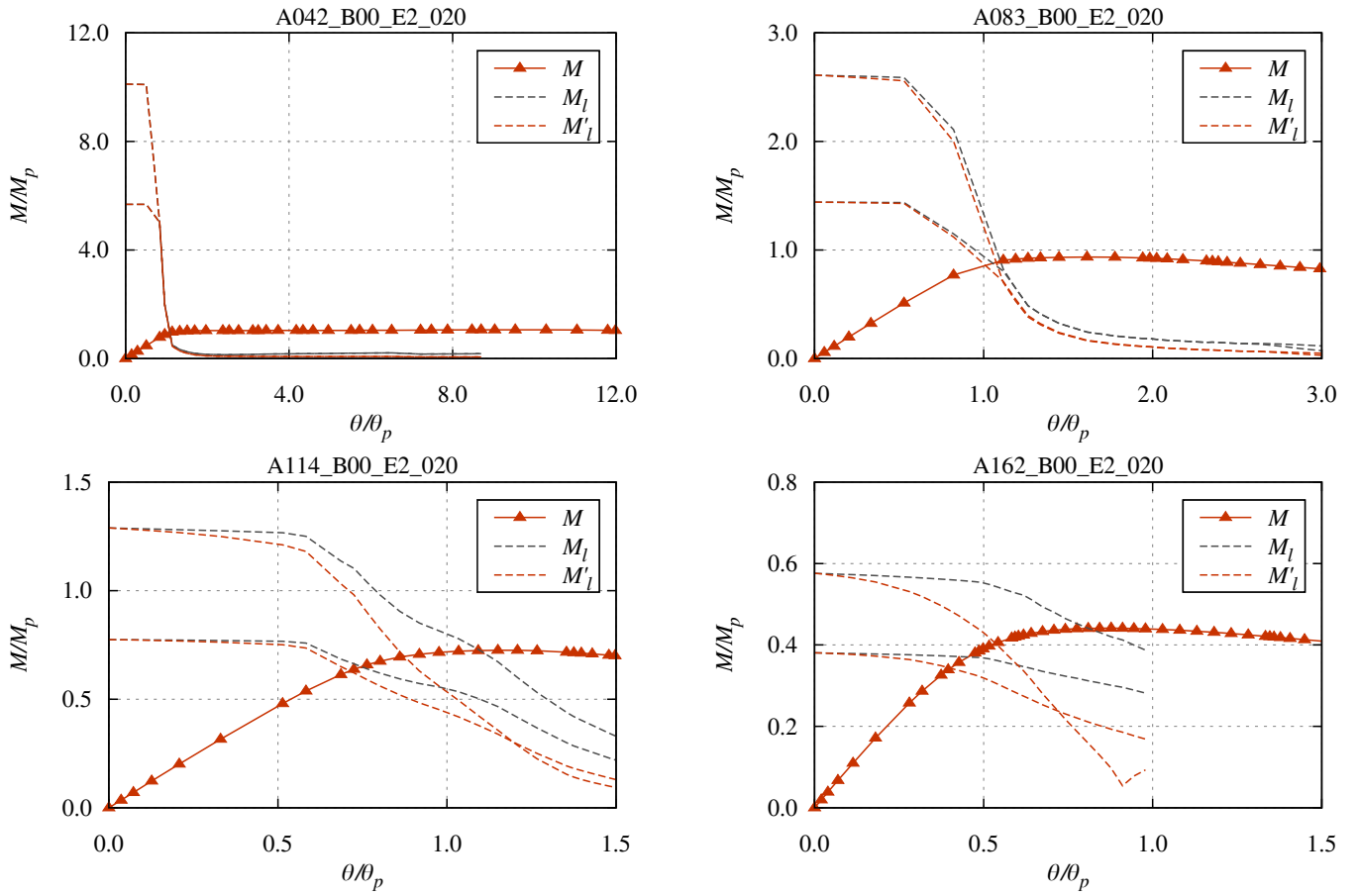


Fig. 5-56 Load-deformation curve: A\_B00.E2\_020

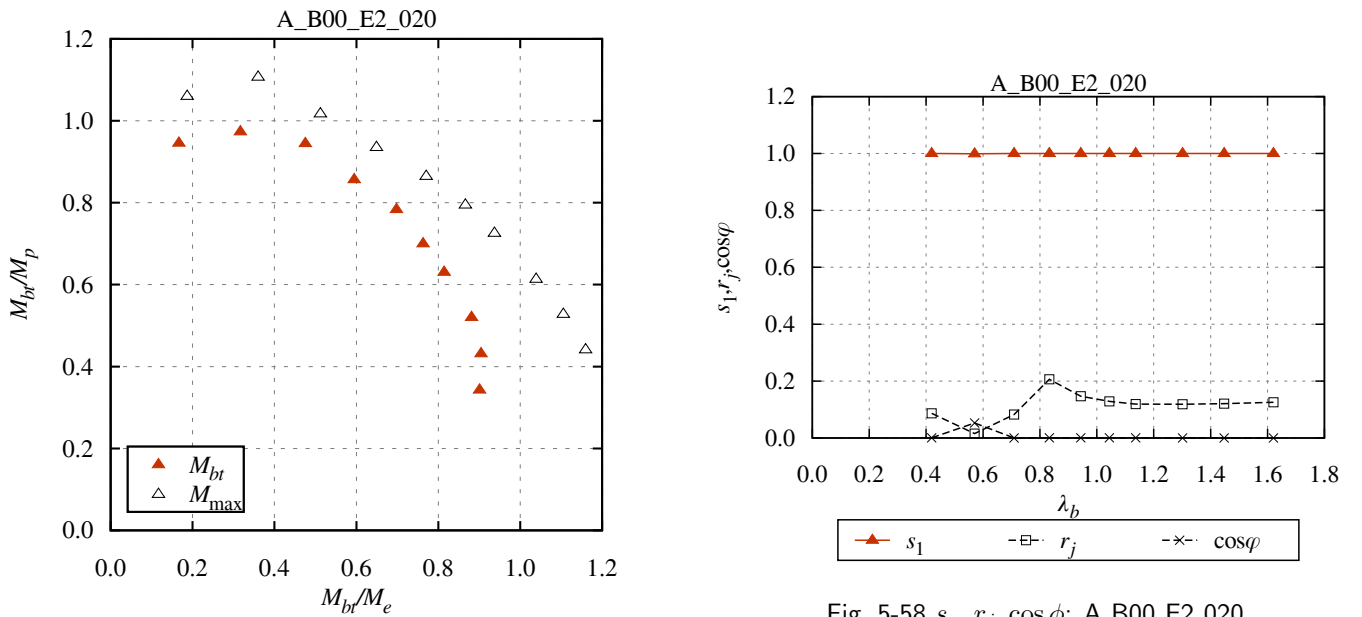


Fig. 5-58  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A.B00.E2\_020

Fig. 5-57 Macroscopic instability surface: A\_B00.E2\_020

初期たわみ量=1/500 (B00\_E2\_020)、片曲げ

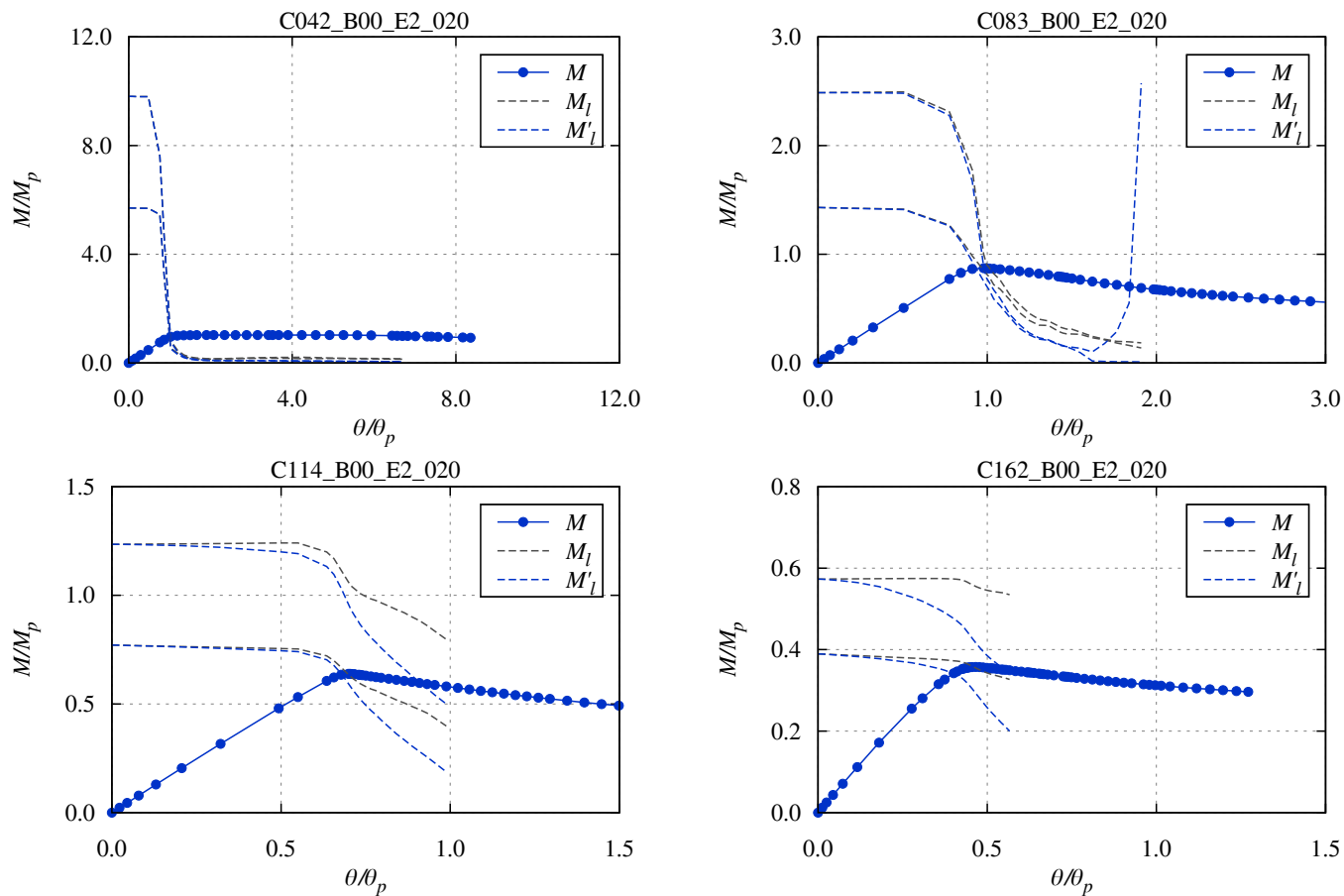


Fig. 5-59 Load-deformation curve: C\_B00.E2\_020

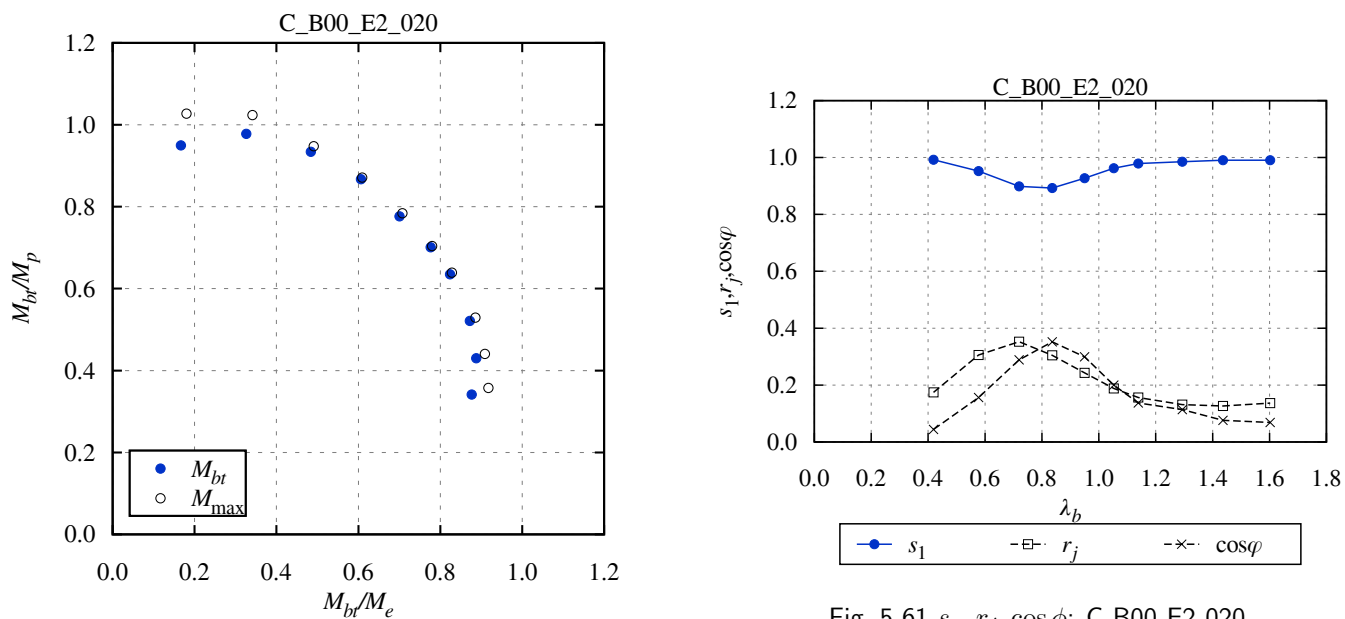


Fig. 5-60 Macroscopic instability surface: C\_B00.E2\_020

Fig. 5-61  $s_n, r_j, \cos\phi$ : C\_B00.E2\_020

初期たわみ量=1/500 (B00\_E2\_020)、一様曲げ

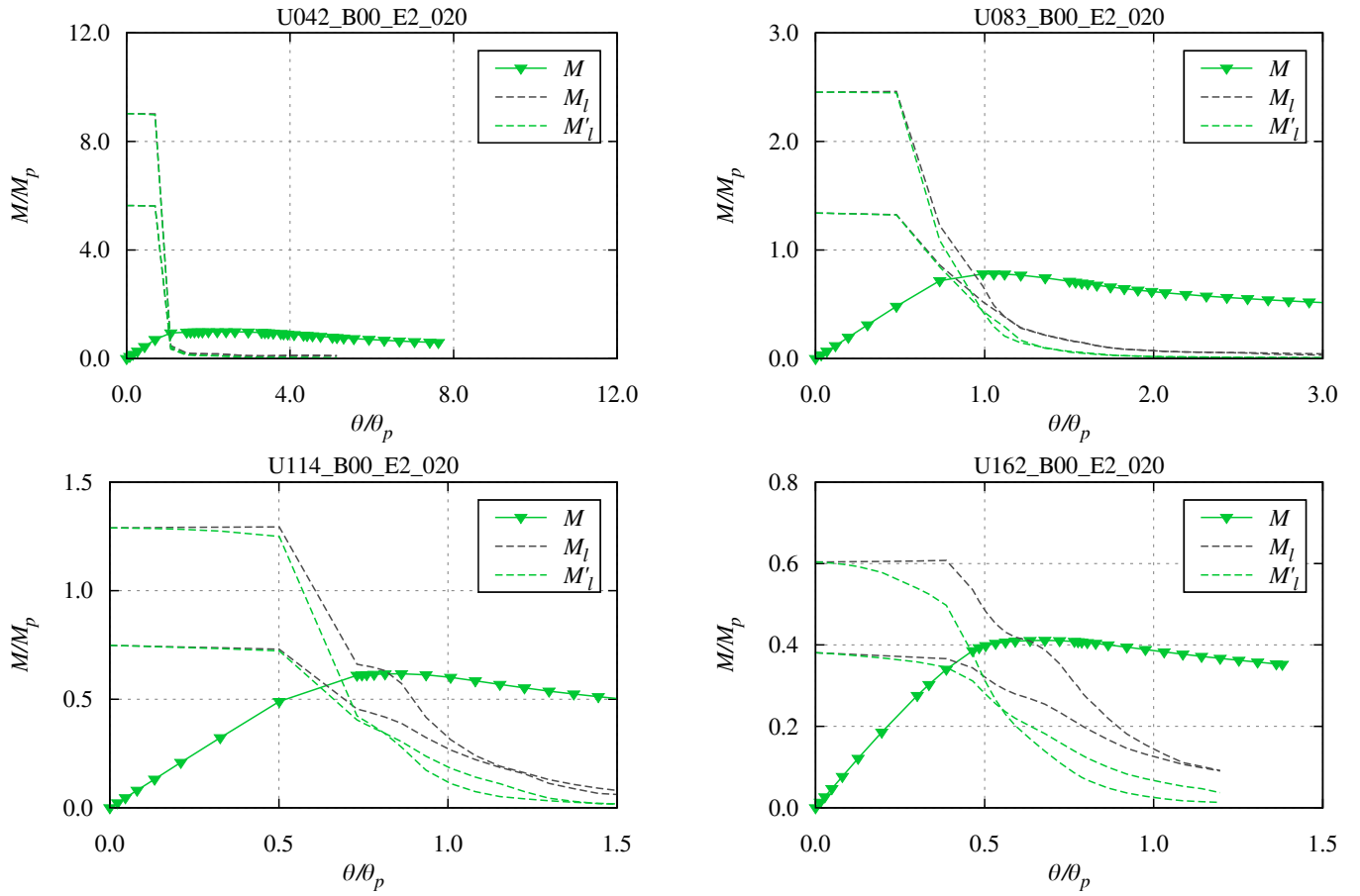


Fig. 5-62 Load-deformation curve: U\_B00.E2\_020

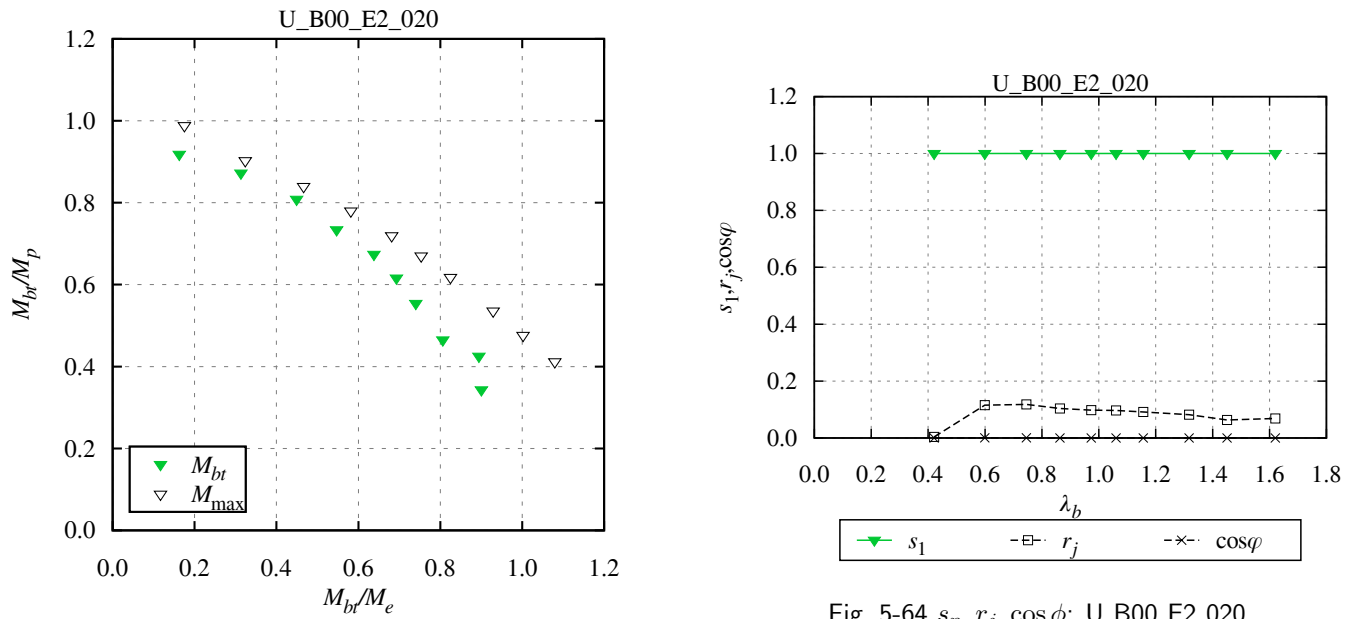


Fig. 5-64  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B00.E2\_020

Fig. 5-63 Macroscopic instability surface: U\_B00.E2\_020



## 5.5.3 パイリニアモデル、残留応力なし、正弦半波形状 (B00\_SH)

初期たわみ量=1/2000 (B00\_SH\_005)、逆対称曲げ

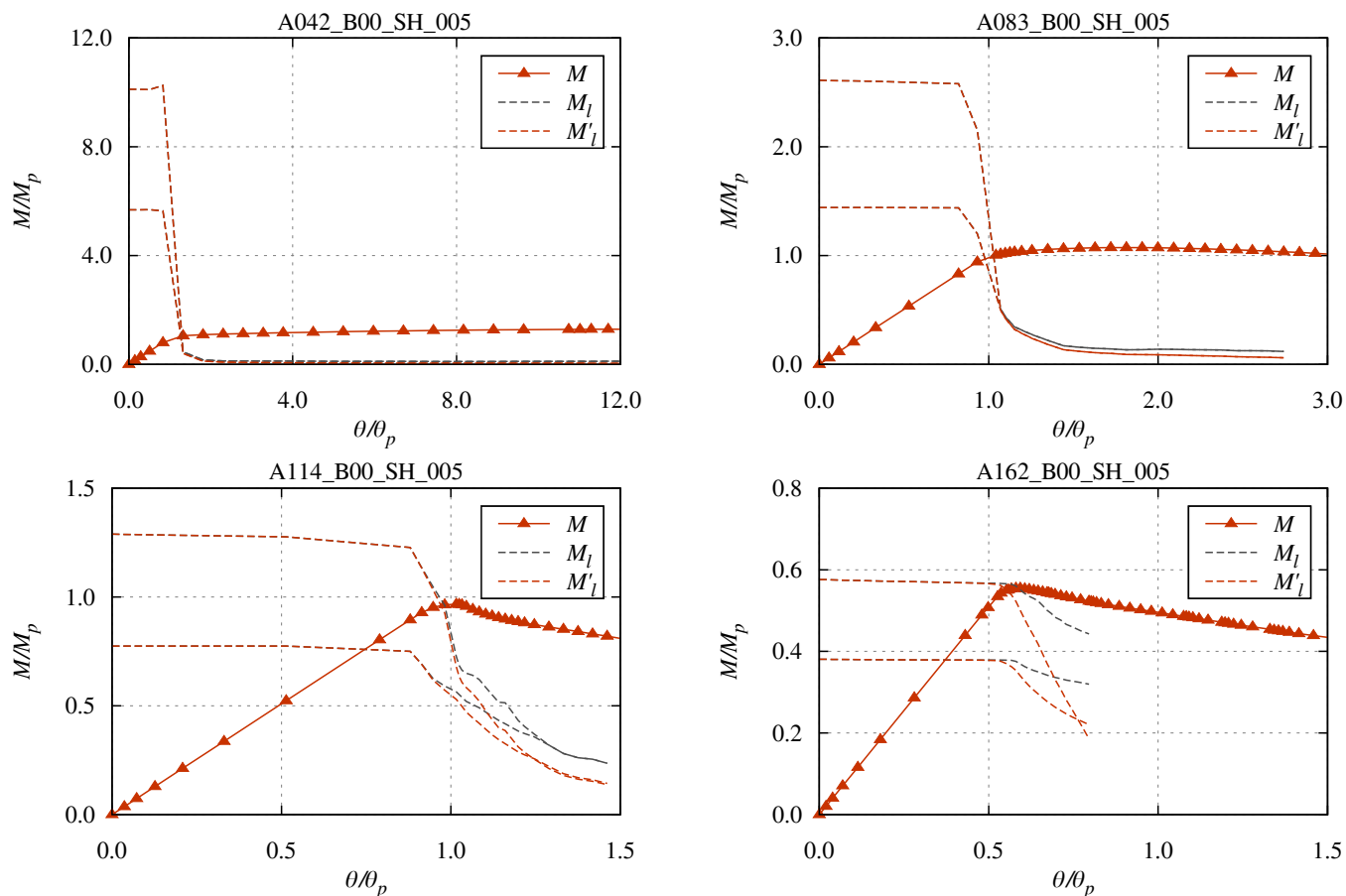


Fig. 5-65 Load-deformation curve: A\_B00\_SH\_005

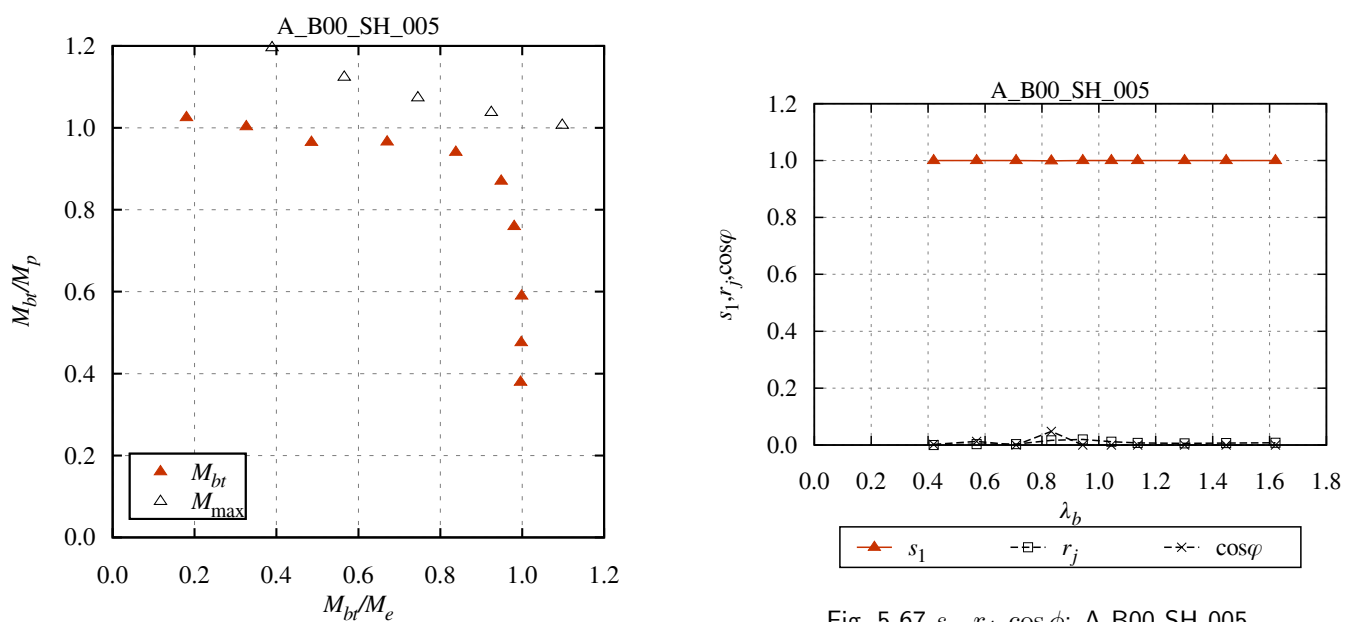
Fig. 5-67  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_B00\_SH\_005

