

博士論文

$S = 1/2$ XXZ 鎖の two-down-spin sector における two-string 解の崩壊と新たな解の出現に関する厳密な研究

Exact study on the collapse of two-string solutions and the emergent extra string solutions in the two-down-spin sector of the $S = 1/2$ XXZ chain

井元隆史

目次

第 1 章	はじめに	4
1.1	Introduction	4
1.1.1	背景	4
1.1.2	本研究の主な結果	6
1.1.3	本論文の位置づけと構成	7
第 2 章	Bethe 仮説方程式とその性質	10
2.1	XXZ 鎖と代数的 Bethe 仮説	10
2.1.1	XXZ 鎖と Bethe 仮説方程式	10
2.1.2	代数的 Bethe 仮説	12
2.2	基底状態について	14
2.3	特異解について	16
2.3.1	特異解についてのまとめ	16
2.3.2	正則化を用いたとき得られる波動関数が固有ベクトルに収束することについて	18
2.3.3	物理的特異解について	20
2.3.4	特異解に対応するエネルギー	22
2.4	String 仮説について	24
2.4.1	XXX 鎖の string 仮説	24
2.4.2	熱力学極限	26
2.5	XXX 鎖の two-down-spin sector に関する結果	30
2.5.1	複素解の場合	31
2.5.2	Collapse が起こる最小のサイト数 N について	34
2.5.3	実解の場合 (collapse した場合)	34
2.5.4	一般的な実解	38
2.5.5	特異解について	40
2.5.6	Two-down-spin sector の Bethe 根の完全性について	40
第 3 章	Massive regime の複素解	41
3.1	Two-down-spin sector の解の形	41
3.1.1	複素解と counting function	42
3.2	Counting function の単調性について	49
3.2.1	$0 < w < 1$ 上の安定領域について	50

3.2.2	$0 < w < 1$ 上の不安定領域について	51
3.2.3	w_1 及び w_3 の近似的な値について	52
3.2.4	$B(w)$, $C(w)$ のグラフについて	53
3.2.5	X の単調性について	55
3.2.6	Counting function $Z(w)$ の単調性について	57
3.3	複素解の解析的な数え上げについて	58
3.3.1	Narrow pairs ($w_1 < w < w_2$) の場合	61
3.3.2	Wide pairs ($w_2 < w < w_3$)	65
3.3.3	特異解に対する量子数について	67
3.4	複素根のサイト数 N に対して指数関数的に完全 string 解に近づくことについて	67
3.4.1	関数 f と g の定義とそれらに関する二つの Lemma	68
3.4.2	$0 < w < 1$ の領域での N を大きくしたときの完全 string 解とのずれの振る舞いについて	68
3.4.3	$1 < w < \frac{1}{t}$ の領域での N を大きくしたときの完全 string 解とのずれの振る舞いについて	70
3.5	Bethe 量子数の XXX/XXZ 対応	71
3.6	数値計算	73
3.6.1	異方性パラメータ Δ を動かしたときの振る舞い	74
3.6.2	サイト数 N を動かしたときの振る舞い	74
3.6.3	XXZ 鎖の解の具体例	75
第 4 章	Massive-XXZ 鎖の実解に関する解析	79
4.1	Counting function	79
4.2	量子数の差	84
第 5 章	まとめと展望	86
付録 A	対数関数の分岐について	89
A.1	Symmetric 分岐	89
A.2	Positive 分岐	89
A.3	Symmetric 分岐と positive 分岐を用いた Arctan 関数	90
A.4	Symmetric 分岐を用いた Arctan 関数	90
付録 B	$\tilde{A}(w)$, $\hat{A}(w)$, $\hat{B}(w)$, $\hat{C}(w)$ の微分について	91
付録 C	分数関数の展開公式	92
付録 D	(2.190) の証明	93
付録 E	(2.205) の証明	94

付録 F	XXZ 鎖における特異解のエネルギーについて	96
F.1	Massless XXZ 鎖の特異解	96
F.1.1	Massless XXZ 鎖の摂動的な正則化に対する特異解に対応する波動関数の収束性	97
F.1.2	Massless XXZ 鎖の特異解に対応するエネルギー	101
F.2	Massive XXZ 鎖の特異解	103
F.2.1	Massive XXZ 鎖の摂動的な正則化に対する特異解に対応する波動関数の収束性	104
F.2.2	Massive XXZ 鎖の特異解に対応するエネルギー	109

第1章 はじめに

1.1 Introduction

1.1.1 背景

一般に量子多体系を数学的に厳密に計算することは非常に困難である。数値的にも厳密対角化といった直接的な手法を用いた場合はサイト数を増やすことによって指数関数的に計算量が増えてしまうため、本来の物理的な興味の対象である大きな系の解析を行うことは困難である。その他にも近似的な手法として量子モンテカルロ法(文献 [1])やDMRG(密度行列繰りこみ群)(文献 [2, 3, 4])、テンソルネットワークを用いた手法(文献 [5, 6, 7, 8])などが知られている。

これら数値計算手法の精度を求めるためには厳密解が重要となる。全ての固有値、固有ベクトルを計算できる量子系の模型として次元量子可積分系がある。その代表的な解析手法が Bethe 仮説である [9]。Bethe 仮説は 1931 年に Bethe によって XXX 鎖に対して導入されたもので、模型に対応する Bethe 仮説方程式と呼ばれる方程式の解を求めることにより、もともとの模型のエネルギー固有値と固有ベクトルが求まるというものである。

ただし、一般に Bethe 仮説方程式を解くことは非常に困難であり、2018 年現在でも真に厳密に解けてはいない。本論文ではこの XXX 鎖および XXZ 鎖における、Bethe 仮説方程式のある特定の厳密解およびその周辺を取り上げる。

XXX 鎖の基底状態に関しては、Bethe 仮説方程式の解がすべて実数になると仮定した場合の、無限系に対するエネルギーが 1938 年に Hulthén によって計算されている [10]。massive-XXZ 鎖の基底状態の無限系に対するエネルギーは Orbach によって積分方程式の形に表示され、Walker によって級数的に積分方程式が解かれている [11, 12]。

また、XXX 鎖を含む XXZ 鎖の基底状態に関しては Bethe 仮説方程式の解がすべて実数になることが 1966 年に C. N. Yang と C. P. Yang によって確認されている [13]。

有限温度に関しては 1971 年に高橋が string 仮説と呼ばれる仮定を Bethe 仮説方程式の解に適用することによって自由エネルギーを計算した [14, 15]。

また、string 仮説を用いた有限温度に関する物理量としては文献 [16, 17, 18, 19, 20, 21] がある。一方で、string 仮説が破れる系として、XXX 鎖、massless 領域の XXZ 鎖が知られている [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]。

しかし、ほとんどの場合においては、厳密には string 仮説は成り立たなくとも string 仮説から求まる物理量は近似的に正しいと信じられている。

Bethe 仮説方程式の解についての議論は組み合わせ論を用いたアプローチもある [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36]。

有限温度の物理量を解析的に計算する手法としては量子転送行列 (QTM) が知られている。この方法は一部では近似を使っているものの、string 仮説では求められない多くの物理量を求めることができる [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43]。

Bethe 仮説方程式は複素数の範囲で解の組をもつ。その実部が等しいときには虚部の和が 0 になる性質が 1986 年に Vladimirov によって報告された [44]。XXX 鎖および XXZ 鎖では、スピン角運動量の z 成分は保存量であるため、Bethe 仮説の解もスピン角運動量の大きさによって複数の sector に分割され、Hilbert 空間内で各々独立に議論される。これらの sector の中でも特に、全スピンのうち二つのスピンのみが下向き角運動量 S_z を持つような two-down-spin sector においては、上述の解の組は、二つとも実数となる実解と、Hermite 共役の組となる複素解の二つのタイプの解が存在する。

XXX 鎖の two-down-spin sector ではサイト数を大きくすると string 仮説で予想される複素解が実解に潰れてしまう現象が起こることが Essler-Korepin-Schoutens によって報告されている [23]。この現象は collapse と呼ばれる。サイト数が大きくなると collapse する複素解の個数も増えていく。具体的に、two-down-spin sector におけるサイト数と collapse する複素解の個数の関係は出口-Giri によって求められている [27]。XXX 鎖の two-down-spin sector については文献 [45, 46] などでも議論されている。

サイト数を大きくしたときの XXZ 鎖の two-down-spin sector における複素解の振る舞いについては文献 [26, 47] でも議論されている。