Fig. 5-66 Macroscopic instability surface: A\_B00\_SH\_005

初期たわみ量=1/2000 (B00\_SH\_005)、片曲げ

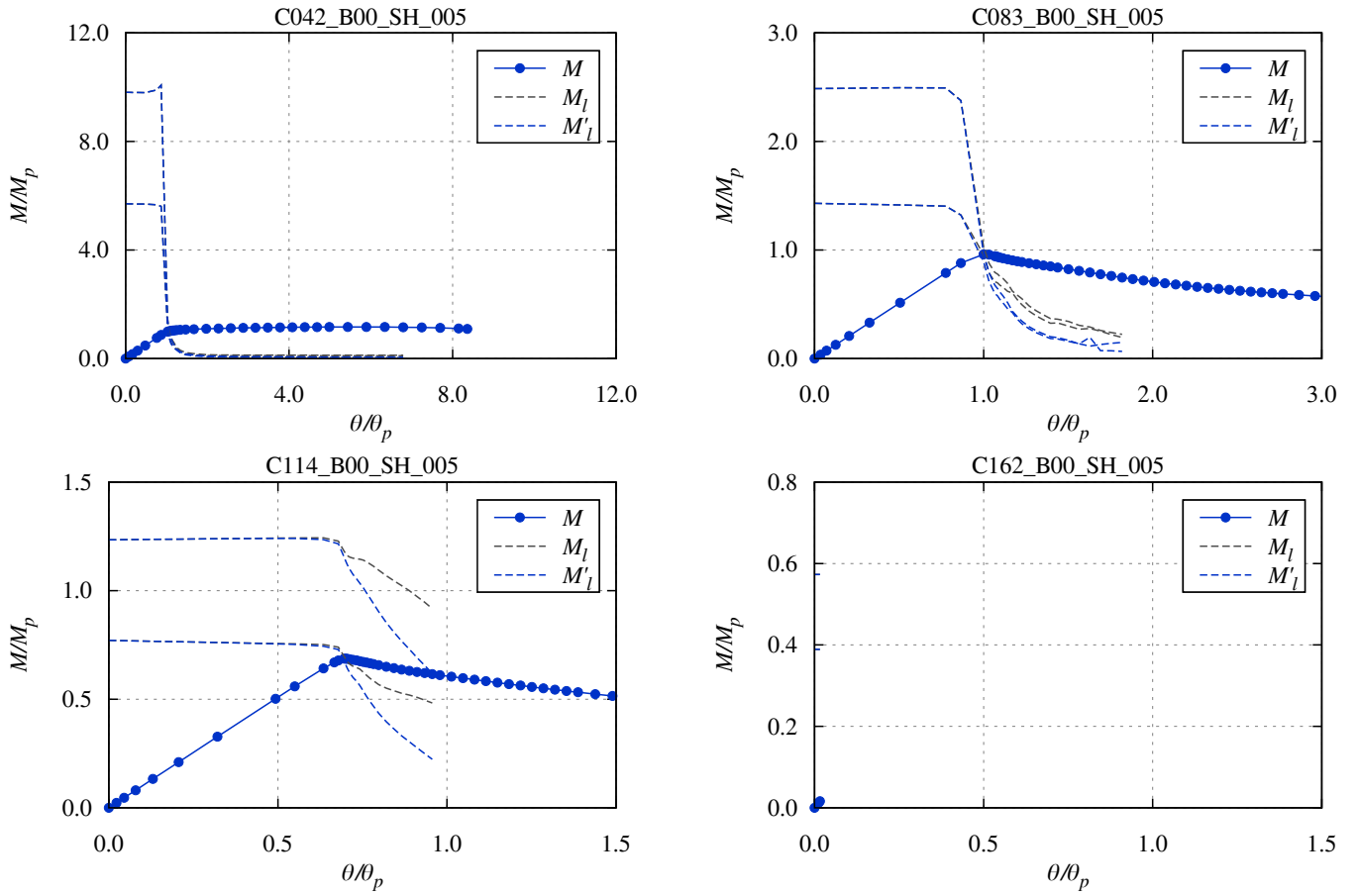


Fig. 5-68 Load-deformation curve: C\_B00\_SH\_005

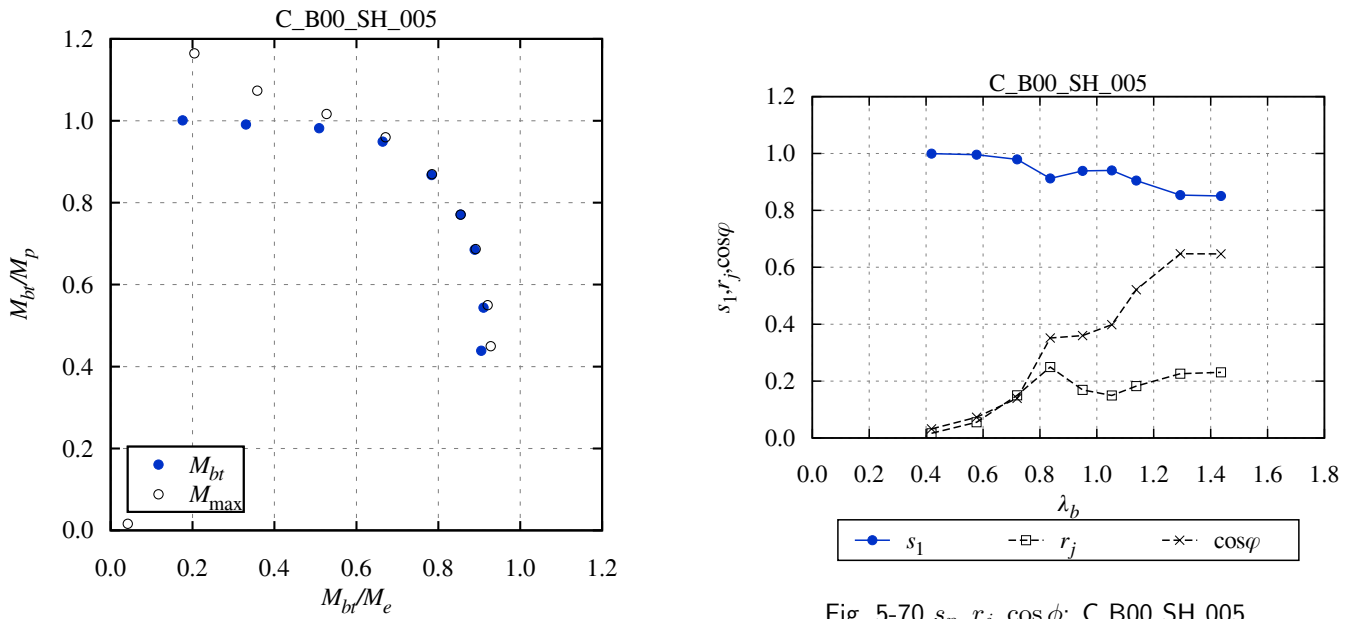


Fig. 5-70  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_B00\_SH\_005

Fig. 5-69 Macroscopic instability surface: C\_B00\_SH\_005

初期たわみ量=1/2000 (B00\_SH\_005)、一様曲げ

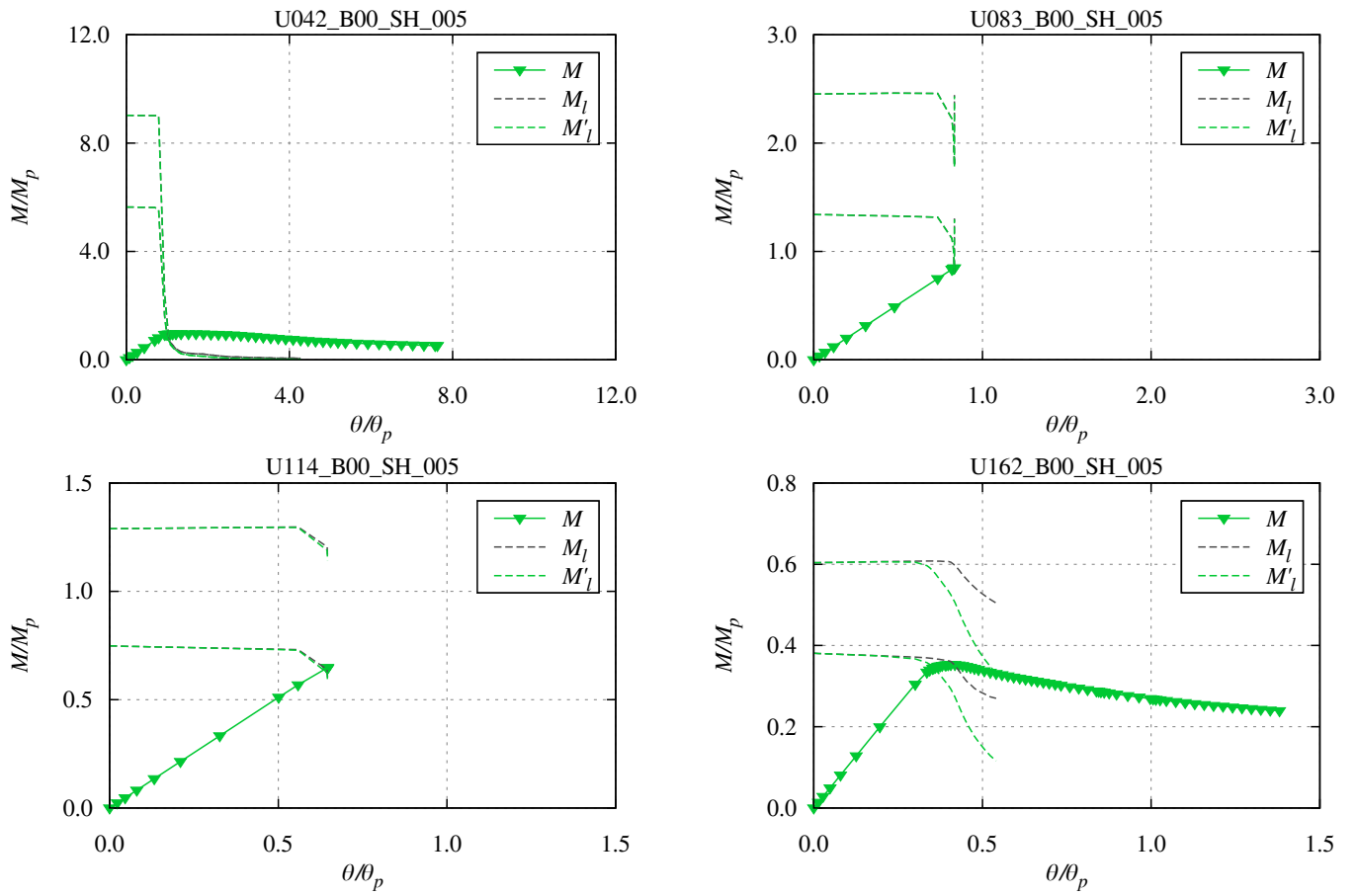


Fig. 5-71 Load-deformation curve: U\_B00\_SH\_005

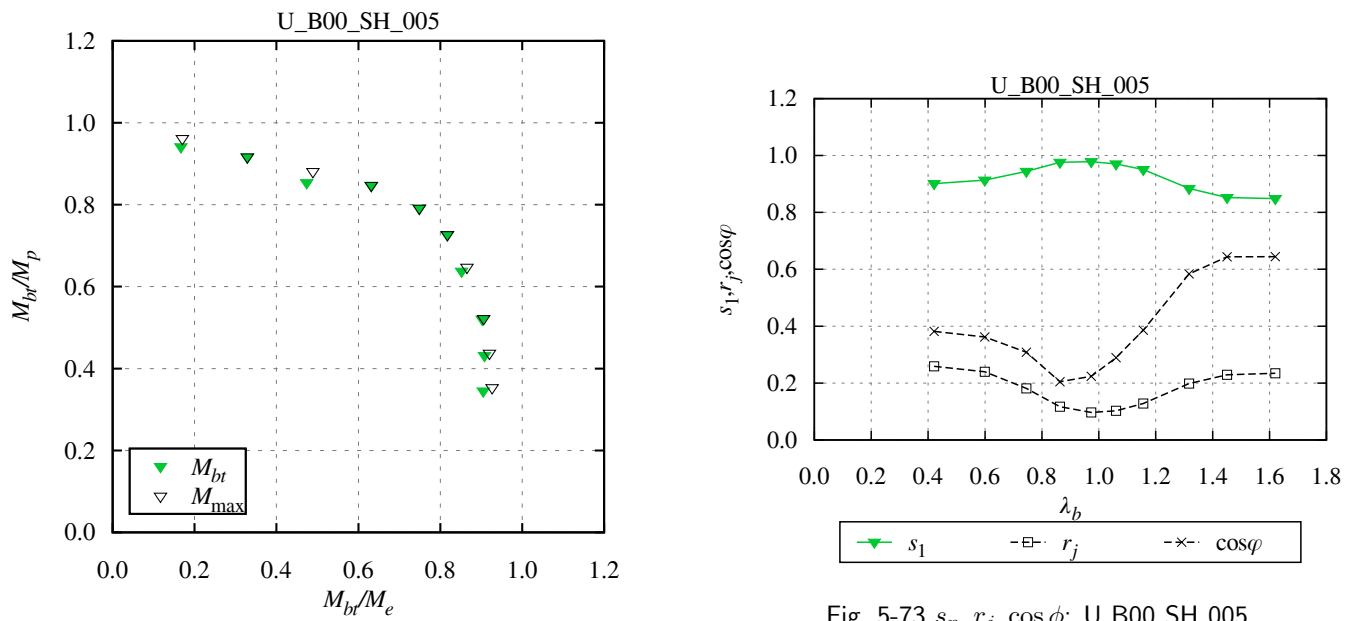


Fig. 5-72 Macroscopic instability surface: U\_B00\_SH\_005

Fig. 5-73  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B00\_SH\_005

初期たわみ量=1/1000 (B00\_SH\_010)、逆対称曲げ

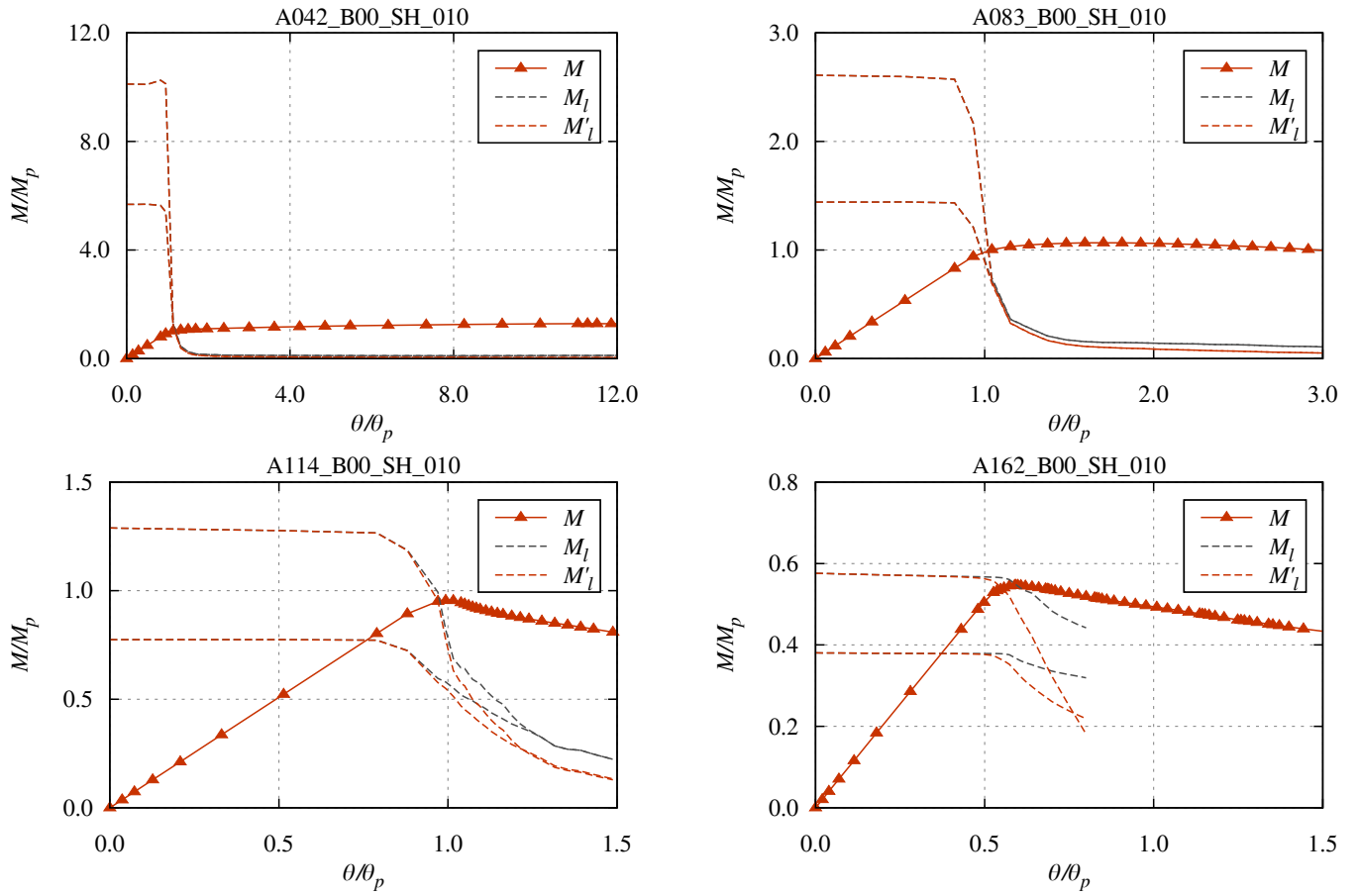


Fig. 5-74 Load-deformation curve: A\_B00\_SH\_010

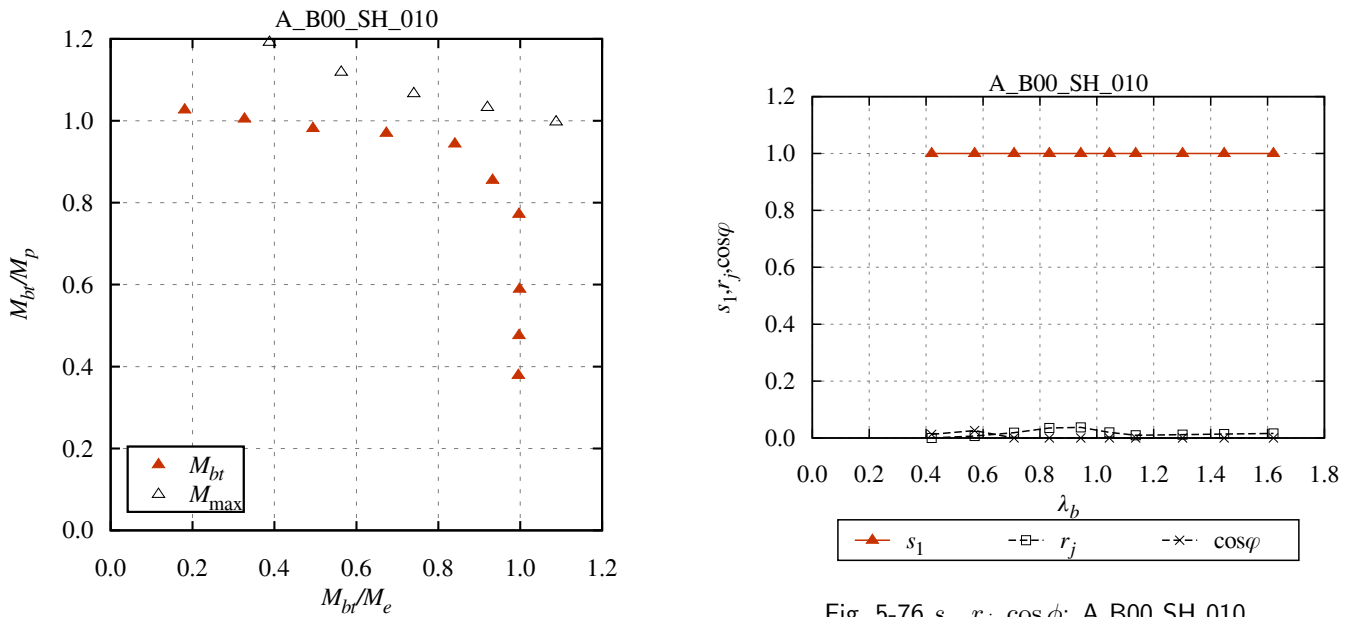


Fig. 5-76  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_B00\_SH\_010

Fig. 5-75 Macroscopic instability surface: A\_B00\_SH\_010

初期たわみ量=1/1000 (B00\_SH\_010)、片曲げ

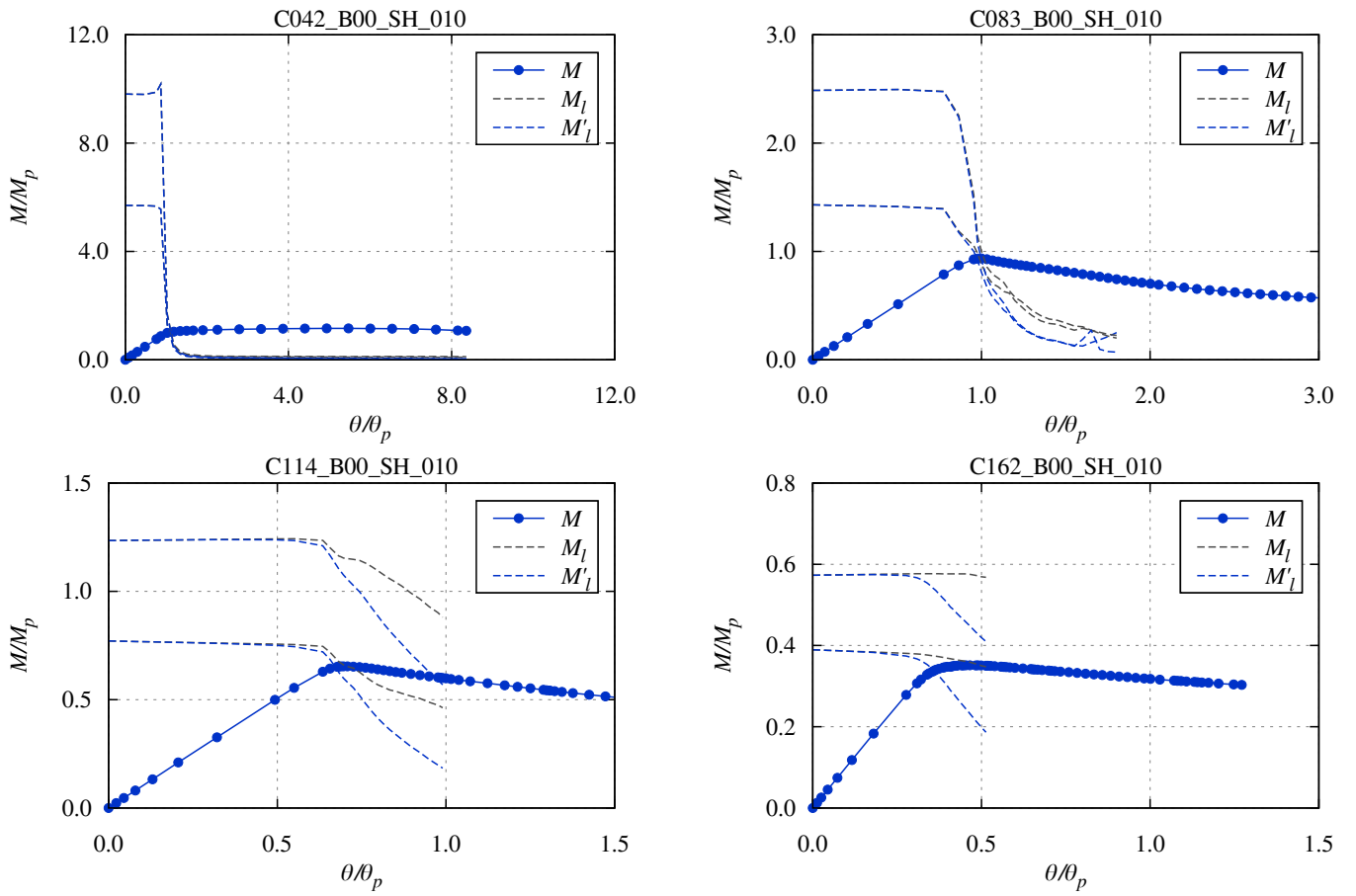


Fig. 5-77 Load-deformation curve: C\_B00\_SH\_010

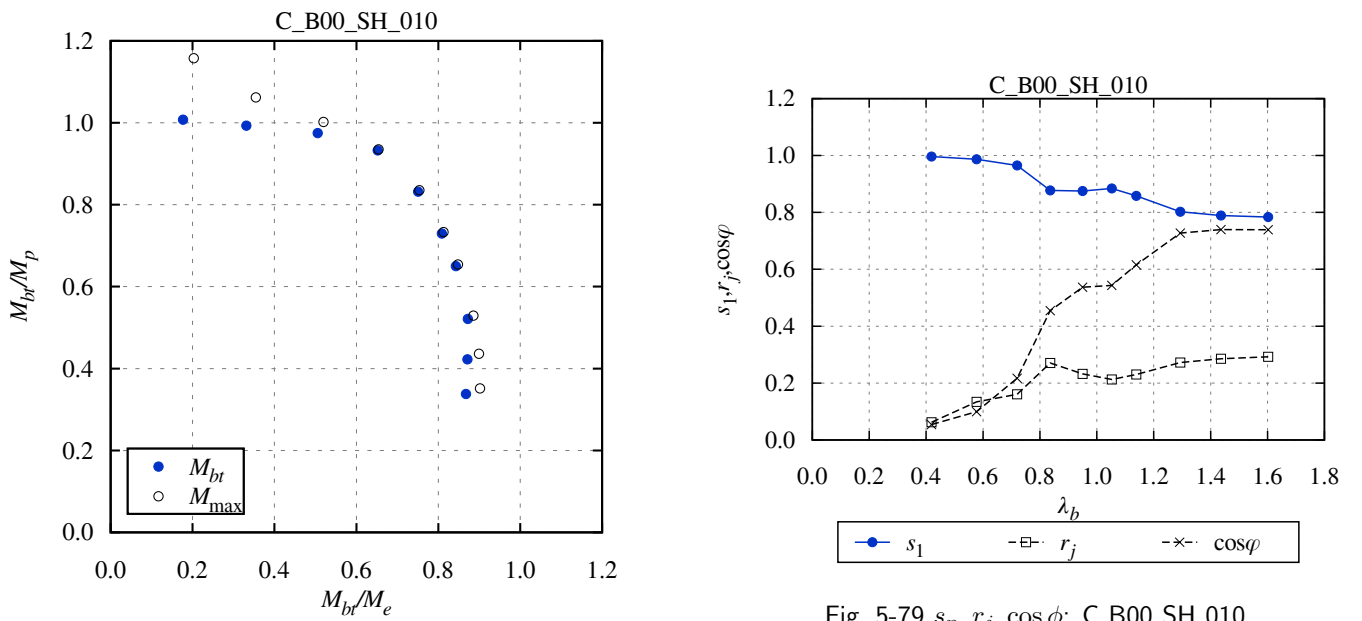


Fig. 5-78 Macroscopic instability surface: C\_B00\_SH\_010

Fig. 5-79  $s_n, r_j, \cos\phi$ : C\_B00\_SH\_010

初期たわみ量=1/1000 (B00\_SH\_010)、一様曲げ

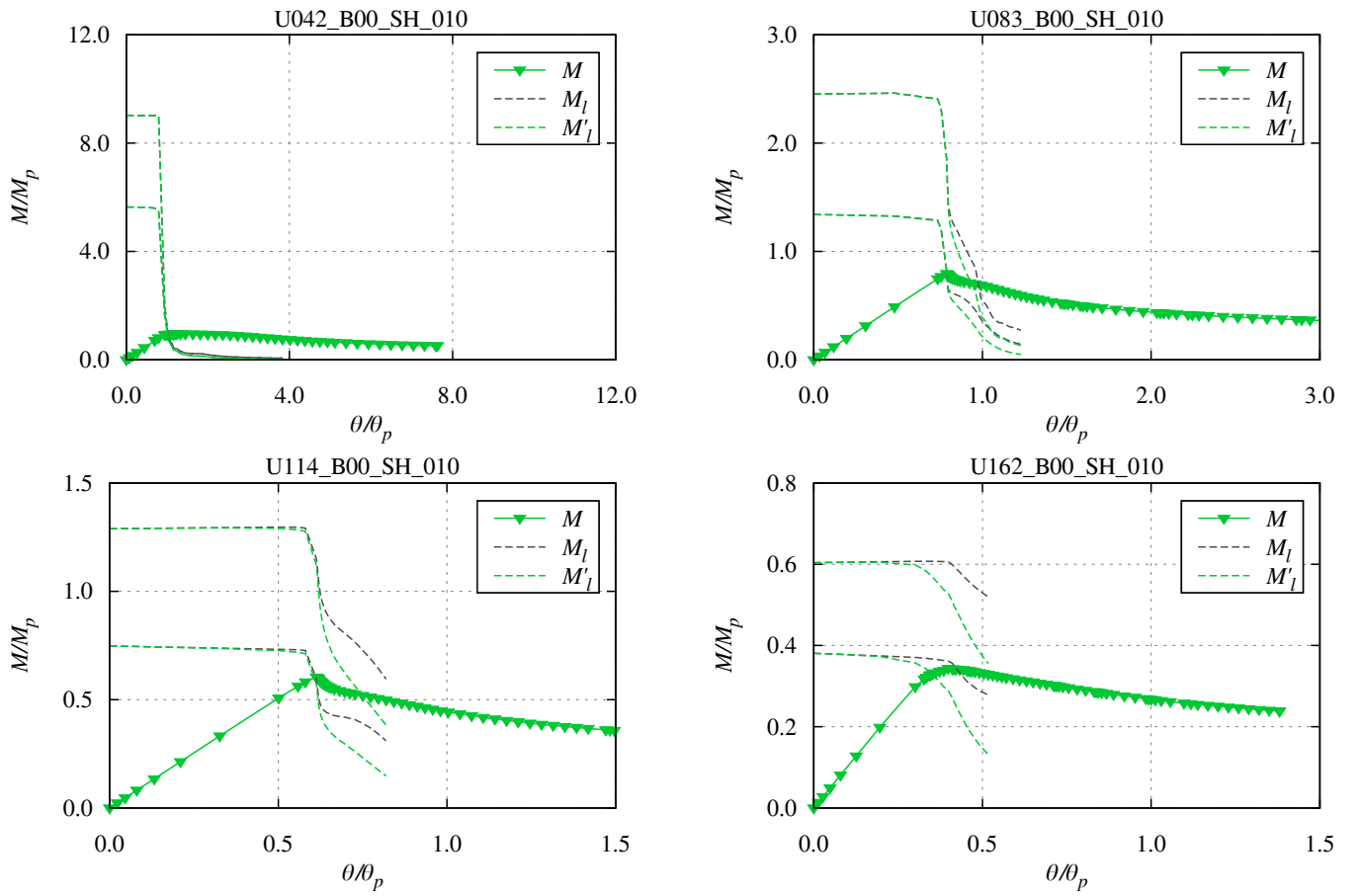


Fig. 5-80 Load-deformation curve: U\_B00\_SH\_010

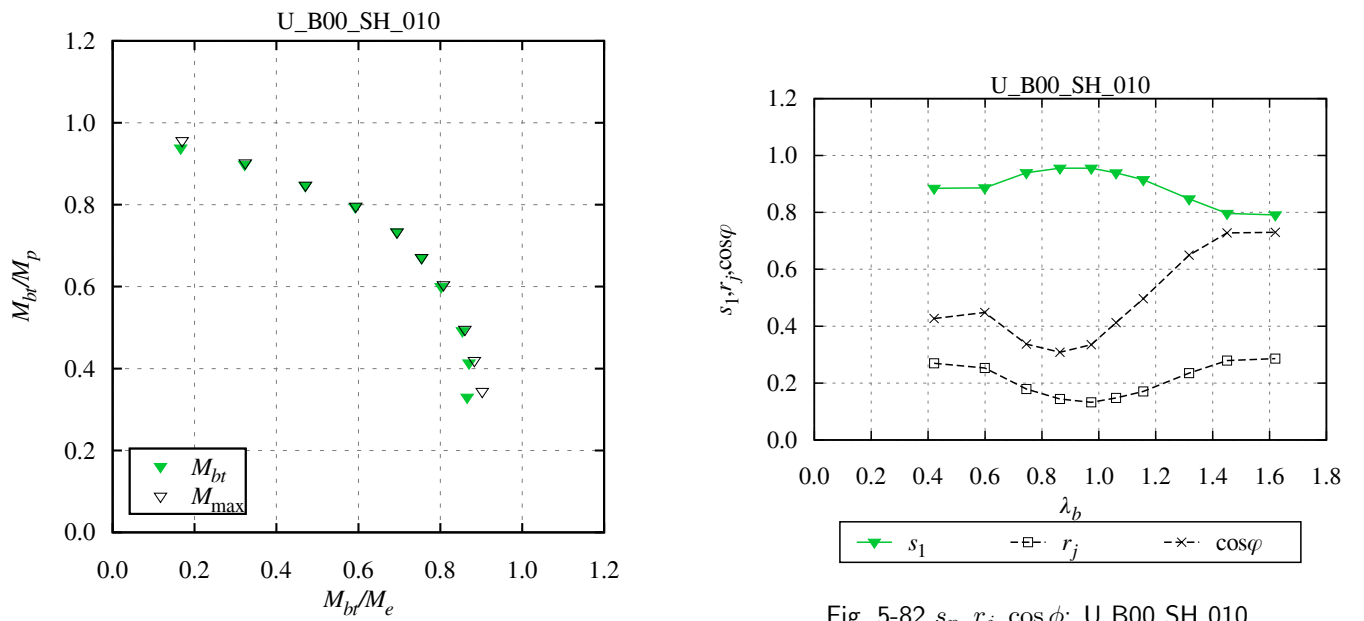


Fig. 5-82  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B00\_SH\_010

Fig. 5-81 Macroscopic instability surface: U\_B00\_SH\_010

初期たわみ量=1/500 (B00\_SH\_020)、逆対称曲げ

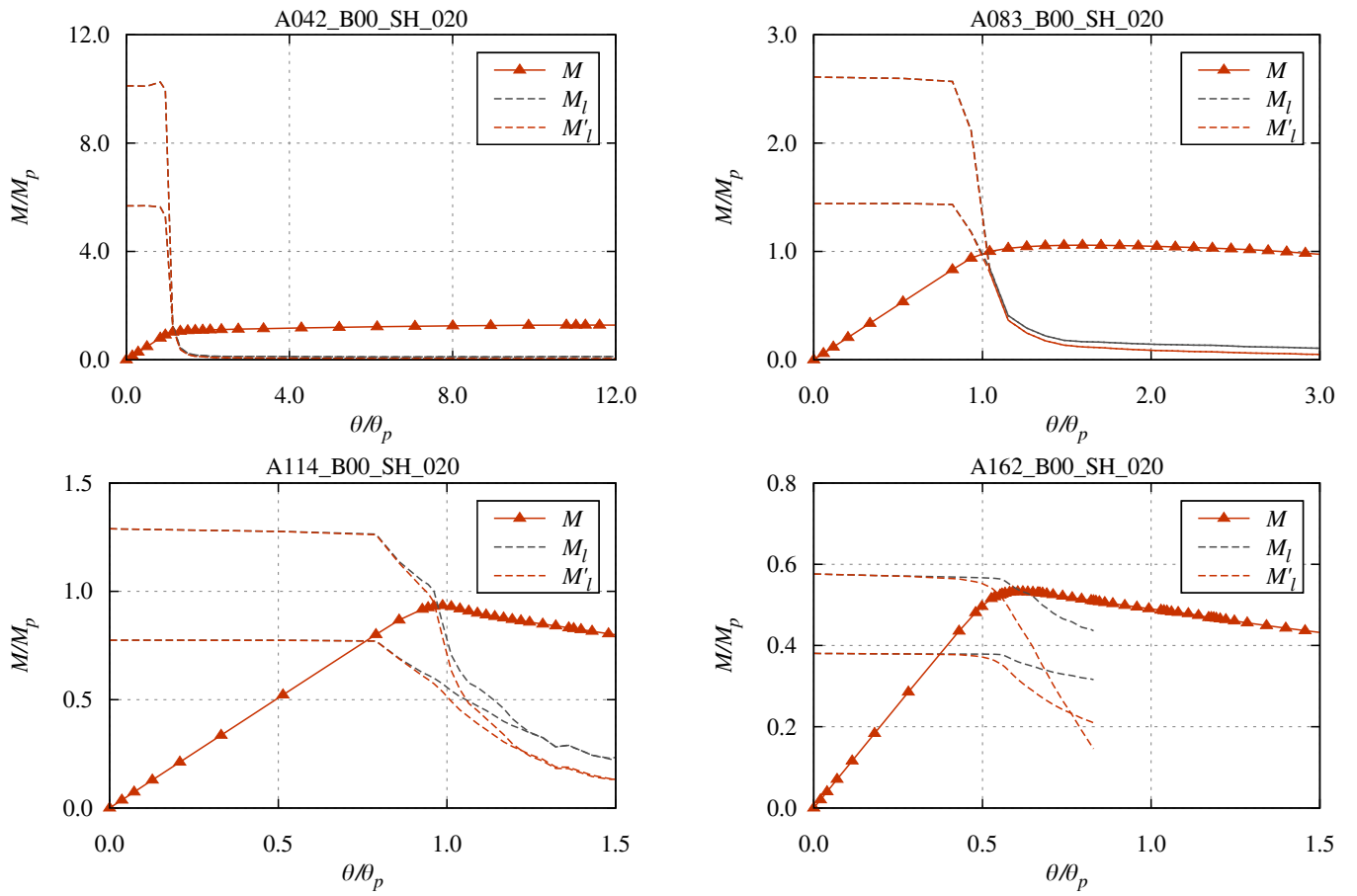


Fig. 5-83 Load-deformation curve: A\_B00\_SH\_020

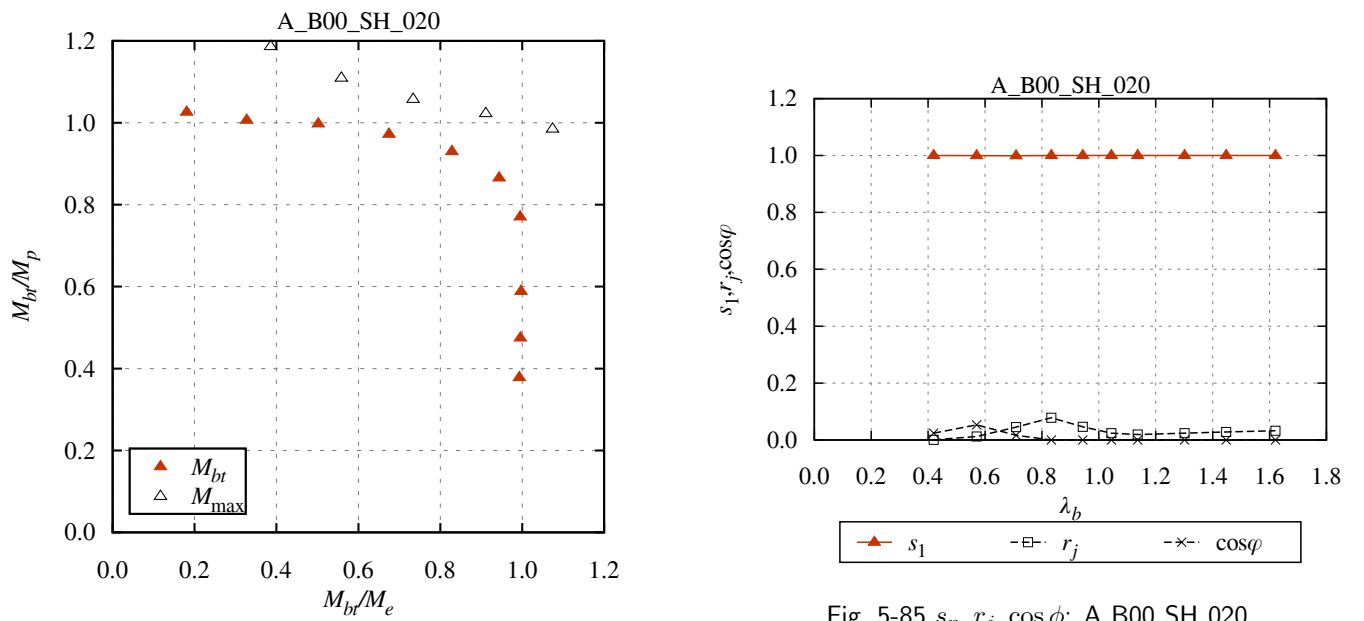


Fig. 5-84 Macroscopic instability surface: A\_B00\_SH\_020

Fig. 5-85  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_B00\_SH\_020

初期たわみ量=1/500 (B00.SH.020)、片曲げ

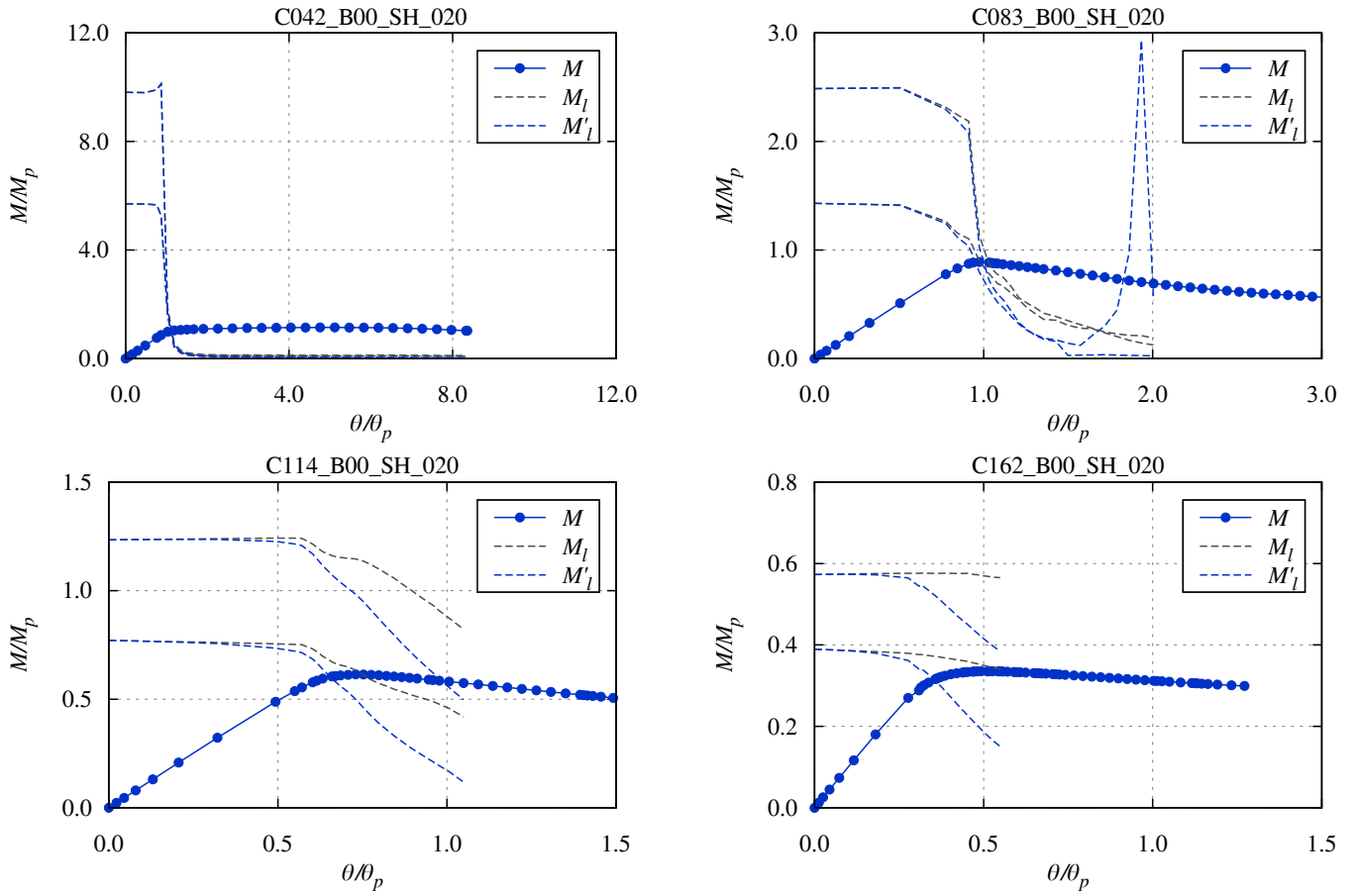


Fig. 5-86 Load-deformation curve: C\_B00.SH.020

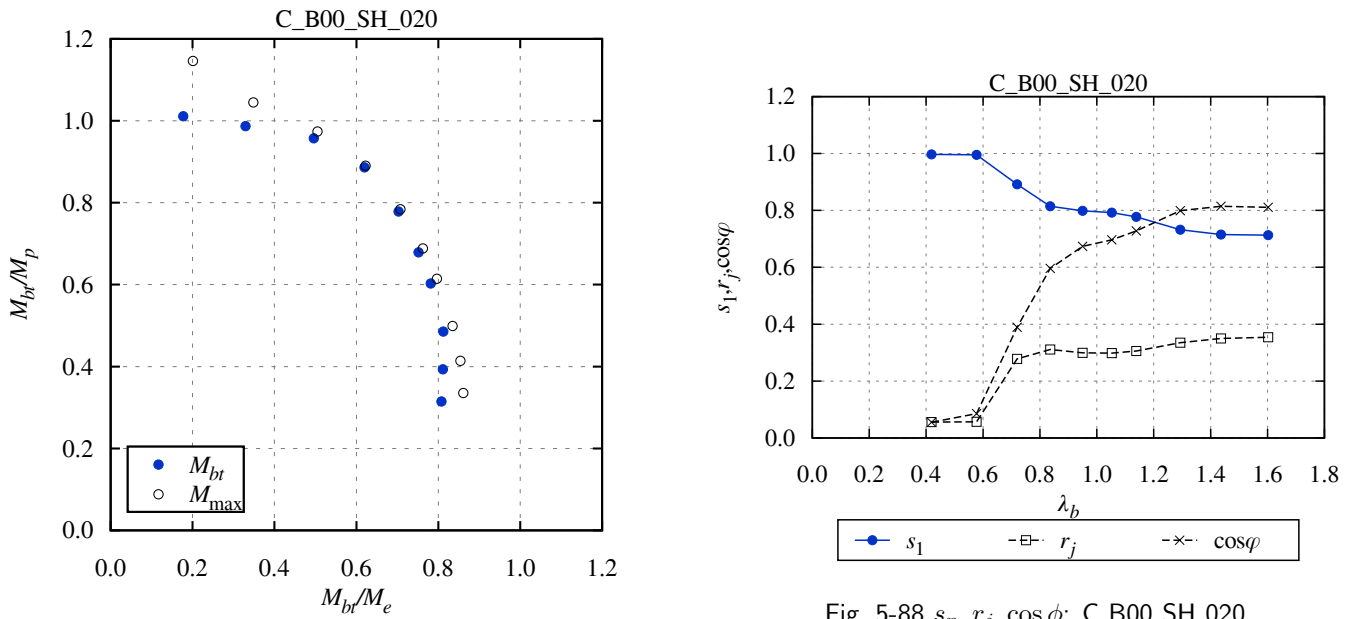


Fig. 5-88  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C\_B00.SH.020

Fig. 5-87 Macroscopic instability surface: C\_B00.SH.020



初期たわみ量=1/500 (B00\_SH\_020)、一様曲げ

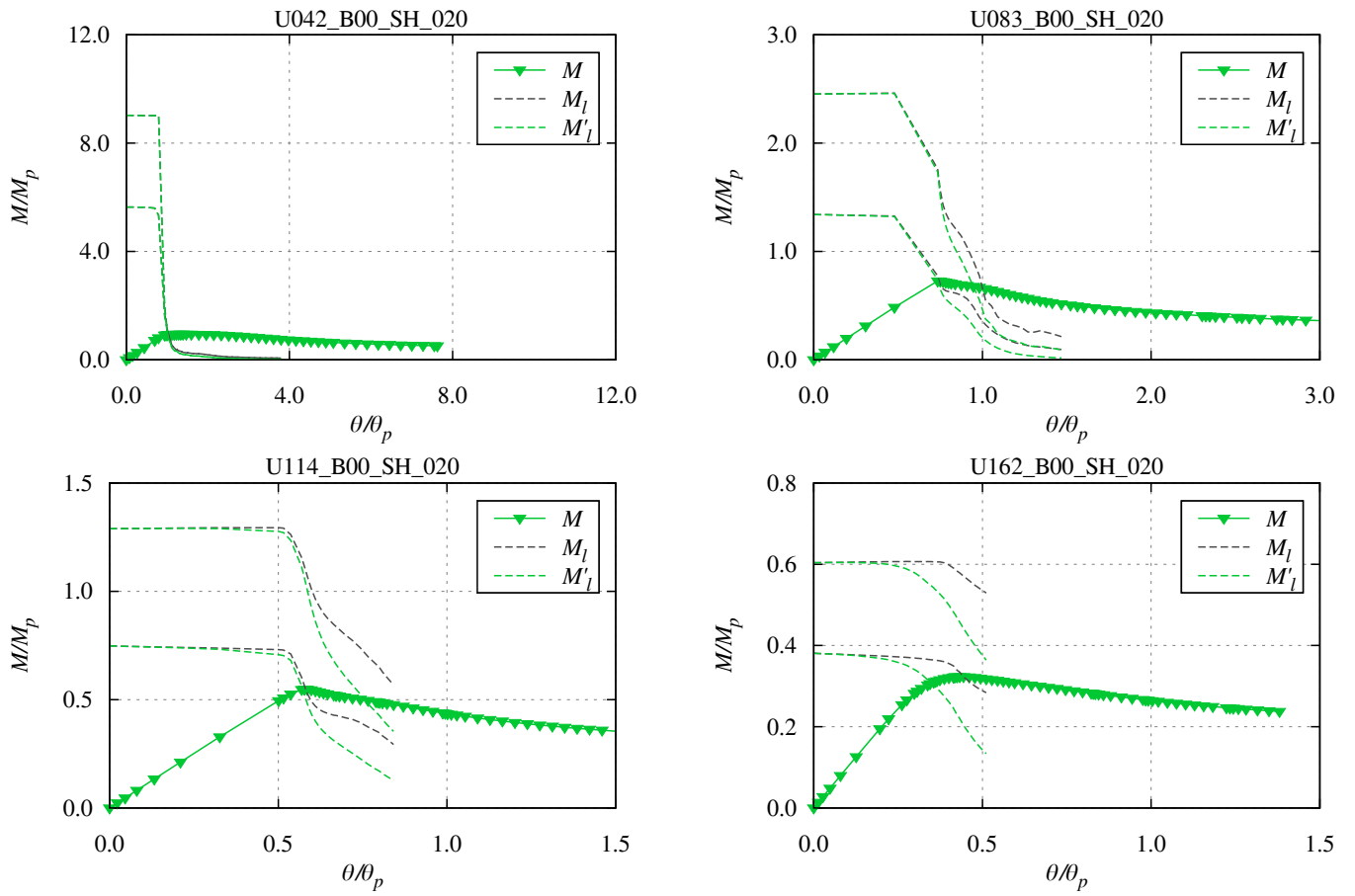


Fig. 5-89 Load-deformation curve: U\_B00\_SH\_020

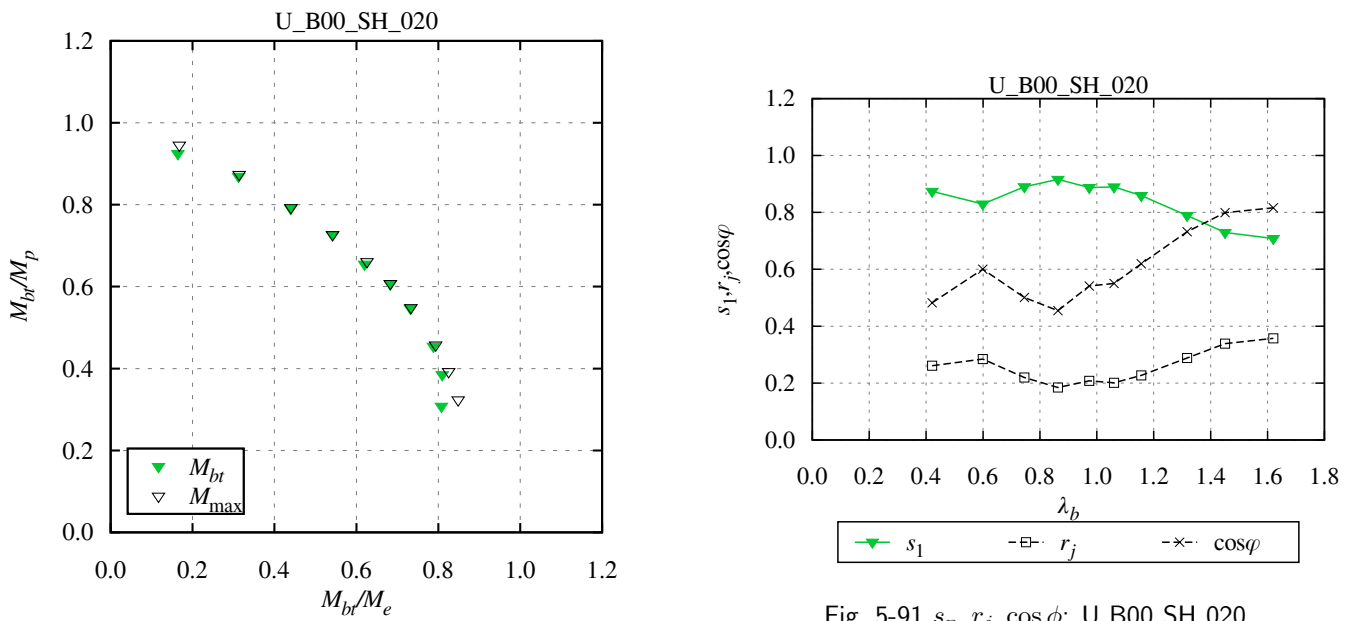


Fig. 5-91  $s_n, r_j, \cos\phi$ : U\_B00\_SH\_020

Fig. 5-90 Macroscopic instability surface: U\_B00\_SH\_020

5.5.4 バイリニアモデル、残留応力 30%、弾性一次座屈モード形状 (B03\_E1)