Bethe 仮説方程式の解に関して、両辺が発散しない通常の解を正則解 (regular solution) と呼び、この解のみでは固有ベクトルを尽くすことができないことが知られている。一方、両辺が発散するが Bethe ベクトルが固有ベクトルになる解が存在することが知られている [48]。この解は特異解 (singular solution) と呼ばれる。特異解に対応する固有ベクトルとエネルギー固有値を直接計算することはできない。そこで、正則化を用いて極限を取る操作が必要となる [48, 49, 50, 51, 52]。その際、Bethe ベクトルが固有ベクトルとなるための条件が存在し、この条件を満たす特異解を物理的特異解と呼ぶ。正則解と物理的特異解を合わせることで解空間の完全性が満たされることが予想されている。このことは数値的には 14 サイトまで確認されている [53]。また、同様のことが $S = 1, \frac{3}{2}$ の場合には 8 サイトまで数値的に確認されている [54]。

Bethe 仮説によって構成される固有ベクトルが完全性を満たすか否かについての議論もある。まず、two-down-spin sector の XXZ 鎖の完全性は高麗-江沢によって証明された [55]。また、XXX 鎖に関する完全性についての議論は組み合わせ論的なものは文献 [56, 57] で行われ、組み合わせ論的な仮定を課さないものは文献 [58, 59, 60, 61, 62, 63] で行われている。

XXZ 鎖の Ising 極限 ($\Delta \rightarrow \infty$) に関しては string 仮説の解の形のみを仮定したときの各 sector の解の個数に関する議論もある [64, 65]。

Bethe 仮説方程式を数値的に解くための方法として、Bethe 仮説方程式の両辺を対数を取るやり方がある。このとき、対数関数の分岐を指定するものを Bethe 量子数と呼ぶ。適切に Bethe 量子数を指定することによって対応する有限系の Bethe 仮説方程式の解を数値的に求めることができる [66]。

Bethe 量子数を用いた XXX 鎖の two-down-spin sector に関する厳密な議論が出口-Giri に

よって行われている [27]。ここでは対数関数を取った形の Bethe 仮説方程式の両辺をサイト数で割り、Bethe 量子数を含む項を右辺に、そのほかの項を左辺に移項し、このときの左辺を counting function と定義する。指定した Bethe 量子数と counting function の方程式の解として Bethe 仮説方程式の解がそれぞれ求まる。この counting function は本論文でも重要な概念となるためここで言及しておく。

XXX 鎖及び、XXZ 鎖の two-down-spin sector の時間発展に関する実験については文献 [67] などがある。

1.1.2 本研究の主な結果

本研究では主に massive 領域の XXZ 鎖の two-down-spin sector に関して、Bethe 量子数を用いた理論を構築する。具体的には Bethe 仮説方程式の解の形を複素解と実解に分け、複素解を中心に解析する。

得られた結果は次のようになる。これらの結果は解析的なものであるが 1~3 に関しては counting function の一部の範囲の単調性について、数値的に確認したものとなっている。

1. 特異解を含めた複素解に対応する Bethe 量子数の範囲を求めた。
2. String 仮説が予言する複素解の個数と実際の解の個数の関係を確定した。具体的には、サイト数と相互作用の異方性 Δ の関係として collapse が起こる範囲を明確にした (図 1.1)。本結果の、相互作用が等方的な $\Delta \rightarrow 1$ の極限での collapse 閾値は、対応する XXX 鎖の先行研究の値と一致する。
3. 複素解の個数が増える領域が massive-XXZ 鎖では存在することを発見した。この複素解の増加という現象は、XXX 鎖では存在しない。我々はこの新たに得られた解を extra-two-string 解と命名し、この解が現れる領域をサイト数と異方性パラメータによって特定した (図 1.1)。この領域はサイト数 N を $N \rightarrow \infty$ と極限を取ると $\Delta > 1$ 全てになる。
4. サイト数 N が大きい場合、 N が大きくしていくにしたがって複素解が指数関数的に完全 string 解に近づくことを解析的に示した (図 1.2)。3 と同様にこれもまた、XXX 鎖では見られない結果である。この結果は佐藤氏の求めた数値計算の結果とも一致するものであることが確認された。
5. Massive-XXZ 鎖の two-down-spin sector に関する Bethe 仮説方程式の実解に関する counting function を求めた。

これらの結果の意義について説明する。まず、再帰的な数値的手法を用いて Bethe 仮説方程式の解を求めるときに実解、複素解等のそれぞれにおける解の個数の情報が必要となる。したがって、2、3 は再帰的に Bethe 仮説方程式の解を求めるときにも必要なものとなる。また、今回の Bethe 量子数を用いた方法で Bethe 仮説方程式の解を求めることにも応用できる。その場合、二分法により高い精度の解が得られる。

Bethe 仮説方程式の two-down-spin sector の解が求まることの物理的な応用方法として、この sector の厳密な時間発展の計算があげられる。

近年、盛んに、孤立量子系の熱化の有無の問題が研究されているが(文献 [68, 69, 70, 71, 73, 72, 74])、厳密な時間発展解の存在は、数値計算のベンチマークとしても有用である。

数学的な側面としては Bethe 仮説の完全性(全ての固有ベクトルを表現できるか)に関して長年研究がすすめられてきたが(文献 [55, 56, 57, 58, 59, 60, 61])、本研究の結果は two-down-spin sector における解の種類の分類になっており、さらなる数学的課題を示したものとなる。

1.1.3 本論文の位置づけと構成

Bethe 仮説方程式は一般には解かれていないものの解の性質についてはいくつかの議論がある。§1.1.1 と重複するところもあるが、ここではその中で本研究と関連が強いと思われる two-down-spin sector の場合の先行研究をまとめ、本研究との関連を述べる。

図 1.3 と図 1.4 に Bethe 仮説方程式の解空間における実解と複素解の分布を模式的に示す。String 仮説では、二つの解領域に属する解の個数が予言されていた。これに対して、XXX 鎖では、サイト数 N の増大とともに複素解の一部が実解になる collapse 解と呼ばれる解が存在することが知られている。Collapse 解は string 仮説の予言では複素解に属していたものである。まず、collapse 解の存在は、Essler-Korepin-Schoutens (文献 [23]) により知られるようになった。また、出口-Giri (文献 [27]) は 2016 年に XXX 鎖の collapse の個数とサイト数の関係、および Bethe 仮説方程式の各解に対応する Bethe 量子数を厳密に求めた。

一方、本論文では、massive-XXZ 鎖を新たに取り扱い、string 仮説により予言された解の分布よりも、複素解が一組増えるというこれまで知られていなかった現象を見出した。この解を extra-two-string 解と呼ぶ。XXZ 鎖における collapse 解の出現領域は extra-two-string 解のそれよりも小さな Δ 側に位置すること、またシステムサイズ N の増大とともにこの extra-two-string 解が存在する領域が増大して $\Delta \approx 1$ に限りなく近づき、collapse 解の領域が圧縮されることも明らかになった。 $\Delta \rightarrow 1$ の極限では、圧縮された collapse 解領域のみが残り、これは出口-Giri の結果(文献 [27])とも対応している。

本論文ではまず §2 で Bethe 仮説の方法についての背景となる先行研究をまとめる。§3 で本論文の主要な結果である massive-XXZ 鎖の two-down-spin sector の複素解についての結果と導出を述べる。§4 で実解についての解析結果と導出について記述する。§5 を本論文のまとめと展望とする。

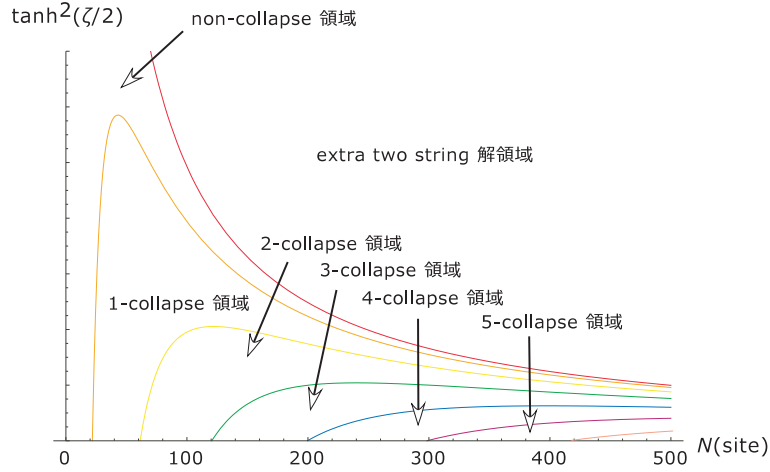


図 1.1: Extra-two-string 解の collapse する複素解の組の個数。図中の m -collapse 領域は collapse した複素解の組が m 個であることを表している。縦軸は、XXZ 鎖の相互作用 J の z 軸方向の異方性を表すパラメータ $\Delta = \cosh(\zeta)$ に関連した、 $\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right)$ 、横軸はサイト数 N である。 $\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) = 0$ が XXX 鎖の場合に相当し、 $\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) = \infty$ が Ising 鎖の場合に相当する。また、 $N \rightarrow \infty$ としたときは異方性パラメータ $\Delta > 1$ (すなわち $\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) > 0$) の領域はすべて、extra-two-string 解を持つ領域になる。

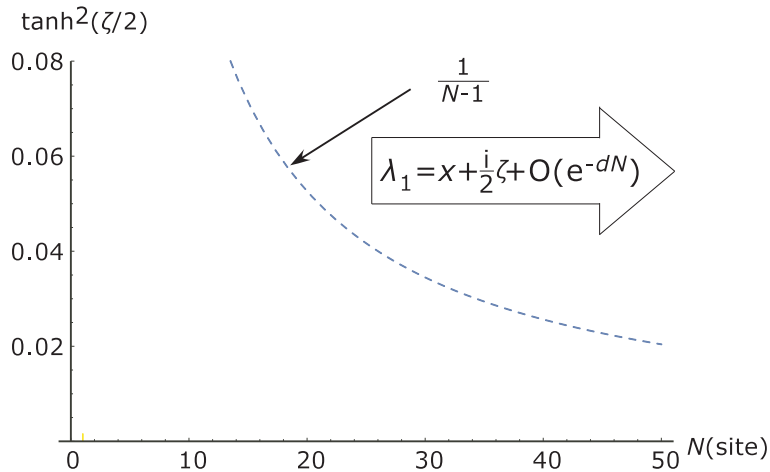


図 1.2: 図 1.1 と同様に縦軸に相互作用パラメータの異方性 $\Delta = \cosh(\zeta)$ に関連した $\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right)$ 、横軸にサイト数 N を取った場合に、破線よりも上の領域で Bethe 仮説方程式の複素解 λ_1 と完全 string 解 $x + \frac{i}{2}\zeta$ のずれが $O(e^{-dN})$ になる。ただし、 $d > 0$ とする。

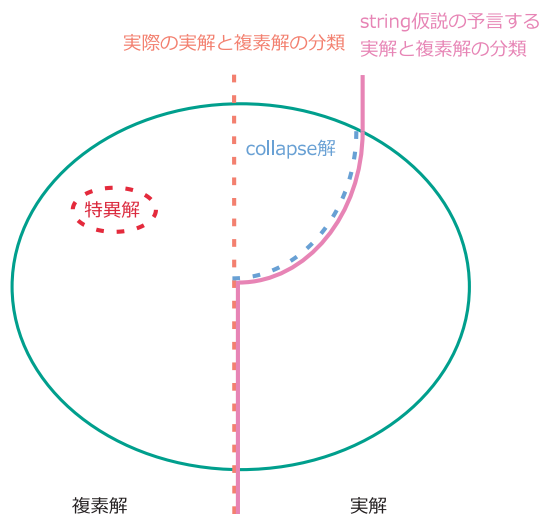


図 1.3: Two-down-spin sector における XXX 鎖の解の分類についての図。String 仮説の予言する複素解の一部が実解になった解が collapse 解であり、図中では水色で表している。中央の赤い破線は実際の Bethe 仮説方程式の解の分類であり、右上から中央にきて、真下に下りる曲線は string 仮説が予言する解の分類である。このなかで collapse 解領域が Essler-Korepin-Schoutens (文献 [23]) の扱っている領域であり、出口-Giri (文献 [27]) はこの模式図全体を扱っている。

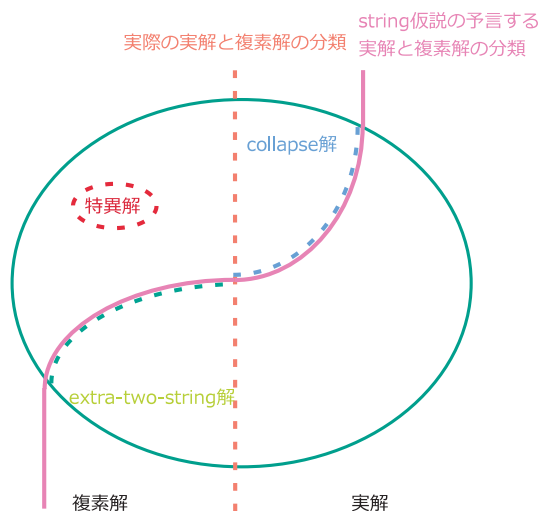


図 1.4: Two-down-spin sector における massive-XXZ 鎖の解の分類についての図。String 仮説の予言する複素解の個数よりも増えた分の解が extra-two-string 解であり、図中では黄緑色で表している。一方で string 仮説の予言する複素解の一部が実解になった解が collapse 解であり、図中では水色で表している。中央の赤い破線は実際の Bethe 仮説方程式の解の分類であり、右上から左下に伸びる紫色の曲線は string 仮説が予言する解の分類である。本論文で扱うのはこの模式図内の全体である。

第2章 Bethe 仮説方程式とその性質

本章では本論文の背景について概観する。まず、§2.1.1 では本論文で扱う模型である XXZ 鎖と、対応する Bethe 仮説方程式について説明する。本論文では代数的 Bethe 仮説を直接扱うわけではないが、§2.3.2 と §2.3.3 で特異解を扱うときにその背景についての理解が必要となるので §2.1.2 で XXX 鎖に対する代数的 Bethe 仮説を概観する。§2.2 では XXX 鎖の基底状態の熱力学極限の導出過程を概観する。§2.3 では Bethe 仮説方程式の両辺が発散する解として知られている特異解に関して知られていることを概観する。Nepomechie-Wang の正則化の方法を用いて §2.3.2 と §2.3.3 では特異解が Hamiltonian の固有ベクトルになることを概観し、§2.3.4 では特異解に対応するエネルギーを求める過程を解説する。§2.4 では string 仮説を用いた有限温度の熱力学極限から自由エネルギーを求める議論を概観する。最後に §2.5 では XXX 鎖の two-down-spin sector に関する議論と結果について概観する。これは本論文で扱う XXZ 鎖の異方性パラメータを $\Delta = 1$ とした場合に相当する。

2.1 XXZ 鎖と代数的 Bethe 仮説

Bethe 仮説方程式の導出方法としては座標的 Bethe 仮説と代数的 Bethe 仮説の 2 種類がある。本節では §2.1.1 で XXZ 鎖の定義と対応する Bethe 仮説方程式の紹介をする。次に §2.1.2 では代数的 Bethe 仮説の方法を用いた Bethe 仮説方程式の導出を簡単に説明する。

2.1.1 XXZ 鎖と Bethe 仮説方程式

本論文で扱う XXZ 鎖とその Bethe 仮説方程式について解説する。まず、Hilbert 空間 \mathfrak{H}_N を次のように定義する。

$$\mathfrak{H}_N = \otimes_{j=1}^N V_j, \quad V_j \simeq \mathbb{C}^2 \quad (2.1)$$

周期的境界条件の spin-1/2 の反強磁性 XXZ 鎖の Hamiltonian $H_N^{\text{XXZ}} : \otimes_{k=1}^N \mathbb{C}^2 \rightarrow \otimes_{k=1}^N \mathbb{C}^2$ を次のように定義する。

$$H_N^{\text{XXZ}} = \frac{J}{4} \sum_{j=1}^N \left(\sigma_j^X \sigma_{j+1}^X + \sigma_j^Y \sigma_{j+1}^Y + \Delta \left(\sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z - \mathbb{1}_N \right) \right), \quad \sigma_{N+1}^a = \sigma_1^a \quad (2.2)$$

ただし、スピン演算子 σ^a ($a = X, Y, Z$) を

$$\sigma^X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

とする。また、 σ_k^a ($a = X, Y, Z$) を \mathfrak{S}_N に作用する演算子として次のように定義する。

$$\sigma_k^a = I \otimes \cdots \otimes I \otimes \underbrace{\sigma^a}_{k \text{ 番目}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I \quad (2.4)$$

ただし、 I を 2×2 の単位行列とし $\mathbf{1}_N := \otimes_{j=1}^N I$ とする。XXZ 鎖の相互作用の異方性の度合いをパラメータ Δ であらわす。 $\Delta = 1$ の等方的な場合が XXX 鎖に相当する。 $|\Delta| < 1$ の場合の系の性質は、XXX 鎖の場合と同様、その基底状態と励起状態の間にはギャップがなく朝永-Luttinger 液体状態が実現しており、これを massless あるいは gapless な場合、と呼ぶ。 $\Delta > 1$ の場合には基底状態は Ising 的な長距離秩序を示し、励起状態との間に有限のギャップを持っており、これを massive あるいは gapped な場合と呼ぶ。