初期たわみ量=1/10000 (B03\_E1.001)、逆対称曲げ

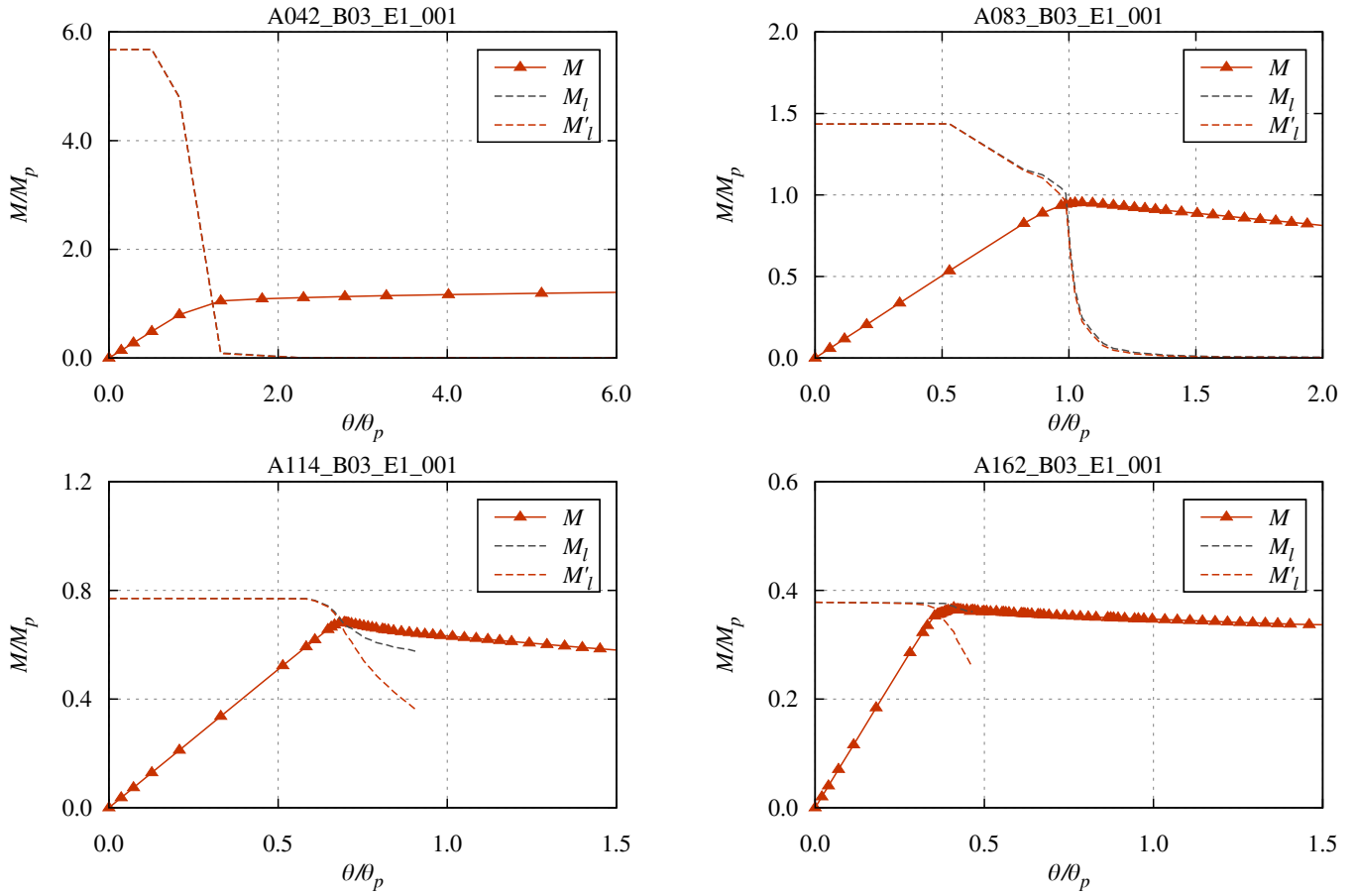


Fig. 5-92 Load-deformation curve: A\_B03.E1.001

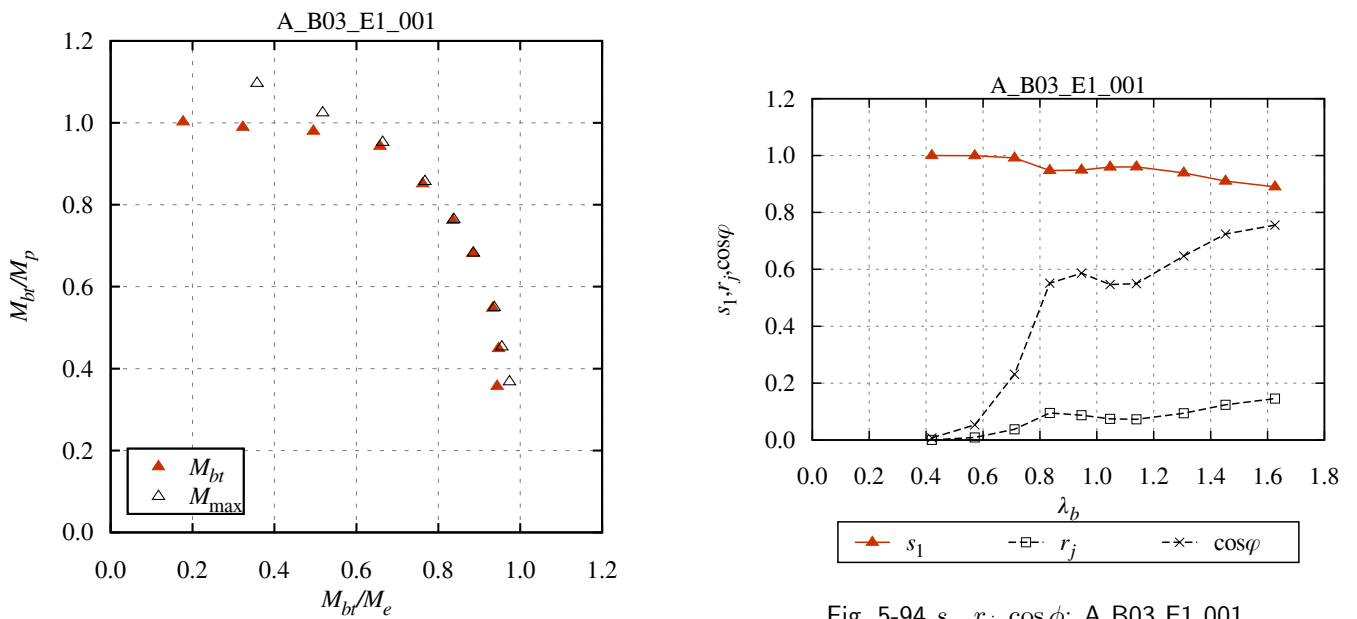


Fig. 5-93 Macroscopic instability surface: A\_B03.E1.001

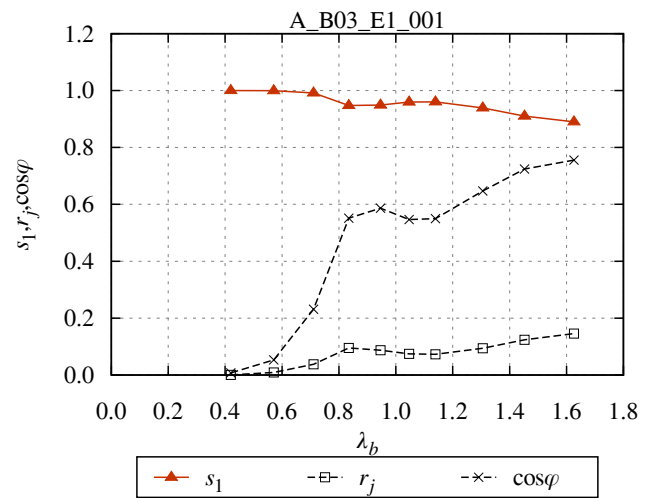


Fig. 5-94  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A\_B03.E1.001

初期たわみ量=1/10000 (B03\_E1\_001)、片曲げ

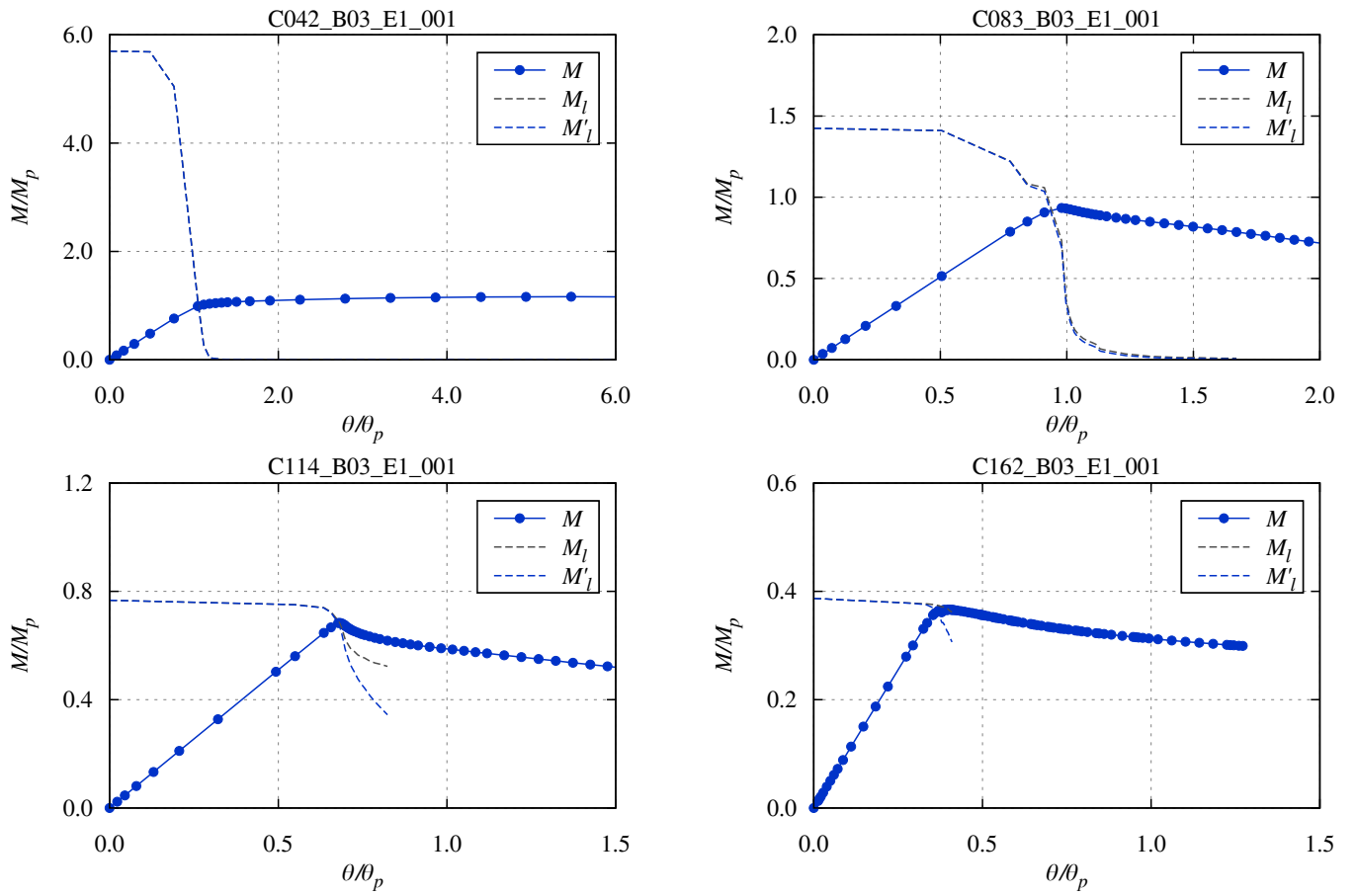


Fig. 5-95 Load-deformation curve: C\_B03.E1.001

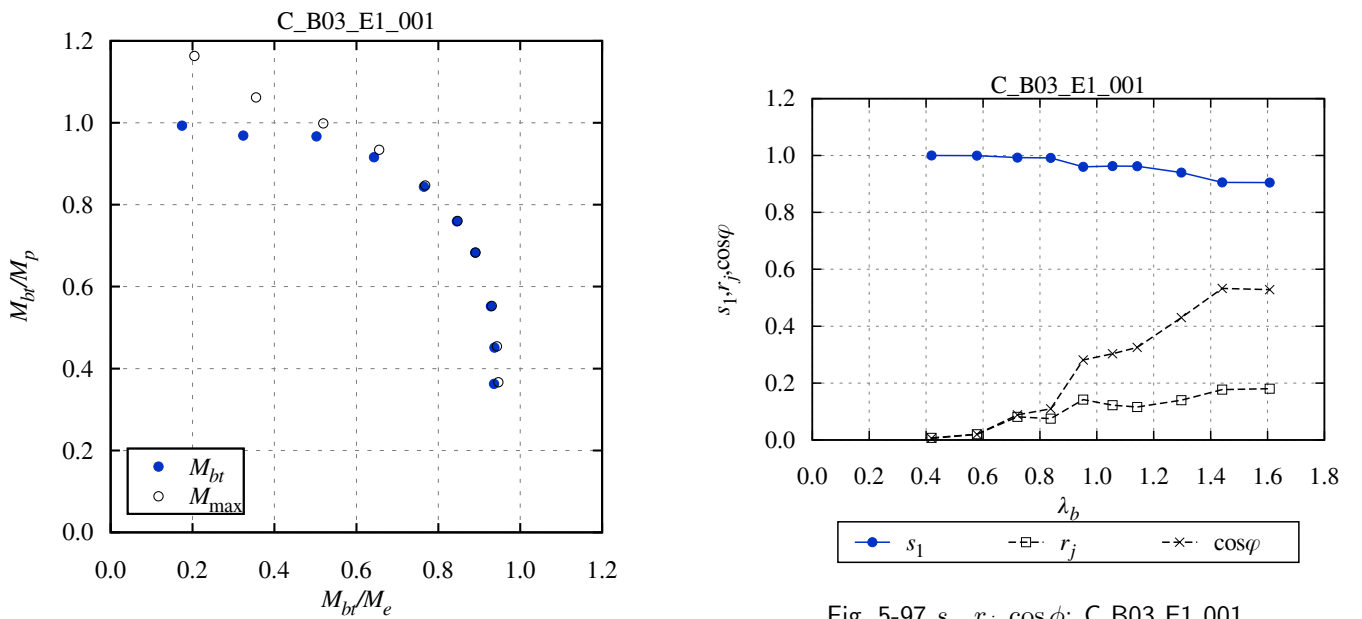


Fig. 5-96 Macroscopic instability surface: C\_B03.E1.001

Fig. 5-97  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C.B03.E1.001

初期たわみ量=1/10000 (B03\_E1\_001)、一様曲げ

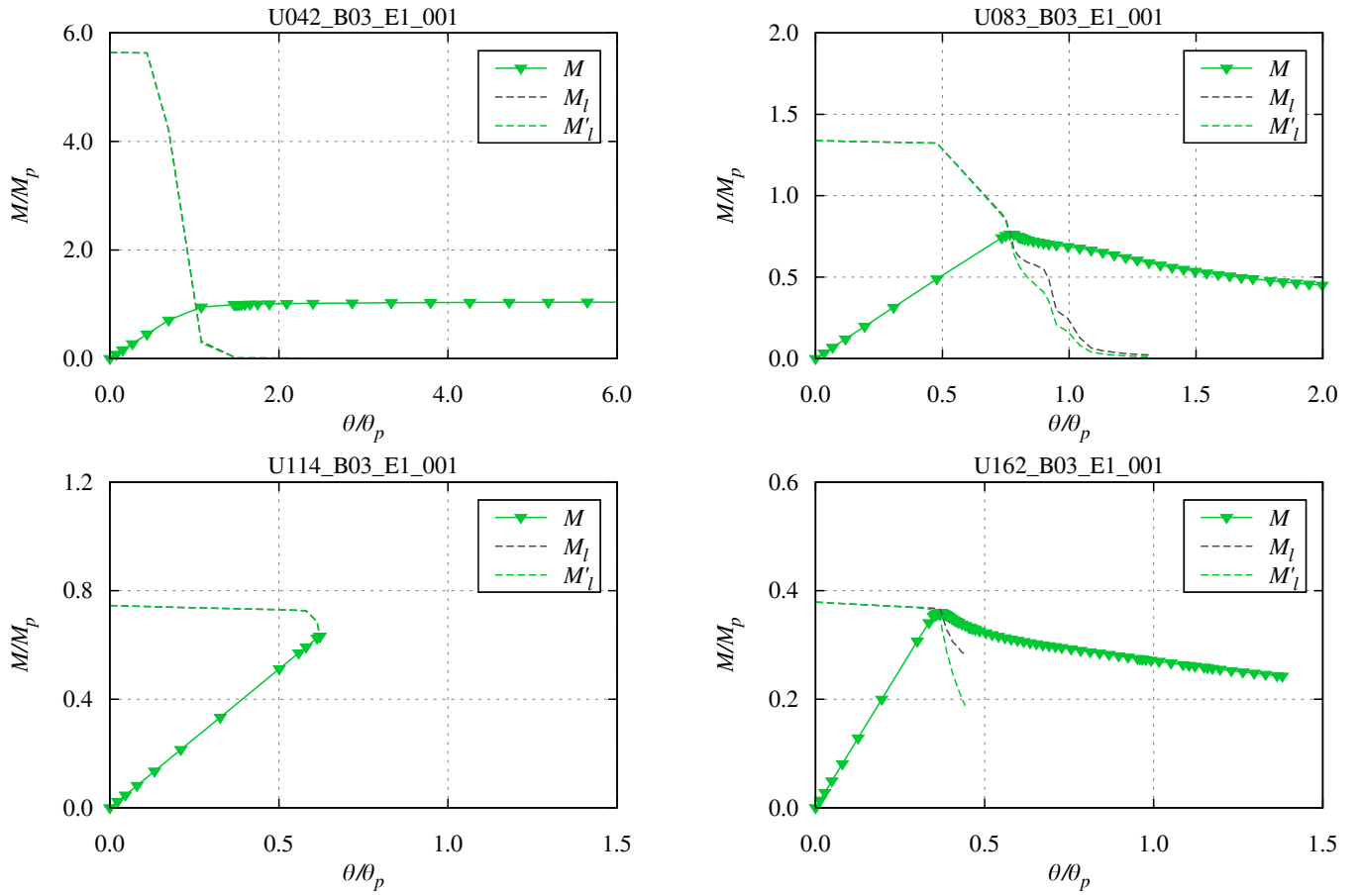


Fig. 5-98 Load-deformation curve: U\_B03.E1.001

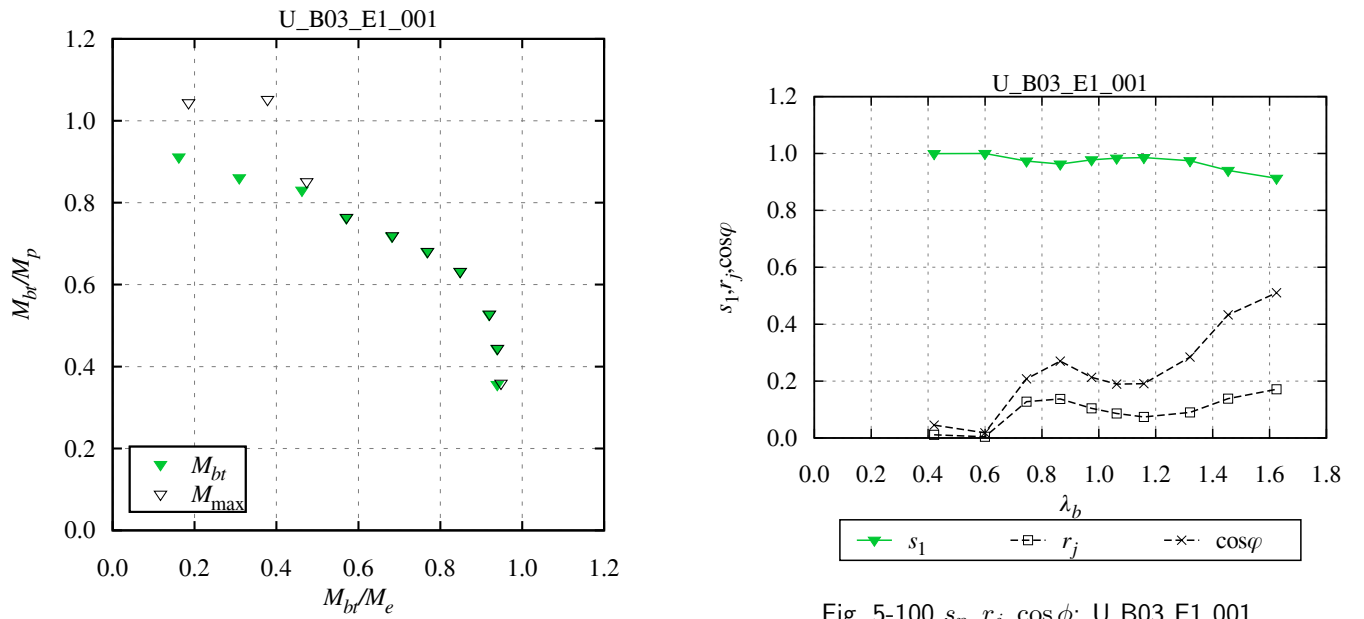


Fig. 5-100  $s_n, r_j, \cos\phi$ : U\_B03.E1.001

Fig. 5-99 Macroscopic instability surface: U\_B03.E1.001

初期たわみ量=1/2000 (B03\_E1\_005)、逆対称曲げ

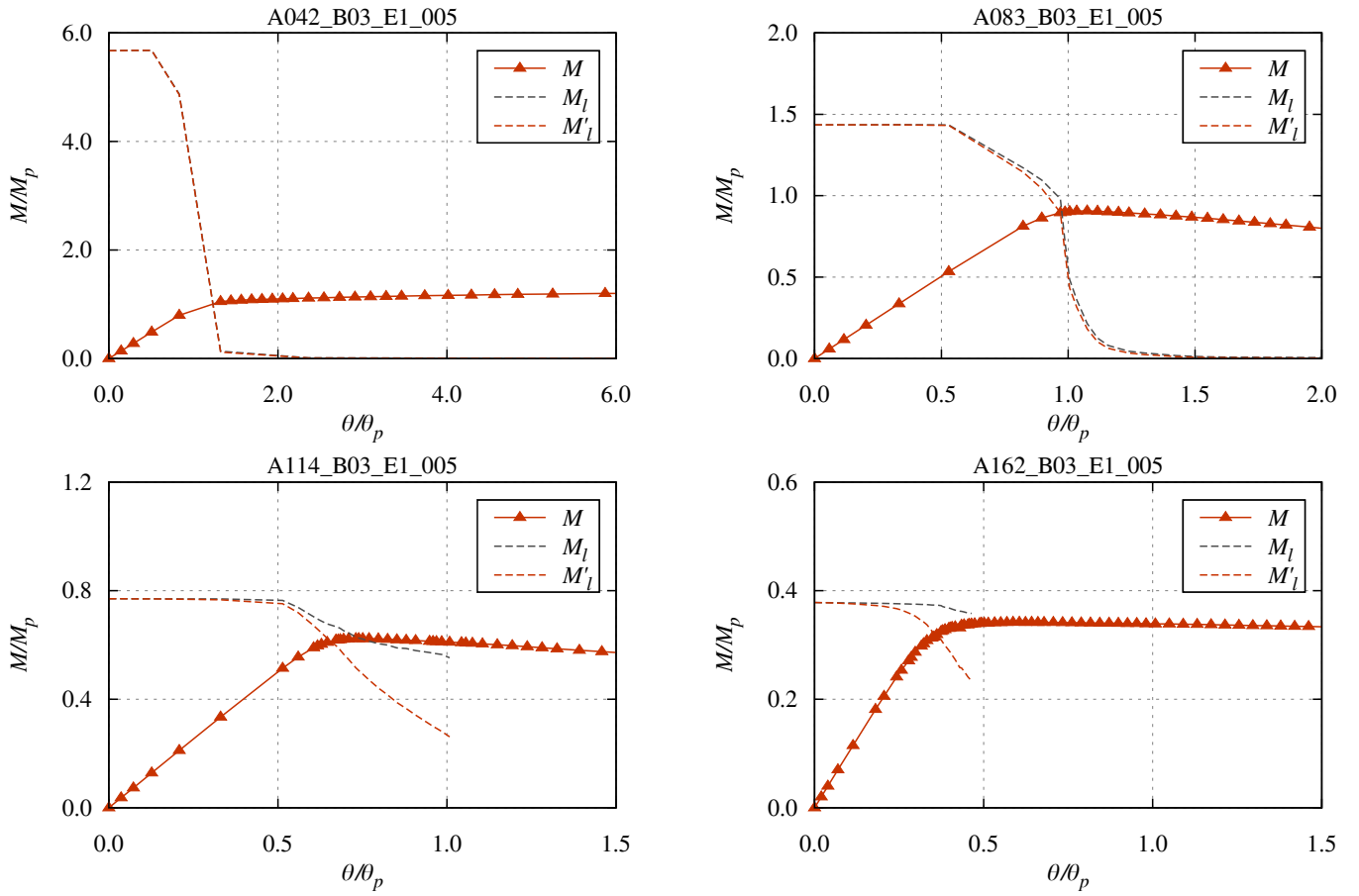


Fig. 5-101 Load-deformation curve: A.B03\_E1\_005

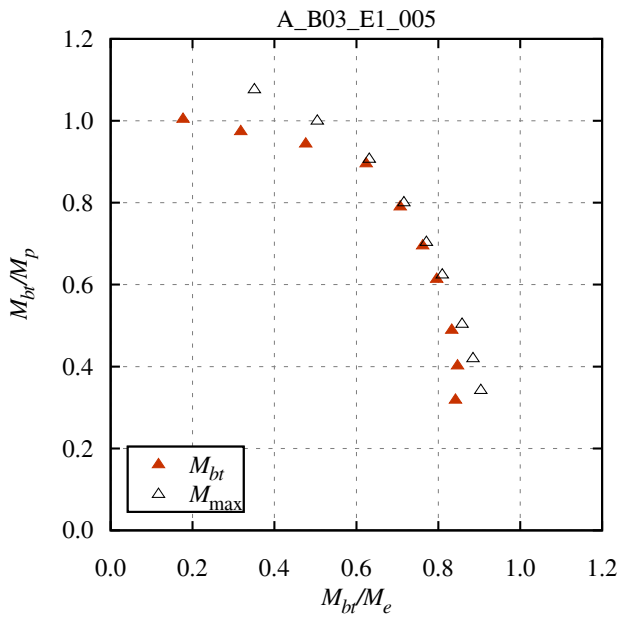


Fig. 5-102 Macroscopic instability surface: A.B03\_E1\_005

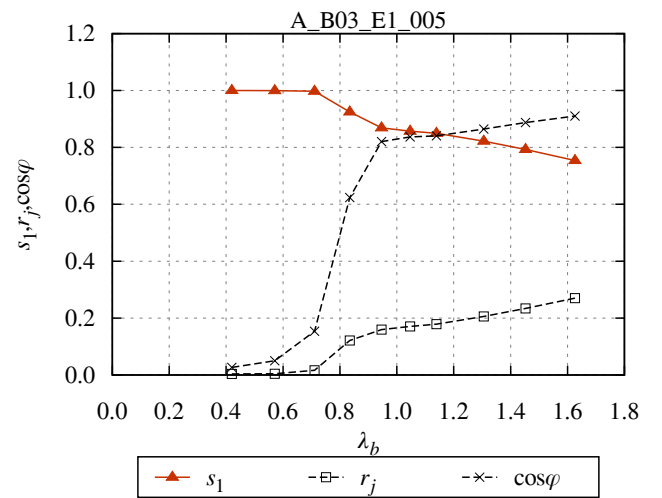


Fig. 5-103  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A.B03\_E1\_005

初期たわみ量=1/2000 (B03\_E1\_005)、片曲げ

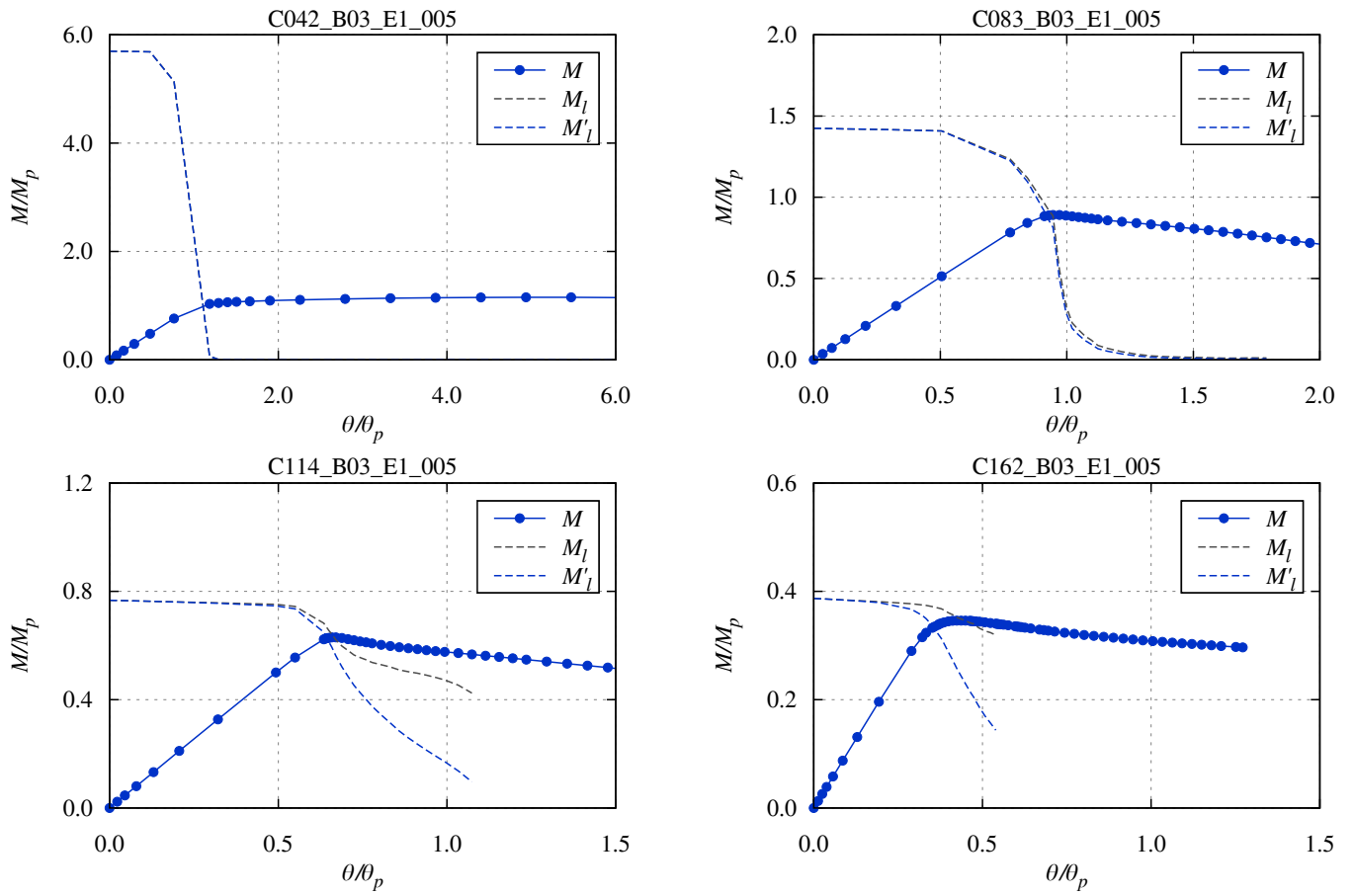


Fig. 5-104 Load-deformation curve: C.B03\_E1\_005

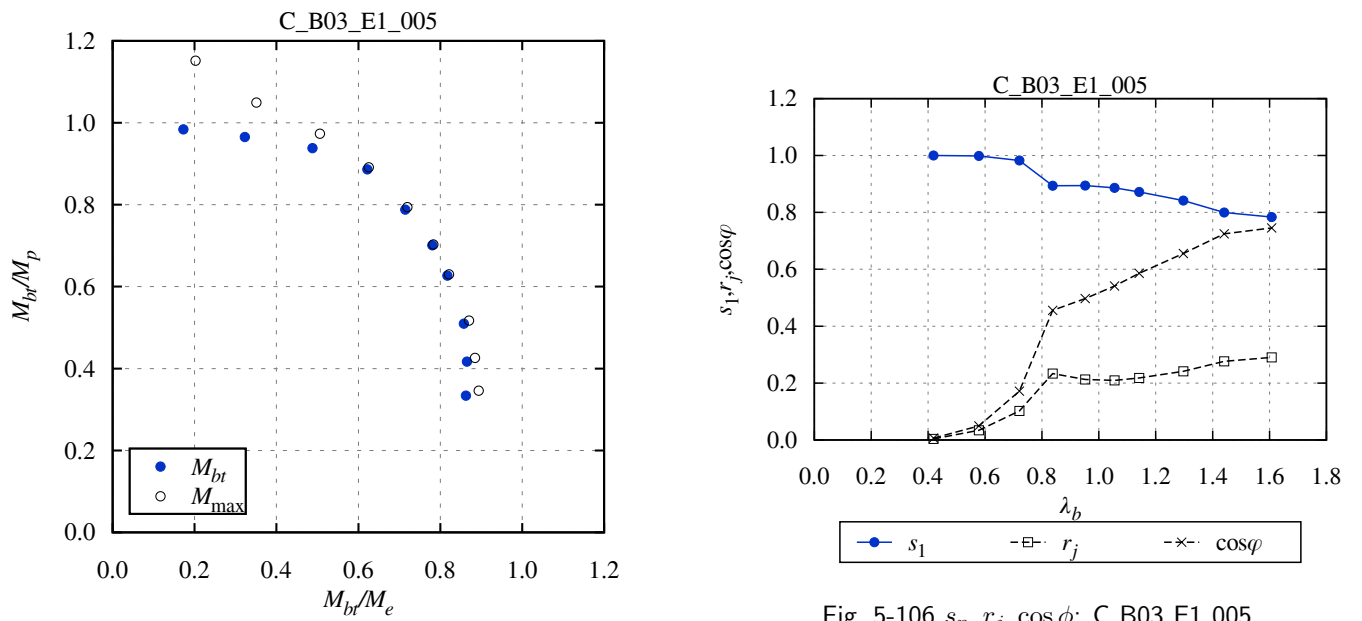


Fig. 5-106  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C.B03\_E1\_005

Fig. 5-105 Macroscopic instability surface: C.B03\_E1\_005

初期たわみ量=1/2000 (B03\_E1\_005)、一様曲げ

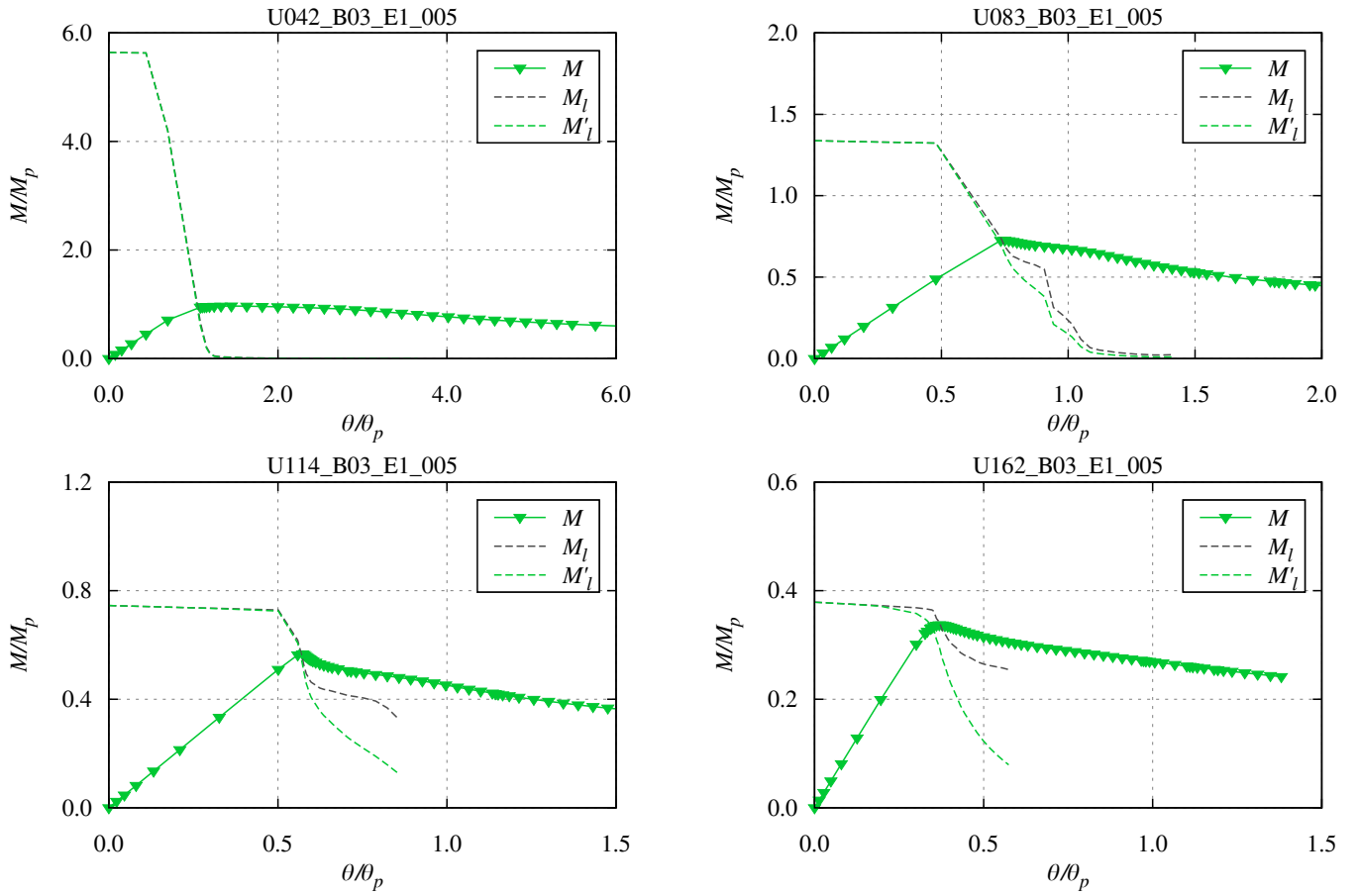


Fig. 5-107 Load-deformation curve: U\_B03\_E1\_005

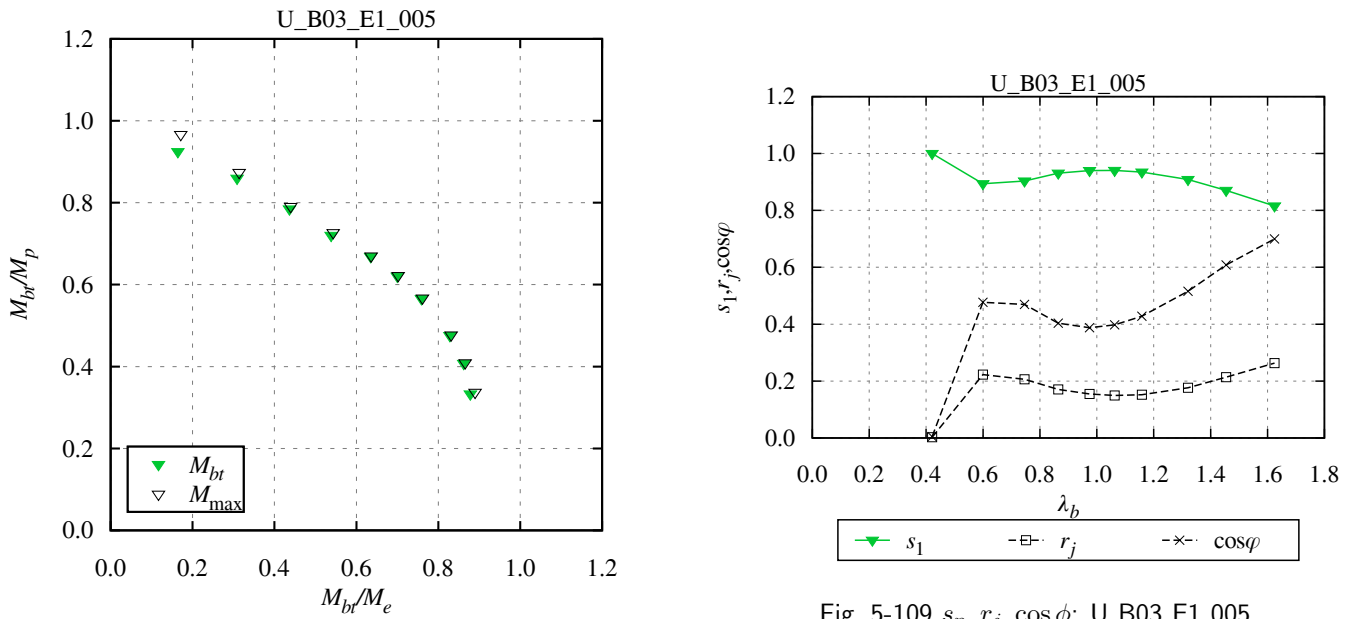


Fig. 5-109  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B03\_E1\_005