これらの模型を Bethe 仮説を用いて対角化するためには Bethe 仮説方程式の解を求める必要がある。

量子化軸を z 方向に取ったとき、系の磁化 (全 S_z) は保存量であるため、解空間も磁化の値に応じて sector に分割される。そのうちで下向きスピンの M 個の sector を M -down-spin sector と呼ぶ。 M -down-spin sector における Bethe 仮説方程式の解を $\{\lambda_j\}_{j=1, \dots, M}$ とする。この Bethe 仮説方程式の導出には座標的 Bethe 仮説と代数的 Bethe 仮説の二種類があるが、次節で代数的 Bethe 仮説について具体的に説明する。

異方性ごとの XXZ 鎖に対応する Bethe 仮説方程式は次のように表記される。

- $\Delta = 1$ の場合: XXX 鎖
down-spin の数を M とすると

$$\left(\frac{\lambda_j + \frac{i}{2}}{\lambda_j - \frac{i}{2}} \right)^N = \prod_{k \neq j, k=1}^M \frac{\lambda_j - \lambda_k + i}{\lambda_j - \lambda_k - i} \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (2.5)$$

となる。これを対数形式にすると

$$2 \tan^{-1}(2\lambda_i) = \frac{2\pi}{N} J_i + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M 2 \tan^{-1}(\lambda_i - \lambda_k) \quad (2.6)$$

となる。 J_i は対数関数の分岐を指定するものであり、Bethe 量子数と呼ばれる。

- $|\Delta| < 1$ の場合: massless (gapless)-XXZ 鎖
down-spin の数を M とし、異方性パラメータを $\Delta = \cos \zeta$ と表し、

$$\left(\frac{\sinh(\lambda_j + i\frac{\zeta}{2})}{\sinh(\lambda_j - i\frac{\zeta}{2})} \right)^N = \prod_{k \neq j, k=1}^M \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda_k + i\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_k - i\zeta)} \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (2.7)$$

となる。これを対数形式にすると

$$2 \tan^{-1} \left(\frac{\tanh(\lambda_i)}{\tan(\frac{\zeta}{2})} \right) = \frac{2\pi}{N} J_i + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M 2 \tan^{-1} \left(\frac{\tanh(\lambda_i - \lambda_k)}{\tan(\zeta)} \right) \quad (2.8)$$

となる。

- $|\Delta| > 1$ の場合: massive (gapped)-XXZ 鎖
down-spin の数を M とし、異方性パラメータを $\Delta = \cosh \zeta$ と表し、

$$\left(\frac{\sin(\lambda_j + i\frac{\zeta}{2})}{\sin(\lambda_j - i\frac{\zeta}{2})} \right)^N = \prod_{k \neq j, k=1}^M \frac{\sin(\lambda_j - \lambda_k + i\zeta)}{\sin(\lambda_j - \lambda_k - i\zeta)} \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (2.9)$$

となる。これを対数形式にすると

$$2 \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_i)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) = \frac{2\pi}{N} J_i + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M 2 \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_i - \lambda_k)}{\tanh(\zeta)} \right) \quad (2.10)$$

となる。

2.1.2 代数的 Bethe 仮説

Bethe 仮説には波動関数の形を仮定することによって固有ベクトルを導出する座標的 Bethe 仮説 [9] と Yang-Baxter 関係式から得られる交換関係を用いて固有ベクトルを導出する代数的 Bethe 仮説 [75, 76] の二種類がある。どちらの方法でも同一の Bethe 仮説方程式が導出される。本論文では Bethe 仮説方程式の解についての議論であるので、代数的 Bethe 仮説である必要はないが、§2.3 でその導出過程の知識が必要となるので簡単に概観する。本節では XXX 鎖の Bethe 仮説方程式について考える。L-演算子: $\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{S}_N \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{S}_N$ を次のように定義する。ここで L-演算子が作用する空間のうち \mathbb{C}^2 を補助空間と呼ぶ。

$$\begin{aligned} L_k(\lambda) &= \lambda I \otimes \mathbb{1}_N + \frac{i}{2} \sum_{a=X,Y,Z} \sigma^a \otimes \sigma_k^a \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_N + \frac{i}{2} \sigma_k^Z & \frac{i}{2} \sigma_k^- \\ \frac{i}{2} \sigma_k^+ & \lambda \mathbb{1}_N - \frac{i}{2} \sigma_k^Z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ただし、 σ_k^\pm を $\sigma_k^\pm := \sigma_k^X \pm i\sigma_k^Y$ と定義する。XXX 鎖は可積分の模型であるので L-演算子は次の Yang-Baxter 関係式を満たすことが知られている。

$$R(\lambda - \mu)(L_k(\lambda) \otimes L_k(\mu)) = (L_k(\mu) \otimes L_k(\lambda))R(\lambda - \mu) \quad (2.12)$$

ただし、

$$R(\lambda) = \frac{1}{\lambda + i} \left(\left(\frac{\lambda}{2} + i \right) I \otimes I + \frac{\lambda}{2} \sum_{a=X,Y,Z} \sigma^a \otimes \sigma^a \right) \quad (2.13)$$

である。L-演算子を用いて $T_N(\lambda)$ を

$$T_N(\lambda) := L_N(\lambda)L_{N-1}(\lambda) \cdots L_1(\lambda) \quad (2.14)$$

と定義し、この行列をモノドロミー行列と呼ぶ。次に演算子 $A_N(\lambda)$ 、 $B_N(\lambda)$ 、 $C_N(\lambda)$ 、 $D_N(\lambda)$ を次のように定義する。

$$T_N(\lambda) = \begin{pmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Yang-Baxter 関係式よりモノドロミー行列間の関係式

$$[T_N(\mu) \otimes T_N(\lambda)]R(\lambda - \mu) = R(\lambda - \mu)[T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)] \quad (2.16)$$

が得られる。この関係式から各成分を確認すると演算子 $A_N(\lambda)$ 、 $B_N(\lambda)$ 、 $C_N(\lambda)$ 、 $D_N(\lambda)$ と演算子 $A_N(\mu)$ 、 $B_N(\mu)$ 、 $C_N(\mu)$ 、 $D_N(\mu)$ の各々についての交換関係が求められる。

補助空間上でモノドロミー行列 $T_N(\lambda)$ に対して Trace を取ったものを転送行列とし $\tau_N(\lambda)$ と表記し、次のように定義する。

$$\tau_N(\lambda) = A_N(\lambda) + D_N(\lambda) \quad (2.17)$$

ここで、all-up の状態を次のように定義する。

$$|0\rangle_N = v_+ \otimes \cdots \otimes v_+ \in \mathfrak{S} \quad (2.18)$$

ただし、

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

とする。Hamiltonian を τ_N を用いて表すと

$$H_N^{XXX} = \frac{iJ}{2} \frac{d}{d\lambda} \log \tau_N(\lambda) \Big|_{\lambda=\frac{i}{2}} - \frac{NJ}{2} \mathbb{1}_N \quad (2.20)$$

となる。

ここで、 $A_N(\lambda)$ 、 $D_N(\lambda)$ 、 $C_N(\lambda)$ を $|0\rangle_N$ に作用させると

$$A_N(\lambda) |0\rangle_N = \left(\lambda + \frac{i}{2}\right)^N |0\rangle_N \quad (2.21)$$

$$D_N(\lambda) |0\rangle_N = \left(\lambda - \frac{i}{2}\right)^N |0\rangle_N \quad (2.22)$$

$$C_N(\lambda) |0\rangle_N = 0 \quad (2.23)$$

となる。Bethe 仮説方程式の解の組 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ に対応する Bethe ベクトルを次のように定義する。

$$\Psi_N(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = B_N(\lambda_1) \cdots B_N(\lambda_M) |0\rangle_N \quad (2.24)$$

転送行列を Bethe ベクトルに作用させ、モノドロミー行列間の関係式 (2.16) の各成分から得られる交換関係を用いると

$$\begin{aligned} & \left\{ A_N(\lambda) + D_N(\lambda) \right\} B_N(\lambda_1) \cdots B_N(\lambda_l) |0\rangle_N \\ &= \Lambda(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) \prod_{j=1}^l B_N(\lambda_j) |0\rangle_N + \sum_{k=1}^l \left\{ \Lambda_k(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) B_N(\lambda) \prod_{j=1, j \neq k}^l B_N(\lambda_j) \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる。ただし、

$$\Lambda(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) = \left(\lambda + \frac{i}{2}\right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\lambda - \lambda_j - i}{\lambda - \lambda_j} + \left(\lambda - \frac{i}{2}\right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\lambda_j - \lambda - i}{\lambda_j - \lambda} \quad (2.26)$$

とし、 $k = 1, 2, \dots, l$ に対して

$$\Lambda_k(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) = \frac{i}{\lambda - \lambda_k} \left\{ \left(\lambda_k + \frac{i}{2}\right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\lambda_k - \lambda_j - i}{\lambda_k - \lambda_j} - \left(\lambda_k - \frac{i}{2}\right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k} \right\} \quad (2.27)$$

とする。第一項が Bethe ベクトルに関する項となり、その他の項がすべて 0 となるときに Bethe ベクトルが転送行列の固有ベクトルになることがわかる。したがって、全ての k, l に対して $\Lambda_k(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) = 0$ となるときに Bethe ベクトルが転送行列の固有ベクトルになることがわかる。また、このときの $\Lambda_k(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l)$ を unwanted 項と呼ぶ。この条件が Bethe 仮説方程式となる。

2.2 基底状態について

Bethe によって、Bethe 仮説方程式を解くことができれば全ての固有ベクトルを求めることができることは示された。しかし、Bethe 仮説方程式を一般に解くことは容易ではない。ただし、基底状態に対応する Bethe 仮説方程式の解は C. N. Yang と C. P. Yang によって実解であることが示されている [13]。このことを用いて熱力学極限の基底状態のエネルギーが求められている [10]。XXX 鎖の基底状態の厳密なエネルギーにを求める過程について概観する。

まず、Bethe 仮説方程式の対数関数を取ったものは次のようになる。

$$2N \tan^{-1}(\lambda_j) = 2\pi I_j + 2 \sum_{l=1}^M \tan^{-1}\left(\frac{\lambda_j - \lambda_l}{2}\right) \quad (2.28)$$

ここで、 I_j を Bethe 量子数と呼び、

$$\begin{cases} I_j : \text{integer for odd } N - M \\ I_j : \text{half integer for even } N - M \end{cases} \quad (2.29)$$

となることが知られている。よって Bethe 量子数をつぎのように表す。

$$I_j = \frac{M + 1 - 2j}{2} \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (2.30)$$

ここで、

$$M = \frac{N}{2} \quad (2.31)$$

とすると、Bethe 量子数は

$$I = -\frac{N}{4} + \frac{1}{2}, -\frac{N}{4} + \frac{3}{2}, \dots, \frac{N}{4} - \frac{3}{2}, \frac{N}{4} - \frac{1}{2} \quad (2.32)$$

となる。Bethe 仮説方程式は

$$\tan^{-1}(\lambda_j) = \frac{\pi}{N}I + \frac{1}{N} \sum_k \tan^{-1}\left(\frac{\lambda_j - \lambda_k}{2}\right) \quad (2.33)$$

となる。変数 x を $x \equiv \frac{j}{N}$ と定義する。熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ をとったときに x の定義域は $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$ となる。したがって、Bethe 仮説方程式は

$$\tan^{-1} \lambda(x) = \pi x + \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \tan^{-1}\left(\frac{\lambda(x) - \lambda(y)}{2}\right) dy \quad (2.34)$$

となる。

ここで x に関する積分を λ に変数変換: $x \rightarrow \lambda(x)$ をすると、定義域が $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$ は $-\infty < \lambda < \infty$ となり、次のようになる。

$$\sum_j f(\lambda_j) = N \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} f(\lambda(x)) dx = N \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad (2.35)$$

ただし、 $\rho(\lambda)$ を量子数密度とし、

$$\rho(\lambda) = \frac{dx}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda'(x)} \Big|_{x=\lambda^{-1}(\lambda)} \quad (2.36)$$

とする。(2.34) を λ に関して両辺微分すると

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + 1} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{2}{(\lambda - \mu)^2 + 4} \rho(\mu) d\mu \quad (2.37)$$

となる。 ρ の Fourier 変換を次のように表す。

$$\tilde{\rho}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\lambda} \rho(\lambda) d\lambda \quad (2.38)$$

ここで

$$\int \frac{1}{\pi} \frac{n}{\lambda^2 + n^2} e^{-i\lambda\omega} d\lambda = \exp(-n|\omega|) \quad (2.39)$$

という公式を用いると

$$\tilde{\rho}(\omega)(1 + e^{-2|\omega|}) = e^{-|\omega|} \quad (2.40)$$

と書き直すことができる。したがって、

$$\tilde{\rho}(\omega) = \frac{1}{2 \cosh \omega} \quad (2.41)$$

となる。これを逆変換して、

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\lambda} \tilde{\rho}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

となる。これを用いると一サイト当たりのエネルギーは

$$\begin{aligned}
 e &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E}{N} \\
 &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|J|}{N} \left(\sum_{k=1}^{N/2} \frac{2}{1 + \lambda_k^2} - \frac{N}{4} \right) \\
 &= - |J| \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \lambda^2} \rho(\lambda) d\lambda - \frac{1}{4} \right) \\
 &= - |J| \left(\log 2 - \frac{1}{4} \right) = -0.443147|J|
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

となる。

2.3 特異解について

Bethe 仮説方程式の解の中には特異解と呼ばれる、両辺が発散する解が存在することが知られている。一般の Bethe 仮説方程式の解に加えて特異解を考えると完全性が成り立つと予想されている。特異解は物理量などの計算を直接行うと発散してしまう。そこで発散しないようにパラメータなどを設定して最後に極限を同時に取ることによって計算する操作を正則化と呼ぶ。ここでは摂動的な特異解を仮定し、対応する波動関数の極限を取った際に、Hamiltonian の固有ベクトルになっていることについて確認する。次にその解に対応するエネルギー固有値を求める。

2.3.1 特異解についてのまとめ

特異解について初めての議論は 1986 年 (英語版は 1987 年) の Avdeev-Vladimirov によっておこなわれた [48]。この文献においては $S = \frac{1}{2}$ に対して特異解を

$$\left\{ \frac{i}{2} + \epsilon, -\frac{i}{2} + \epsilon + 2i\epsilon^N, \lambda_3, \dots, \lambda_M \right\} \rightarrow \left\{ \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}, \lambda_3, \dots, \lambda_M \right\} \quad (\epsilon \rightarrow 0) \tag{2.44}$$

と正則化して極限を取ったときに次のように規格化した Bethe ベクトル

$$| \{\lambda_j\} \rangle_* = \frac{| \{\lambda_j\} \rangle}{\sqrt{\langle \{\lambda_j\} | \{\lambda_j\} \rangle}} \tag{2.45}$$

が Hamiltonian の固有ベクトルになっていることが示唆されている。ただし、この文献では具体的な計算は示されていない。また以下で述べるように、式 (2.44) に沿った正則化で得られた波動関数は Hamiltonian の固有ベクトルにはならない。

2003 年には Beisert-Minahan-Staudacher-Zarembo によって 2~5-down-spin の場合の具体的な Bethe 仮説方程式の解とそれに関する議論がなされた [77]。

2013 年には、Nepomechie-Wang によって正則化を

$$\left\{ \frac{i}{2} + \epsilon + c\epsilon^N, -\frac{i}{2} + \epsilon \right\} \rightarrow \left\{ \frac{i}{2}, -\frac{i}{2} \right\} \quad (\epsilon \rightarrow 0) \tag{2.46}$$

とした場合の波動関数が具体的に計算されている [49]。この正則化の極限を取ったときに、Bethe ベクトルが固有ベクトルに収束するためには（すなわち、全ての unwanted term が 0 に収束するためには）次の条件を満たす必要がある。

$$\prod_{j=3}^M \left(\frac{\lambda_j - \frac{i}{2}}{\lambda_j + \frac{i}{2}} \right) \left(\frac{\lambda_j - \frac{3i}{2}}{\lambda_j + \frac{3i}{2}} \right) = (-1)^N \quad (2.47)$$

Bethe 仮説方程式を用いると

$$\left[- \prod_{k=3}^M \left(\frac{\lambda_j - \frac{i}{2}}{\lambda_j + \frac{i}{2}} \right) \right]^N = 1 \quad (2.48)$$

が得られる。ただし、文献 [49] では、条件式 (2.48) を満たす特異解を物理的特異解としている。条件式 (2.48) は条件式 (2.47) の十分条件になっていることに注意する。この物理的特異解を用いると、数値的に $N = 14$ における通常の Bethe 仮説方程式の解と物理的特異解の和で完全性が成り立つことが、Hao-Nepomechie-Sommese によって示されている [53]。同様に高次スピンに関しては同著者らによって $S = 1$ および $S = \frac{3}{2}$ のときの $N = 8$ における通常の Bethe 仮説方程式の解と物理的特異解を数値的に足すことによって解空間の完全性が成り立つことが示されている [54]。