Fig. 5-108 Macroscopic instability surface: U\_B03\_E1\_005

初期たわみ量=1/1000 (B03\_E1\_010)、逆対称曲げ

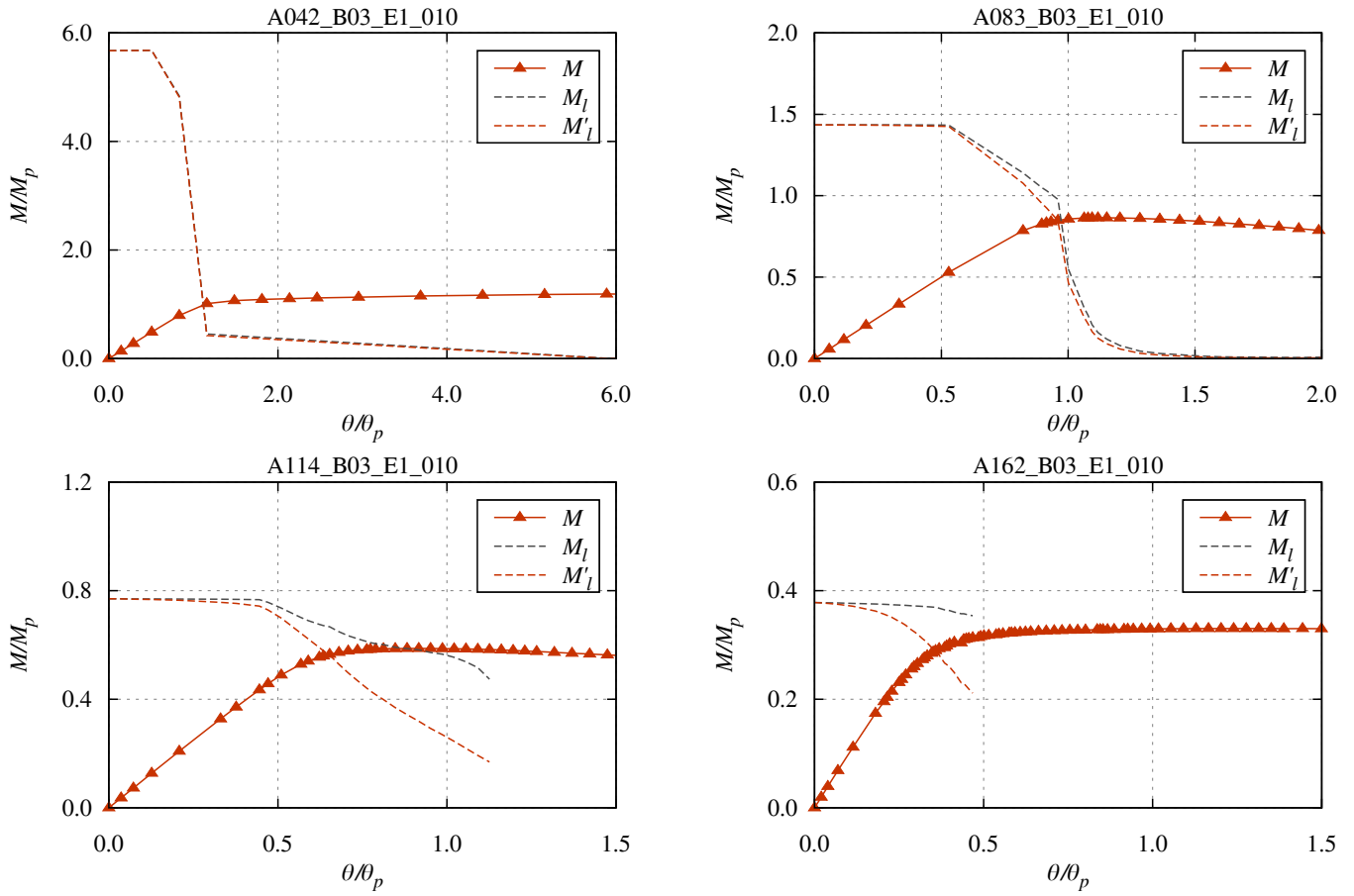


Fig. 5-110 Load-deformation curve: A.B03\_E1\_010

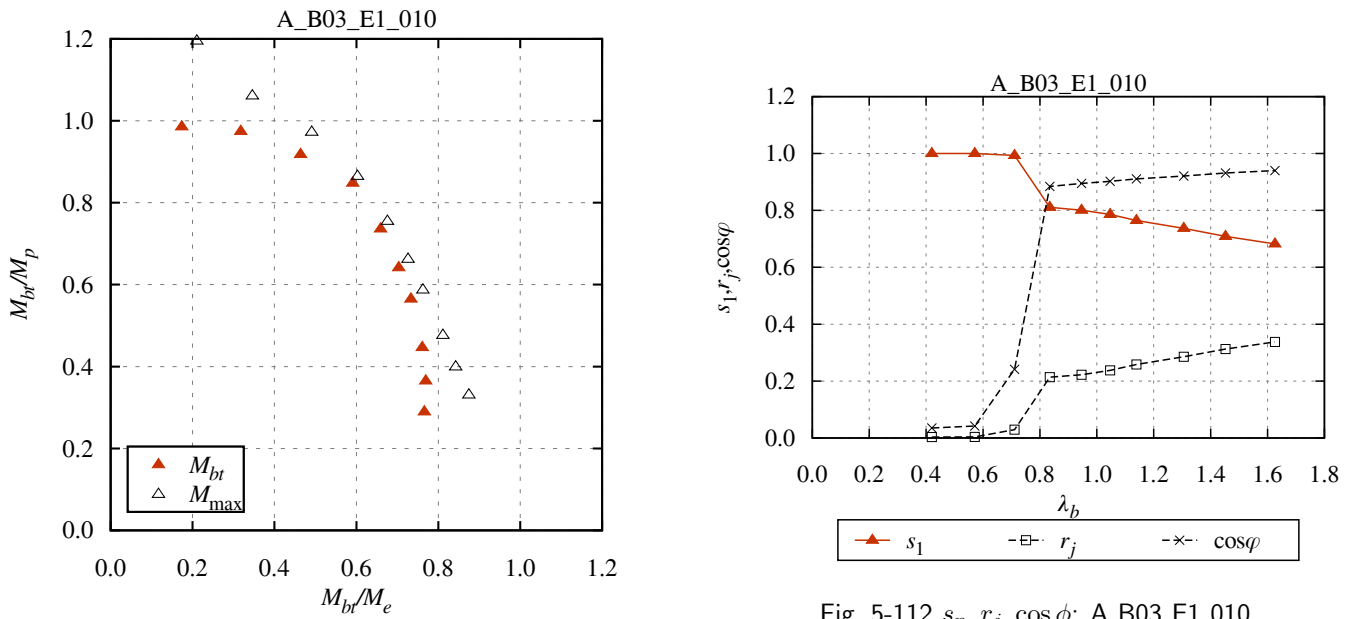


Fig. 5-112  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A.B03\_E1\_010

Fig. 5-111 Macroscopic instability surface: A.B03\_E1\_010



初期たわみ量=1/1000 (B03\_E1\_010)、片曲げ

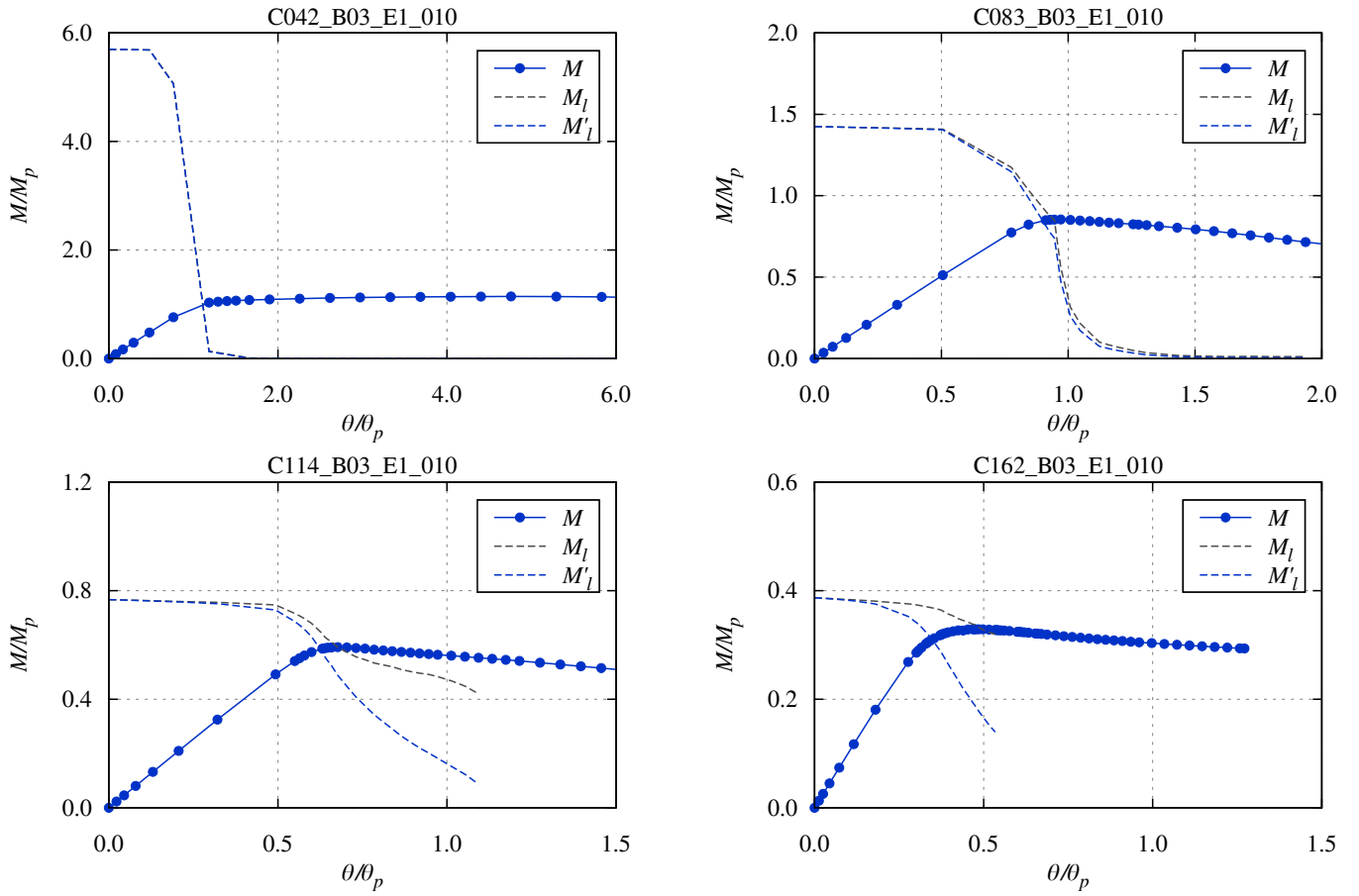


Fig. 5-113 Load-deformation curve: C.B03\_E1\_010

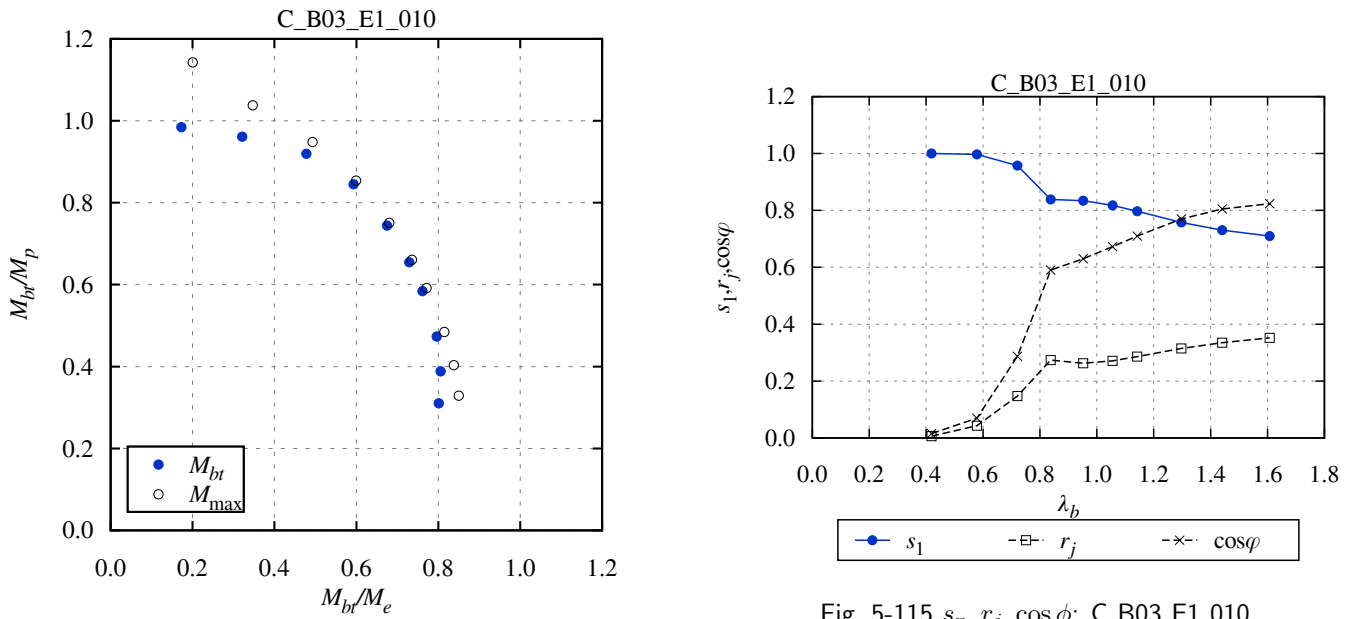


Fig. 5-115  $s_n, r_j, \cos\phi$ : C.B03\_E1\_010

Fig. 5-114 Macroscopic instability surface: C.B03\_E1\_010

初期たわみ量=1/1000 (B03\_E1\_010)、一様曲げ

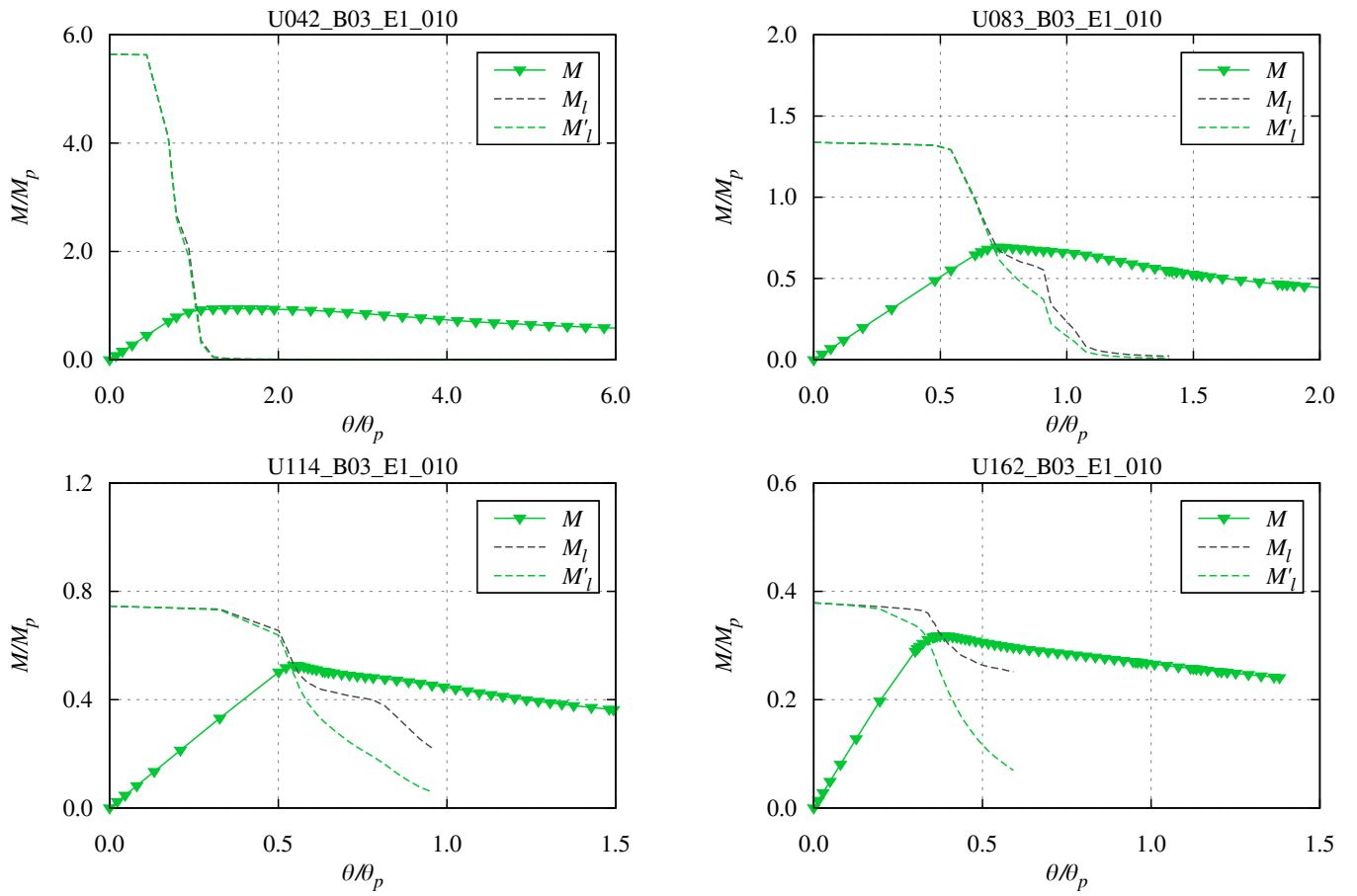


Fig. 5-116 Load-deformation curve: U\_B03\_E1\_010

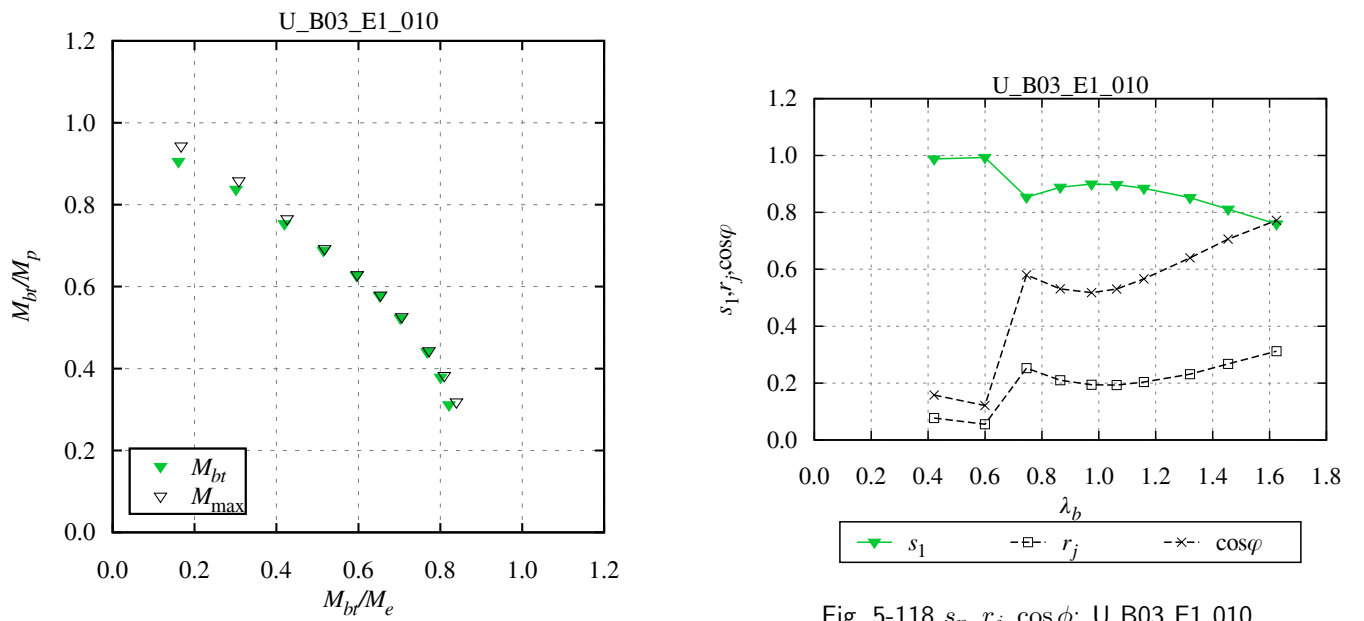


Fig. 5-118  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B03\_E1\_010

Fig. 5-117 Macroscopic instability surface: U\_B03\_E1\_010

初期たわみ量=1/500 (B03\_E1\_020)、逆対称曲げ

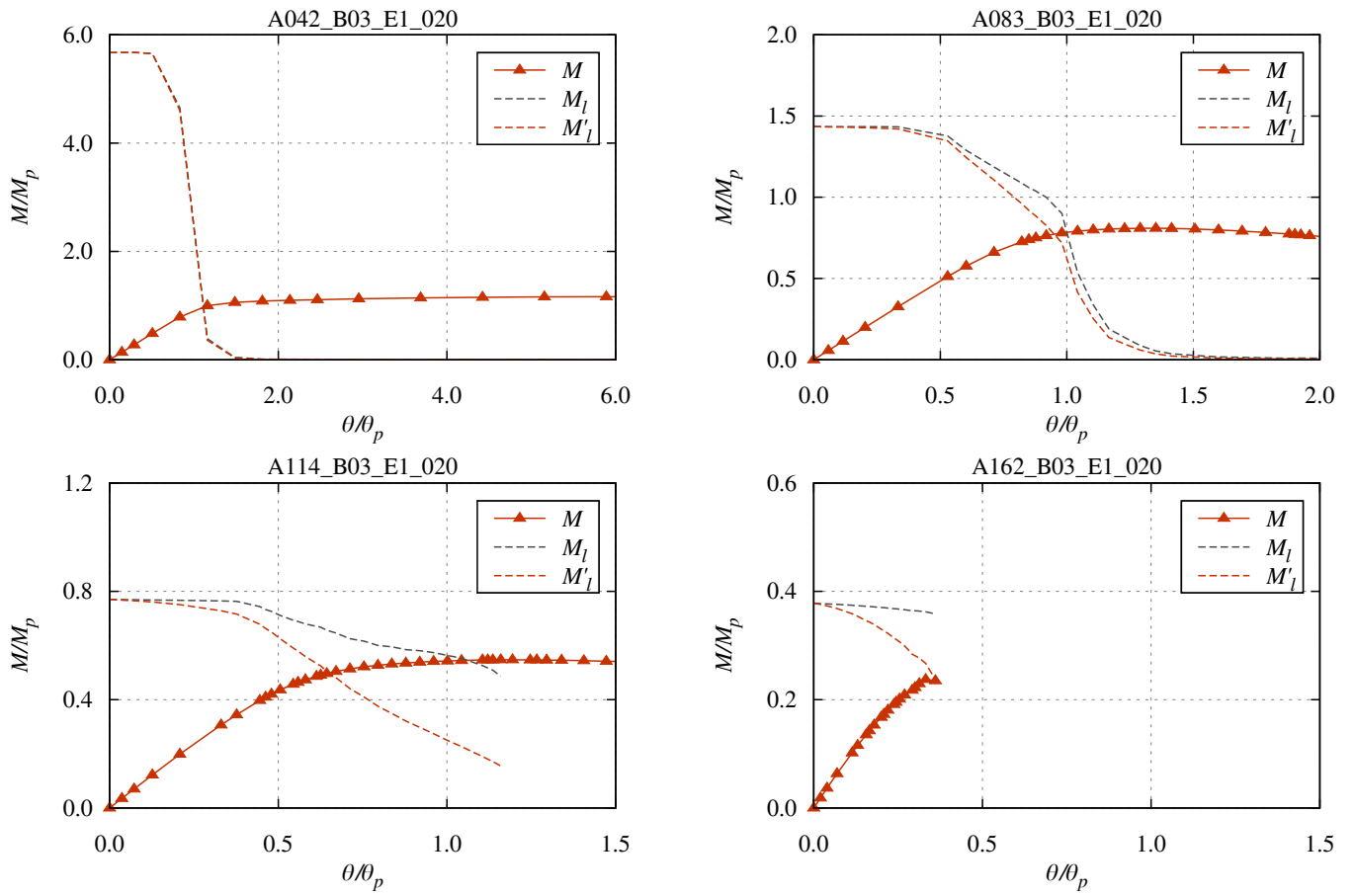


Fig. 5-119 Load-deformation curve: A.B03\_E1\_020

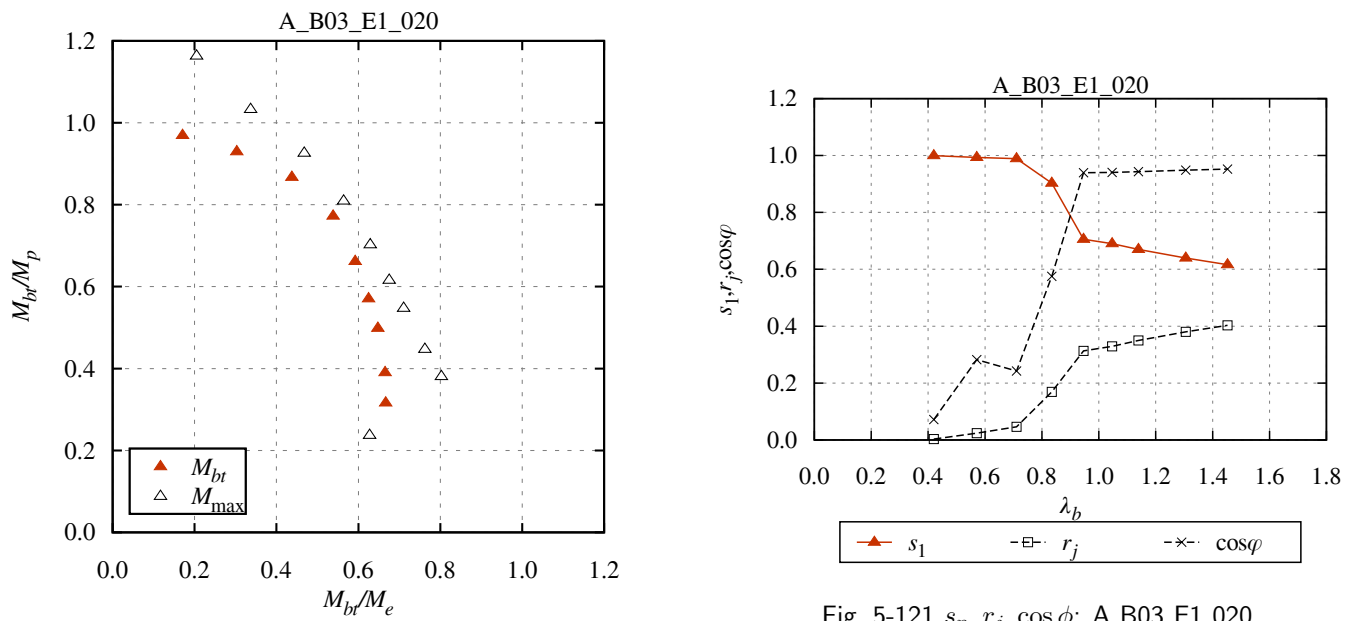


Fig. 5-120 Macroscopic instability surface: A.B03\_E1\_020

初期たわみ量=1/500 (B03\_E1\_020)、片曲げ

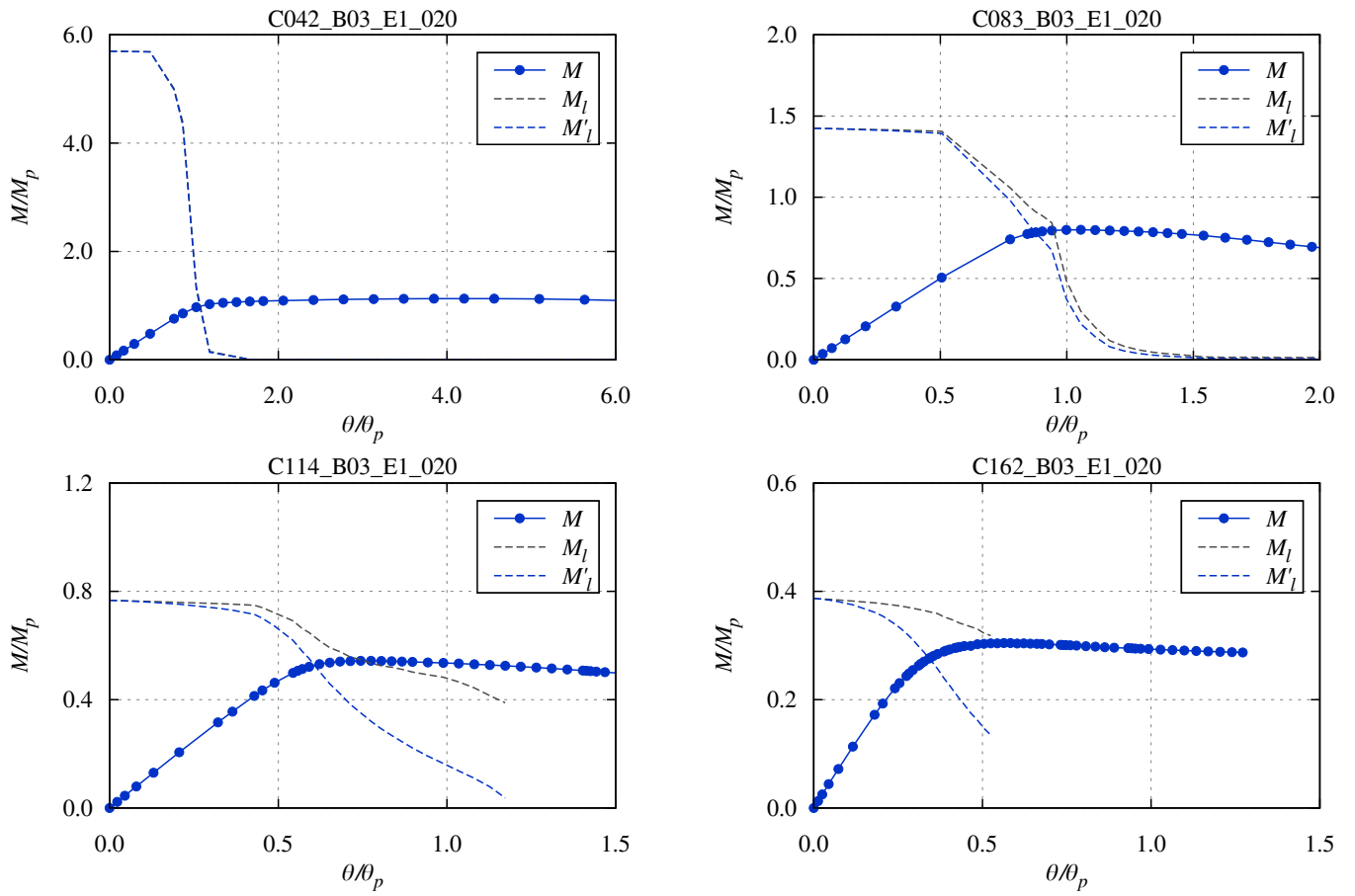


Fig. 5-122 Load-deformation curve: C.B03\_E1\_020

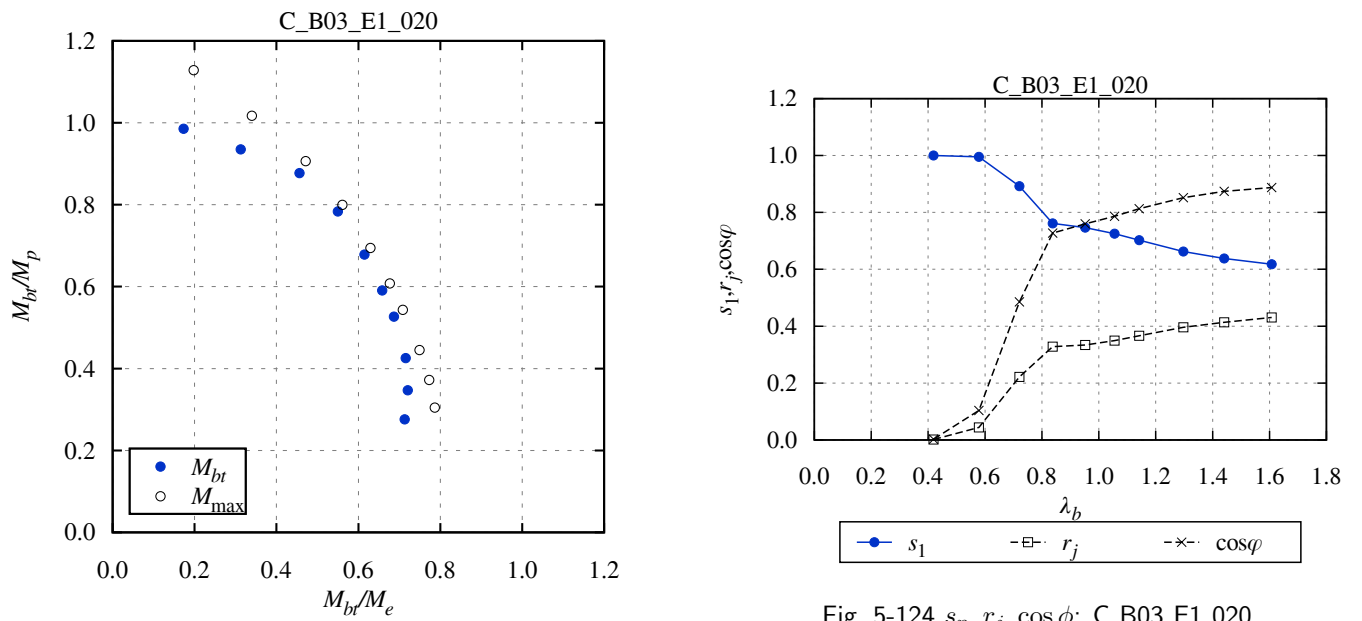


Fig. 5-124  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C.B03\_E1.020

Fig. 5-123 Macroscopic instability surface: C.B03\_E1\_020

初期たわみ量=1/500 (B03\_E1\_020)、一様曲げ

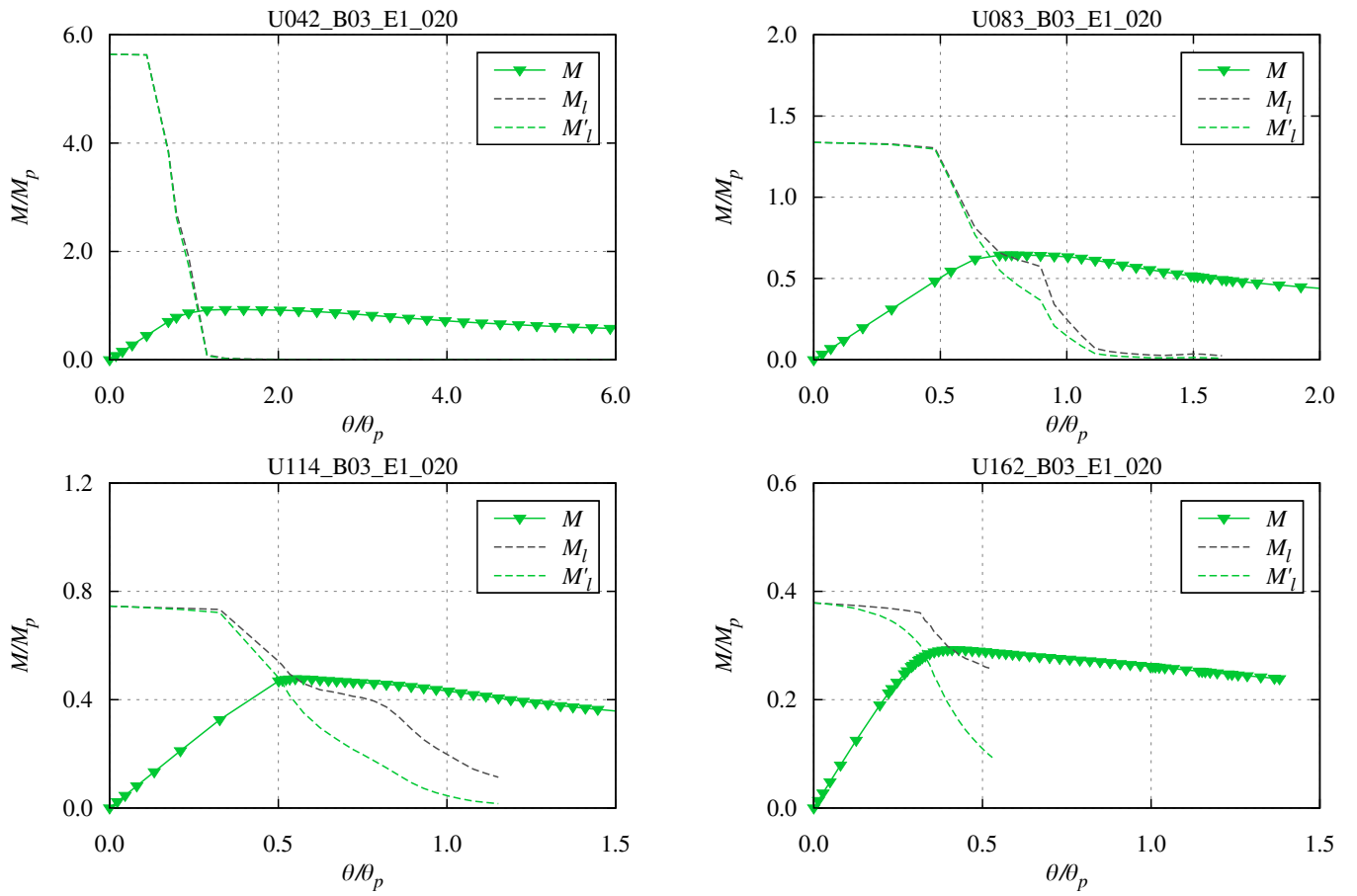


Fig. 5-125 Load-deformation curve: U\_B03\_E1\_020

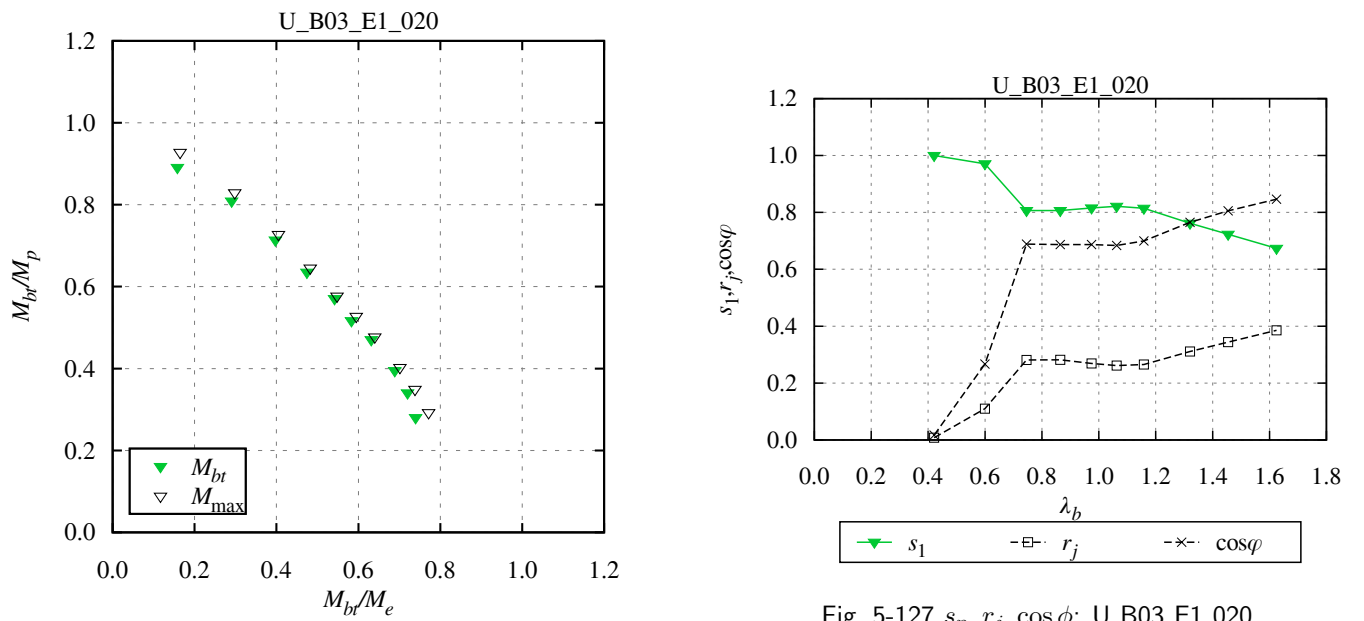


Fig. 5-126 Macroscopic instability surface: U\_B03\_E1\_020

Fig. 5-127  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B03\_E1\_020

5.5.5 バイリニアモデル、残留応力 30%、弾性二次座屈モード形状 (B03\_E2)