上述の特異解はすべて周期境界条件のもと議論されてきたが、一方で境界条件を次のように捻った場合についても考えられている。この境界条件を捻り境界条件と呼び、

$$S_{N+1}^X = \cos(\beta) S_1^X - \sin(\beta) S_1^Y \quad (2.49)$$

$$S_{N+1}^Y = \sin(\beta) S_1^X + \cos(\beta) S_1^Y \quad (2.50)$$

$$S_{N+1}^Z = S_1^Z \quad (2.51)$$

と定義し、 β を捻りパラメータとする。文献 [50] ではスピンの大きさを任意の S の XXX 鎖に対して捻り境界条件を課し、文献 [49] の正則化を行い、捻りパラメータ β を $\beta \rightarrow 0$ と極限を取ったときに物理的特異解の条件が

$$\left[(-1)^{2s} \prod_{j=2s+2}^M \left(\frac{\lambda_j + is}{\lambda_j - is} \right) \right]^N = 1 \quad (2.52)$$

であることが示されている。

$S = \frac{1}{2}$ の massless-XXZ 鎖に対して捻り境界条件を課し、文献 [49] の正則化を行い、捻りパラメータ β を $\beta \rightarrow 0$ と極限を取ったときに物理的特異解の条件として

$$\left[- \prod_{j=3}^M \frac{\sinh(\lambda_j + \frac{i\zeta}{2})}{\sinh(\lambda_j - \frac{i\zeta}{2})} \right]^N = 1 \quad (2.53)$$

が得られる。また、同様の操作をスピンの大きさが任意の S のときの massless-XXZ 鎖に対して行ったときの物理的特異解の条件として、

$$\left[(-1)^{2s} \prod_{j=2s+2}^M \frac{\sinh(\lambda_j + is\zeta)}{\sinh(\lambda_j - is\zeta)} \right]^N = 1 \quad (2.54)$$

がであることが文献 [50] で示されている。

また、Kirillov-坂本によって $S = \frac{1}{2}$ の XXX 鎖の特異解に対応する固有エネルギーが得られている [51]。

任意の特異解が物理的特異解であるための条件式を見るとサイトの数 N の偶奇によって解の性質が変わってくるのがわかる。2015 年に Giri-出口による $S = \frac{1}{2}$ の XXX 鎖の two-down-spin sector 及び three-down-spin sector の具体的な特異解と down-spin の数が 4 以上の sector に関する議論がある [78]。次節では具体的に Nepomechie-Wang の正則化の方法について概観する [49, 51]。

2.3.2 正則化を用いたとき得られる波動関数が固有ベクトルに収束することについて

XXX 鎖の 2013 年の Nepomechie-Wang の正則化に関する議論である文献 [49] と Kirillov-坂本の特異解に関するエネルギー固有値に関する議論である文献 [51] を概観する。また、massless 及び massive の XXZ 鎖の場合についても同様の議論を行い、エネルギー固有値を付録 F で計算する。

まず、摂動的な特異解を次のように定義する。

$$\lambda_1 = \frac{i}{2} + \epsilon + c\epsilon^N \quad (2.55)$$

$$\lambda_2 = -\frac{i}{2} + \epsilon \quad (2.56)$$

この解を用いて計算してから極限 $\epsilon \rightarrow 0$ を取る操作を正則化と呼ぶ。本節と次節でこの正則化を用いたときに特異解が波動関数（すなわち Hamiltonian の固有ベクトル）に収束することを確認する。 M -down-spin sector に対する Bethe ベクトルは

$$\Psi_N(\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,N}) := B^{(N)}(\lambda_1) \cdots B^{(N)}(\lambda_M) |0\rangle_N \quad (2.57)$$

で表せるので、今回の正則化の極限をとった場合の Bethe ベクトルは次のように表せる。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^N} B^{(N)}\left(\frac{i}{2} + \epsilon + c\epsilon^N\right) B^{(N)}\left(-\frac{i}{2} + \epsilon\right) B^{(N)}(\lambda_3) \cdots B^{(N)}(\lambda_M) |0\rangle_N \quad (2.58)$$

式 (2.58) の極限が有限な値となることを示すために、まず、

$$B^{(N)}\left(\frac{i}{2} + \epsilon + c\epsilon^N\right) B^{(N)}\left(-\frac{i}{2} + \epsilon\right) B^{(N)}(\lambda_3) \cdots B^{(N)}(\lambda_M) \sim \epsilon^N \quad (2.59)$$

であることを、数学的帰納法を用いて証明する。サイト数が $N-1$ のときの関係式

$$B^{(N-1)}\left(\frac{i}{2} + \epsilon + c\epsilon^{N-1}\right) B^{(N-1)}\left(-\frac{i}{2} + \epsilon\right) B^{(N-1)}(\lambda_3) \cdots B^{(N-1)}(\lambda_M) \sim \epsilon^{N-1} \quad (2.60)$$

を仮定する。モノドロミー行列と L-演算子の関係から

$$\begin{pmatrix} A^{(N)}(\lambda) & B^{(N)}(\lambda) \\ C^{(N)}(\lambda) & D^{(N)}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_N(\lambda) & b_N(\lambda) \\ c_N(\lambda) & d_N(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(N-1)}(\lambda) & B^{(N-1)}(\lambda) \\ C^{(N-1)}(\lambda) & D^{(N-1)}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

となる。ただし、

$$a_N(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad b_N(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$c_N(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_N(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \lambda + \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

とする。ここで、 $B^{(N)}(\lambda)$ は

$$B^{(N)}(\lambda) = a_N(\lambda)B^{(N-1)}(\lambda) + b_N(\lambda)D^{(N-1)}(\lambda) \quad (2.62)$$

と表現できるので、

$$\begin{aligned} B^{(N)}(\lambda_1)B^{(N)}(\lambda_2)|0\rangle_N &= [a_N(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_1) + b_N(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_1)] \\ &\quad \times [a_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_2) + b_N(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_2)]|0\rangle_{N-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_N \\ &= [a_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_2) + a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) \\ &\quad + b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_2) + b_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2)]|0\rangle_{N-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_N \end{aligned} \quad (2.63)$$

となる。各項について計算する。まず、第一項の $a_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2)$ が

$$\begin{aligned} a_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_N &= \begin{pmatrix} i + \epsilon + c\epsilon^N & \\ 0 & \epsilon + c\epsilon^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -i + \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_N \\ &= \begin{pmatrix} i\epsilon + \epsilon^2 + c\epsilon^N & 0 \\ 0 & -i\epsilon + \epsilon^2 - ic\epsilon^N + c\epsilon^{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_N \\ &\sim \epsilon \end{aligned} \quad (2.64)$$

となるので、仮定と合わせて式 (F.66) の第一項は $\sim \epsilon^N$ であることがわかる。次に式 (F.66) の第四項について計算する。 $b_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2)$ を計算すると

$$b_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_N = 0 \quad (2.65)$$

であるので、式 (F.66) の第四項が ~ 0 であることがわかる。最後に第二項と第三項について計算する。まず、B-演算子とD-演算子の交換関係が

$$D(\lambda_1)B(\lambda_2) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - i}{\lambda_1 - \lambda_2} B(\lambda_2)D(\lambda_1) - \frac{i}{\lambda_1 - \lambda_2} B(\lambda_1)D(\lambda_2) \quad (2.66)$$

であるので

$$\begin{aligned} & \left[a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) + b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_2) \right] |0\rangle_{N-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_N \\ &= \left[\left(a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2) - \frac{i}{i+c\epsilon^N} b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2) \right) B^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2i+c\epsilon^N}{i} b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1) \right] |0\rangle_{N-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_N \end{aligned} \quad (2.67)$$

となる。ここで

$$a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2) - \frac{i}{i+c\epsilon^N} b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2) \sim c\epsilon^N \sim \epsilon^N \quad (2.68)$$

であること及び、

$$\begin{aligned} D^{(N-1)}(\lambda_1)|0\rangle^{(N-1)} &= (\epsilon + c\epsilon^N)^{N-1} |0\rangle_{N-1} \\ &\sim \epsilon^{N-1} \end{aligned} \quad (2.69)$$

と

$$b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_N \sim \epsilon \quad (2.70)$$

であることから第二、第三項も $\sim \epsilon^N$ であることがわかる。したがって、

$$B\left(\frac{i}{2} + \epsilon + c\epsilon^N\right)B\left(-\frac{i}{2} + \epsilon\right)|0\rangle_N \sim \epsilon^N \quad (2.71)$$

となる。したがって数学的帰納法より命題 (2.59) が示せた。したがって、この結果と (2.58) より $\epsilon \rightarrow 0$ としたときに Bethe ベクトルが有限な値になることがわかる。

2.3.3 物理的特異解について

文献 [49]、文献 [32] の正則化の方法を用いたときに、特異解に対応する Bethe ベクトルが Hamiltonian の固有ベクトルになっていることを確認する。前節では Bethe ベクトルがゼロにならないことを表したが、この節では unwanted 項がゼロになる条件について議論する。unwanted 項の係数のオーダーと摂動的な特異解の係数 c に関する次の Lemma が導かれる。

Lemma 2.3.1. (a) 特異解の係数 c が

$$c = -\frac{2}{i^{N+1}} \prod_{j=3}^l \frac{\lambda_j - \frac{3}{2}i}{\lambda_j + \frac{1}{2}i} \quad (2.72)$$

であるときに、unwanted 項の係数が

$$\Lambda_1(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) \sim \frac{\epsilon^{N+1}}{\lambda - \frac{i}{2} - \epsilon - c\epsilon^N} \quad (2.73)$$

となる。

(b) 特異解の係数 c が

$$c = 2i^{N+1} \prod_{j=3}^l \frac{\lambda_j + \frac{3}{2}i}{\lambda_j - \frac{1}{2}i} \quad (2.74)$$

であるときに、unwanted 項の係数が

$$\Lambda_2(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) \sim \frac{\epsilon^{N+1}}{\lambda + \frac{i}{2} - \epsilon} \quad (2.75)$$

となる。

Lemma (a)(b) より正則化のときに用いたパラメータ c が (2.72)、(2.74) を満たしているときに unwanted 項 $\frac{1}{\epsilon^N} \Lambda_1$ 、 $\frac{1}{\epsilon^N} \Lambda_2$ が $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取ったときに 0 になる。したがって、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取ったとき、正則化した Bethe ベクトル (2.58) が Hamiltonian の固有ベクトルになっていることがわかる。

次に正則化のパラメータ c が Lemma (a)(b) の条件 (2.72)、(2.74) を共に満たす条件について考える。これは

$$\begin{aligned} (i^{N+1})^2 \left(\prod_{j=3}^l \frac{\lambda_j + \frac{3i}{2}}{\lambda_j - \frac{i}{2}} \right) \left(\prod_{j=3}^l \frac{\lambda_j + \frac{i}{2}}{\lambda_j - \frac{3i}{2}} \right) &= -1 \\ \Leftrightarrow (-1)^N \prod_{j=3}^l \frac{\lambda_j + \frac{3}{2}i}{\lambda_j - \frac{3}{2}i} \frac{\lambda_j + \frac{1}{2}i}{\lambda_j - \frac{1}{2}i} &= 1 \end{aligned} \quad (2.76)$$

となる。ここで特異解を代入した Bethe 仮説方程式を考えると、

$$\left(\frac{\lambda_k + \frac{i}{2}}{\lambda_k - \frac{i}{2}} \right)^{N-1} \left(\frac{\lambda_k - \frac{3}{2}i}{\lambda_k + \frac{3}{2}i} \right) = \prod_{j=3, j \neq k}^l \frac{\lambda_k - \lambda_j + i}{\lambda_k - \lambda_j - i} \quad (k = 3, 4, \dots, l) \quad (2.77)$$

となり、両辺を $\prod_{k=3}^l$ とすると

$$\prod_{k=3}^l \left(\frac{\lambda_k + \frac{i}{2}}{\lambda_k - \frac{i}{2}} \right)^{N-1} \left(\frac{\lambda_k - \frac{3}{2}i}{\lambda_k + \frac{3}{2}i} \right) = 1 \quad (2.78)$$

となり (2.76) に代入すると

$$\left\{ - \prod_{k=3}^l \left(\frac{\lambda_k + \frac{i}{2}}{\lambda_k - \frac{i}{2}} \right) \right\}^N = 1 \quad (2.79)$$

となる。この条件は一般の特異解において、満たされるとは限らない。この条件をみたく特異解を Nepomechie-Wang による文献 [49] では物理的特異解 (physical singular solution) と呼び、文献 [53] の数値計算からの予想では (正則解 (regular solution) の個数)+(物理的特異解 (physical singular solution) の個数) によってすべての固有ベクトルに対応する Bethe 根が得られ、Bethe 仮説の完全性が示されるとされている。このことはサイト数が $N \leq 14$ に関しては数値的に確認されている。

2.3.4 特異解に対応するエネルギー

ここでは特異解に対応するエネルギー固有値を求める。具体的には次の (1)~(6) のステップに分けて考える。

(1) エネルギー固有値 ϵ は

$$\epsilon^{xxx} = \frac{J}{2} \left\{ i \frac{d}{d\lambda} \log \Lambda(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) \Big|_{\lambda=\frac{i}{2}} - N \right\} \quad (2.80)$$

と求められる。ただし

$$\Lambda(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) = \left(\lambda + \frac{i}{2} \right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\lambda - \lambda_j - i}{\lambda - \lambda_j} + \left(\lambda - \frac{i}{2} \right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\lambda_j - \lambda - i}{\lambda_j - \lambda} \quad (2.81)$$

とする。また、次の関係式

$$\tilde{\epsilon} \equiv i \frac{d}{d\lambda} \log \Lambda \Big|_{\lambda=\frac{i}{2}} = \frac{i \frac{d\Lambda}{d\lambda}}{\Lambda} \Big|_{\lambda=\frac{i}{2}} \quad (2.82)$$

を確認する。

(2) $\tilde{\epsilon}$ の分母を $\tilde{\epsilon}_{deno}$ とする。

$$\tilde{\epsilon}_{deno} := \Lambda\left(\frac{i}{2} : \lambda_1, \dots, \lambda_l\right) = i^N \prod_{j=1}^l \frac{\lambda_j + \frac{i}{2}}{\lambda_j - \frac{i}{2}} \quad (2.83)$$

正則化をした Bethe 仮説方程式の解を代入すると

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{deno} &= i^N \frac{i + \epsilon + c\epsilon^N}{\epsilon + c\epsilon^N} \frac{\epsilon}{\epsilon - i} \prod_{j=3}^l \frac{\lambda_j + \frac{i}{2}}{\lambda_j - \frac{i}{2}} \\ &= i^N \frac{i + \epsilon + c\epsilon^N}{(1 + c\epsilon^{N-1})(\epsilon - i)} \prod_{j=3}^l \frac{\lambda_j + \frac{i}{2}}{\lambda_j - \frac{i}{2}} \end{aligned} \quad (2.84)$$

となる。

(3) ここで恒等式

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\lambda - \lambda_j - i}{\lambda - \lambda_j} = \frac{i}{(\lambda - \lambda_j)^2} \quad (2.85)$$

を確認する。式 (2.82) の分子は次のように書くことができる。

$$i \frac{d\Lambda}{d\lambda} = A_0(\lambda) + \sum_{j=1}^l A_j(\lambda) + \left[\text{terms containing at least one } \left(\lambda - \frac{i}{2} \right) \right] \quad (2.86)$$

ただし、

$$A_0(\lambda) = iN \left(\lambda + \frac{i}{2} \right)^{N-1} \prod_{j=1}^l \frac{\lambda - \lambda_j - i}{\lambda - \lambda_j} \quad (2.87)$$

である。また、 $j = 1, 2, \dots, l$ に対して、

$$A_j(\lambda) = i \left(\lambda + \frac{i}{2} \right)^N \frac{\lambda - \lambda_1 - i}{\lambda - \lambda_1} \cdots \frac{\lambda - \lambda_{j-1} - i}{\lambda - \lambda_{j-1}} \frac{i}{(\lambda_j - 1)^2} \frac{\lambda - \lambda_{j+1} - i}{\lambda - \lambda_{j+1}} \cdots \frac{\lambda - \lambda_l - i}{\lambda - \lambda_l} \quad (2.88)$$

とする。

(4) ここで特異解 $\lambda = \frac{i}{2}$ に対する A_0 を計算する。

$$A_0\left(\frac{i}{2}\right) = i^N N \frac{\epsilon + c\epsilon^N + i}{(1 + c\epsilon^{N-1})(\epsilon - i)} \prod_{j=3}^l \frac{\lambda_j + \frac{i}{2}}{\lambda_j - \frac{i}{2}} \quad (2.89)$$