初期たわみ量=1/2000 (B03\_E2.005)、逆対称曲げ

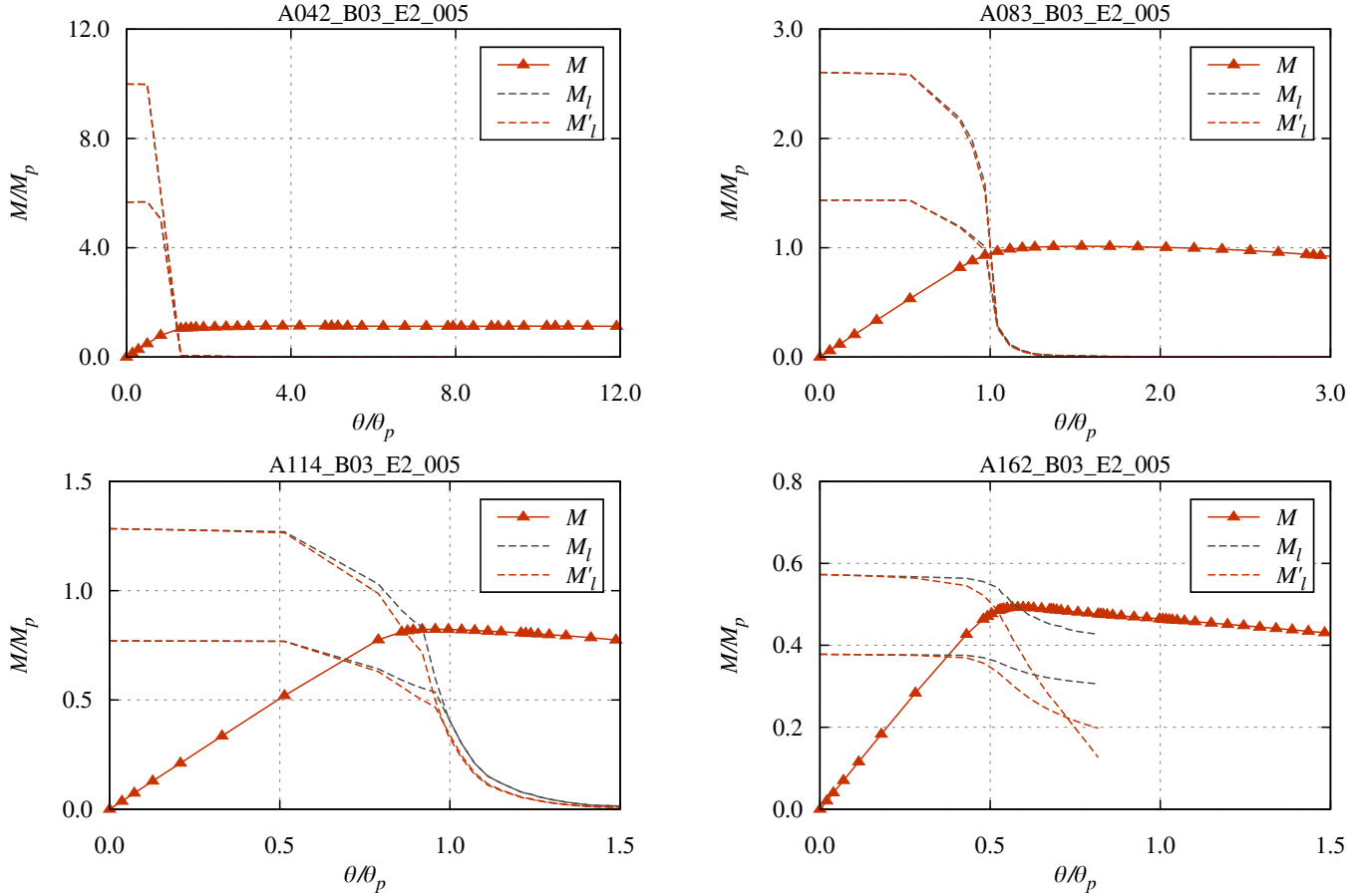


Fig. 5-128 Load-deformation curve: A.B03\_E2.005

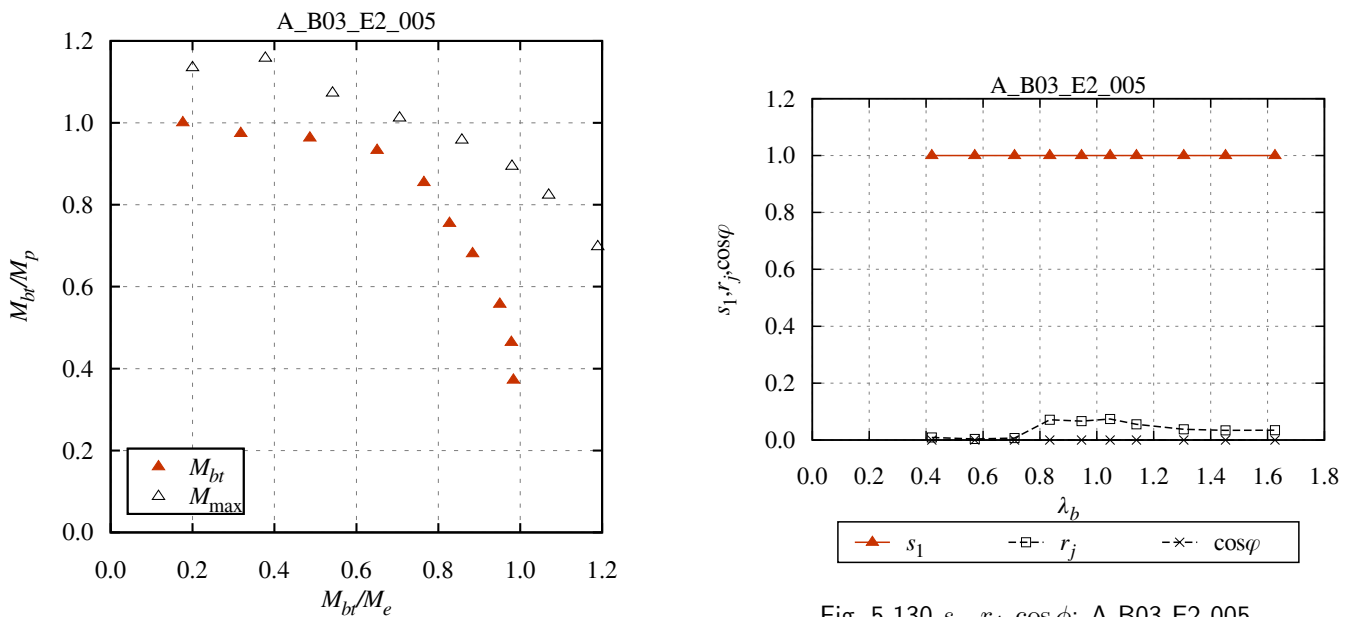


Fig. 5-129 Macroscopic instability surface: A.B03\_E2.005

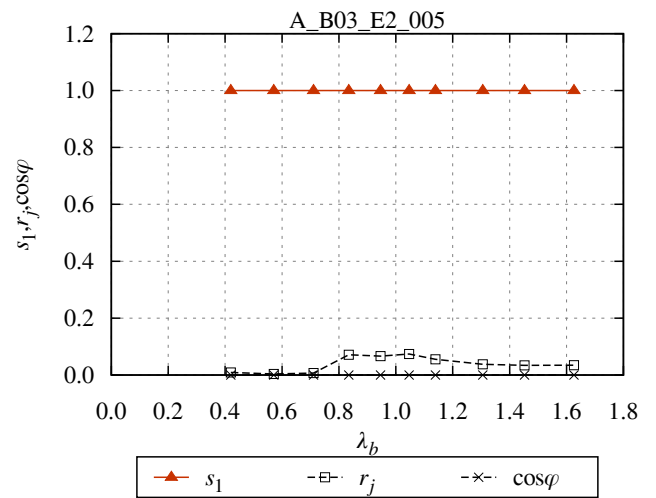


Fig. 5-130  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A.B03\_E2.005

初期たわみ量=1/2000 (B03\_E2\_005)、片曲げ

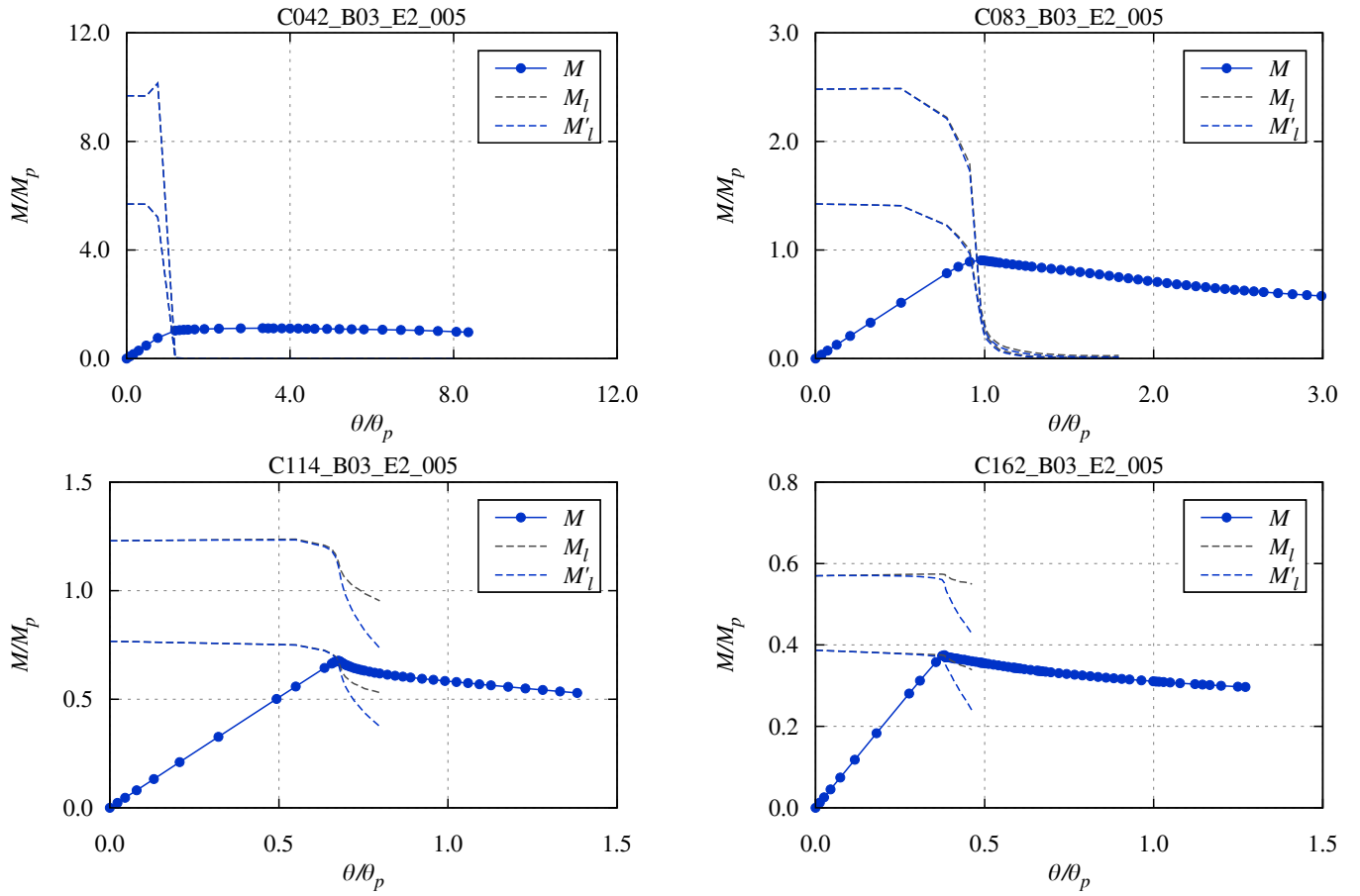


Fig. 5-131 Load-deformation curve: C.B03\_E2\_005

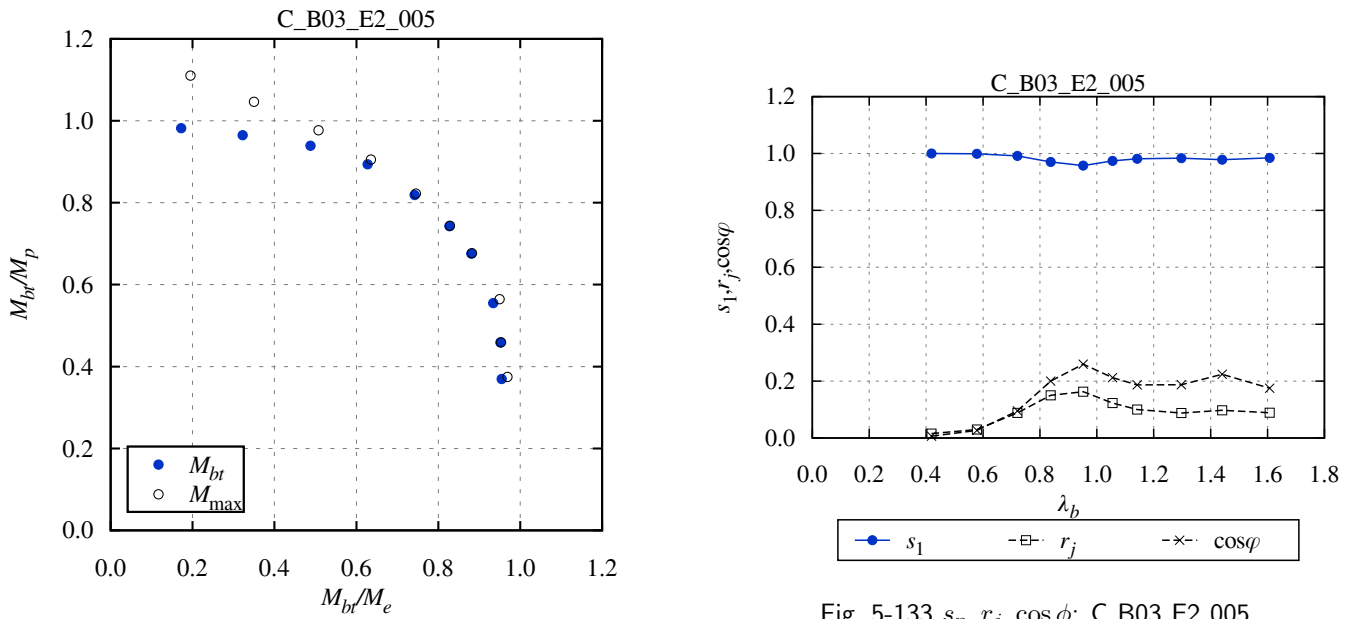


Fig. 5-132 Macroscopic instability surface: C.B03\_E2\_005

Fig. 5-133  $s_n, r_j, \cos\phi$ : C.B03\_E2\_005

初期たわみ量=1/2000 (B03\_E2\_005)、一様曲げ

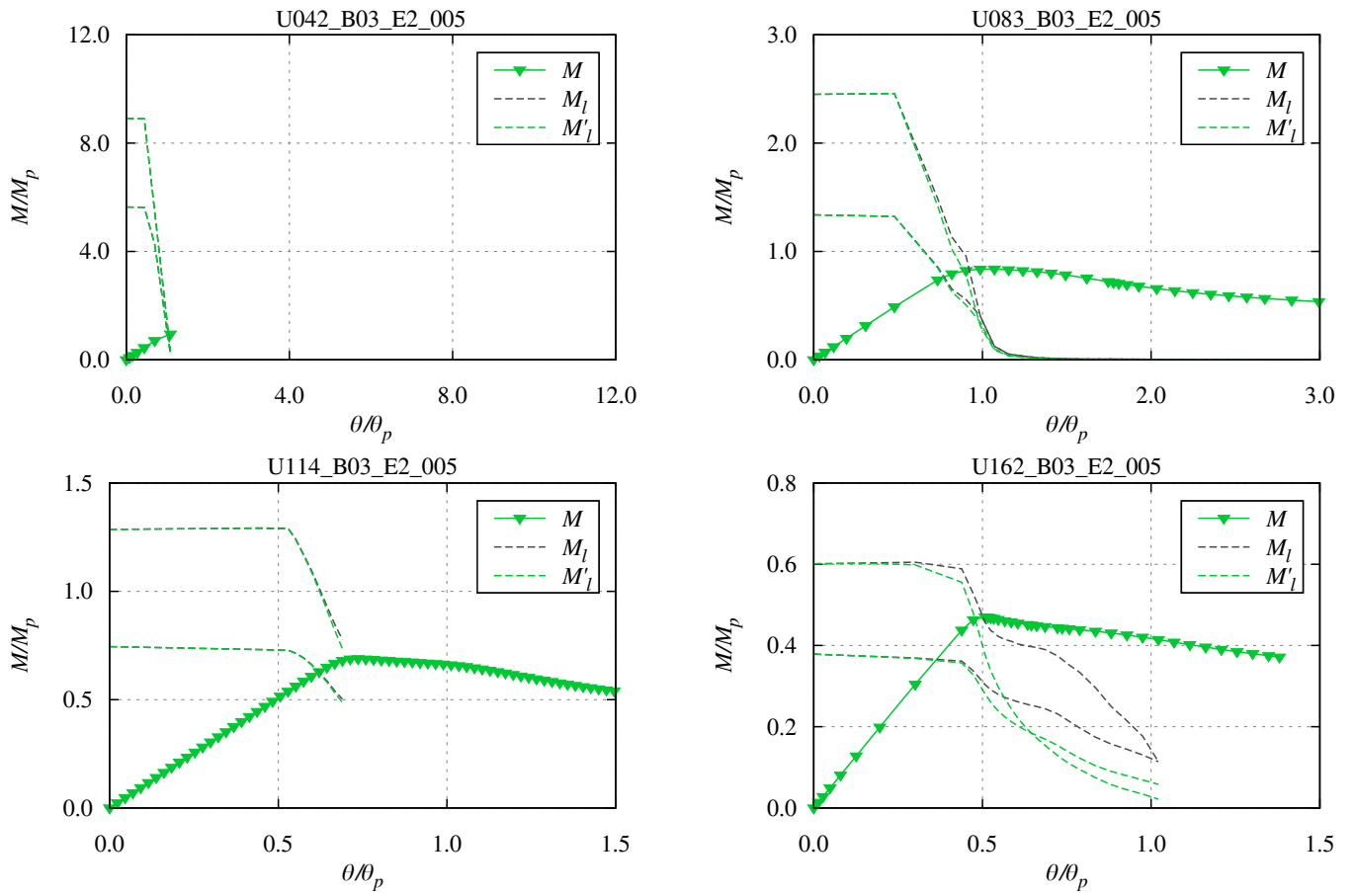


Fig. 5-134 Load-deformation curve: U.B03\_E2\_005

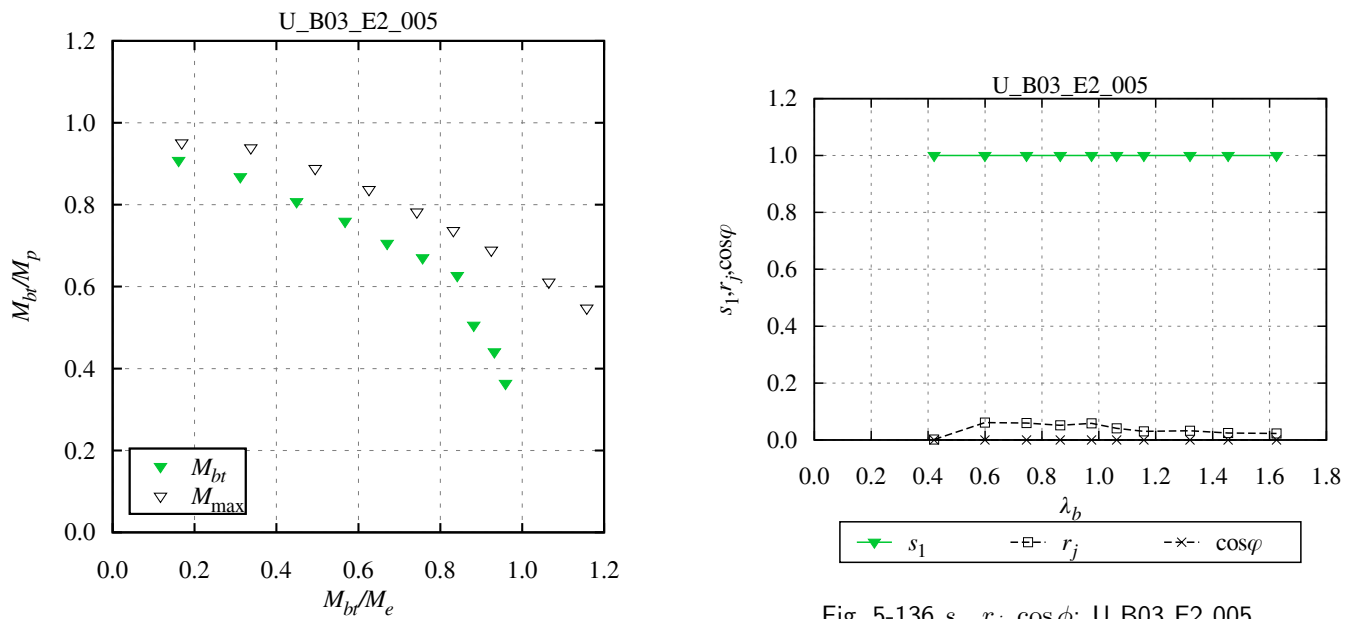


Fig. 5-136  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U.B03\_E2\_005

Fig. 5-135 Macroscopic instability surface: U.B03\_E2\_005



初期たわみ量=1/1000 (B03\_E2\_010)、逆対称曲げ

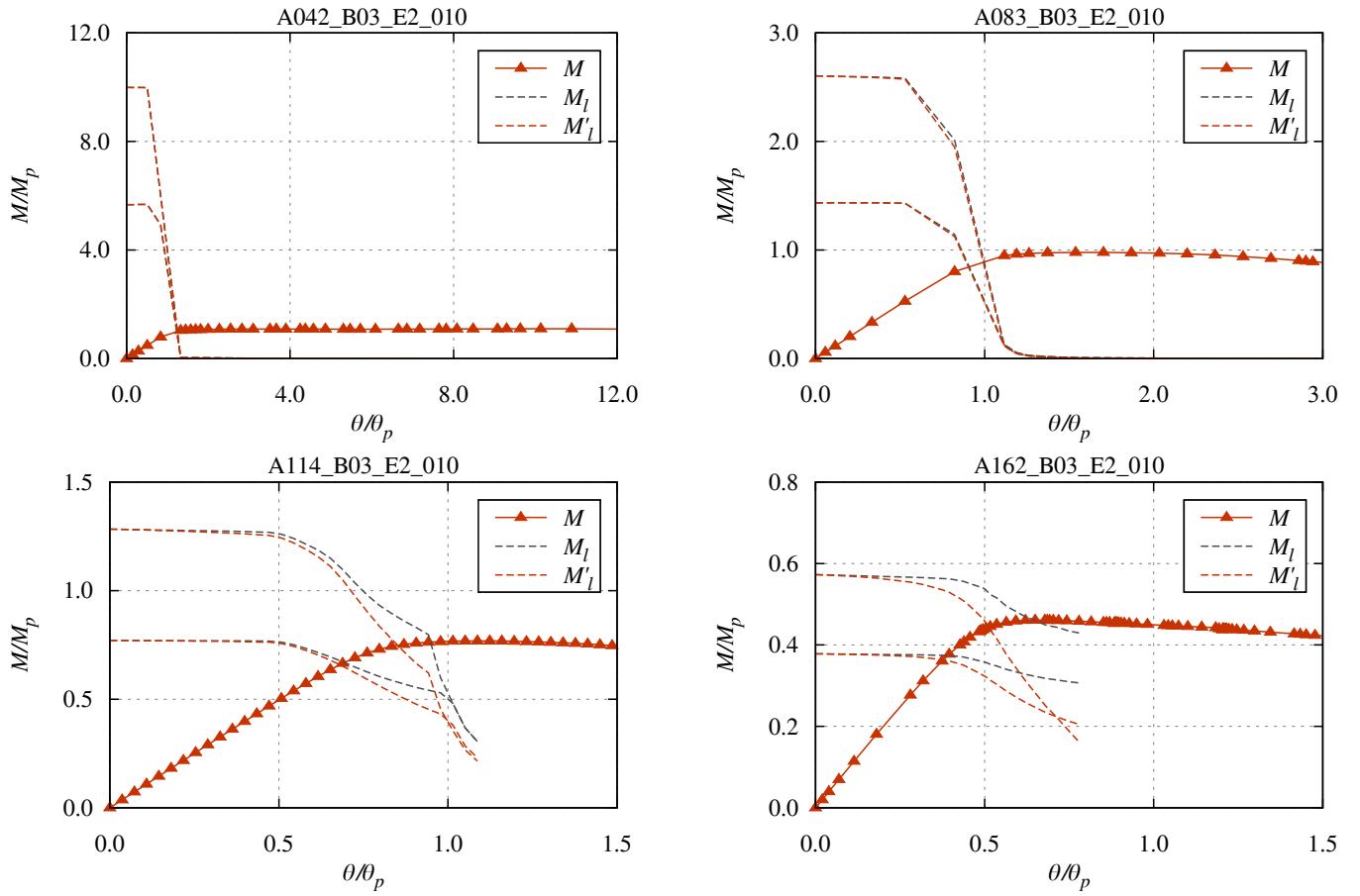


Fig. 5-137 Load-deformation curve: A.B03\_E2\_010

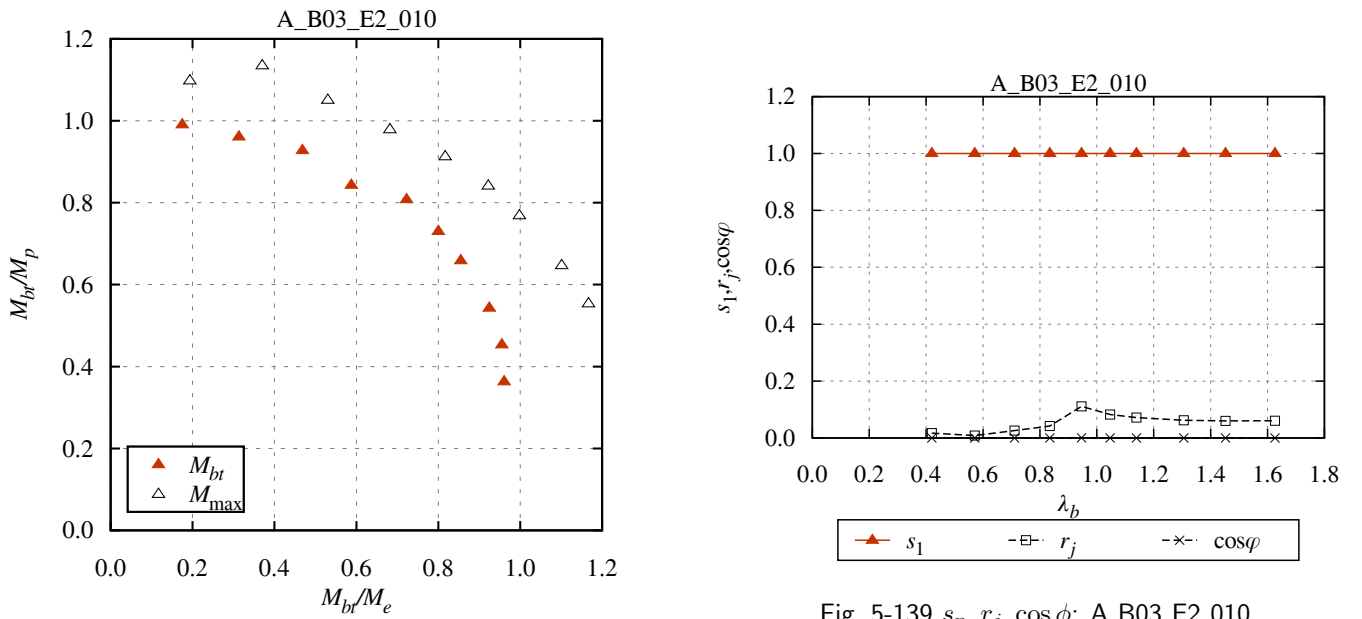


Fig. 5-139  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A.B03\_E2\_010

Fig. 5-138 Macroscopic instability surface: A.B03\_E2\_010

初期たわみ量=1/1000 (B03\_E2\_010)、片曲げ

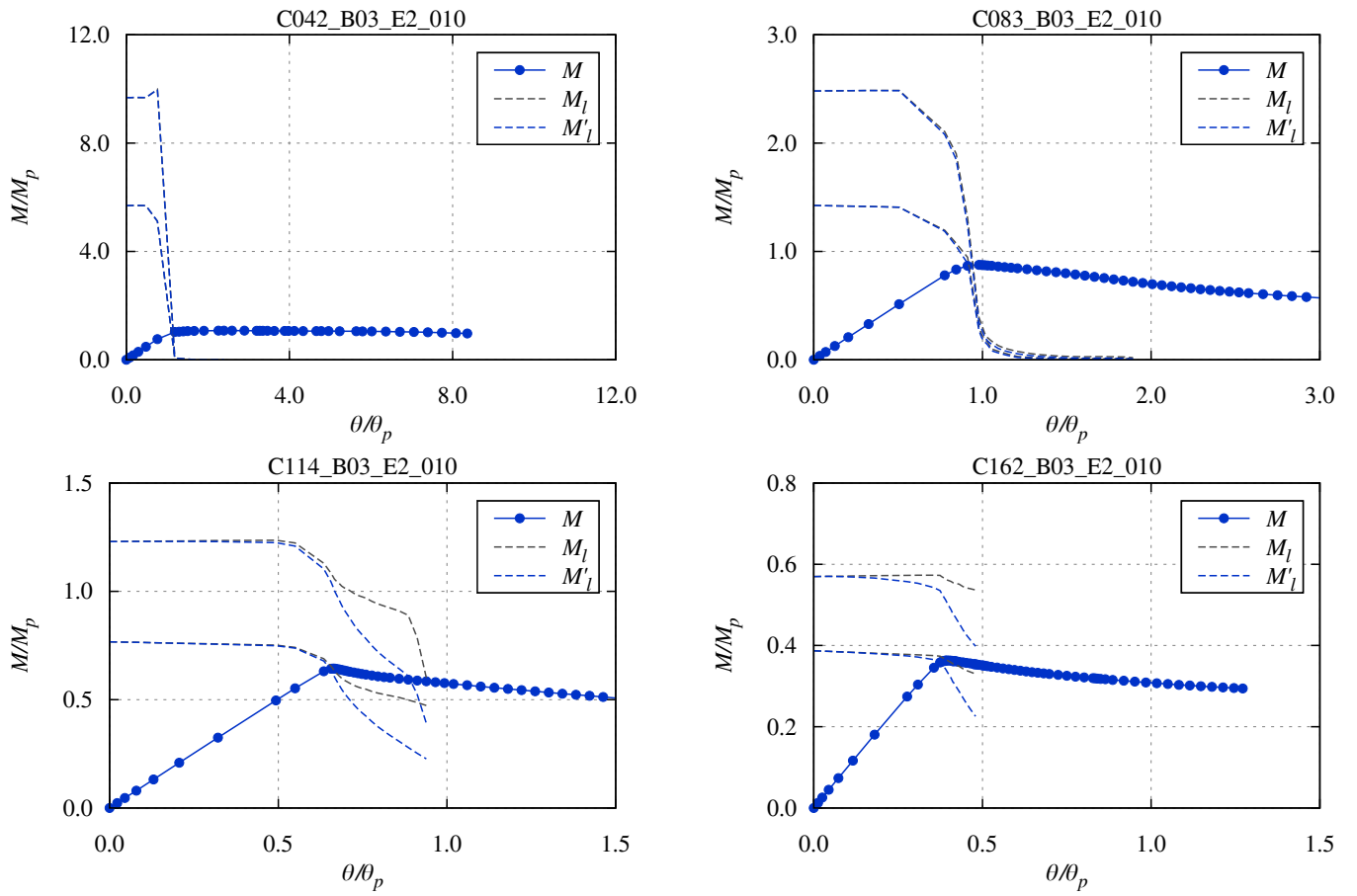


Fig. 5-140 Load-deformation curve: C.B03\_E2\_010

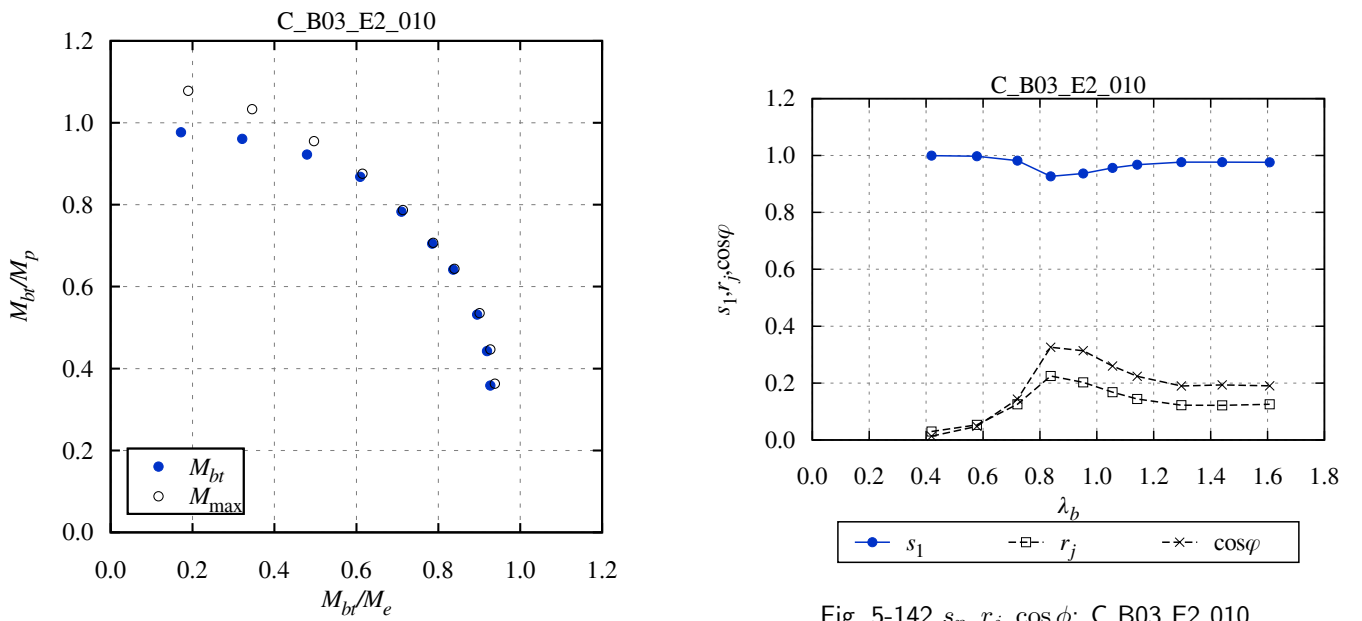


Fig. 5-142  $s_n, r_j, \cos\phi$ : C.B03\_E2\_010

Fig. 5-141 Macroscopic instability surface: C.B03\_E2\_010

初期たわみ量=1/1000 (B03\_E2\_010)、一様曲げ

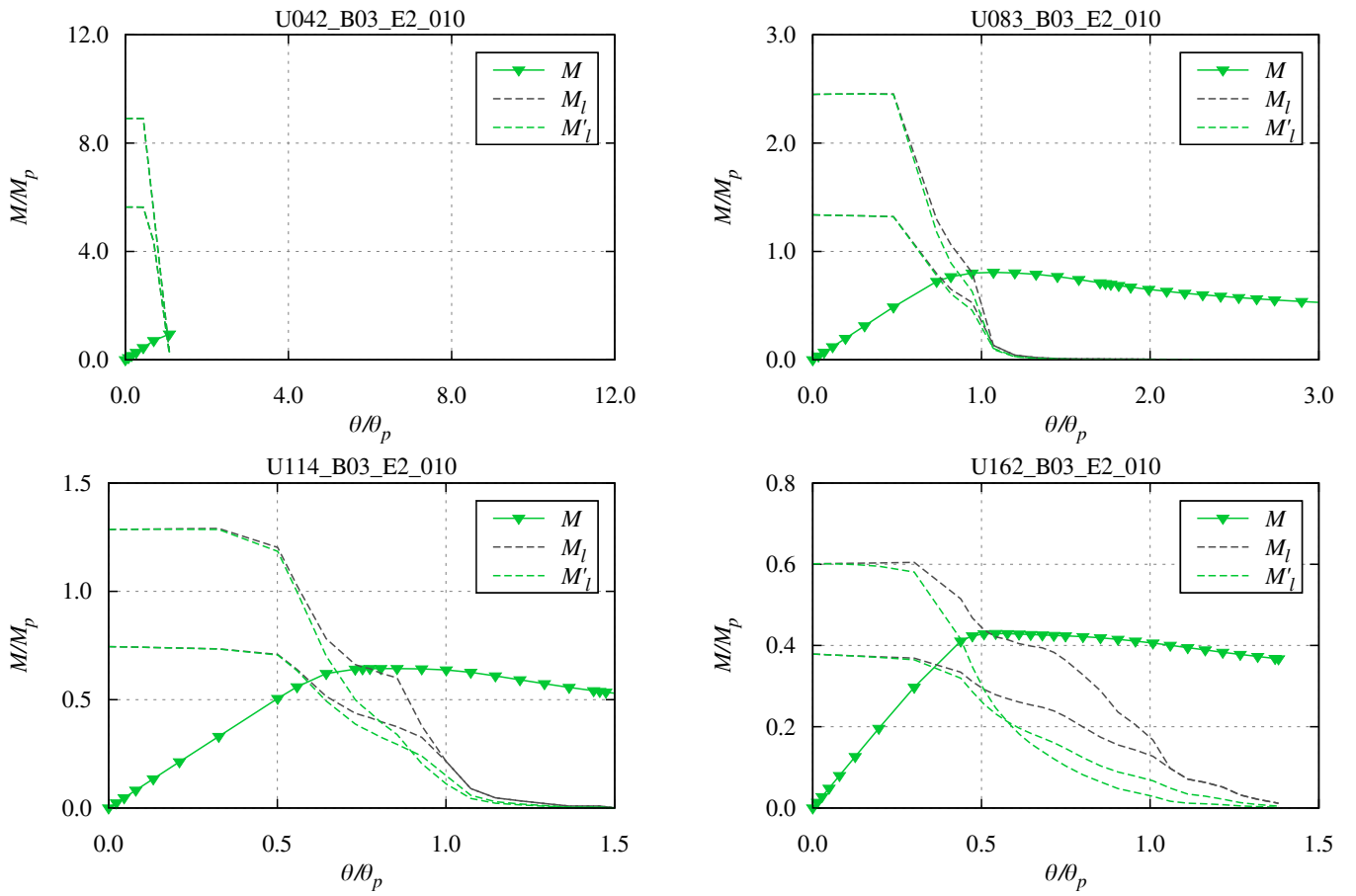


Fig. 5-143 Load-deformation curve: U.B03\_E2\_010

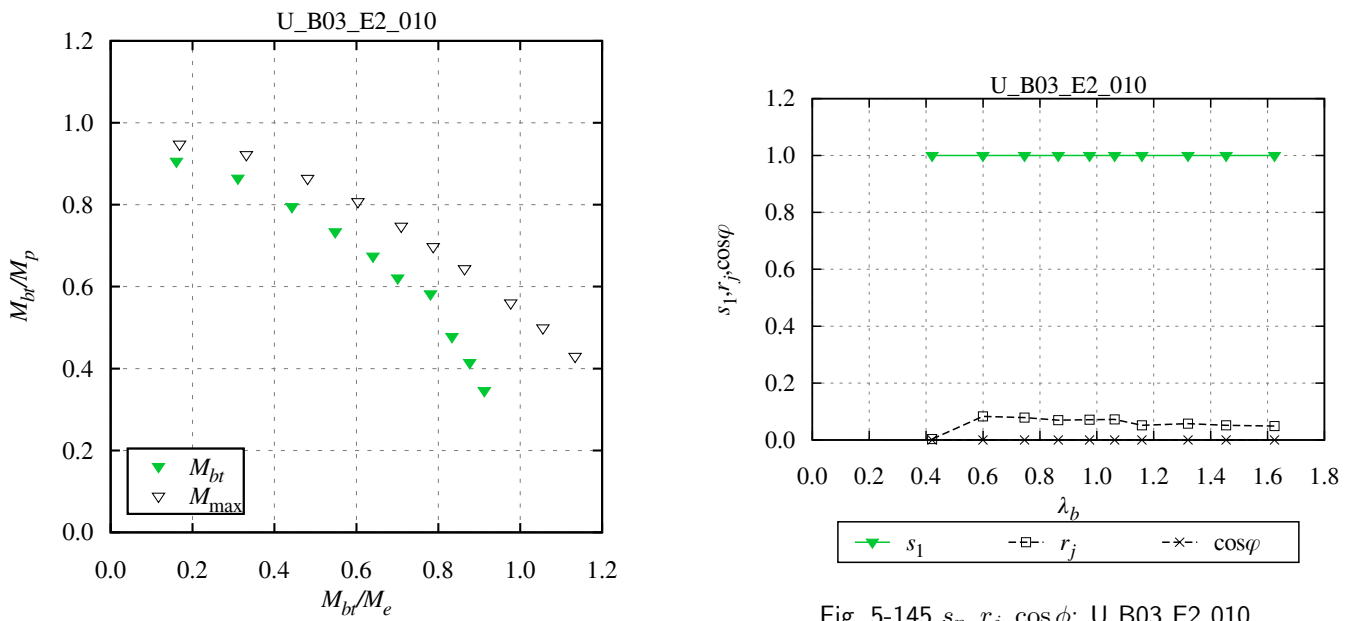


Fig. 5-145  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U.B03\_E2\_010

Fig. 5-144 Macroscopic instability surface: U.B03\_E2\_010

初期たわみ量=1/500 (B03\_E2\_020)、逆対称曲げ

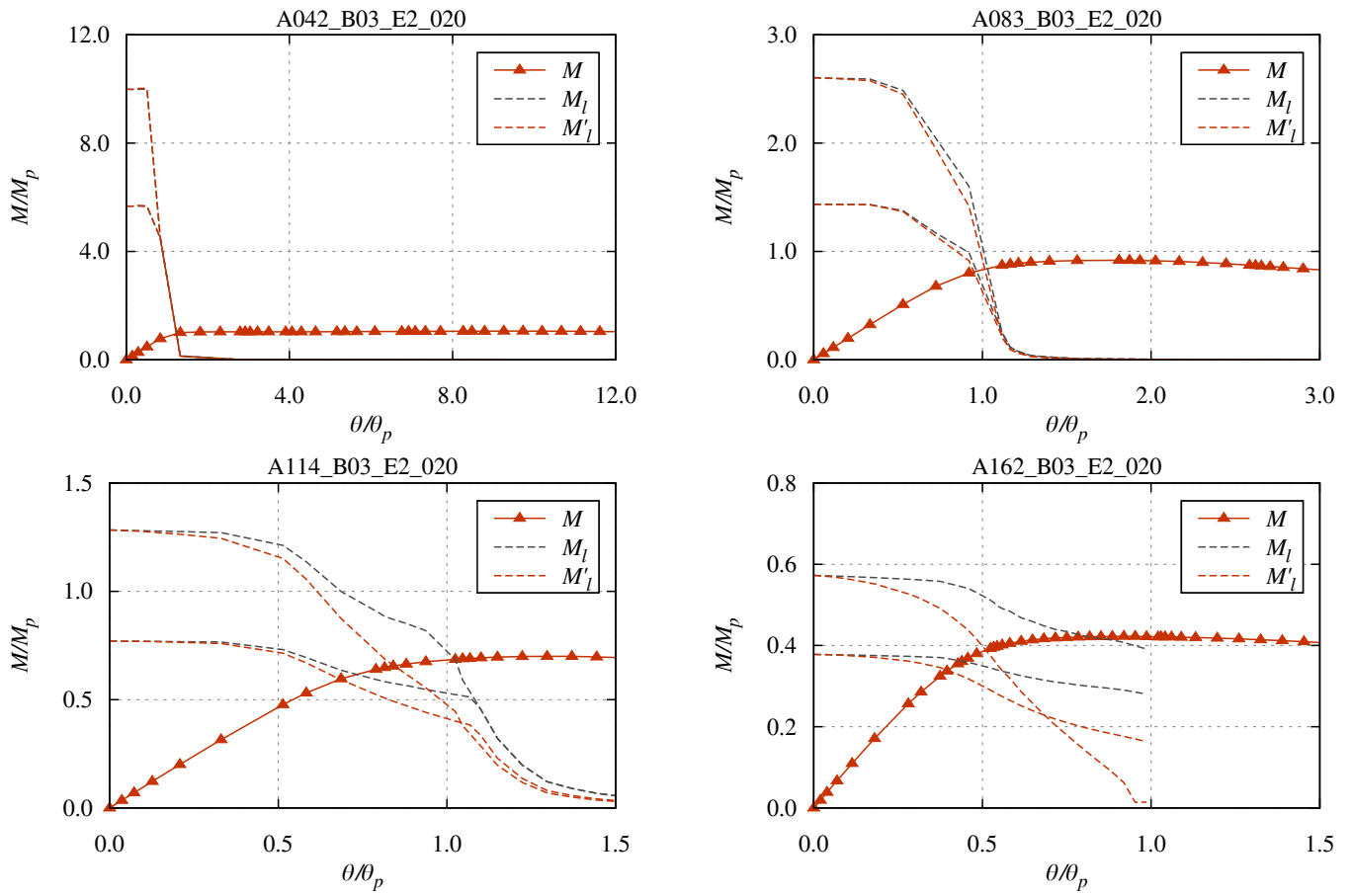


Fig. 5-146 Load-deformation curve: A.B03\_E2\_020

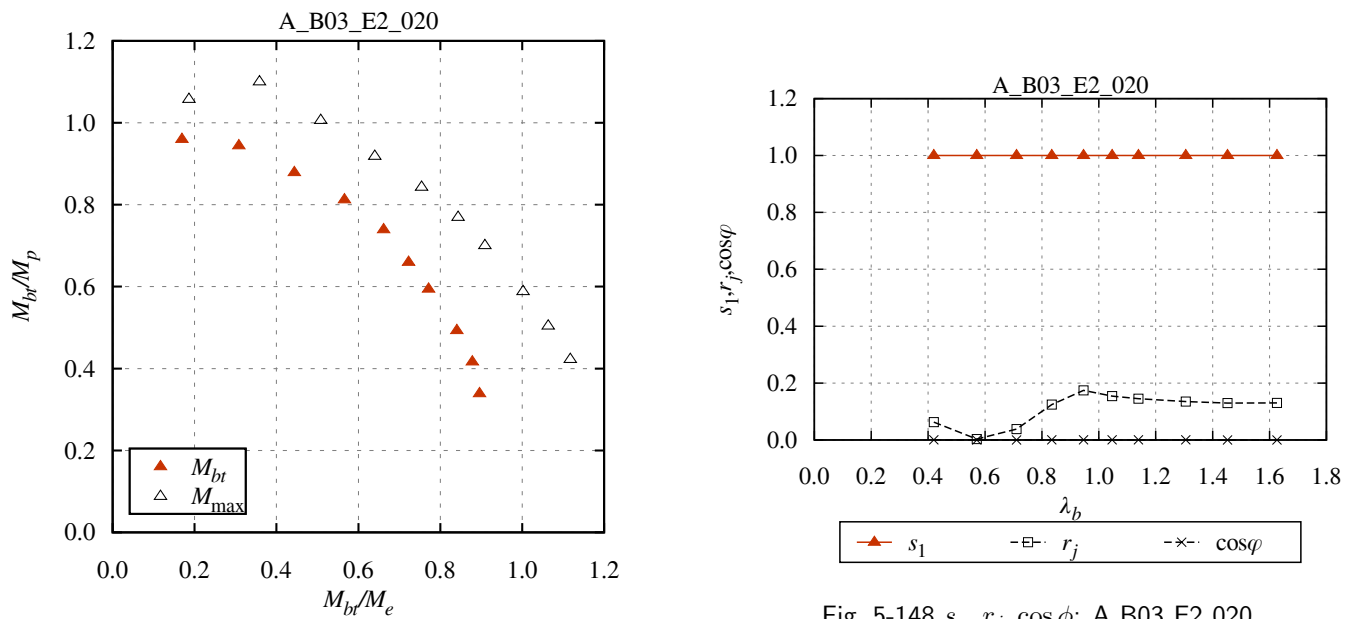


Fig. 5-148  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A.B03\_E2\_020

Fig. 5-147 Macroscopic instability surface: A.B03\_E2\_020

初期たわみ量=1/500 (B03\_E2\_020)、片曲げ

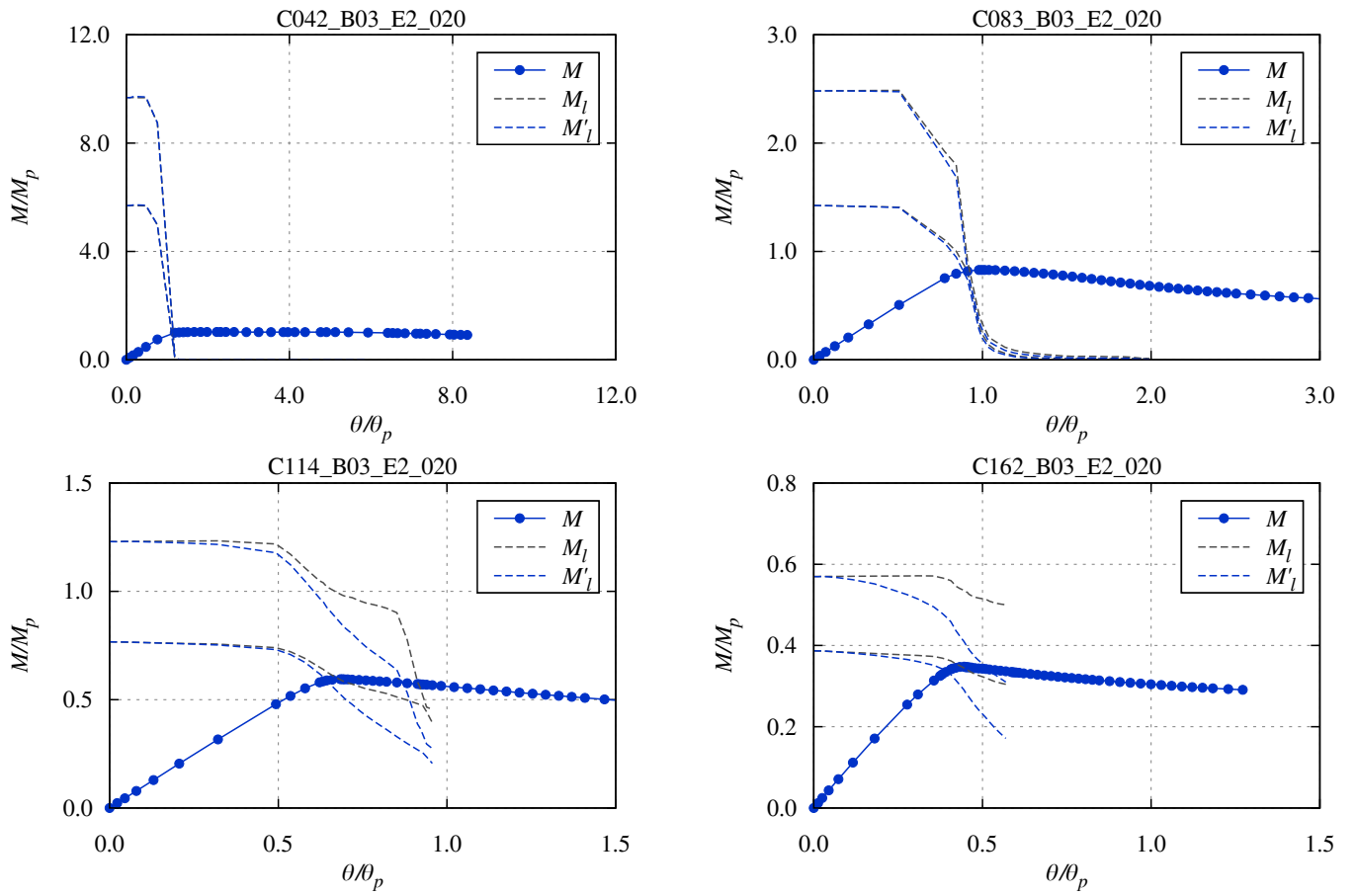


Fig. 5-149 Load-deformation curve: C.B03\_E2\_020

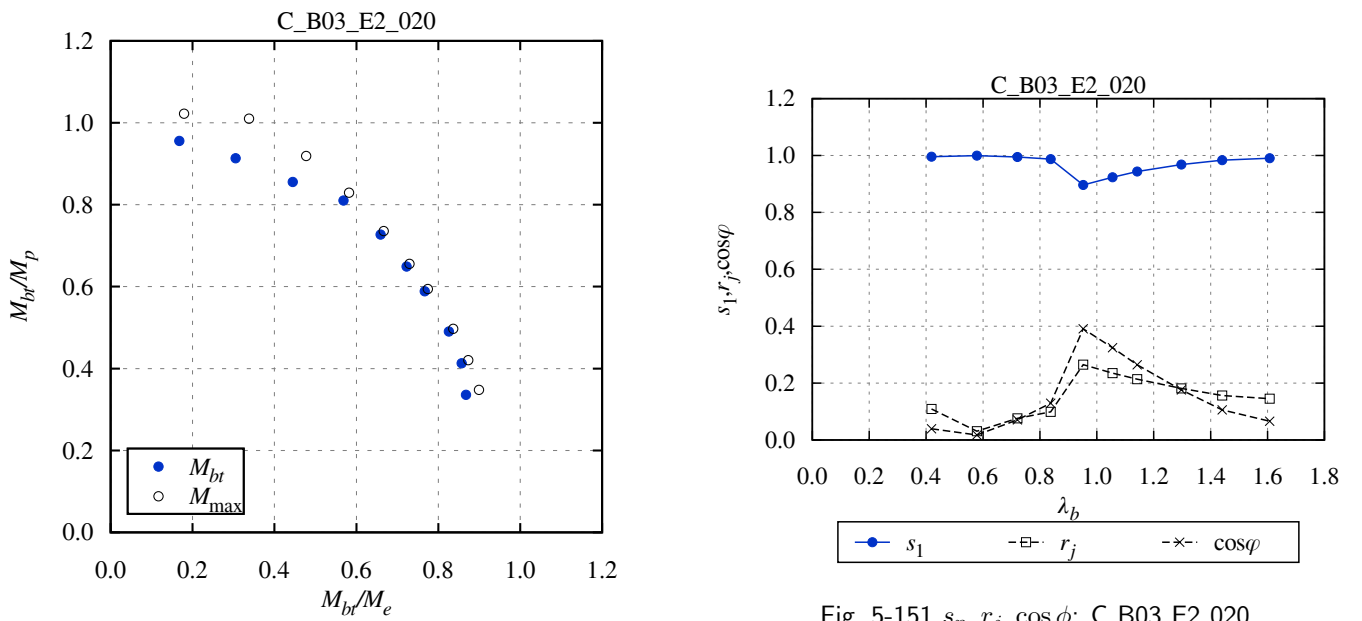


Fig. 5-151  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C.B03\_E2\_020

Fig. 5-150 Macroscopic instability surface: C.B03\_E2\_020

初期たわみ量=1/500 (B03\_E2\_020)、一様曲げ

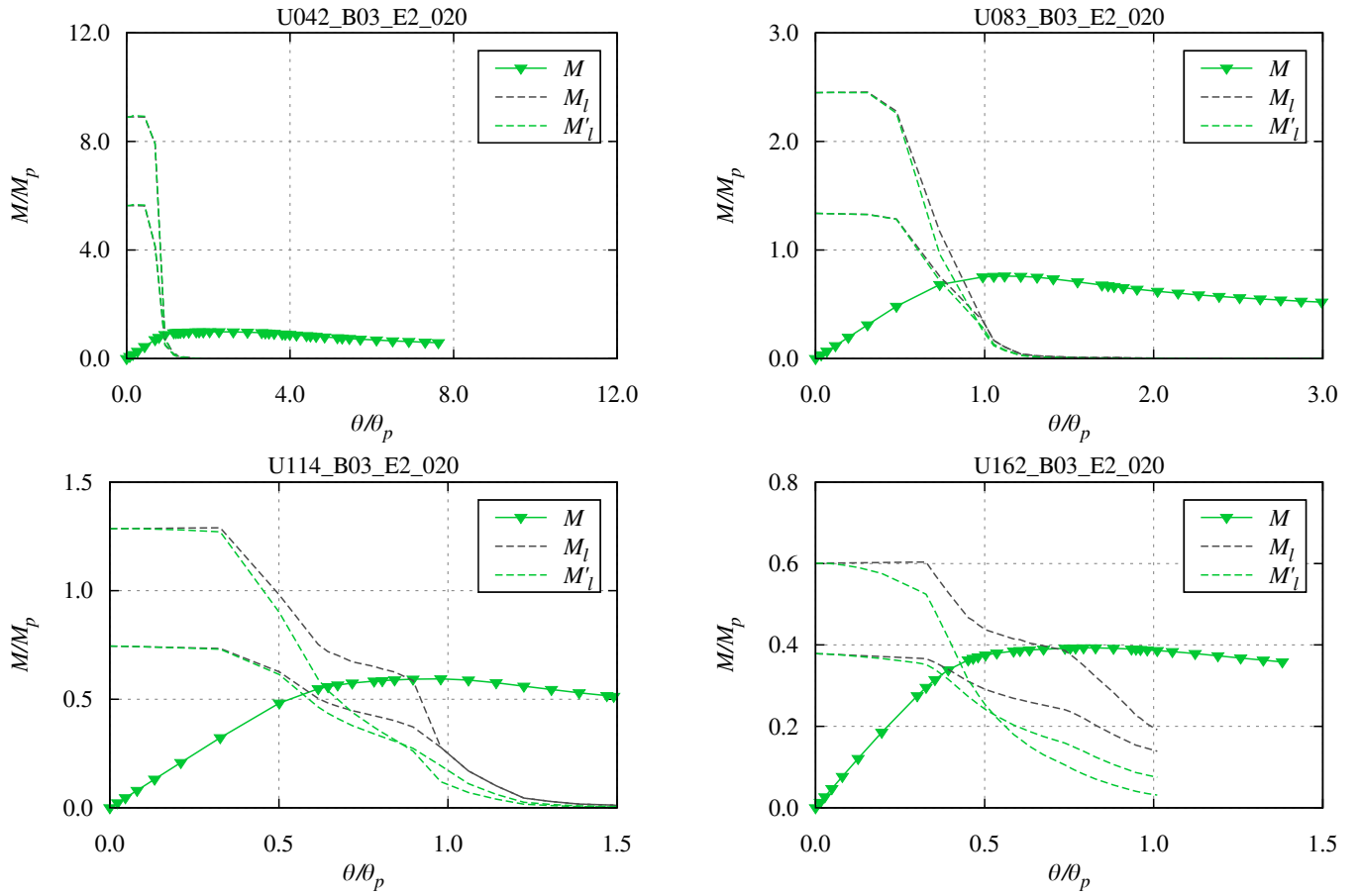


Fig. 5-152 Load-deformation curve: U.B03\_E2\_020

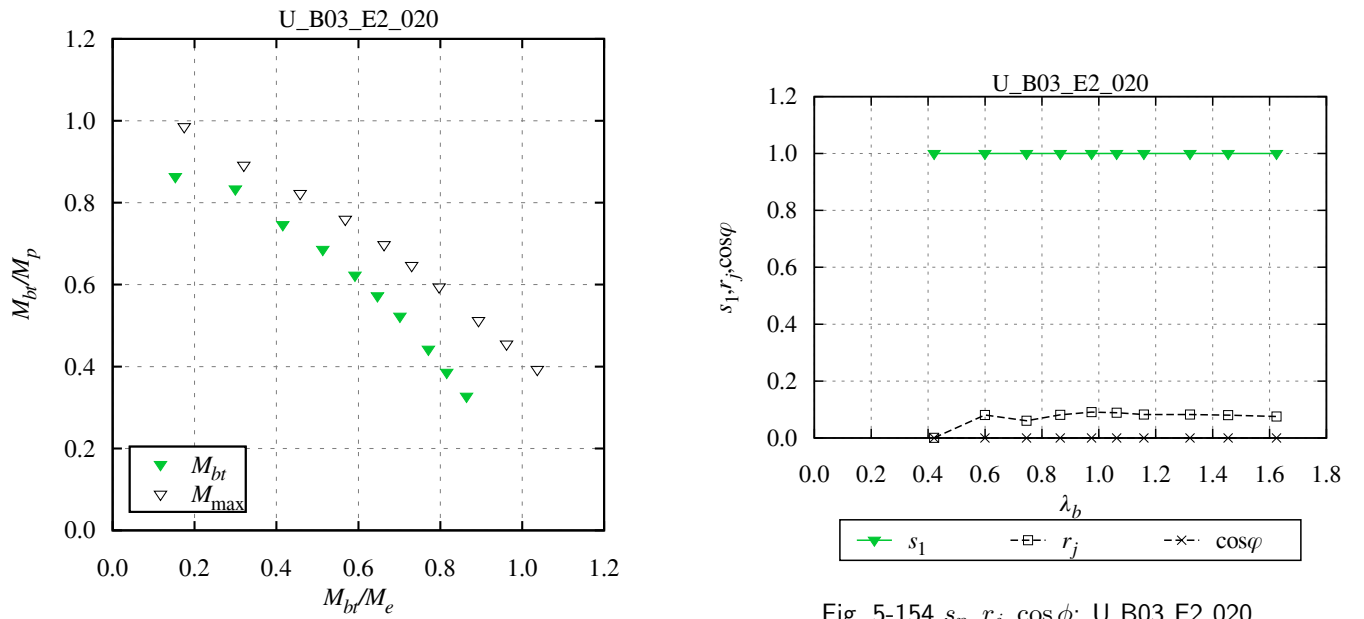


Fig. 5-154  $s_n, r_j, \cos\phi$ : U.B03\_E2\_020

Fig. 5-153 Macroscopic instability surface: U.B03\_E2\_020

## 5.5.6 バイリニアモデル、残留応力 30%、正弦半波形状 (B03.SH)

初期たわみ量=1/2000 (B03.SH.005)、逆対称曲げ

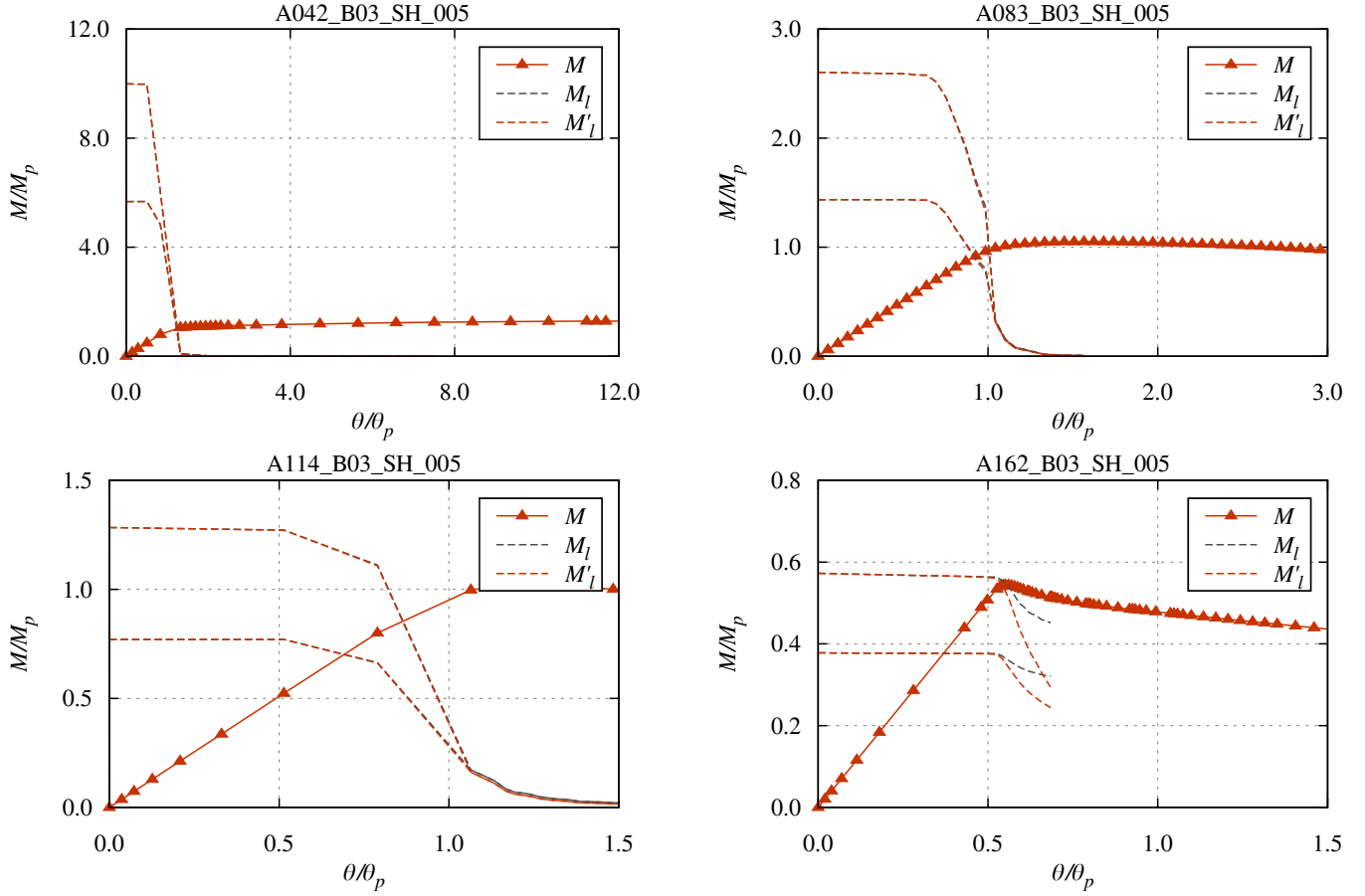


Fig. 5-155 Load-deformation curve: A.B03.SH.005

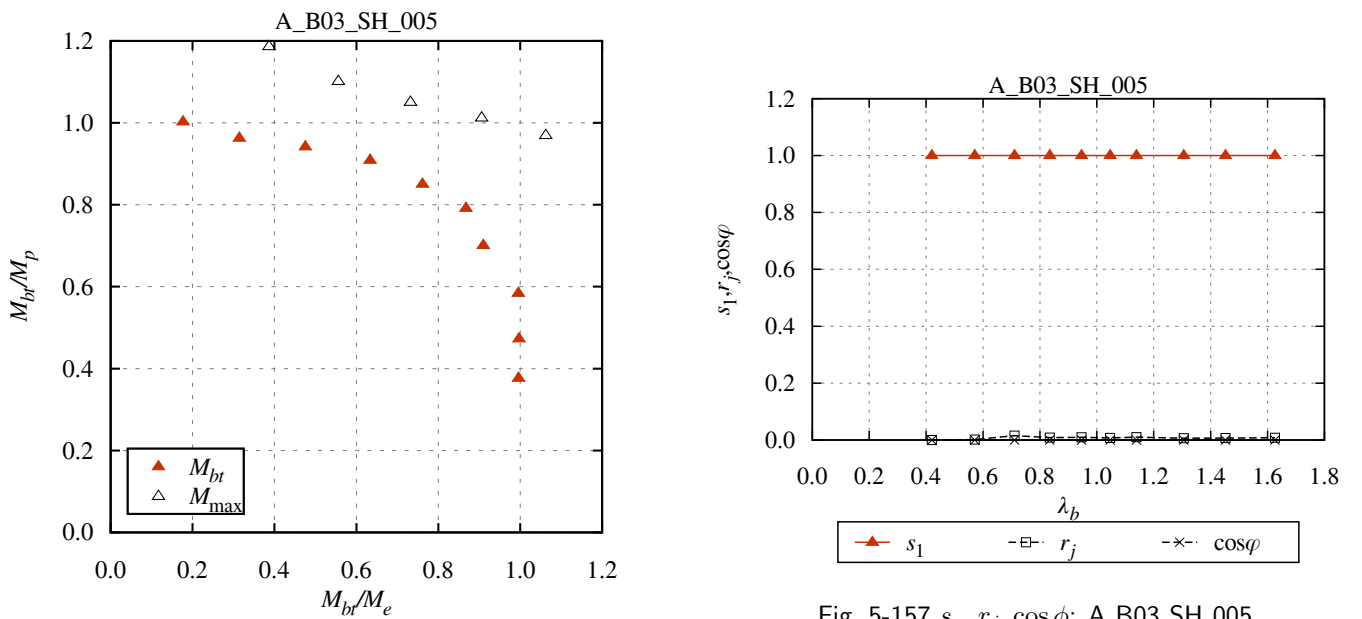
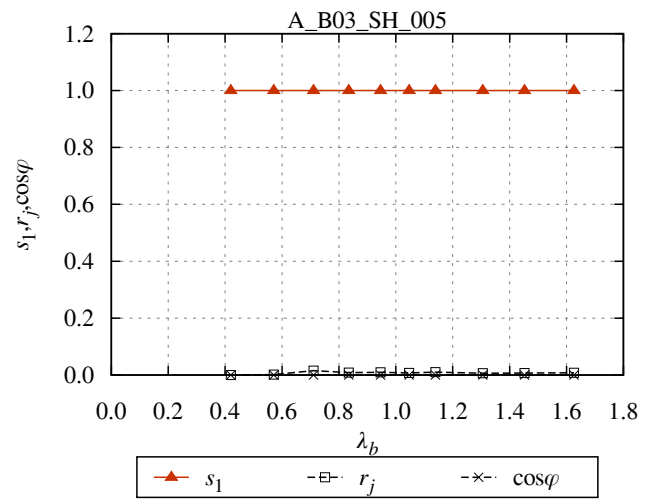


Fig. 5-156 Macroscopic instability surface: A.B03.SH.005

Fig. 5-157  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A.B03.SH.005

初期たわみ量=1/2000 (B03\_SH\_005)、片曲げ

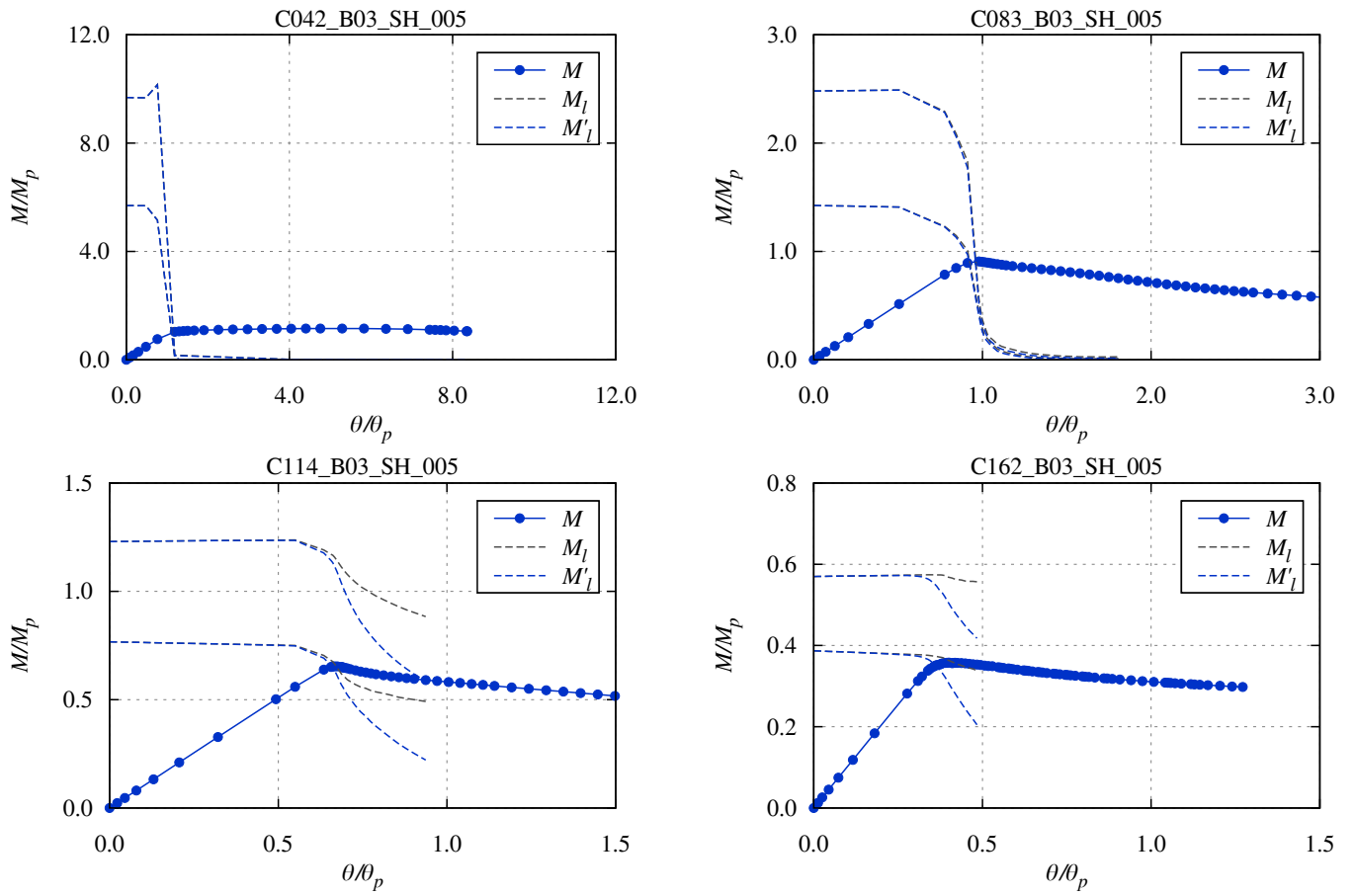


Fig. 5-158 Load-deformation curve: C.B03.SH.005

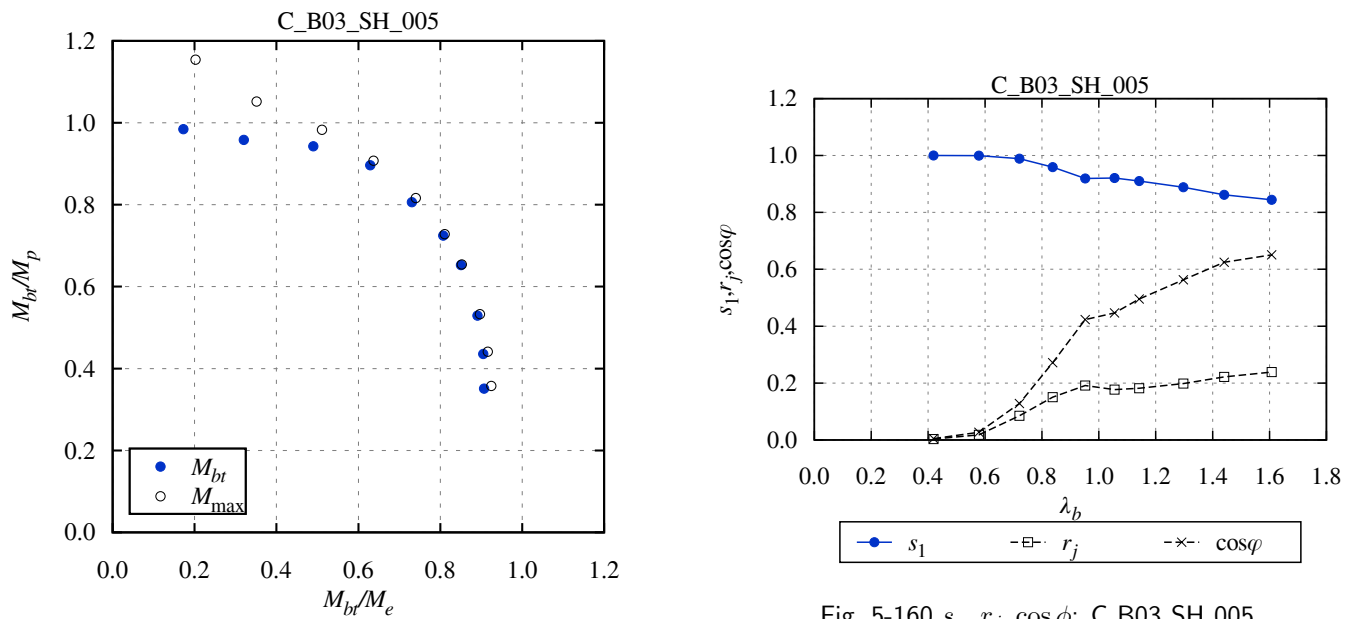


Fig. 5-160  $s_n, r_j, \cos\phi$ : C.B03.SH.005

Fig. 5-159 Macroscopic instability surface: C.B03.SH.005



初期たわみ量=1/2000 (B03\_SH\_005)、一様曲げ

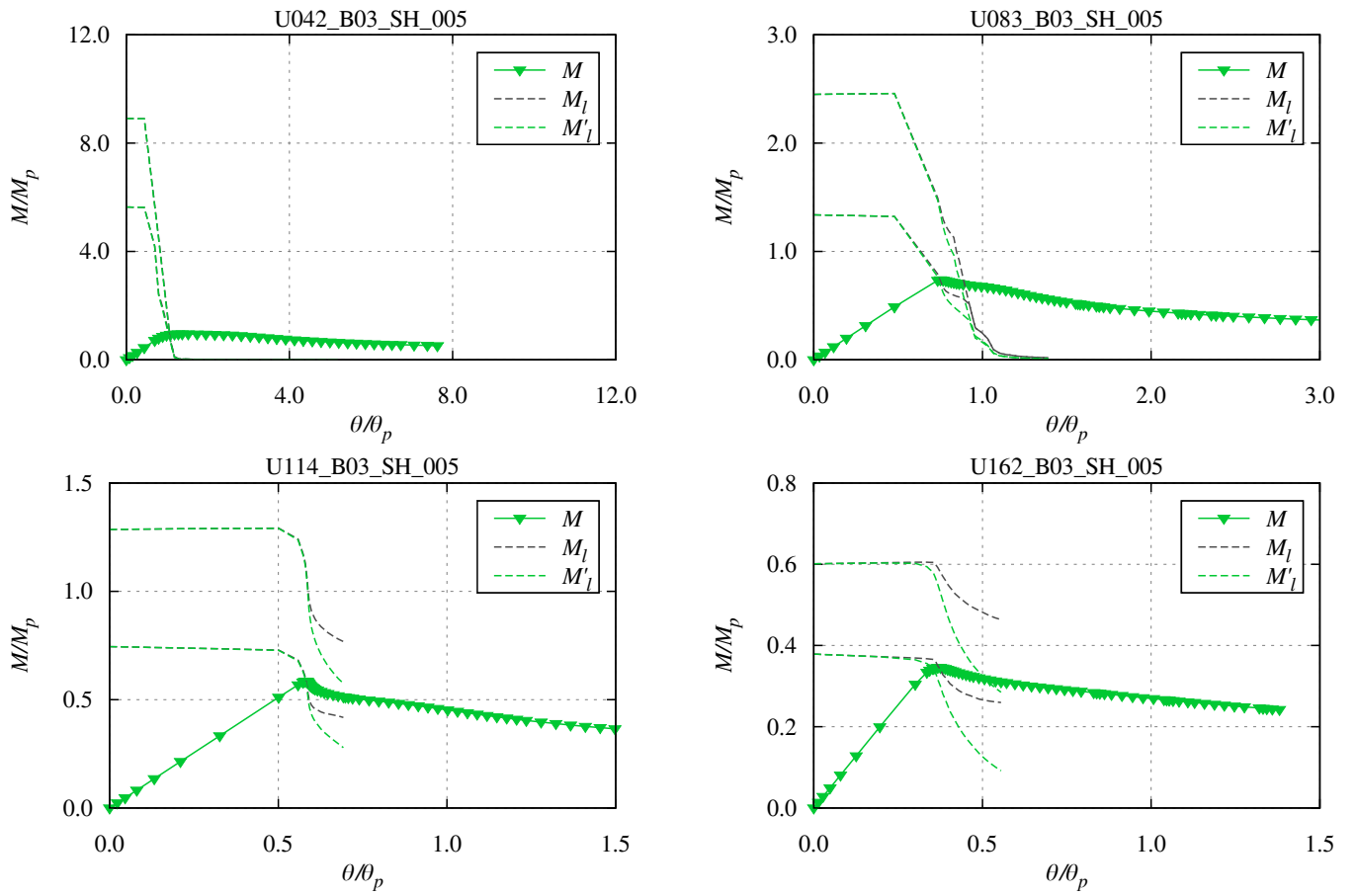


Fig. 5-161 Load-deformation curve: U\_B03\_SH\_005

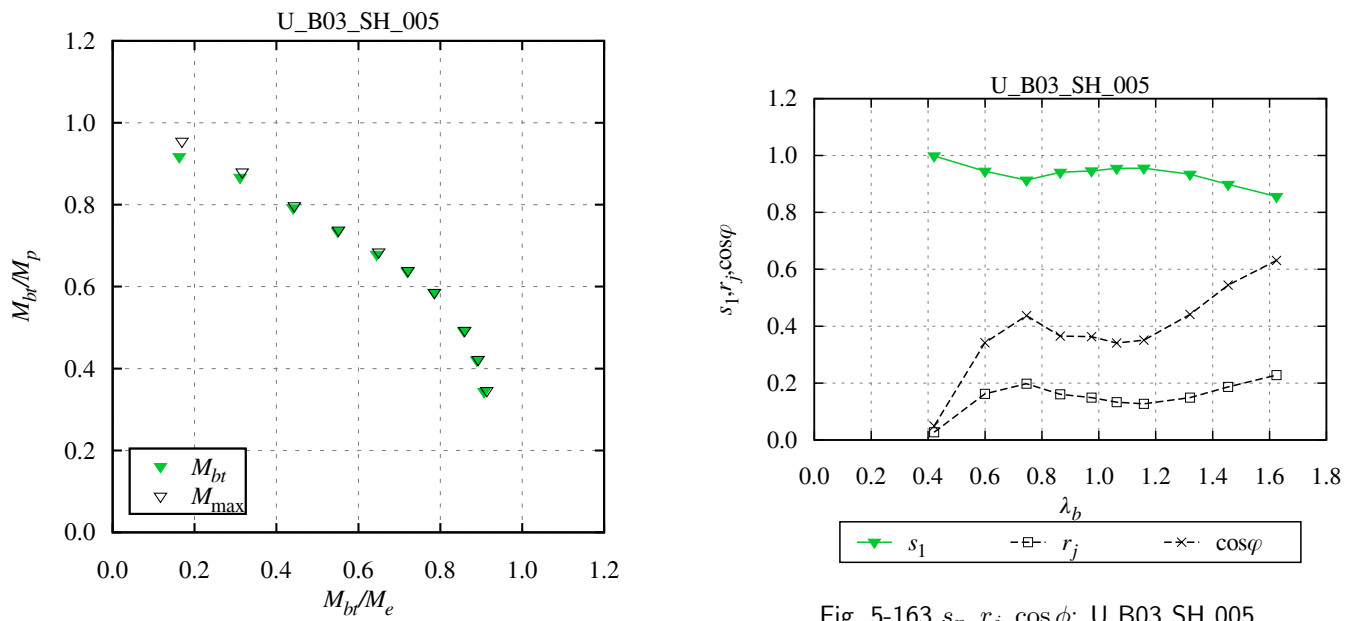


Fig. 5-162 Macroscopic instability surface: U\_B03\_SH\_005

Fig. 5-163  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B03\_SH\_005

初期たわみ量=1/1000 (B03\_SH\_010)、逆対称曲げ

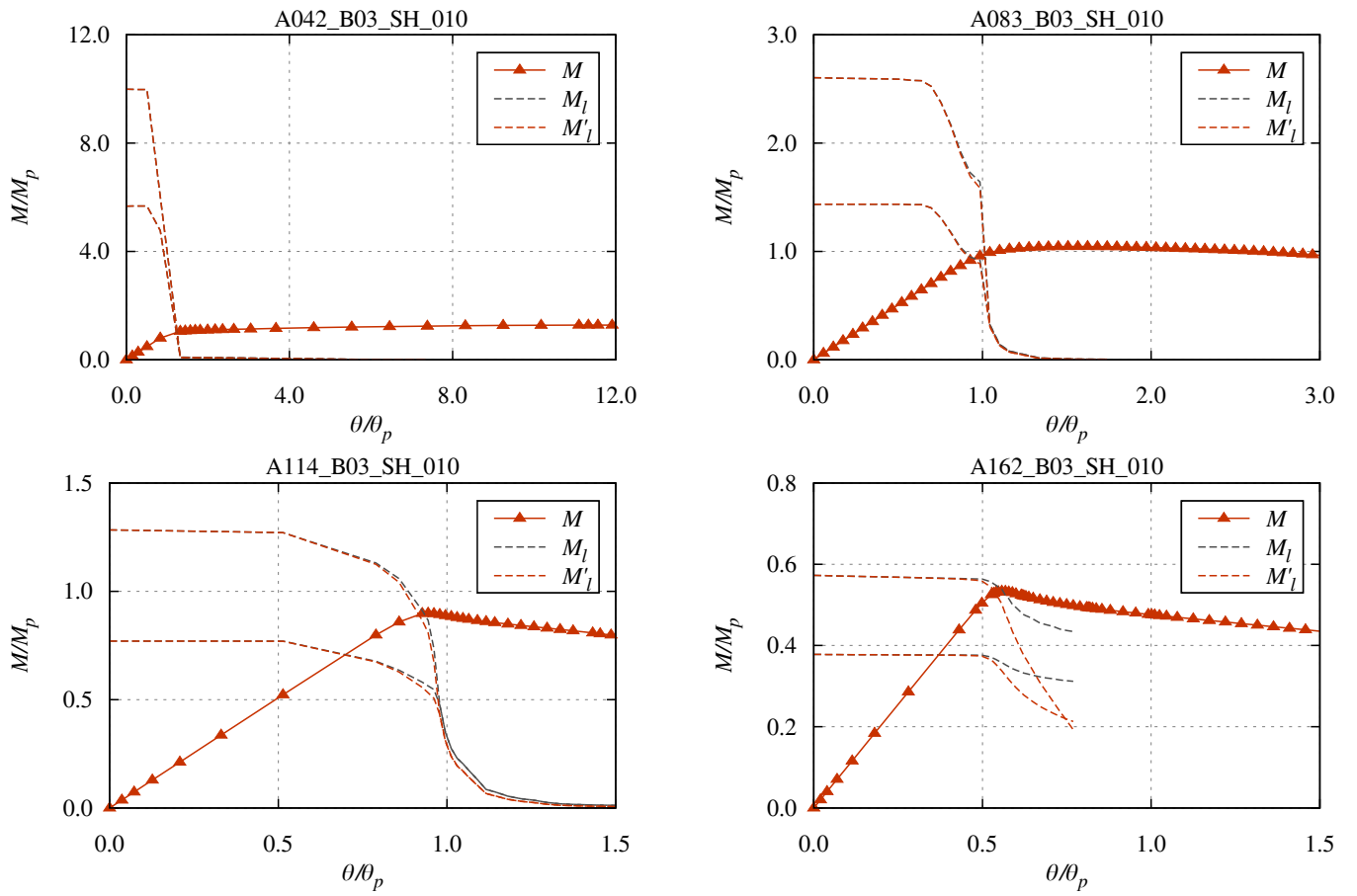


Fig. 5-164 Load-deformation curve: A\_B03\_SH\_010

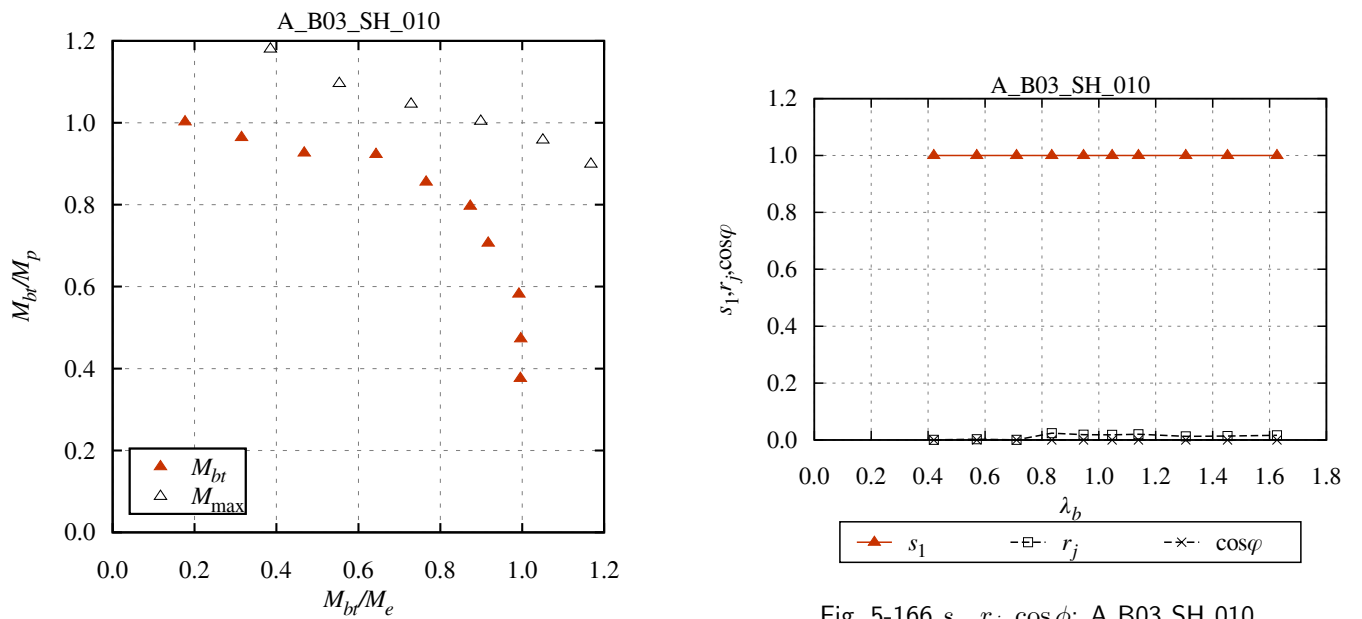


Fig. 5-165 Macroscopic instability surface: A\_B03\_SH\_010

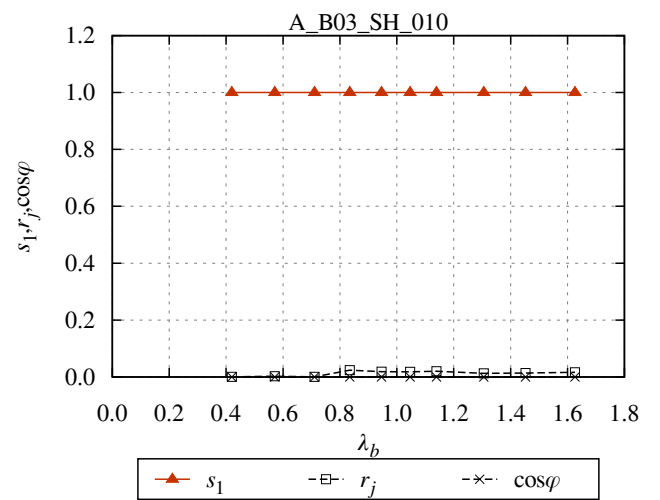


Fig. 5-166  $s_n$ ,  $r_j$ ,  $\cos \phi$ : A\_B03\_SH\_010

初期たわみ量=1/1000 (B03\_SH\_010)、片曲げ

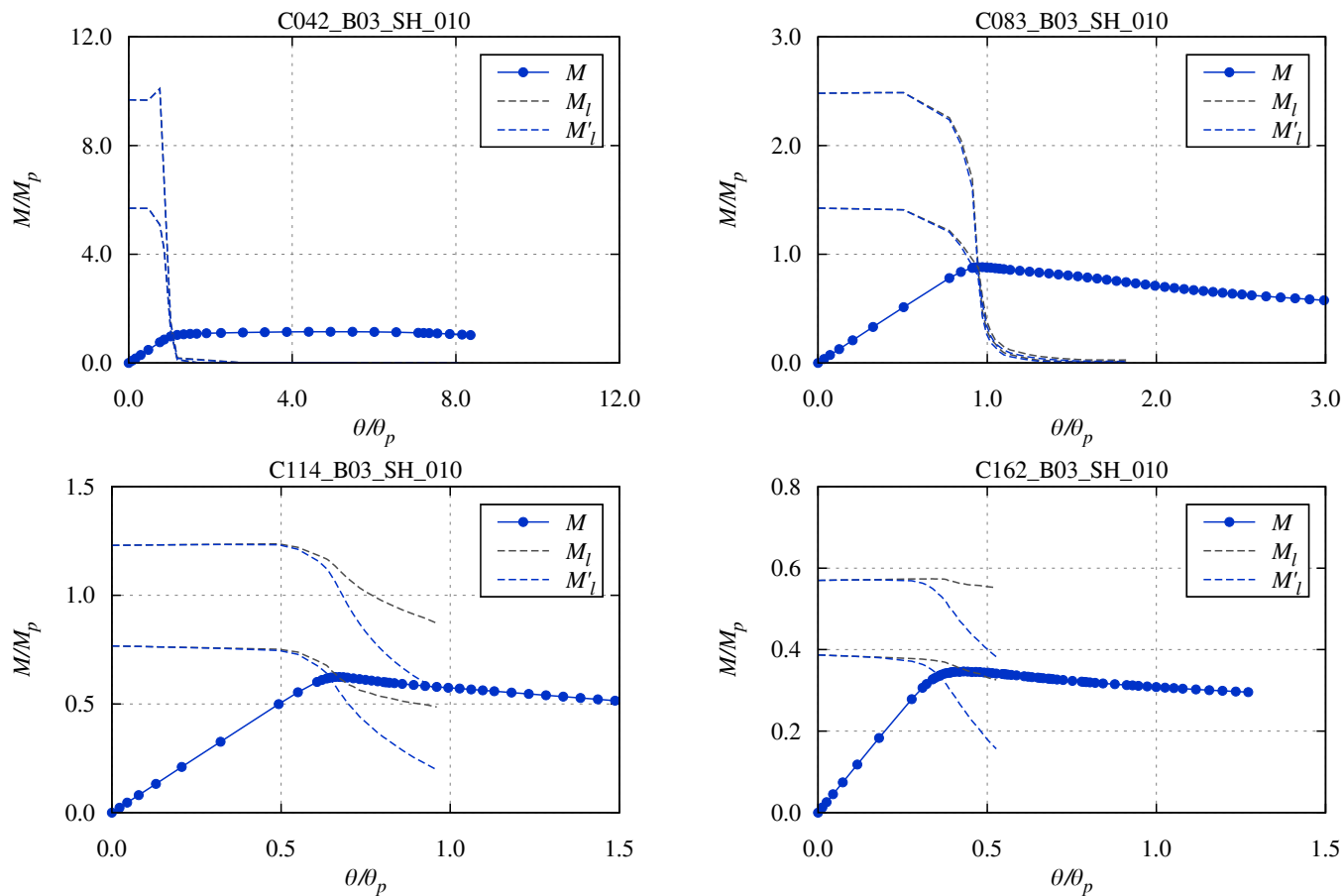


Fig. 5-167 Load-deformation curve: C.B03.SH.010

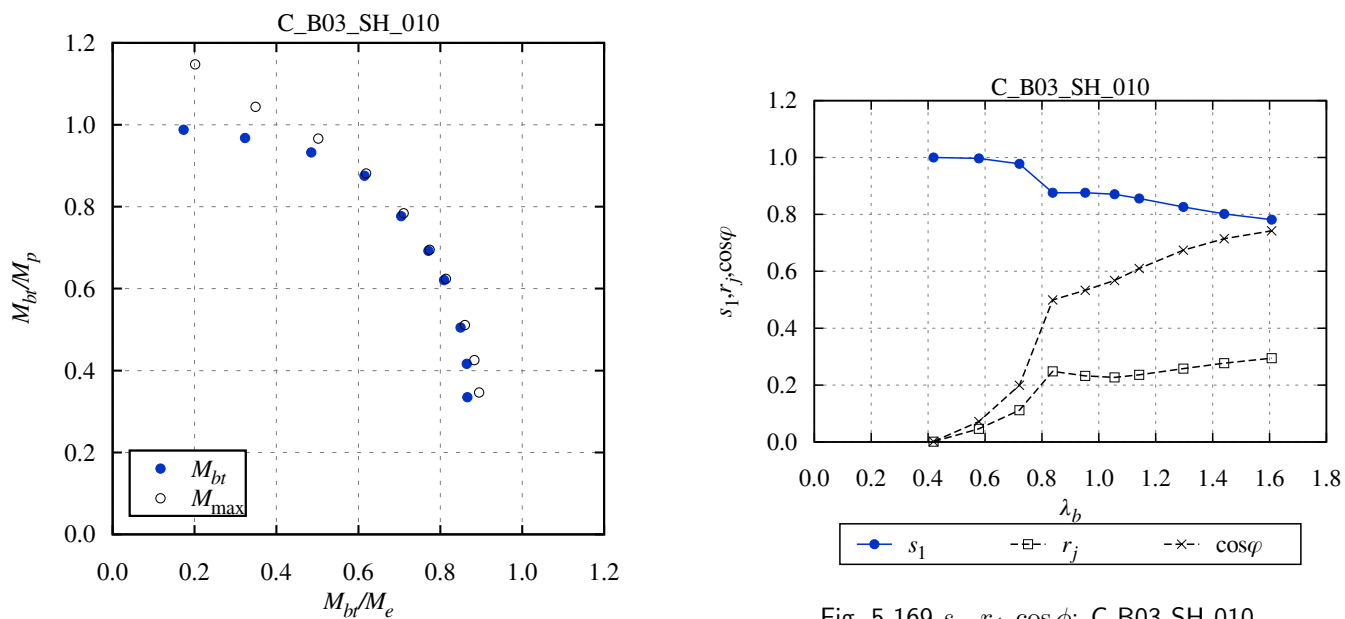


Fig. 5-168 Macroscopic instability surface: C.B03.SH.010

Fig. 5-169  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C.B03.SH.010

初期たわみ量=1/1000 (B03\_SH\_010)、一様曲げ

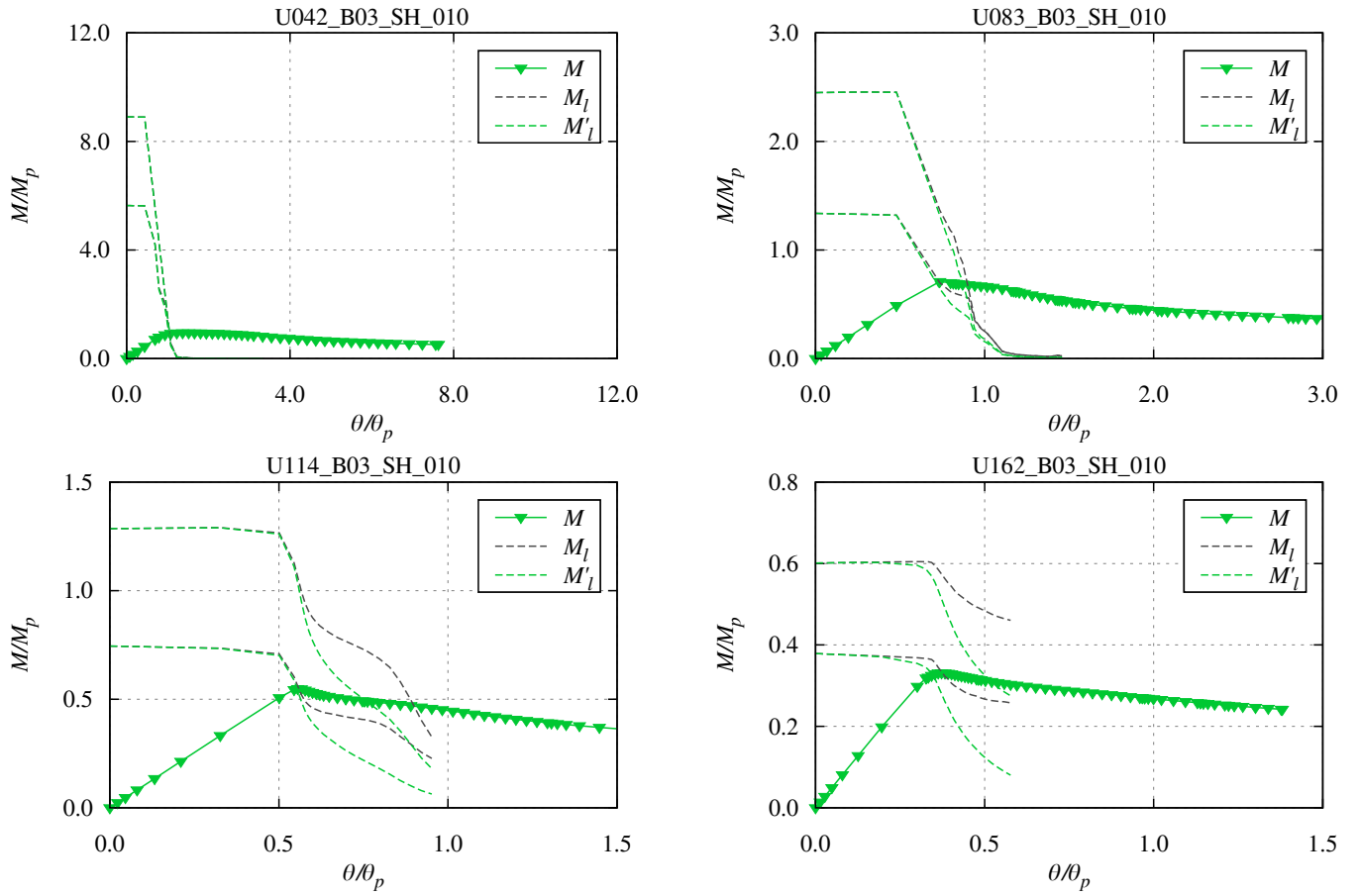


Fig. 5-170 Load-deformation curve: U\_B03\_SH\_010

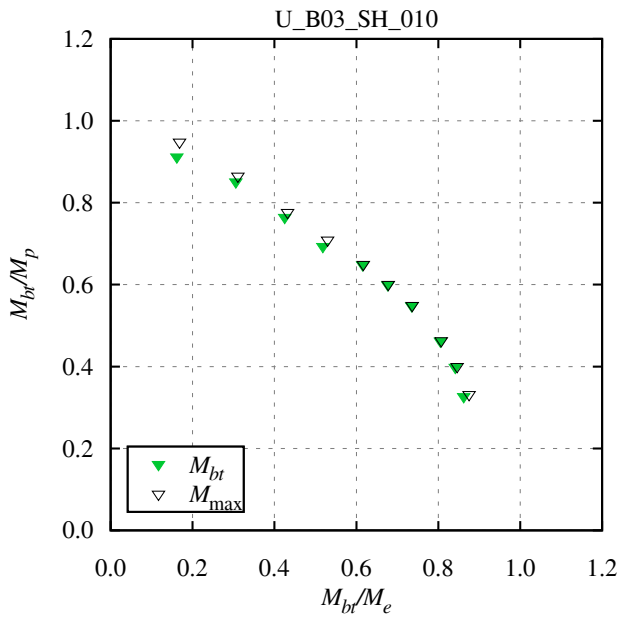


Fig. 5-171 Macroscopic instability surface: U\_B03\_SH\_010

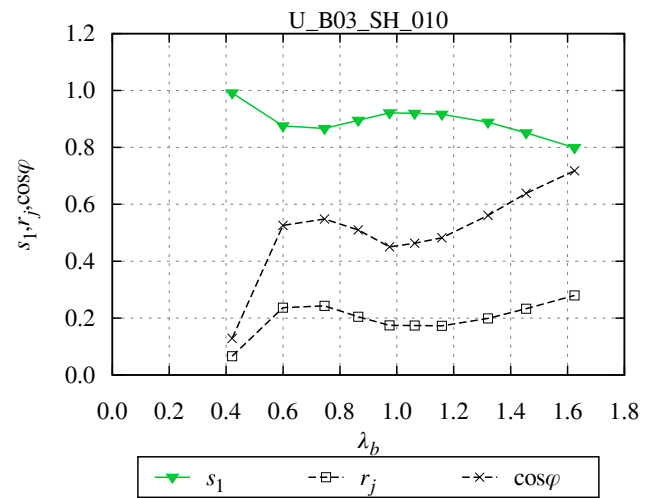


Fig. 5-172  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B03\_SH\_010

初期たわみ量=1/500 (B03\_SH\_020)、逆対称曲げ

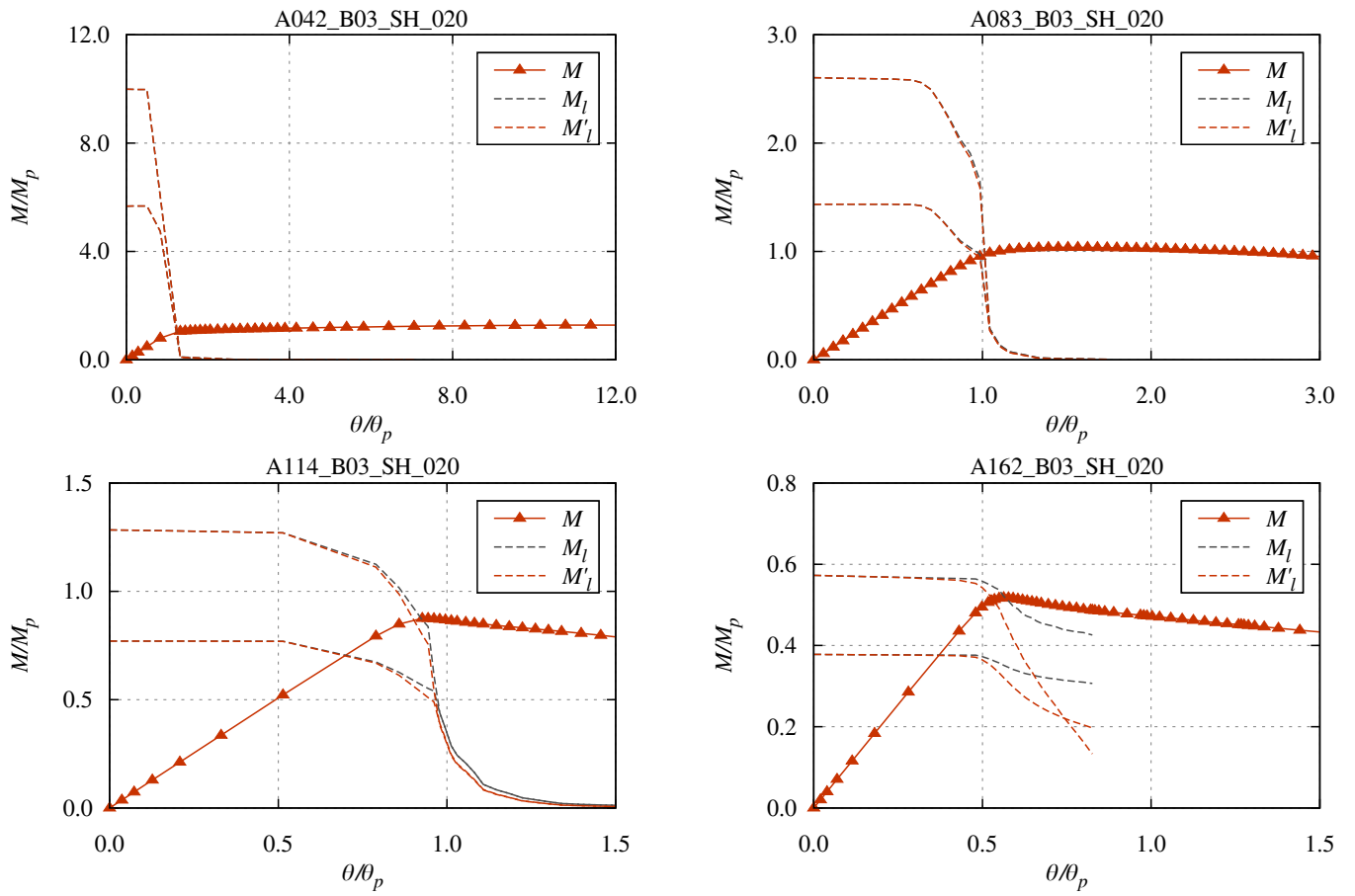


Fig. 5-173 Load-deformation curve: A.B03.SH.020

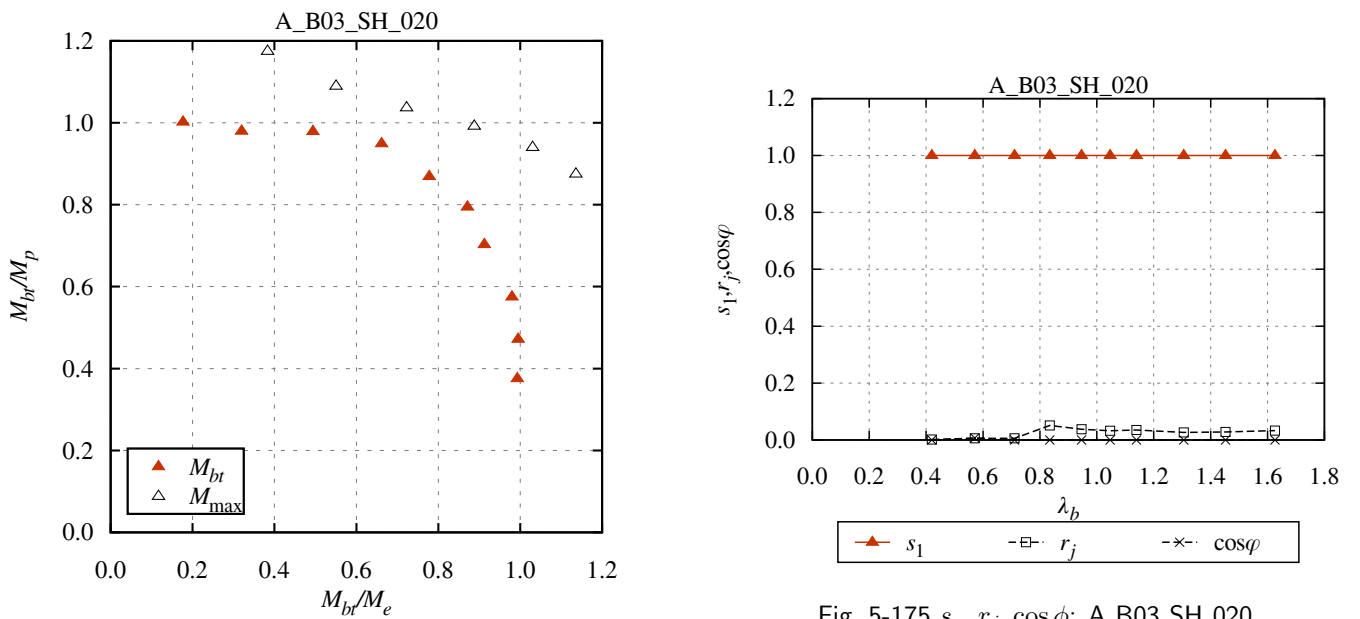


Fig. 5-175  $s_n, r_j, \cos \phi$ : A.B03.SH.020

Fig. 5-174 Macroscopic instability surface: A.B03.SH.020

初期たわみ量=1/500 (B03\_SH\_020)、片曲げ

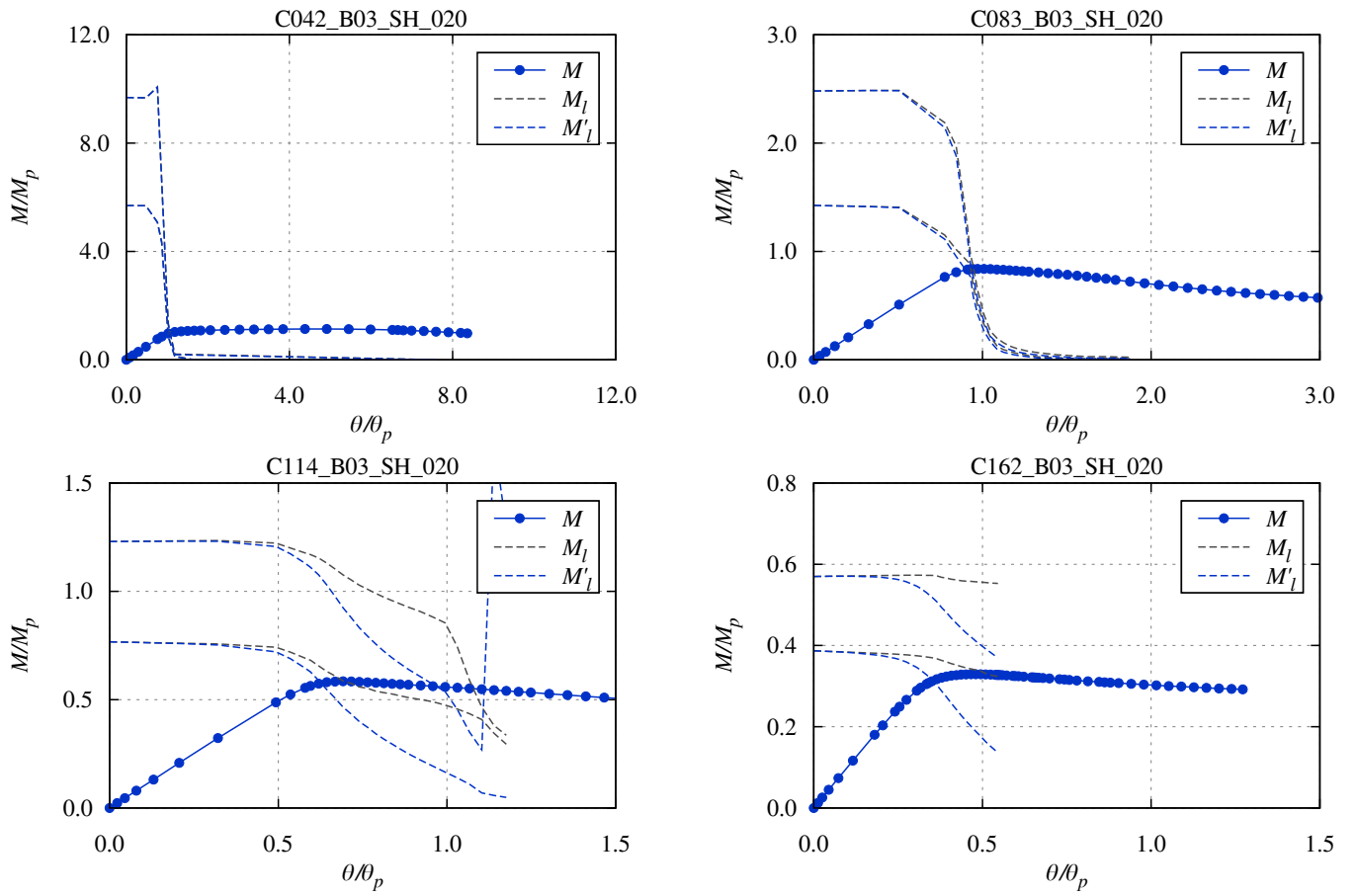


Fig. 5-176 Load-deformation curve: C.B03.SH.020

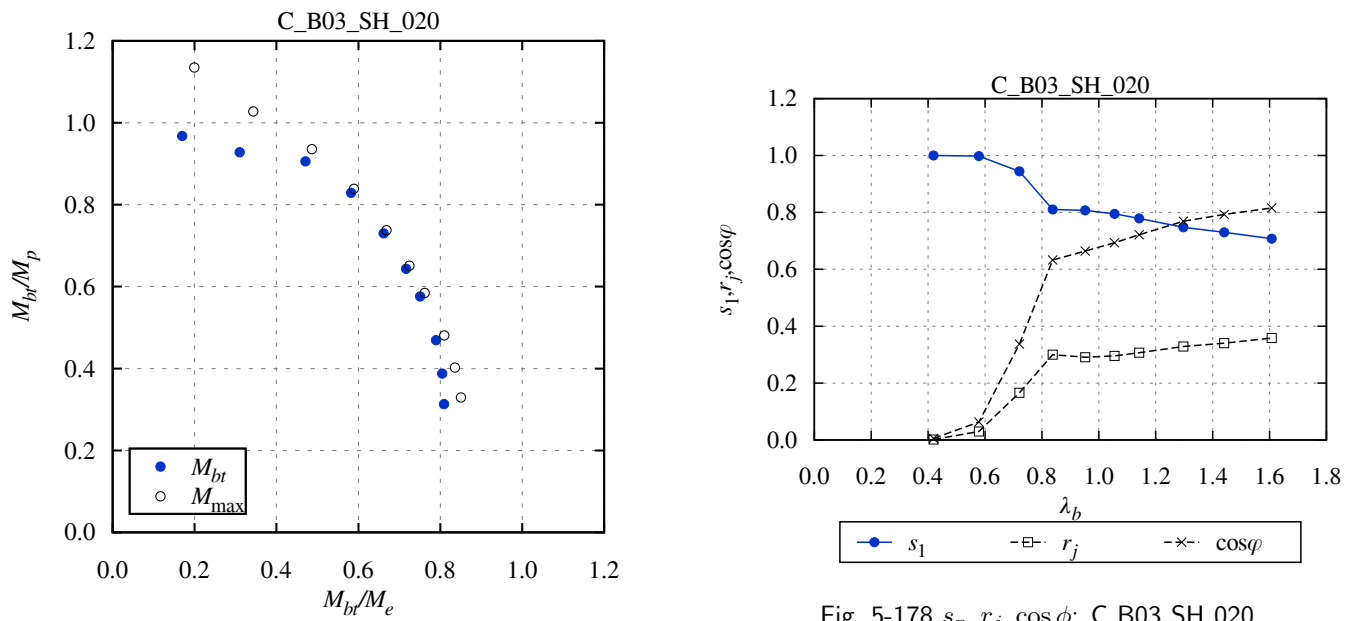


Fig. 5-178  $s_n, r_j, \cos \phi$ : C.B03.SH.020

Fig. 5-177 Macroscopic instability surface: C.B03.SH.020

初期たわみ量=1/500 (B03\_SH\_020)、一様曲げ

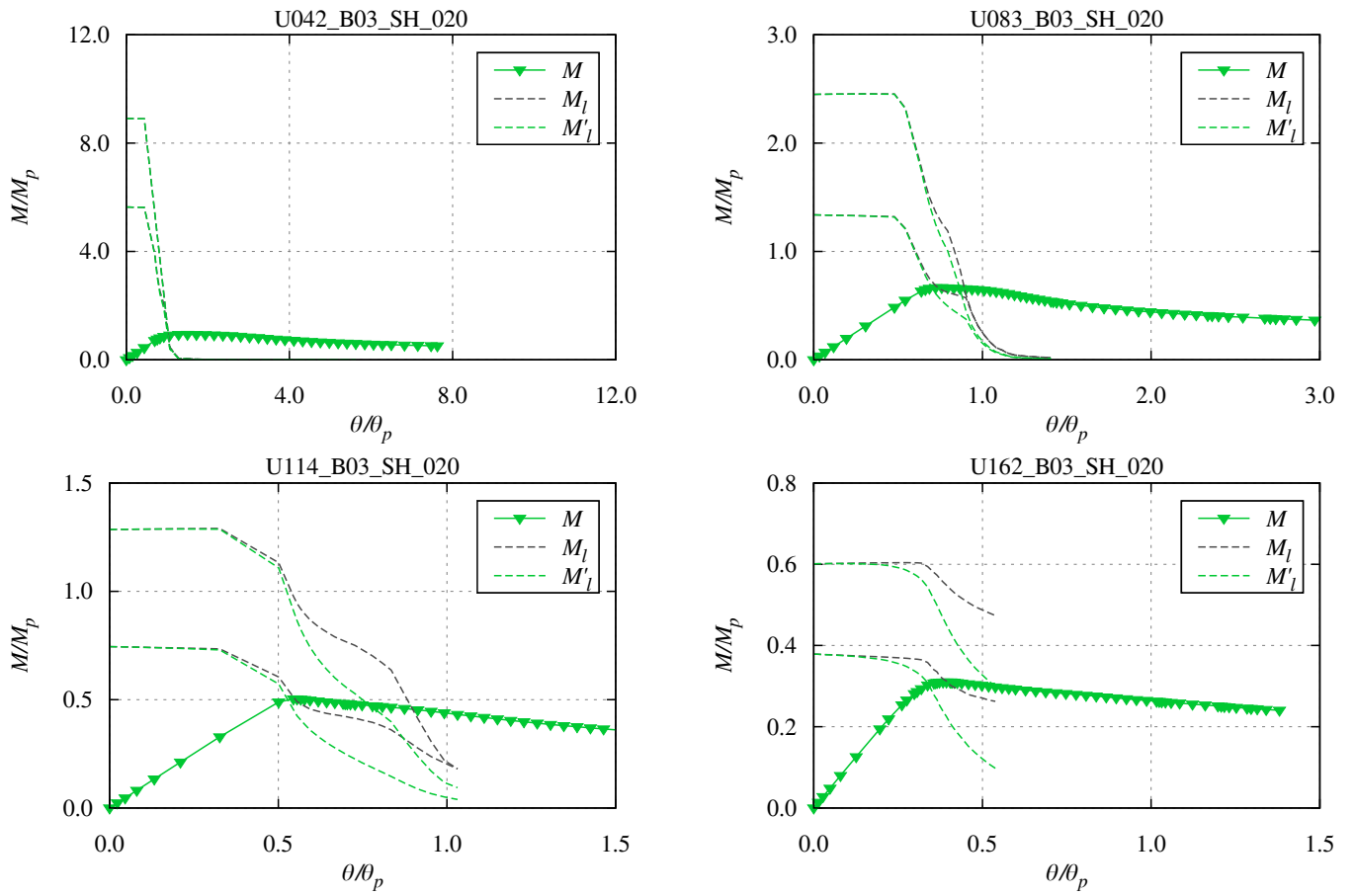


Fig. 5-179 Load-deformation curve: U\_B03\_SH\_020

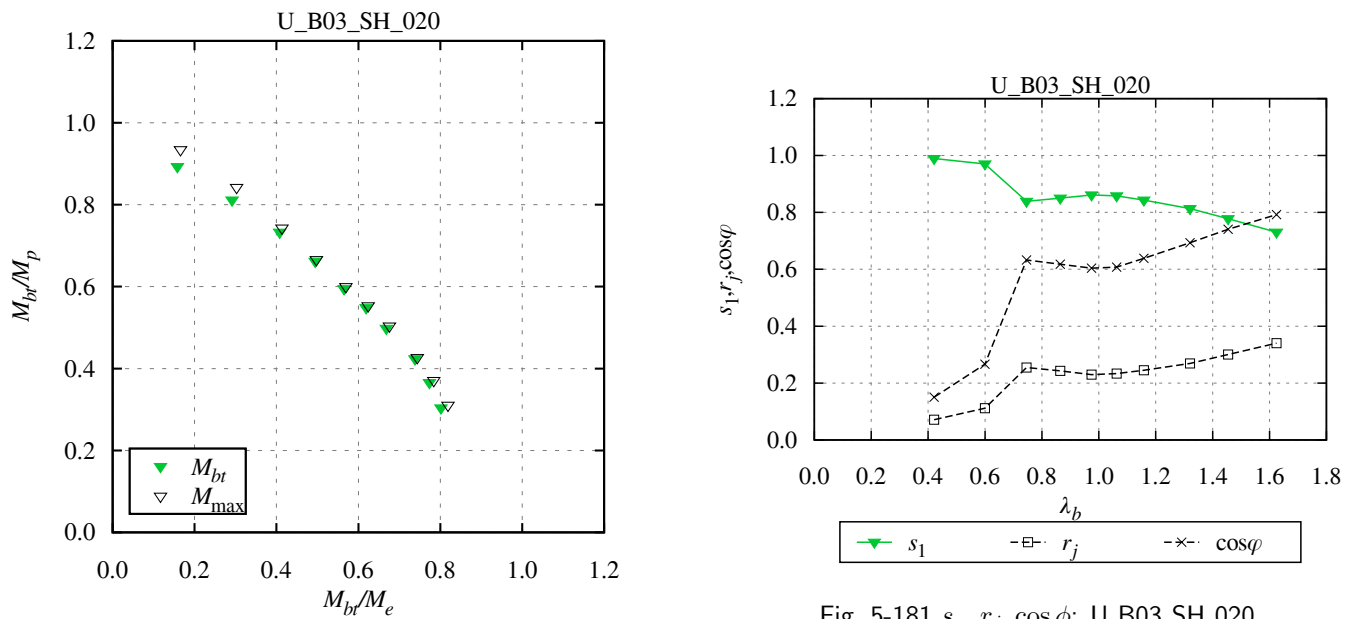


Fig. 5-181  $s_n, r_j, \cos \phi$ : U\_B03\_SH\_020

Fig. 5-180 Macroscopic instability surface: U\_B03\_SH\_020

## 5.6 材料非線形性と幾何学的非線形性の相互作用

材料非線形性と幾何学的非線形性の両方の影響がある場合、塑性化と面外変形が同時に生じるため、面外変形による塑性化進展状況の変化と塑性化による面外変形進展状況の変化という二つのかたちで二つの非線形性の相互作用が現れる。本節では、この二つの観点から材料非線形性と幾何学的非線形性の両方の影響がある場合の剛性低下について検討する。

### 5.6.1 面外変形による塑性化進展状況の変化

#### 初期たわみ形状が一次モード成分を含む場合

4章で検討したように、初期たわみ形状が弾性一次座屈モード形状を含む場合には一次モードの方向に変形が進行することで幾何学的非線形性による剛性低下が生じる。材料非線形性の影響がある場合には、一次モード方向への変形によって塑性化領域が変化し、横座屈モーメント  $M_l$  の推移にも変化が現れるため、ここでは面外変形が材料非線形性による剛性低下に与える影響について検討する。

逆対称曲げ、 $\lambda_b = 0.83$ (スパン 7.5[m])、バイリニア、残留応力なし、弾性一次座屈モード形状初期たわみ、初期たわみ量 1/500 のモデルについて、塑性化進展状況を Fig.5-182 に示す。

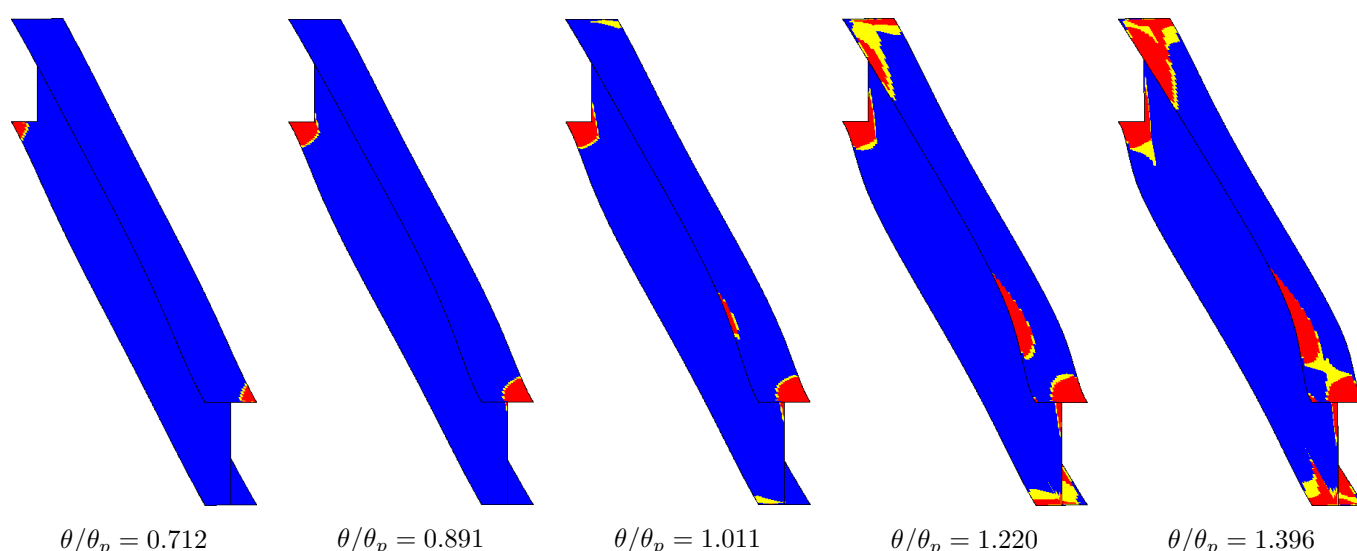


Fig. 5-182 Yielded area: A083\_B00\_E1.020

初期たわみを有しないモデル (Fig.3-45) では、梁端部での塑性化が上下フランジで同時に生じ、梁幅方向にも均等に進むのに対し、Fig.5-182 では、面外変形に伴う弱軸まわり曲げモーメントの影響により、梁端部で圧縮側フランジの一部から塑性化が始まり、 $\theta/\theta_p = 1.011$  ではスパンの中間部分でも塑性化が生じている。梁端部では、弱軸まわりと強軸まわりの曲げモーメントによる直応力度が足し合わされる部分では塑性化が早期に生じ、直応力度が相殺される部分では逆に塑性化するのが遅くなるため、フランジ幅方向の片側から塑性化が開始する。スパンの中間で塑性化する領域は、強軸まわりと弱軸まわりの曲げモーメントのバランスによって決まり、一次座屈モード形状でたわみが最大となる点よりも、やや梁端側に寄った位置となっている。初期たわみ量が小さいモデルでは、梁端部におけるフランジ幅方向の塑性化領域の分布の不均一さや圧縮側フランジと引張側フランジの分布の差は減少するものの、スパンの中間で塑性化が生じる現象は初期たわみ量 1/10000 モデルでも確認されている。

残留応力の有無による塑性化領域の変化をみるために、初期たわみと残留応力の両方がある場合の塑性化進展状況を図示すると Fig.5-183 のようになる。初期たわみを有しない場合には、残留応力の有無によって塑性化領域の分布が大きく異なったが (Fig.3-45、Fig.3-46)、Fig.5-182 と Fig.5-183 を比較すると、梁端回転角が同程度のときの塑性化領域が拡がり、



引張側フランジでは分布の変化がみられるものの、圧縮側フランジは同様の分布になっている。

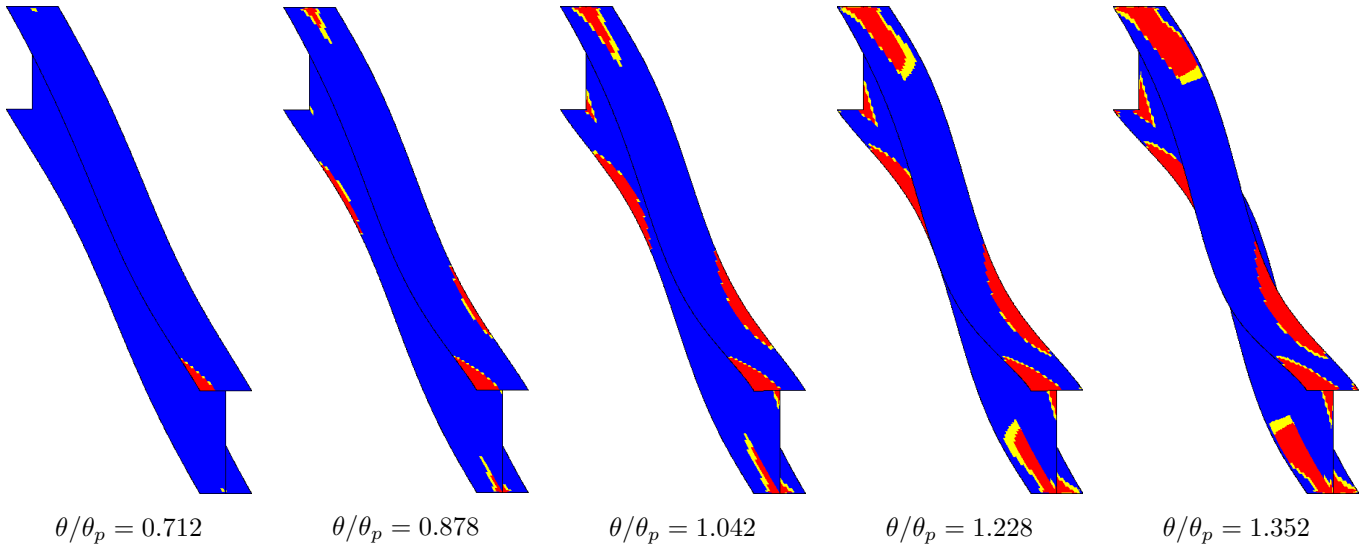


Fig. 5-183 Yielded area: A083\_B03\_E1\_020

逆対称曲げ、 $\lambda_b = 0.83$ (スパン 7.5[m])、パイリニア、弾性一次座屈モード形状初期たわみのモデルについて、初期たわみ量による荷重変形曲線と剛性低下曲線の違いを比較したものを Fig.5-184、Fig.5-185 に示す。

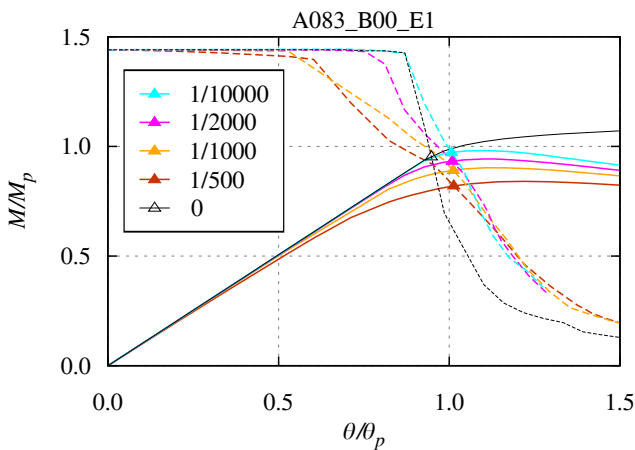


Fig. 5-184 Load deformation curve: A083\_B00\_E1

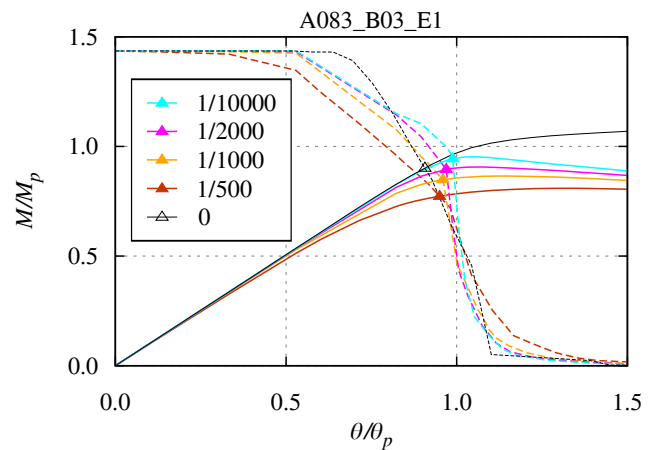


Fig. 5-185 Load deformation curve: A083\_B03\_E1

初期たわみ量が大きいかほど塑性化進展状況の変化が大きくなるため、初期たわみなしモデル (黒実線、黒破線) の曲線との違いが顕著になっている。剛性低下曲線の縦軸の値が減少し始める点は、梁端部で圧縮側フランジの片側が塑性化する時点に対応し、そのときの梁端回転角は初期たわみ量が大きくなるにつれて小さくなるため、梁端回転角が小さい範囲では初期たわみ量が大きいかほど剛性低下曲線は下にきている。しかし、梁端部では面外変形によって塑性化するのが遅くなる部分もあるために、梁端回転角が大きい範囲では初期たわみがあるモデルの剛性低下曲線が初期たわみなしモデルの剛性低下曲線よりも上にきている。

片曲げモデルや一様曲げモデルの場合には、弾性二次座屈モード形状 (E2) や正弦半波形状 (SH) の初期たわみでも一次モード成分を含む場合があるため、5.5.2 項や 5.5.3 項などの結果でも、初期たわみ量による荷重変形曲線や剛性低下曲線の

違いがみられる。

#### 初期たわみ形状が一次モード成分を含まない場合

初期たわみ形状が一次モード成分を含まない場合、面外変形は一次モードの方向ではなく高次モードの方向に進行し、幾何学的非線形性による剛性低下は高次モードで生じる。4章で取り上げた弾性モデルの場合には、材料非線形性による剛性低下が生じないため、荷重変形曲線と一次の剛性低下曲線の交点付近での剛性低下の影響は小さかった。ここでは、面外変形が高次モードの方向に進行する場合の塑性化進展状況や剛性低下曲線の変化を確認することで、幾何学的非線形性による剛性低下が生じる次数が材料非線形性による剛性低下に与える影響について検討する。

逆対称曲げ、 $\lambda_b = 0.83$ (スパン 7.5[m])、パイリニア、残留応力 30%、初期たわみ量 1/500 のモデルについて、弾性二次座屈モード形状初期たわみと正弦半波形状初期たわみの場合の塑性化進展状況を Fig.5-186、Fig.5-187 に示す。また、初期たわみ量による荷重変形曲線と剛性低下曲線の違いを比較したものを Fig.5-188、Fig.5-189 に示す。

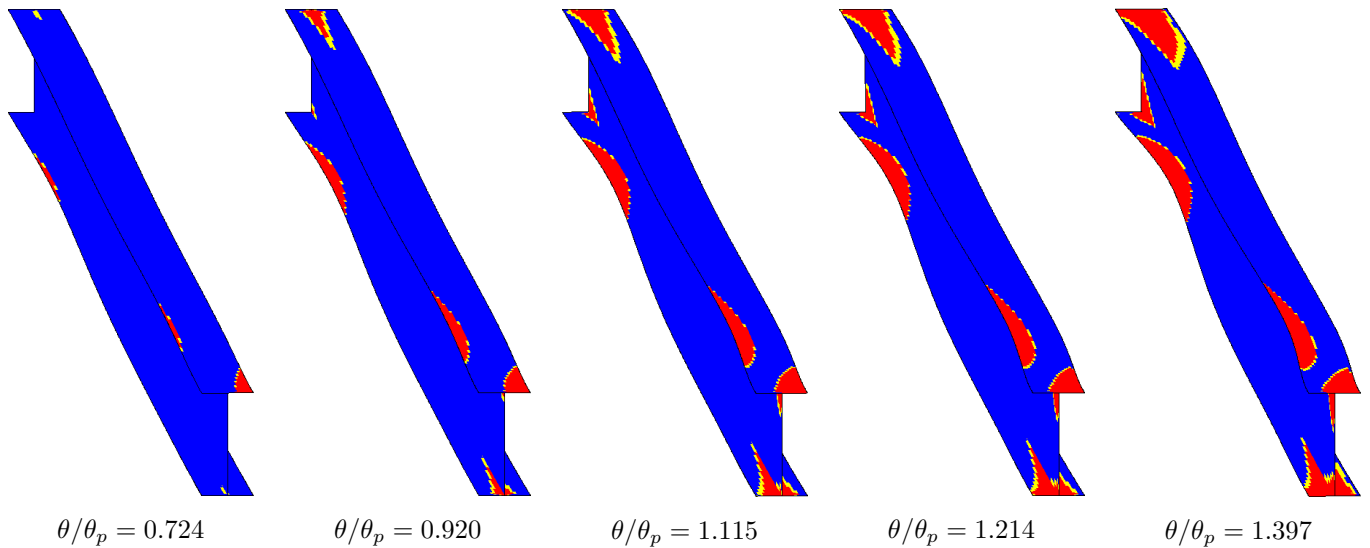


Fig. 5-186 Yielded area: A083\_B03\_E2\_020

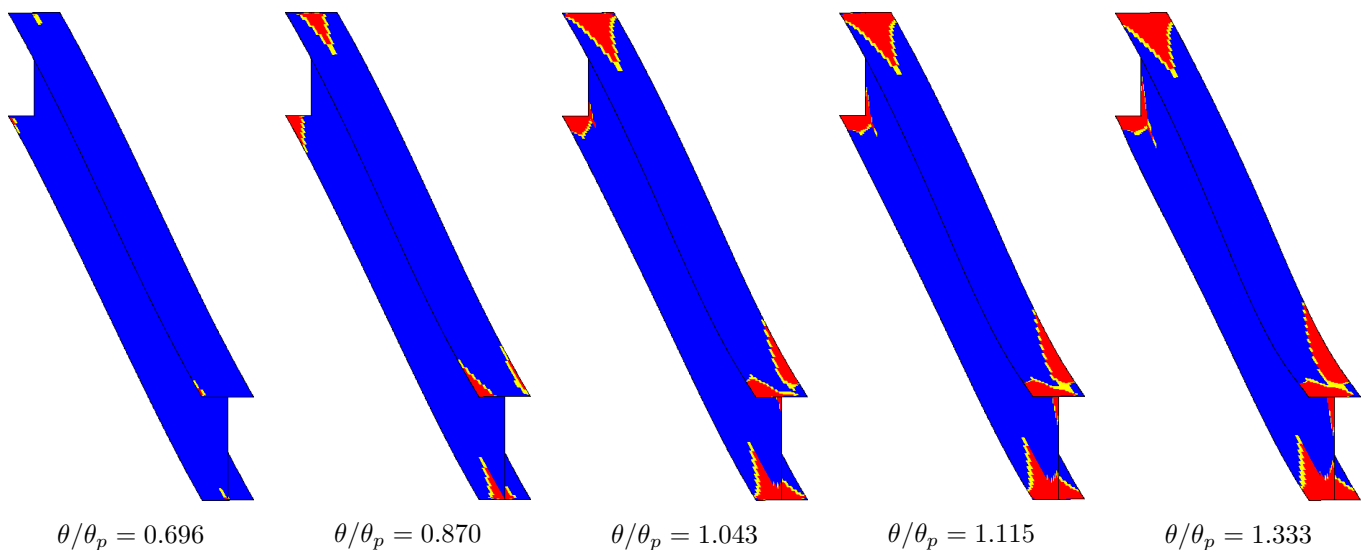


Fig. 5-187 Yielded area: A083\_B03\_SH\_020

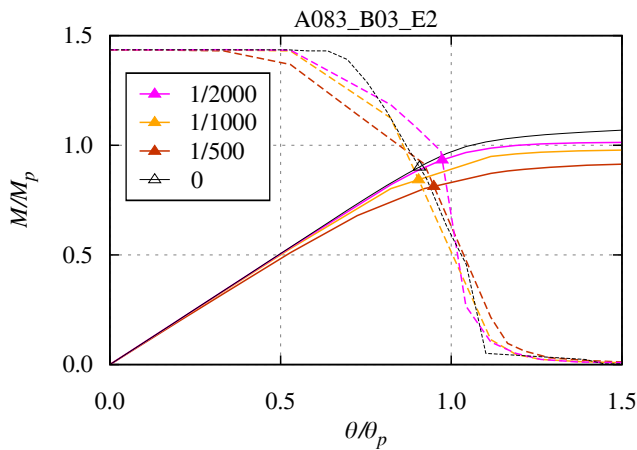


Fig. 5-188 Load deformation curve: A083\_B03\_E2

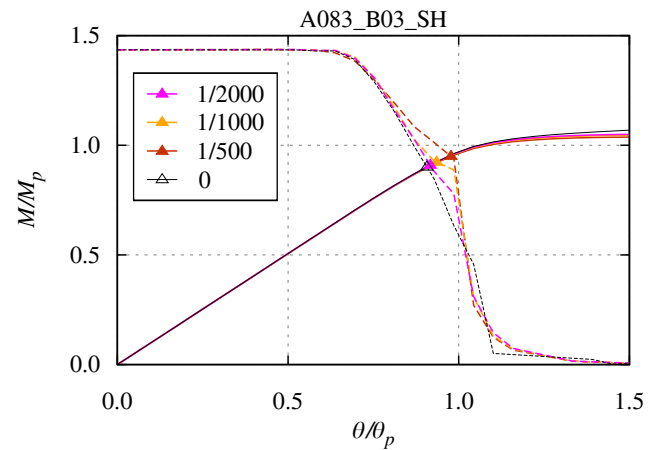


Fig. 5-189 Load deformation curve: A083\_B03\_SH

逆対称曲げの E2 モデルと SH モデルは、いずれも二次モードで幾何学的非線形性による剛性低下が生じるが、梁端回転角の増加に対する剛性低下の傾向は異なっており、Fig.4-122 では、E2 モデルでは梁端回転角が小さい段階から  $s_2$  が減少しているのに対し、SH モデルでは  $\theta/\theta_e = 0.7$  付近から  $s_2$  が減少し始めている。Fig.4-122 の二次モードの横軸を  $\theta_p$  で基準化した場合、 $M_p = \sigma_y Z_p = 54.463[\text{kNm}]$ 、 $M_e = 142.172[\text{kNm}]$  より、 $\theta/\theta_e = 0.7$  は  $\theta/\theta_p = 0.7 \times 142.172/54.463 = 1.8$  となる。Fig.5-189 で荷重変形曲線と剛性低下曲線が交差するときの梁端回転角は  $\theta/\theta_p = 0.9 \sim 1.0$  であるから、SH モデルでは  $M_{bt}$  に達する時点では面外変形がほとんど生じておらず、塑性化進展状況は初期たわみがない場合と大きくは変わらないことになる (Fig.5-187)。E2 モデルでは梁端回転角が小さい段階から二次モードの方向への面外変形が生じるため、Fig.5-186 では Fig.5-182 と同じように、特に圧縮側フランジで初期たわみによる塑性化進展状況の変化がみられる。

荷重変形曲線と剛性低下曲線についても、SH モデルでは初期たわみ量に変化してもほとんど変わらず、むしろ初期たわみ量が多い方が剛性低下がやや緩やかになる傾向にあるのに対し、E2 モデルでは初期たわみ量が多いほど荷重変形曲線と剛性低下曲線が下にくており、塑性化進展状況が変化することで剛性低下が早期に生じ、 $M_{bt}$  に達する時点での剛性低下量も大きくなっている。Fig.5-185 と Fig.5-188 を比較すると、E1 モデルと E2 モデルの剛性低下曲線は概ね一致しており、 $M_{bt}$  に達する時点よりも梁端回転角が小さい範囲では荷重変形曲線の差も小さい。幾何学的非線形性による剛性低下という点では E1 モデルと E2 モデルは異なり、一次モードでの剛性低下は E1 モデルのみで生じるため、荷重変形曲線と剛性低下曲線は完全には一致していないが、材料非線形性による剛性低下という点では E1 モデルと E2 モデルは同様の傾向を示している。 $M_{bt}$  の大きさは梁端回転角が小さい範囲での材料非線形性と幾何学的非線形性の両方による剛性低下で決まるため、初期たわみ形状が一次モード成分を含まず、幾何学的非線形性による剛性低下が生じる次数が一次モードでない場合でも、高次モード方向への面外変形によって塑性化進展状況が変化することで材料非線形性による剛性低下量が増加し、 $M_{bt}$  が減少する場合が存在する。面外変形による塑性化進展状況の変化の  $M_{bt}$  に対する影響という観点からは、面外変形の方が一次モードの方向であることは必ずしも重要ではなく、二次モードの方向であっても、梁端回転角が小さい範囲において面外変形が進行することが重要であると言える。

$M_{bt}$  に達した時点よりも梁端回転角が大きい範囲での荷重変形曲線の剛性を比較すると、E1 モデルのように幾何学的非線形性による剛性低下が一次モードで生じる場合には大きく剛性が低下しているが、E2 モデルのように幾何学的非線形性による剛性低下が二次モードで生じる場合には荷重変形曲線の剛性低下はそれほど大きくない。荷重変形曲線において大きな剛性低下が生じ、梁端モーメントが減少に転ずるには幾何学的非線形性による剛性低下が生じる必要があり、 $M_{bt}$  から  $M_{\max}$  までの耐力上昇幅には幾何学的非線形性による剛性低下が生じる次数の違いの影響が現れると考えられる。

### 5.6.2 塑性化による面外変形進展状況の変化

前項で検討したように面外変形が塑性化の進展状況に影響を与える一方で、塑性化によって変形の進む方向や座屈モード形状が変化するため、塑性化が面外変形の進展状況に与える影響も存在する。本項では、材料非線形性による剛性低下量の

異なるモデル同士の面外変形量を比較することで、塑性化が面外変形進展状況に与える影響について検討する。

逆対称曲げ、バイリニア、弾性一次座屈モード形状初期たわみ、初期たわみ量  $1/500$  のモデルについて、 $s_1$  の推移を Fig.5-190(残留応力なし) と Fig.5-191(残留応力 30%) に示す。線色は横座屈細長比の違いを表しており、各曲線には  $M = M_{bt}$  となる時点をプロットで示している。また、材料特性が弾性モデルの場合の  $s_1$  の推移を破線で記入している。

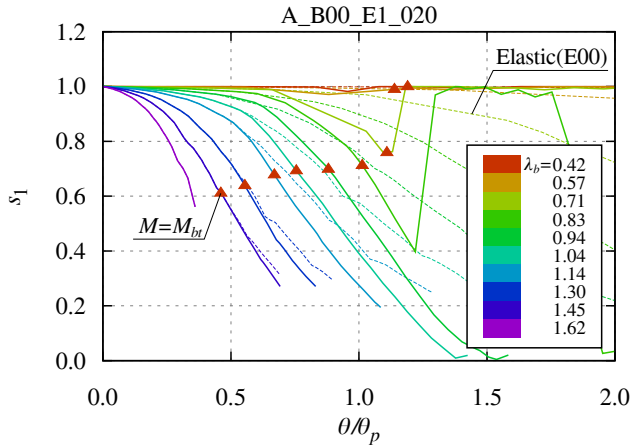


Fig. 5-190  $\theta/\theta_p - s_1$ : A\_B00.E1\_020

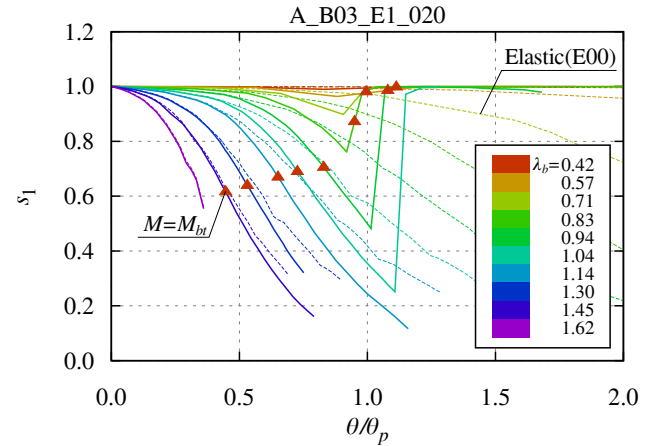


Fig. 5-191  $\theta/\theta_p - s_1$ : A\_B03.E1\_020

残留応力なし (B00) と残留応力 30%(B03) のいずれのモデルも、破線で示した弾性モデル (E00) の  $s_1$  の値を下回っており、弾性モデルとの  $s_1$  の差は、残留応力がある B03 モデルの方がやや大きく、 $\lambda_b$  が小さいほど大きく、梁端回転角の増加とともに広がっていることから、塑性化が進行するほど面外変形量が増大する傾向にあると言える。B00 モデルの  $\lambda_b \leq 0.83$  や B03 モデルの  $\lambda_b \leq 1.04$  で  $s_1$  の値が急上昇する現象がみられるが、これは一次モードが横座屈から局部座屈に変化することで変形ベクトルに含まれる一次モード成分が急減することを表している。これにより、一次モードが局部座屈に変化した後は幾何学的非線形性による剛性低下がほとんど生じないと評価することになるが、Fig.5-190 と Fig.5-191 にプロットで示した  $M_{bt}$  に達する時点は、一次モードが横座屈から局部座屈に変化する時点とほぼ同時か、それよりも梁端回転角が小さい側となっているため、 $M_{bt}$  の評価にはほとんど影響を与えていない。

## 5.7 二つの非線形性を考慮した巨視的不安定曲面

2.4.2 項で述べたように、巨視的不安定曲面は、系が巨視的不安定状態に至る時点での材料非線形性と幾何学的非線形性の影響度合いの関係を表す。

材料非線形性のみを有する場合には塑性化、幾何学的非線形性のみを有する場合には面外変形の進展状況によって巨視的不安定曲面の形状が決まり、例えば Fig.5-192 のようになる。

Fig.5-192 左図には残留応力の有無が異なる 2 つのモデルを示している。残留応力の有無によって塑性化進展状況が異なるため、 $\lambda_b = 0.71 \sim 1.14$  の範囲では残留応力のある B03 モデルの曲面が内側にきている。 $\lambda_b$  が小さい範囲では塑性化領域の違いの影響が小さく、 $\lambda_b$  が大きい範囲では塑性化が生じないため、2 つの曲面は概ね一致している。

Fig.5-192 右図には初期たわみ形状が異なる 2 つのモデルを示している。初期たわみ形状によって一次座屈モードベクトル  $e_1$  の方向への面外変形進展状況が異なるため、弾性一次座屈モード形状初期たわみを有する E1 モデルでは幾何学的非線形性の影響で  $M_{bt}/M_e < 1.0$  となっているのに対し、正弦半波形状初期たわみを有する SH モデルでは  $M_{bt}/M_e = 1.0$  となっている。

材料非線形性と幾何学的非線形性の両方を有する場合の例として、A\_B00.E1\_020 モデル (逆対称曲げ、バイリニア、残留応力なし、弾性一次座屈モード形状初期たわみ、初期たわみ量  $1/500$ ) の巨視的不安定曲面を図示すると Fig.5-193 の左図のようになる。比較のため、白抜きのプロットで材料非線形性のみを有するモデル (A\_B00.E1\_000) と幾何学的非線形性のみ

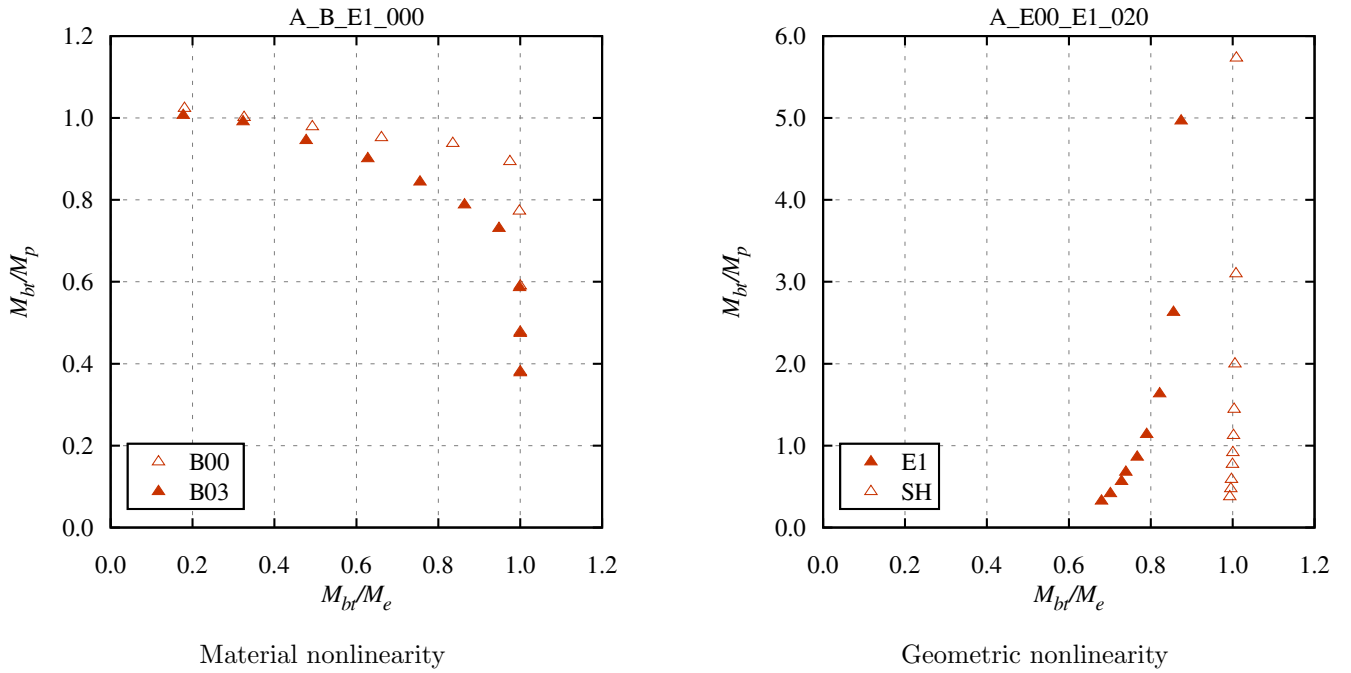


Fig. 5-192 Macroscopic instability surface

を有するモデル (A\_E00\_E1\_020) を表している。

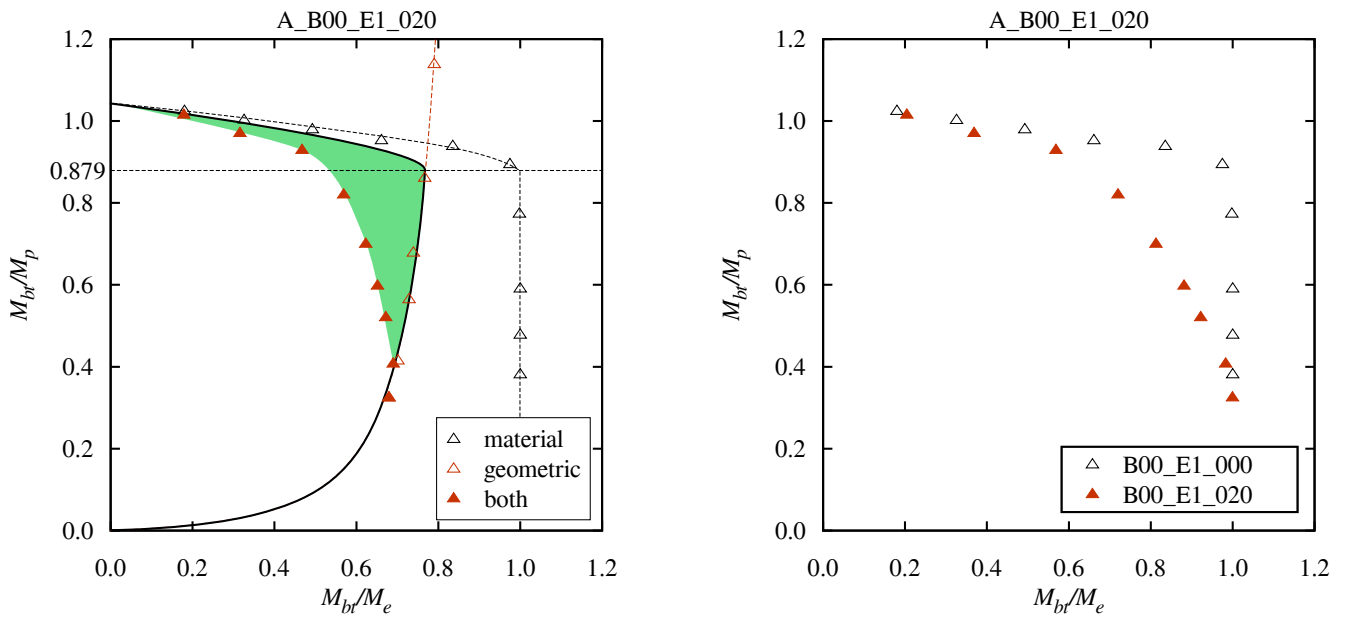


Fig. 5-193 Macroscopic instability surface: A\_B00\_E1\_020

塑性化と面外変形の相互作用がないと仮定すると、材料非線形性のみを有するモデルの曲面 (黒破線) で  $M_{bt}/M_e = 1.0$  となる  $M_{bt}/M_p \leq 0.879$  の範囲では、両方の非線形性を有するモデルの曲面は幾何学的非線形性のみを有するモデルの曲面 (赤破線) と一致し、それよりも  $\lambda_b$  が小さい範囲では材料非線形性のみを有するモデルの曲面に漸近すると考えられる (Fig.5-193 の黒実線)。実際の曲面はそれよりも内側に位置しており、緑色で示した部分が相互作用の影響を表している。相互作用の影響の大きさは塑性化と面外変形の進展状況によって変化し、それに応じて両方の非線形性を有する場合の巨視的不安定曲面の形状が決まる。



以下では、材料非線形性のみを有するモデルや幾何学的非線形性のみを有するモデルと比較しながら、両方の非線形性を有するモデルの巨視的不安定曲面について考察する。

#### 塑性化進展状況の変化

塑性化の進展状況という観点からは、初期たわみと残留応力はいずれも塑性化領域の偏分布を生み出す要因となる。

残留応力による塑性化領域の変化の影響は、Fig.5-192 左図に示した 2 モデルを比較することで確認できる。一方で、初期たわみによる塑性化領域の変化の影響を厳密に確認することは難しいが、塑性化による面外変形量の変化がないものと仮定することで、およその傾向を捉えることができる。

例えば、Fig.5-193 左図に示した A\_B00.E1.020 モデルと A\_E00.E1.020 モデルの  $M_{bt}$  の比をとって巨視的不安定曲面としてプロットすると Fig.5-193 右図のようになる。これは、幾何学的非線形性のみを有する A\_E00.E1.020 モデルの  $M_{bt}$  を A\_B00.E1.020 モデルの  $M_e$  とみなすということであり、A\_E00.E1.020 モデルと A\_B00.E1.020 モデルで面外変形量の変化がなければ、この曲面は初期たわみによる塑性化領域の変化の影響を表すことになる。実際には塑性化によって面外変形量が増加するため、Fig.5-193 右図は初期たわみによる塑性化領域の変化に伴う耐力低下を過大評価しているが、 $\lambda_b$  が大きい範囲では面外変形量の変化が比較的小さいため、妥当な推定となっていると考えられる。

初期たわみ形状が異なる E2 モデルと SH モデルについて同様の図を作成すると、Fig.5-194、Fig.5-195 のようになる。

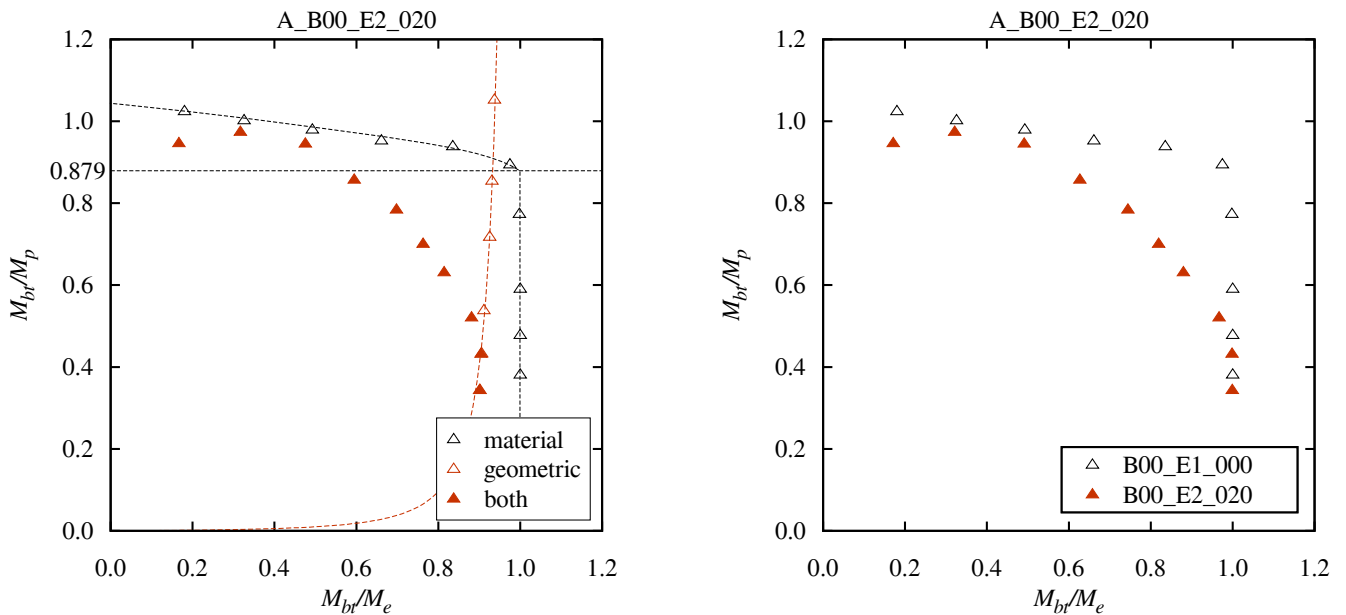


Fig. 5-194 Macroscopic instability surface: A\_B00.E2.020

E1 モデルと E2 モデルを比較すると、巨視的不安定曲面は E1 モデルの方が内側にきているが、初期たわみによる塑性化領域の変化に伴う耐力低下を表したグラフは概ね一致している。一次モードの方向への面外変形量は E1 モデルの方が大きいため、巨視的不安定曲面の横軸の値  $M_{bt}/M_e$  には大きな差が生じるが、二次モードの方向への面外変形によっても塑性化領域は変化し、その変化の仕方は一次モードの方向への面外変形が生じる場合と同様であるため (Fig.5-183、Fig.5-186)、初期たわみによる塑性化領域の変化に伴う耐力低下という観点では、E1 モデルと E2 モデルは同程度になっていると考えられる。

一方、SH モデルの場合には、一次モードの方向への面外変形が生じず、面外変形による塑性化領域の変化も小さいため (Fig.5-187)、巨視的不安定曲面は初期たわみを有しない場合の曲面と概ね一致している。

残留応力と初期たわみの両方を有するモデルの例として、A\_B03.E1.020 モデル (逆対称曲げ、バイリニア、残留応力 30%、弾性一次座屈モード形状初期たわみ、初期たわみ量 1/500) の巨視的不安定曲面を Fig.5-196 に示す。

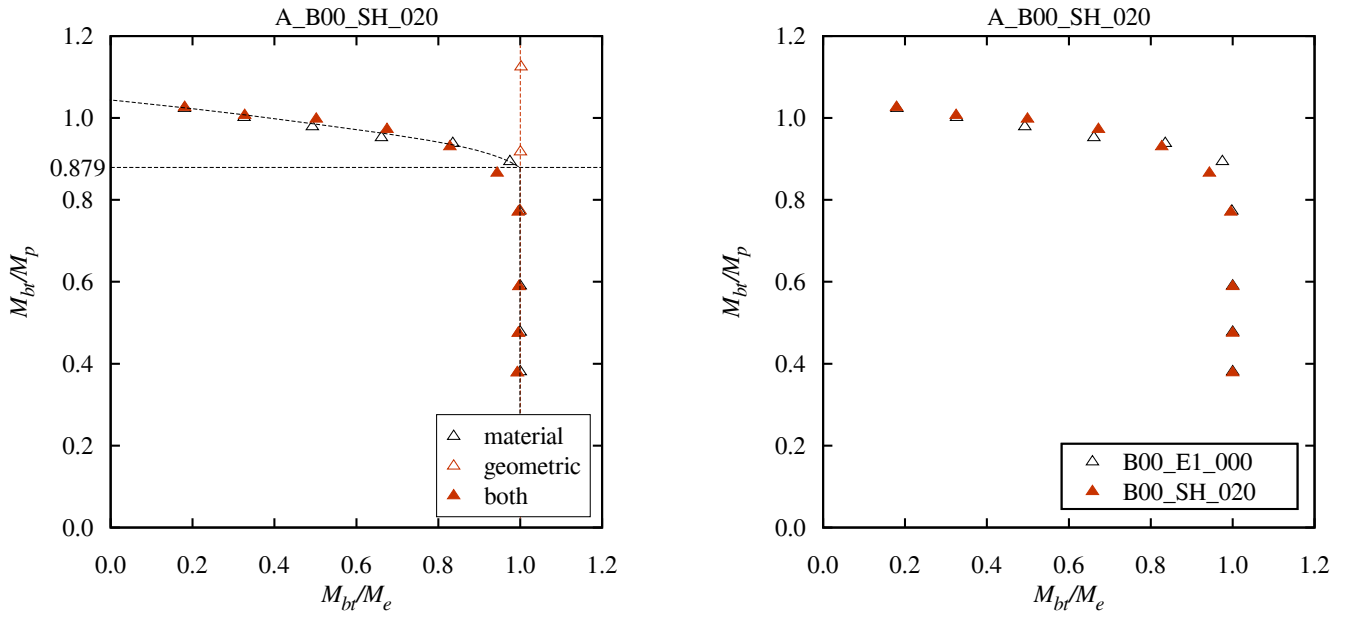


Fig. 5-195 Macroscopic instability surface: A\_B00.SH.020

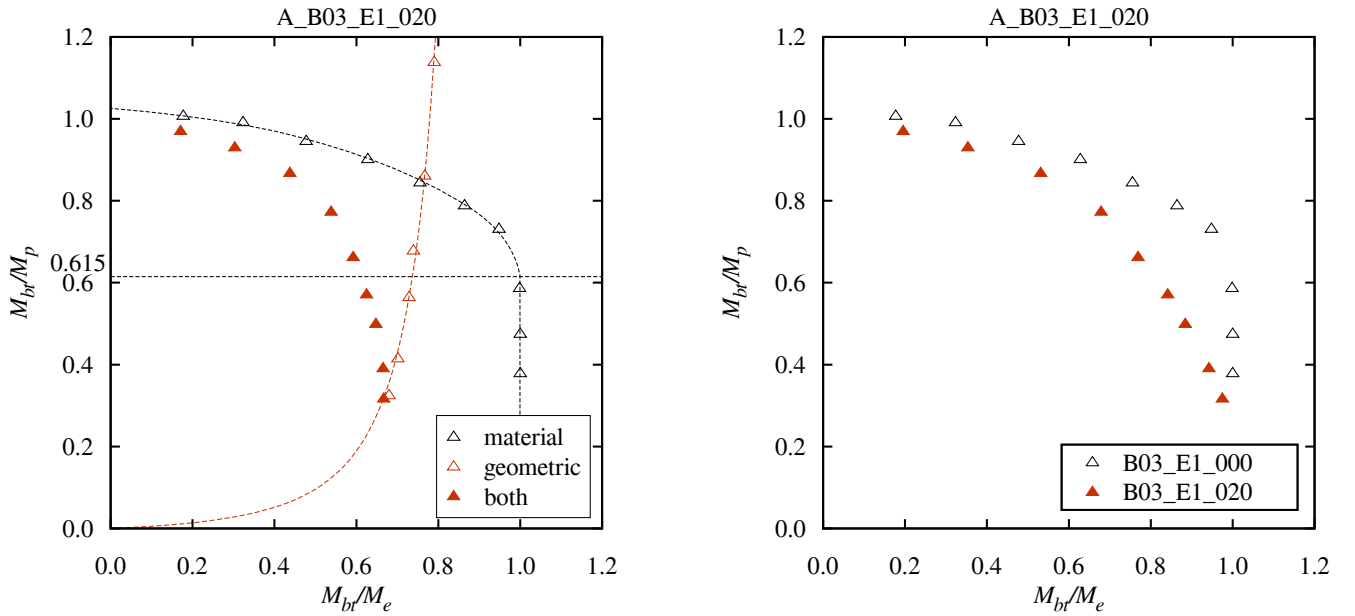


Fig. 5-196 Macroscopic instability surface: A\_B03.E1.020

残留応力と初期たわみの両方の影響で塑性化領域が変化するため、Fig.5-193 の A\_B00.E1.020 モデルと比較すると  $M_{bt}$  が低下し、巨視的不安定曲面はさらに内側にきている。

また、初期たわみ形状と面外変形の関係は曲げモーメント分布によって変化するため、巨視的不安定曲面の形状も変化する。例として、B03.E1.020 モデル（パイリニア、残留応力 30%、正弦半波形状初期たわみ、初期たわみ量 1/500）の巨視的不安定曲面を比較したものを Fig.5-197 に示す。

逆対称曲げモデルでは正弦半波形状初期たわみの影響がわずかであるため、A\_B03.SH.020 モデルの巨視的不安定曲面は材料非線形性のみを有する A\_B03.E1.000 モデルの曲面にほぼ一致している。それに対し、片曲げモデルでは初期たわみの影響によって  $M_{bt}$  が低下するため、材料非線形性のみを有するモデルの曲面形状は逆対称曲げモデルに近いものの、C\_B03.SH.020 モデルの曲面は A\_B03.SH.020 モデルの曲面に比べてかなり内側にきている。一様曲げモデルでは、他の曲げモーメント分布に比べると材料非線形性のみを有するモデルの曲面が  $M_{bt}/M_p \geq 0.615$  の範囲で下側にきていることに加え、初期たわみの影響も存在するため、U\_B03.SH.020 モデルの巨視的不安定曲面は 3 つの曲げモーメント分布の中で最も

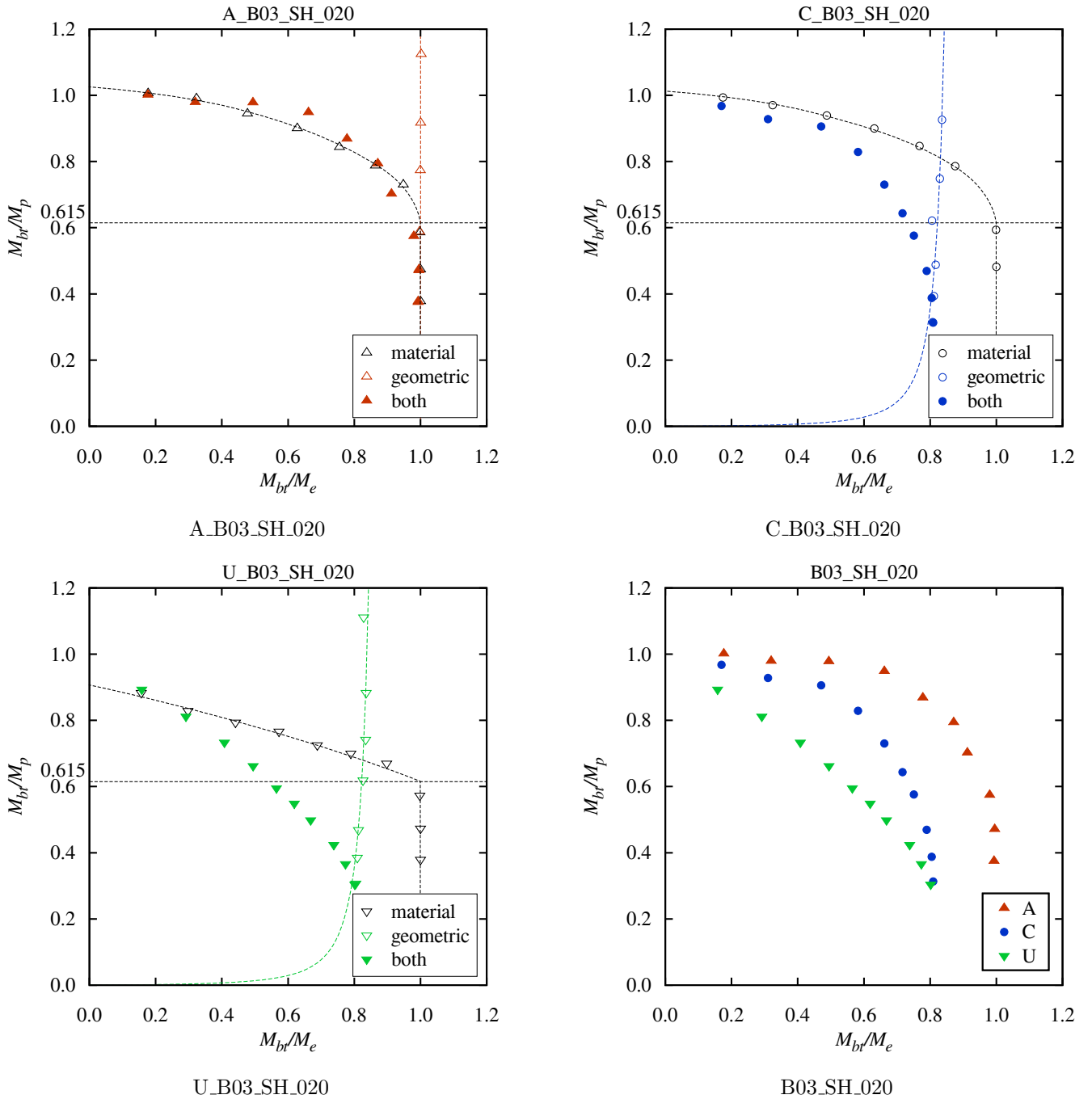


Fig. 5-197 Macroscopic instability surface: B03\_SH\_020

内側となっている。

## 5.8 $M_{bt}$ と $M_{\max}$ の比較

本研究では、材料非線形性と幾何学的非線形性の影響によって系が巨視的不安定に至るときの荷重として分岐モーメント  $M_{bt}$  を定義し、最大曲げ耐力の予測下限値としている。本節では、荷重増分解析で得られる最大曲げ耐力  $M_{\max}$  と  $M_{bt}$  を比較することで、その妥当性を検証する。



## 5.8.1 幾何学的非線形性による剛性低下が一次モードで生じる場合

幾何学的非線形性による剛性低下が一次モードで生じる場合には、横座屈細長比  $\lambda_b$  の大きさによって  $M_{bt}$  と  $M_{\max}$  の関係が異なり、 $\lambda_b$  が小さい範囲や大きい範囲では  $M_{bt}$  は  $M_{\max}$  を過小評価するが、 $\lambda_b$  が中程度の範囲では概ね妥当な評価を与えている。

(a)  $\lambda_b = 0.42 \sim 0.71$ 

$\lambda_b$  が小さい範囲 ( $\lambda_b = 0.42 \sim 0.71$ ) では、残留応力や初期たわみによらず逆対称曲げモデルと片曲げモデルで  $M_{bt}$  が過小評価になる傾向にあり、 $M_{bt}$  と  $M_{\max}$  の差は  $\lambda_b$  が小さいほど大きくなる (Fig.5-198 の赤色部分)。一様曲げモデルでも、初期たわみ量が小さい場合には同様の傾向がみられる (U042\_B03.E1\_001 など)。

$\lambda_b$  が小さいモデルでは、荷重変形曲線に示した  $M_l$  と  $M'_l$  の曲線が一致していることからわかるように、面外変形の影響がわずかであるため、 $M_{bt}$  が過小評価となるのは、Tangent modulus theory に基づいて要素のヤング係数を低下させているためだと考えられる。

(b)  $\lambda_b = 0.83 \sim 1.14$ 

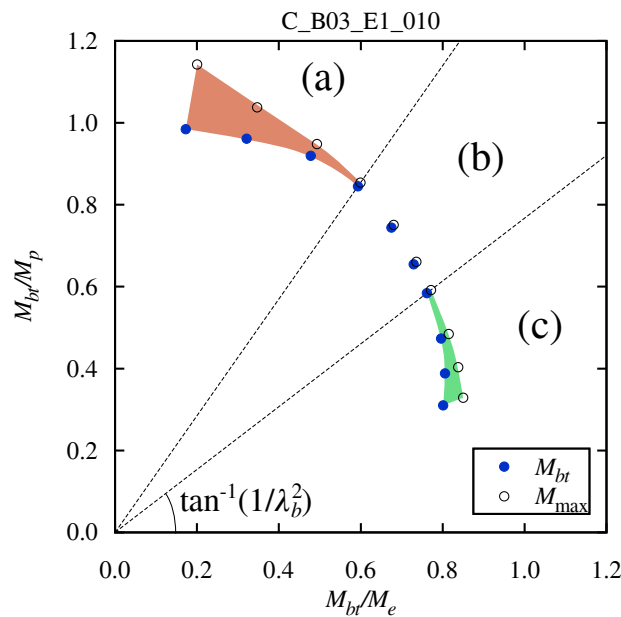
$\lambda_b$  が中程度の範囲 ( $\lambda_b = 0.83 \sim 1.14$ ) では、 $M_{bt}$  と  $M_{\max}$  は比較的良好一致している。

荷重変形曲線と剛性低下曲線を確認すると、 $M = M_{\max}$  となる梁端回転角よりも  $M = M_{bt}$  となる梁端回転角の方が小さくなっており、最大曲げ耐力時の梁端回転角の予測としても下限をおさえていることがわかる。

(c)  $\lambda_b = 1.30 \sim 1.62$ 

$\lambda_b$  が大きい範囲 ( $\lambda_b = 1.30 \sim 1.62$ ) では、すべてのモデルで  $M_{bt}$  が  $M_{\max}$  を過小評価する傾向にあり、 $\lambda_b$  や初期たわみ量が大きくなるにつれてその傾向が強まっている (Fig.5-198 の緑色部分)。

4章の結果からわかるように、幾何学的非線形性による剛性低下が生じる場合には、面外変形が進行するにつれて荷重が緩やかに座屈モーメント  $M_l$  に漸近しながら増大するのに対し、面外変形が過大となる領域における荷重の増加を考慮しないように  $M_{bt}$  を設定しているため、面外変形量が大きいほど  $M_{bt}$  は  $M_{\max}$  を過小評価することになる。 $\lambda_b$  や初期たわみ量が大きいモデルでは材料非線形性の影響が小さく、幾何学的非線形性の影響が支配的となるため、 $M_{bt}$  と  $M_{\max}$  の関係が4章のモデルと同様のものになる。

Fig. 5-198 Comparison between  $M_{bt}$  and  $M_{\max}$

## 5.8.2 幾何学的非線形性による剛性低下が高次モードで生じる場合

巨視的不安定曲面の  $M_{bt}$  と  $M_e$  には一次モードに対応する値を用いているため、幾何学的非線形性による剛性低下が高次モードで生じる場合には、 $M_{bt}$  が  $M_{\max}$  を大きく下回っている。

幾何学的非線形性による剛性低下が二次モードで生じる例として、A\_B03.E2.020 モデル (逆対称曲げ、バイリニア、残留応力 30%、弾性二次座屈モード形状初期たわみ、初期たわみ量 1/500) と A\_B03.SH.020 モデル (逆対称曲げ、バイリニア、残留応力 30%、正弦半波形状初期たわみ、初期たわみ量 1/500) について、二次モードに対応する  $M_{bt}$  と  $M_e$  を用いた場合の巨視的不安定曲面を Fig.5-199 に示す。

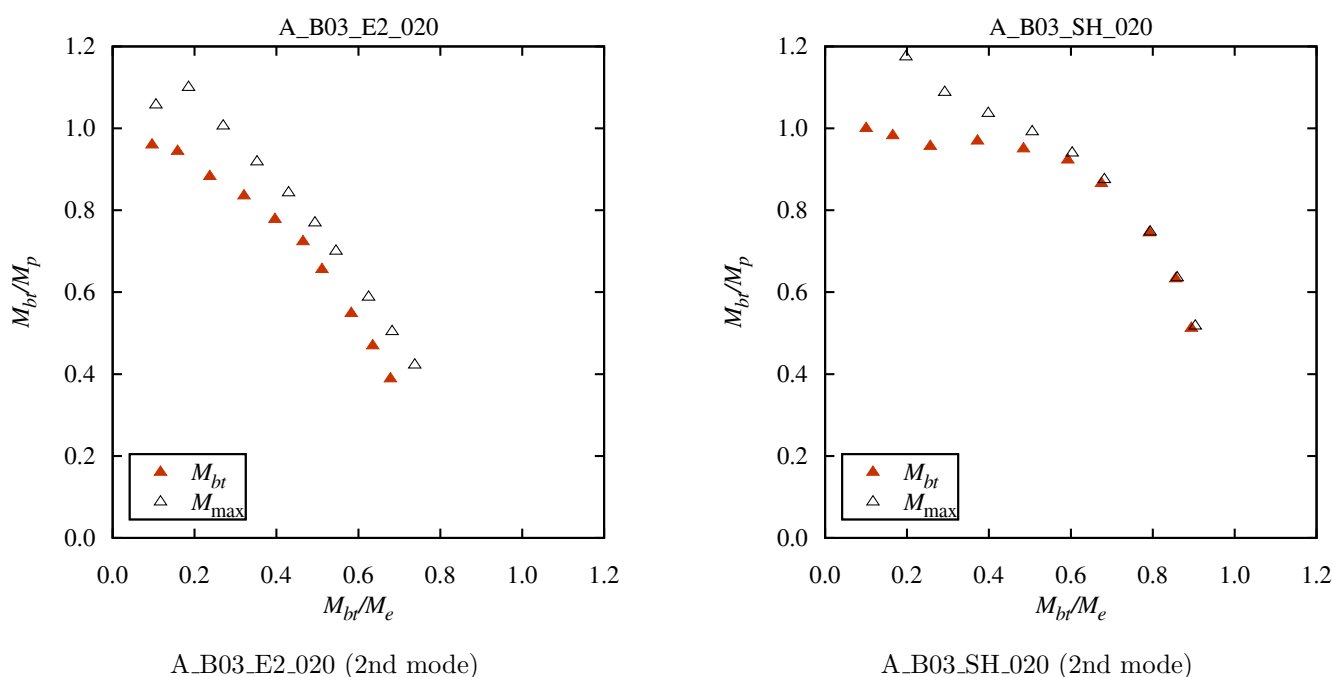


Fig. 5-199 Macroscopic instability surface (2nd mode): A\_B03.E2.020, A\_B03.SH.020

幾何学的非線形性による剛性低下が高次モードで生じる場合でも、剛性低下が生じるモードに対応する  $M_{bt}$  と  $M_e$  を用いることで、 $M_{bt}$  と  $M_{\max}$  の関係は前項で述べたようなものになることがわかる。

## 5.9 結

本章では、材料非線形性と幾何学的非線形性の両方を有する場合について、逐次座屈固有値解析法を用いて検討した。

材料非線形性のみを有する場合には、曲げモーメント分布や残留応力などに応じた塑性化領域の分布とヤング係数の低下量によって剛性低下量が決まり、幾何学的非線形性のみを有する場合には、初期たわみに応じた面外変形の方角と大きさによって剛性低下量が決まるが、両方の非線形性を有する場合には、塑性化と面外変形が同時に生じるため、

- 面外変形による塑性化進展状況の変化
- 塑性化による面外変形進展状況の変化

という二つのかたちの相互作用によって剛性低下量が決まる。

5.6 節では、面外変形による塑性化領域の変化と塑性化による面外変形量の変化を確認することで、相互作用の影響について考察した。5.7 節では、両方の非線形性を有する場合の巨視的不安定曲面の形状について、材料非線形性と幾何学的非線形性のいずれか一方のみを有する場合の曲面と比較しながら検討し、5.8 節において分岐モーメントと最大曲げ耐力を比較

した。

本章で得られた知見を以下に示す。

1. 材料非線形性による剛性低下に対しては、圧縮側フランジにおける塑性化領域の変化の影響が大きい。残留応力と初期たわみは、材料的な初期不整と幾何学的な初期不整という違いはあるものの、いずれも塑性化領域の変化をもたらす要因であり、特に圧縮側フランジへの影響を考慮することが重要になる。
2. 一次座屈モードの方向以外の面外変形によっても、材料非線形性による剛性低下量を増加させるような塑性化領域の変化が生じる場合がある。そのため、幾何学的非線形性による剛性低下のみが生じる場合には一次座屈モード方向への面外変形量のみが重要であったが、両方の非線形性を有する場合には、高次座屈モード方向への面外変形量も考慮する必要がある。
3. 最大曲げ耐力の予測下限値となるのは、初期たわみベクトルを  $\mathbf{v}_{\text{init}}$ 、 $n$  次座屈モードベクトルを  $\mathbf{e}_n$  として、 $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_n \rangle \neq 0$  となる最小の次数  $n$  に対応する  $M_{bt}$  である。 $n \neq 1$  の場合、高次モードの方向への面外変形によって一次モードに対応する  $M_{bt}$  が減少することもあるものの、一次の剛性低下曲線の前後では荷重変形曲線の剛性が大きく低下することはない。この点は、材料非線形性の影響がある場合でも、幾何学的非線形性による剛性低下のみを有する場合と同様である。
4. 塑性化によって、面外変形量は増大する傾向にある。残留応力がある、横座屈細長比  $\lambda_b$  が小さい、梁端回転角が大きいなど、塑性化が進行するほど、材料非線形性の影響がない場合と比較したときの面外変形量の差が大きくなる。塑性化進展状況によっては、座屈モードが横座屈から局部座屈に変化する場合があり、その場合には面外変形がほとんど生じていないものとして評価することになるが、本研究で取り上げたパラメタの範囲では、このことは  $M_{bt}$  の評価に与える影響はわずかである。
5. 材料非線形性と幾何学的非線形性の両方の影響を考慮して求めた分岐モーメント  $M_{bt}$  は最大曲げ耐力  $M_{\text{max}}$  の予測下限値となるが、 $\lambda_b$  が小さい範囲と大きい範囲では、次のような理由で  $M_{\text{max}}$  を過小評価する傾向にある。
  - (a)  $\lambda_b$  が小さい範囲 (概ね  $\lambda_b \leq 0.7$ ): Tangent modulus theory に基づいてヤング係数を低下させているため、荷重が Double modulus load まで上昇することによって過小評価となる。
  - (b)  $\lambda_b$  が大きい範囲 (概ね  $\lambda_b \geq 1.3$ ): 面外変形が進行するにつれて荷重は座屈モーメント  $M_l$  に漸近するように緩やかに上昇するが、面外変形が過大となる領域における荷重の増加を考慮しないように  $M_{bt}$  を設定しているため、過小評価となる。
6. 幾何学的非線形性による剛性低下が高次モードで生じる場合には、剛性低下が生じるモードに対応する  $M_{bt}$  と  $M_e$  を用いることで、最大曲げ耐力の予測下限値を与えるような巨視的不安定曲面を描くことができる。ただし、実現象としては一次モードに対して厳密に  $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$  とすることは困難であるため、一次モードに対応する巨視的不安定曲面で最大曲げ耐力を評価することが望ましいと考えられる。

## 6 結論

### 6.1 本研究の結論

本研究では、幾何学的非線形性による剛性低下を定量的に評価する方法を提案することで、材料非線形性を加えた二つの非線形性による剛性低下を考慮した座屈耐力の評価方法を確立することを目的としている。

材料非線形性による剛性低下の影響については、塑性化領域のヤング係数を低減させたときの座屈固有値の変化として考慮する方法が、Tangent modulus theory や Double modulus theory として確立されている。これらの理論に基づいて求められる Tangent modulus load と Double modulus load の違いは、座屈モード方向への変形という観点から、

- Tangent modulus load: 座屈モード方向への変形が生じ始めるときの荷重
- Double modulus load: 座屈モード方向への変形が無限に進行した極限での荷重

とまとめることができ、実際の最大耐力は両者の中間に存在する。

一方で、幾何学的非線形性の影響については、変形の増加に伴う応力度分布の変化として捉えることで材料非線形性の問題に置き換える方法や確率論的に評価する方法があるが、いずれも幾何学的非線形性の影響を定量化するものではない。

本研究では、幾何学的非線形性による剛性低下の影響についても、座屈モード方向への変形という観点から捉えるための方法として、幾何学的非線形性による剛性低下が生じる場合の座屈を「幾何学的非線形性による剛性低下が生じないモデルで同じ変形を生じさせたとき、座屈モード方向への変形が生じ始める現象」と定義することを提案した。これは、座屈モード方向への変形量に閾値を設け、座屈モード方向への変形量が閾値を超えときの荷重を座屈荷重とみなすことに相当し、Tangent modulus load の考え方を幾何学的非線形性による剛性低下が生じる場合に対して拡張するものである。

この考え方に基づき、材料非線形性と幾何学的非線形性の両方を考慮した Tangent modulus load を分岐モーメント  $M_{bt}$  と称し、 $M_{bt}$  を求める方法として、逐次座屈固有値解析法を提案した。 $M_{bt}$  は座屈モード方向への変形が過大とならない時点での耐力に対応するため、座屈モード方向への変形が進行する間の剛性が 0 でない場合には最大耐力を過小評価するが、最大耐力の予測下限値として用いることができる。

逐次座屈固有値解析法では、荷重増分解析の各インクリメントについて線形座屈固有値解析を逐次的に実行することで得られる座屈固有値と座屈固有ベクトルを用いて二つの非線形性の影響を考慮する。材料非線形性の影響は、荷重増分解析で塑性化した部分のヤング係数を低下させることで考慮され、座屈耐力の低下として現れる。幾何学的非線形性の影響は、変形ベクトルと座屈固有ベクトルから求めた座屈モード方向への変形量に応じて、座屈耐力を低減することで考慮される。二つの非線形性による剛性低下の影響を考慮した座屈耐力が荷重の増加に伴って変化する様子を表す剛性低下曲線を描くことで、各非線形性の影響の推移を区別して捉えることができる。

また、座屈モード方向への変形が進行する現象を幾何学的な不安定現象として捉えると、非線形性は幾何学的な不安定性に対応し、対象となる幾何学的現象のスケールに応じて、微視的な幾何学的不安定性 (微視的不安定性) を材料非線形性、巨視的な幾何学的不安定性 (巨視的不安定性) を幾何学的非線形性として捉えているとみることができる。

変形の方法が座屈モードの方法と完全に一致した状態を巨視的不安定な状態と定義し、分岐モーメント  $M_{bt}$ 、全塑性モーメント  $M_p$ 、弾性横座屈モーメント  $M_e$  を不安定性の観点から整理すると、

- 分岐モーメント  $M_{bt}$ : 二つの不安定性の連成によって部材が巨視的不安定に至るときの荷重
- 全塑性モーメント  $M_p$ : 微視的不安定性のみによって部材が巨視的不安定に至るときの荷重
- 弾性横座屈モーメント  $M_e$ : 巨視的不安定性のみによって巨視的不安定に至るときの荷重

と位置付けることができるため、部材が巨視的不安定な状態に至る時点での二つの非線形性の影響を図示するための方法として、 $M_{bt}/M_p$  と  $M_{bt}/M_e$  の関係を表す巨視的不安定曲面を提案した。

本研究では、提案した逐次座屈固有値解析法を H 形断面梁の横座屈現象に対して適用することで、梁スパン、曲げモーメント分布、残留応力、初期たわみなどの各パラメータが梁の最大曲げ耐力に与える影響を、材料非線形性と幾何学的非線形性

の影響に区別して把握できることを示した。

各章で得られた知見を以下に改めてまとめ、本論文の結論とする。

- 材料非線形性による剛性低下について、
  1. 剛性低下に対する曲げモーメント分布の影響は、塑性化領域分布の違いとして捉えることができる。逆対称曲げモデルと片曲げモデルではモーメント勾配があり、梁端部から徐々に塑性化が進行する点が共通しているため、剛性低下の傾向も概ね一致している。それに対し、一様曲げモデルでは梁が材軸方向に一斉に塑性化するため、逆対称曲げモデルや片曲げモデルに比べると塑性化領域が広く、剛性低下量が大きい傾向にある。
  2. 剛性低下に対する残留応力の影響は、塑性化領域分布の変化として捉えることができる。
    - (a) 塑性化開始時点の変化は、曲げモーメント分布や二次剛性によらず、残留応力のみによって決まる。
    - (b) 塑性化が十分に進行した段階では塑性化領域の変化の影響が小さくなる傾向にある。
    - (c) 一様曲げモデルは他の曲げモーメント分布に比べると、塑性化の進行度によらず残留応力の影響が大きい。
  3. 二次剛性が大きくなると剛性低下は抑制されるが、その影響の大きさには次のような傾向がある。
    - (a) 一様曲げモデルは他の曲げモーメント分布に比べて二次剛性の影響が小さい。
    - (b) 残留応力の有無を比較すると、残留応力がないモデルの方が二次剛性の影響が大きい。
    - (c) 横座屈細長比  $\lambda_b$  が小さいモデルの方が二次剛性の影響が大きい。
- 幾何学的非線形性による剛性低下について、
  1. 初期たわみベクトルを  $\mathbf{v}_{\text{init}}$ 、 $n$  次座屈モードベクトルを  $\mathbf{e}_n$  とすると、最大曲げ耐力の予測下限値となるのは、 $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_n \rangle \neq 0$  となる最小の次数  $n$  に対応する  $M_{bt}$  である。これは、初期たわみが  $n$  次座屈モード成分を含む場合に限り  $n$  次座屈モードの方向への面外変形が進行するためである。
  2. 荷重開始当初は  $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_n \rangle$  が最大となる次数の座屈モードの方向に面外変形が進行する。1) と合わせると、面外変形の進展状況と  $M_{bt}$  の低下量は、
    - (a)  $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_n \rangle \neq 0$  となる最小次数
    - (b)  $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_n \rangle$  が最大となる次数
 によって決まることになる。(a) と (b) が異なる場合には、荷重途中で面外変形の方向が変化する場合が存在する(片曲げ、E2 モデル)。
  3. 弾性一次座屈モード形状の初期たわみを有する場合、初期たわみ量  $a/l_b \leq 1/1000$  の範囲では、概ね  $a/l_b$  の大きさに比例して面外変形量と  $M_{bt}$  の低下量が增大する。 $a/l_b > 1/1000$  の範囲では  $a/l_b$  の増加に対する面外変形量や  $M_{bt}$  の低下量の増大は緩やかになる。一般的な形状の初期たわみを有する場合には、(4-11) 式によって計算される弾性一次座屈モード方向への初期たわみ量を用いることで、 $M_{bt}$  の低下量を安全側に評価できる。
  4. 初期たわみ量が同じでも、横座屈細長比  $\lambda_b$  が大きいほど面外変形量や  $M_{bt}$  の低下量が大きくなる傾向にある。初期たわみ量が一定として  $\lambda_b$  を変化させたモデルの巨視的不安定曲面は、(4-10) 式のかたちの関数で近似することができる。
- 材料非線形性と幾何学的非線形性の連成について、
  1. 材料非線形性による剛性低下に対しては、圧縮側フランジにおける塑性化領域の変化の影響が大きい。残留応力と初期たわみは、材料的な初期不整と幾何学的な初期不整という違いはあるものの、いずれも塑性化領域の変化をもたらす要因であり、特に圧縮側フランジへの影響を考慮することが重要になる。
  2. 一次座屈モードの方向以外の面外変形によっても、材料非線形性による剛性低下量を増加させるような塑性化領域の変化が生じる場合がある。そのため、幾何学的非線形性による剛性低下のみが生じる場合には一次座屈モード方向への面外変形量のみが重要であったが、両方の非線形性を有する場合には、高次座屈モード方向への面外変形量も考慮する必要がある。
  3. 最大曲げ耐力の予測下限値となるのは、初期たわみベクトルを  $\mathbf{v}_{\text{init}}$ 、 $n$  次座屈モードベクトルを  $\mathbf{e}_n$  として、 $\langle \mathbf{v}_{\text{init}}, \mathbf{e}_n \rangle \neq 0$  となる最小の次数  $n$  に対応する  $M_{bt}$  である。 $n \neq 1$  の場合、高次モードの方向への面外変形によって一次モードに対応する  $M_{bt}$  が減少することはあるものの、一次の剛性低下曲線の前後では荷重変形曲線の

剛性が大きく低下することはない。この点は、材料非線形性の影響がある場合でも、幾何学的非線形性による剛性低下のみを有する場合と同様である。

4. 塑性化によって、面外変形量は増大する傾向にある。残留応力がある、横座屈細長比  $\lambda_b$  が小さい、梁端回転角が大きいなど、塑性化が進行するほど、材料非線形性の影響がない場合と比較したときの面外変形量の差が大きくなる。塑性化進展状況によっては、座屈モードが横座屈から局部座屈に変化する場合があり、その場合には面外変形がほとんど生じていないものとして評価することになるが、本研究で取り上げたパラメタの範囲では、このことは  $M_{bt}$  の評価に与える影響はわずかである。
5. 材料非線形性と幾何学的非線形性の両方の影響を考慮して求めた分岐モーメント  $M_{bt}$  は最大曲げ耐力  $M_{\max}$  の予測下限値となるが、 $\lambda_b$  が小さい範囲と大きい範囲では、次のような理由で  $M_{\max}$  を過小評価する傾向にある。
  - (a)  $\lambda_b$  が小さい範囲 (概ね  $\lambda_b \leq 0.7$ ): Tangent modulus theory に基づいてヤング係数を低下させているため、荷重が Double modulus load まで上昇することによって過小評価となる。
  - (b)  $\lambda_b$  が大きい範囲 (概ね  $\lambda_b \geq 1.3$ ): 面外変形が進行するにつれて荷重は座屈モーメント  $M_l$  に漸近するように緩やかに上昇するが、面外変形が過大となる領域における荷重の増加を考慮しないように  $M_{bt}$  を設定しているため、過小評価となる。
6. 幾何学的非線形性による剛性低下が高次モードで生じる場合には、剛性低下が生じるモードに対応する  $M_{bt}$  と  $M_e$  を用いることで、最大曲げ耐力の予測下限値を与えるような巨視的不安定曲面を描くことができる。ただし、実現象としては一次モードに対して厳密に  $\langle v_{\text{init}}, e_1 \rangle = 0$  とすることは困難であるため、一次モードに対応する巨視的不安定曲面で最大曲げ耐力を評価することが望ましいと考えられる。

## 6.2 今後の課題

### 分岐モーメントに達した後の挙動

分岐モーメント  $M_{bt}$  は材料非線形性と幾何学的非線形性の影響を考慮した Tangent modulus load に相当し、座屈モード方向への変形が過大とならない時点での耐力であるため、荷重が  $M_{bt}$  を超え、系が巨視的不安定状態になった後でも、座屈モード方向への変形が進行しながら荷重と変形が増加する可能性がある。そのため、荷重低下が始まる時点や系が崩壊に至る時点予測するには、座屈モード方向への変形が進行する段階での挙動を適切にモデル化する必要がある。

座屈モード方向への変形が進行する段階での挙動に対しては、

1. 座屈モード方向への変形が進行する際の剛性変化
2. 座屈モード方向への変形量の上限

が影響すると考えられる。

1 については、2 章の力学モデルで言うと、ローラとレールがばねでつながれた状態に相当し、本論文ではこのばねの剛性を 0 としてモデル化した。微視的な現象においては結晶の方位が一樣でないことや炭素原子による固着効果によって、巨視的な現象においては座屈モード方向への変形とそれに直交する方向への変形が同時に生じることによって、座屈モード方向への変形が開始する時点での剛性は正の値を取り、変形の進行とともに値が減少すると考えられる。この剛性が 0 でない場合、座屈モード方向への変形とともに荷重が増加するため、耐力は  $M_{bt}$  よりも上昇する。これは、Tangent modulus load と Double modulus load の違いに相当する。

2 については、2 章の力学モデルで言うと、レールの長さが有限であることに相当し、本論文ではレールの長さを無限大と仮定した。座屈モード方向への変形量に上限を設定することは、エントロピーの考え方を導入することに相当し、系の崩壊現象をモデル化できるようになる。微視的な現象においては破断現象に相当し、Miner 則や Manson-Coffin 則、破断履歴の相似則などと関連付けることができると考えられる。巨視的な現象においては、座屈モード方向への変形量自体には上限が存在しないと考えられるが、塑性化状況や変形形状に応じて、異なる座屈モード形状に移行する現象や、 $P\Delta$  効果をモデル化する際に用いることができると考えられる。

### 逐次座屈固有値解析法の検証

逐次座屈固有値解析法を用いたH形断面梁の最大曲げ耐力評価の検証に関して、本論文ではパラメタの数、種類ともに限られた範囲についてしか行えていないが、手法自体には適用範囲の制限がないため、載荷形式の違い、荷重の偏心、コンクリートスラブの有無など、より広範なパラメタが最大曲げ耐力に与える影響を検討したり、材料特性や残留応力、初期たわみなどについても、実際の状況に近い複雑な条件を設定し、実験結果との対応を確認することで、検証の精度を高めることができる。

実験的な検証を行うにあたっては、載荷前の初期形状や載荷中の詳細な変形形状を取得することによって、幾何学的非線形性による剛性低下の影響を精確に把握することが必要になる。これには、載荷点や部材中央部などの代表的な箇所での変位を記録するだけでなく、3D スキャン技術を活用することが考えられる。

3D スキャン技術を用いることで得られる変位データは、従来の変形測定技術を用いた場合に比べて高精度かつ詳細な反面、データ量が膨大になるため、そこからどのような情報を抽出するかが問題になるが、逐次座屈固有値解析法では、座屈モード方向への変形量が重要になるため、解析によって得られる座屈モード形状を用いて変位データから座屈モード方向への変形成分を抽出することで、3D スキャン技術によってもたらされる詳細な変位データを有効に利用することができる。

### 逐次座屈固有値解析法の応用

本論文で取り上げた梁の横座屈現象だけでなく、局部座屈やフレームの全体座屈などの他の座屈現象にも逐次座屈固有値解析法を適用することで、座屈現象一般に関して耐力評価を行うことができる。

現行の設計において、建物の水平荷重に対する耐荷性能評価は、建物を層ごとに区切って行うことが一般的であるが、建物全体について、塑性ヒンジの形成を微視的不安定性、フレーム全体の座屈モード方向への変形を巨視的不安定性とみなした上で、逐次座屈固有値解析法を適用することで、建物全体としての耐荷性能評価を行うことが可能になる。これにより、上谷らの提唱する「下層部変形集中現象<sup>46)</sup>」のように、建物全体の挙動を考慮しないと評価できない倒壊現象も考慮することができる。逆に、偏心率や幅厚比などの制限もフレーム全体で一律に定められているが、逐次座屈固有値解析法を用いてフレームの全体座屈形状を考慮することで、分岐モーメントへの影響がわずかである部分については、制限値を緩和することもできると考えられる。

さらに、将来的には3D プリント技術などの高度加工技術が発達することで、面材や立体部材のように幾何学的非線形性に強く支配される部材を用いた構造物が普及することが考えられる。構造物に用いられる材料についても、鋼材のように弾性域における線形性が強い材料であるとは限らないことを考慮すると、今後は材料非線形性と幾何学的非線形性の両方の影響を大きく受けるような構造物の設計を行う可能性が出てくる。そのような構造物の挙動を把握するにあたって、逐次座屈固有値解析法が有効であると考えられる。

実験技術や解析技術の発達によって、複雑な構造物の挙動を詳細にモニタしたりシミュレートしたりすること自体は容易になっていくと考えられるが、構造設計の社会科学的な側面を考慮したとき、モニタされシミュレートされた構造物の挙動をどのように理解するか、あるいは、構造物の安全性をどのように判断し、説明するかといった問題は、建築に対して人間が関わる限り、常につきまとう。入力される条件や出力される結果の情報量が膨大になる中で、最大耐力や変形能力をどのようなものとして捉えるか、あるいは、最大耐力や変形能力に対する各条件の影響をどのような方法で把握するかという観点は、より重要性を増していくと考えられる。

## 参考文献

- 1) 伊賀はるな, 聲高裕治, 金尾伊織: 横座屈によって終局状態を迎える H 形断面梁の実験データに基づく最大耐力と塑性変形能力の評価, 構造工学論文集, Vol. 61B, pp. 185–198, 2015.3
- 2) 伊賀はるな, 聲高裕治, 伊山潤, 長谷川隆: コンクリート床スラブによる H 形断面梁の横座屈補剛効果に関する検討その 1 床スラブを有する H 形断面梁の横座屈性状確認実験の概要, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 1119–1120, 2013.8
- 3) 聲高裕治, 伊賀はるな, 伊山潤, 長谷川隆: コンクリート床スラブによる H 形断面梁の横座屈補剛効果に関する検討その 2 実験結果および塑性変形能力の評価, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 1121–1122, 2013.8
- 4) 聲高裕治, 伊賀はるな, 伊山潤, 長谷川隆: コンクリート床スラブによる H 形断面梁の横座屈補剛効果に関する検討その 9 H 形断面梁の横座屈性状に及ぼすコンクリートスラブの影響, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 899–900, 2015.9
- 5) 日本建築学会: 鋼構造塑性設計指針, 2017.2
- 6) 伊山潤, 聲高裕治, 長谷川隆: コンクリート床スラブによる H 形断面梁の横座屈補剛効果に関する検討その 3 有限要素解析による検討, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 1123–1124, 2013.8
- 7) 稲本暁, 伊山潤, 聲高裕治, 長谷川隆: コンクリート床スラブによる H 形断面梁の横座屈補剛効果に関する検討その 6 曲げモーメント分布を変化させた実験結果に対する有限要素解析による再現性検証, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 875–876, 2014.9
- 8) 伊山潤, 稲本暁, 聲高裕治, 長谷川隆: コンクリート床スラブによる H 形断面梁の横座屈補剛効果に関する検討その 7 曲げモーメント分布の影響に関する解析的検討, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 877–878, 2014.9
- 9) S.P. Timoshenko: 材料力学史, 鹿島研究所出版会, 1974
- 10) S.P. Timoshenko: *Theory of Elastic Stability Second Edition*, McGraw-Hill Book, 1961
- 11) 藤本盛久 (編): 構造物の技術史, 市ヶ谷出版社, 2001
- 12) R. Hill: 塑性学, 培風館, 1954 鷺津久一郎, 山田嘉昭, 工藤英明 訳
- 13) H. Tresca: Mmoire sur l'coulement des corps solides soumis de fortes pressions, *Comptes rendus hebdomadaires des sances de l'Acadmie des Sciences*, Vol. 59, pp. 754–758, 1864
- 14) R. von Mises: Mechanik der festen krper im plastisch-deformablen zustand, *Nachrichten von der Kniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, Vol. 4, pp. 582–592, 1913
- 15) F.R. Shanley: Inelastic column theory, *Journal of the Aeronautical Science*, Vol. 14, No. 5, pp. 261–268, 1947.5
- 16) 藤本盛久, 岩田衛: 鋼圧縮材の座屈強度の確率論的方法による研究—ランダムな初期たわみを有する圧縮材—, 日本建築学会論文報告集, No. 218, pp. 17–25, 1974.4
- 17) 坂本順, 小浜芳朗, 渡辺雅生, 大宮幸男: 鋼構造部材強度の確率統計論的考察, 日本建築学会論文報告集, No. 296, pp. 9–17, 1980.10
- 18) 井戸田秀樹, 山崎和浩: H 形鋼梁部材の平均耐力式と変動係数, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 79, No. 701, pp. 1025–1035, 2014.7
- 19) 日本建築学会: 鋼構造座屈設計指針, 2009.11
- 20) M.W. White: The lateral-torsional buckling of yielded structural steel members, *Interim Report*, Vol. 32, , 1956
- 21) F. Bleich: *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill Book, 1952
- 22) B.G. Neal: The lateral instability of yielded mild steel beams of rectangular cross-section, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 242, No. 846, pp. 197–242, 1950.1
- 23) W.H. Wittrick: Lateral instability of rectangular beams of strain hardening material under uniform bending, *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 19, No. 12, pp. 835–843, 1952
- 24) M.R. Horne: Critical loading conditions in engineering structures, 1950



- 25) G. Haaijer: The tangent modulus in shear of uniaxially plasticized steel, 1955.5
- 26) T.V. Galambos: Inelastic lateral buckling of beams, *Proc. ASCE*, Vol. 89, No. ST5, 1963
- 27) 山田稔, 北村雅良: H 形断面梁の横座屈に対する残留応力の影響, 日本建築学会近畿支部研究報告集, Vol. 6, pp. 157–160, 1966.5
- 28) 鈴木敏郎, 石田和人: 梁の弾塑性横座屈 —残留応力の影響—, 日本建築学会東海支部研究報告集, Vol. 6, pp. 33–36, 1968.6
- 29) 加藤勉, 福知保長, 谷口徹: 一点集中荷重を受ける鋼製はりの残留応力と横座屈について, 日本建築学会関東支部研究報告集, Vol. 39, pp. 375–378, 1968.6
- 30) W.E. Ayrton and J. Perry: On struts, *The Engineer*, Vol. 62, pp. 513–514, 1886
- 31) A. Robertson: The strength of struts, *Selected Engineering Papers*, No. 28, 1925
- 32) D.A. Nethercot: An approach to the design of imperfect slender beams, *Building Science*, Vol. 8, pp. 225–228, 1973.6
- 33) D.A. Nethercot: Imperfections and the design of steel beams, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 57, pp. 291–306, 1974.6
- 34) 藤本盛久, 岩田衛, 中谷文俊: 鋼圧縮材の座屈強度の確率論的方法による研究—ランダムな残留応力, 降伏応力, 初期たわみを有する H 形鋼の弱軸まわりの座屈—, 日本建築学会論文報告集, No. 229, pp. 53–61, 1975.3
- 35) 坂本順, 宮村篤典, 渡辺雅生:
- 36) 日本建築学会: 鋼構造限界状態設計指針・同解説, 2010.2
- 37) 川井忠彦: 座屈問題解析, 培風館, 1974
- 38) 倉西正嗣: 弾性学, 日本機械学会, 1948
- 39) B. Jaoul: 金属の塑性, 丸善株式会社, 1969 諸住正太郎, 舟久保熙康 訳
- 40) T.V. Galambos and Y. Fukumoto: Inelastic lateral-torsional buckling of beam-columns, *Proc. ASCE*, Vol. 92, No. ST2, 1966
- 41) 青木徹彦, 福本嘯士: 鋼柱の座屈強度のばらつきにおよぼす残留応力分布の影響について, 土木学会論文報告集, Vol. 201, pp. 31–41, 1972.5
- 42) 久田俊明, 野口裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善株式会社, 1995
- 43) 木村祥裕, 吉野裕貴: 引張側フランジ補剛された H 形鋼梁の横座屈荷重と必要補剛性能, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 76, No. 670, pp. 2143–2152, 2011.12
- 44) M.I. Kabir and A.K. Bhowmick: Applicability of north american standards for lateral torsional buckling of welded i-beams, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 147, pp. 16–26, 2018
- 45) 日本建築学会: 建築工事標準仕様書 JASS6 鉄骨工事, 2018.1
- 46) 上谷宏二: 超高層建物における下層部変形集中現象の座屈解析による解明 (その 1) 概説, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp. 269–270, 2015.9



## 発表論文リスト

### ■ 日本建築学会構造系論文集

- [1] 福島佳浩, 伊山潤: 初期たわみに伴う面外変形の幾何学的非線形効果を考慮した座屈固有値解析に基づくH形断面梁の最大曲げ耐力の推定, 日本建築学会構造系論文集, 第 83 巻, 第 746 号, pp.601-611, 2018.4

### ■ 構造工学論文集

- [2] 福島佳浩, 伊山潤, 森紘人: 塑性化に伴う剛性低下を考慮した座屈固有値解析に基づくH形断面梁の最大曲げ耐力の推定に関する検討, 構造工学論文集, Vol.63B, pp.533-541, 2017.3

### ■ 日本建築学会大会学術講演梗概集

- [3] 福島佳浩, 森紘人, 伊山潤, 聲高裕治, 長谷川隆: コンクリート床スラブによるH形断面梁の横座屈補剛効果に関する検討 その 11 スラブによる横座屈細長比低減効果に関する解析的検討, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), pp.955-956, 2016.8
- [4] 森紘人, 福島佳浩, 伊山潤, 聲高裕治, 長谷川隆: コンクリート床スラブによるH形断面梁の横座屈補剛効果に関する検討 その 12 スラブによる最大耐力および塑性変形能力向上効果に関する解析的検討, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), pp.957-958, 2016.8
- [5] 福島佳浩, 伊山潤: 材料非線形性および幾何学的非線形性を考慮した座屈固有値解析に基づく梁の最大曲げ耐力の推定, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), pp.1007-1008, 2017.8

### ■ 日本建築学会関東支部研究報告集

- [6] 福島佳浩, 伊山潤: 初期たわみによる座屈耐力低下の座屈モード形状を用いた定量化, 日本建築学会関東支部研究報告集, pp.641-644, 2017.2
- [7] 福島佳浩, 伊山潤: 逐次座屈固有値解析に基づく初期たわみを有するH形断面梁の最大曲げ耐力評価, 日本建築学会関東支部研究報告集, pp.453-456, 2018.3

### ■ 国際シンポジウム

- [8] Yoshihiro Fukushima, Jun Iyama: Estimate of Bending Strength of H-shaped Steel Beam Based on Eigenvalue Analysis Considering Material and Geometric Nonlinearity, 9th International Symposium on Steel Structures, 2017.11