となる。それゆえ

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}_{deno}} A_0\left(\frac{i}{2}\right) = N \quad (2.90)$$

(5) 同様に $A_1\left(\frac{i}{2}\right), A_2\left(\frac{i}{2}\right)$ も計算する。

$$A_1\left(\frac{i}{2}\right) = -i^N \frac{1}{\epsilon(1 + c\epsilon^{N+1})^2(\epsilon - i)} \prod_{i=3}^l \frac{\lambda_i + \frac{i}{2}}{\lambda_i - \frac{i}{2}} \quad (2.91)$$

$$A_2\left(\frac{i}{2}\right) = -i^N \frac{i + \epsilon + c\epsilon^N}{\epsilon(1 + c\epsilon^{N+1})(\epsilon - i)^2} \prod_{i=3}^l \frac{\lambda_i + \frac{i}{2}}{\lambda_i - \frac{i}{2}} \quad (2.92)$$

なので

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon_{endo}} \left\{ A_1\left(\frac{i}{2}\right) + A_2\left(\frac{i}{2}\right) \right\} = -2 \quad (2.93)$$

(6) 最後に $j = 3, 4, \dots, l$ の場合を計算する。

$$A_j\left(\frac{i}{2}\right) = i^{N+1} \frac{\frac{i}{2} - (\frac{i}{2} + \epsilon + c\epsilon) - i}{\frac{i}{2} - (\frac{i}{2} + \epsilon + c\epsilon)} \times \frac{\frac{i}{2} - (-\frac{i}{2} + \epsilon) - i}{\frac{i}{2} - (-\frac{i}{2} + \epsilon)} \times \frac{\lambda_3 + \frac{i}{2}}{\lambda_3 - \frac{i}{2}} \times \cdots \times \frac{i}{(\lambda_j - \frac{i}{2})^2} \times \cdots \times \frac{\lambda_l + \frac{i}{2}}{\lambda_l - \frac{i}{2}} \quad (2.94)$$

であるので

$$\frac{1}{\epsilon_{deno}} A_j\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{\lambda_j^2 + \frac{1}{4}} \quad (2.95)$$

であることがわかる。

(4)~(6) をまとめて式 (2.80) に代入すると

$$\epsilon^{XXX} = -J - \frac{J}{2} \sum_{j=3}^l \frac{1}{\lambda_j^2 + \frac{1}{4}} \quad (2.96)$$

が得られる。

2.4 String 仮説について

高橋は Bethe 仮説方程式の解の形を仮定することによって XXX 鎖や XXZ 鎖の自由エネルギーを求めた [14, 15]。この方法論を string 仮説と呼ぶ。さらに、この string 仮説を用いていくつかの熱力学的な物理量が求められた [16, 17, 18, 19, 20, 21]。

ただし、string 仮説が成り立たない例が、XXX 鎖および、massless-XXZ 鎖において知られていることに留意したい [22, 23, 24, 25]。

しかしながら、厳密には string 仮説が破れている場合でもそれらの解は、近似的に正しいと信じられている。

ここでは string 仮説を用いた自由エネルギーを求める過程を概観する。

2.4.1 XXX 鎖の string 仮説

本節では Bethe 仮説方程式の解を $x_j = 2\lambda_j$ を用いて表現する。まず、Bethe 根が次のような形をとると仮定する。

$$x_\alpha^{nj} = x_\alpha^n + i(n+1-2j) \quad (2.97)$$

ここで x_α^{nj} , ($j = 1, 2, \dots, n$) の組を n-string と呼ぶ。ここで $e(x)$ を

$$e(x) \equiv \frac{x+i}{x-i} \quad (2.98)$$

と定義し、これを用いて Bethe 仮説方程式を書き直すと

$$\left(\frac{x_j+i}{x_j-i}\right)^N = \prod_{k \neq j, k=1}^M \left(\frac{x_j-x_k+2i}{x_j-x_k-2i}\right)$$

は

$$e^N(x_j) = \prod_{k \neq j, k=1}^M e\left(\frac{x_j-x_k}{2}\right) \quad (2.99)$$

と表すことができる。(2.97) の解の形を仮定すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_j+i}{x_j-i}\right)^N &= \prod_{\alpha, \beta, j, k} e\left(\frac{x_\alpha^{n,j} - x_\beta^{m,k}}{2}\right) \\ &= \underbrace{\prod_{(\alpha, n) \neq (\beta, m), j, k} e\left(\frac{x_\alpha^{n,j} - x_\beta^{m,k}}{2}\right)}_A \underbrace{\prod_{j \neq k} e\left(\frac{x_\alpha^{n,j} - x_\alpha^{n,k}}{2}\right)}_B \end{aligned} \quad (2.100)$$

上式の A についてさらに変形を行うと、

$$\begin{aligned}
A &= \prod_{(\alpha,n) \neq (\beta,m)} \prod_{k=1}^m \left(\frac{x_j^{n,j} - x_\beta^m - i(m-2k-1)}{x_j^{n,j} - x_\beta^m - i(m-2k+3)} \right) \\
&= \prod_{(\alpha,n) \neq (\beta,m)} \left(\frac{x_j^{n,j} - x_\beta^m + i(m+1)}{x_j^{n,j} - x_\beta^m - i(m+1)} \right) \left(\frac{x_j^{n,j} - x_\beta^m + i(m-1)}{x_j^{n,j} - x_\beta^m - i(m-1)} \right) \\
&= \prod_{(\alpha,n) \neq (\beta,m)} e^{\left(\frac{x_\alpha^{n,j} - x_\beta^m}{m+1} \right)} e^{\left(\frac{x_\alpha^{n,j} - x_\beta^m}{m-1} \right)} \tag{2.101}
\end{aligned}$$

したがって、(2.100) は、

$$(2.100) = \prod_{(\alpha,n) \neq (\beta,m)} e^{\left(\frac{x_\alpha^{n,j} - x_\beta^m}{m+1} \right)} e^{\left(\frac{x_\alpha^{n,j} - x_\beta^m}{m-1} \right)} \prod_{j \neq k} e^{\left(\frac{x_\alpha^{n,j} - x_\alpha^{n,k}}{2} \right)} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{2.102}$$

となる。次に (2.100) の左辺を次のように変形することができる。

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^n e^N(x_\alpha^{n,j}) &= \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_\alpha^{n,j} + i}{x_\alpha^{n,j} - i} \right)^N \\
&= \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_\alpha^n + i(n+1-2j) + i}{x_\alpha^n + i(n+1-2j) - i} \right)^N \\
&= \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_\alpha^n + i(n-2j+2)}{x_\alpha^n + i(n-2j)} \right)^N \\
&= \left(\frac{x_\alpha^n + in}{x_\alpha^n + i(n-2)} \right)^N \left(\frac{x_\alpha^n + i(n-2)}{x_\alpha^n + i(n-4)} \right)^N \cdots \left(\frac{x_\alpha^n + i(-n+4)}{x_\alpha^n + i(-n+2)} \right)^N \left(\frac{x_\alpha^n + i(-n+2)}{x_\alpha^n + i(-n)} \right)^N \\
&= \left(\frac{x_\alpha^n + in}{x_\alpha^n - in} \right)^N \\
&= \left(\frac{\frac{x_\alpha^n}{n} + i}{\frac{x_\alpha^n}{n} - i} \right)^N \\
&= e^N \left(\frac{x_\alpha^n}{n} \right) \tag{2.103}
\end{aligned}$$

したがって、Bethe 仮説方程式は

$$\therefore e^N \left(\frac{x_\alpha^n}{n} \right) = \prod_{j=1}^n e^N(x_\alpha^{n,j}) = \prod_{(m,\beta) \neq (n,\alpha)} E_{nm}(x_\alpha^n - x_\beta^m) \tag{2.104}$$

と表せる。ただし、

$$E_{nm}(x) \equiv \begin{cases} e^{\left(\frac{x}{|n-m|} \right)} e^2 \left(\frac{x}{|n-m|+2} \right) \cdots e^2 \left(\frac{x}{n+m-2} \right) e^{\left(\frac{x}{n+m} \right)} & (n \neq m) \\ e^2 \left(\frac{x}{2} \right) e^2 \left(\frac{x}{4} \right) \cdots e^2 \left(\frac{x}{2n-2} \right) e^{\left(\frac{x}{2n} \right)} & (n = m) \end{cases} \tag{2.105}$$

であることに注意する。ここで両辺を \log をとり虚数単位 i で割ると

$$N\theta \left(\frac{x_\alpha^n}{n} \right) = 2\pi I_\alpha^n + \sum_{(m,\beta) \neq (n,\alpha)} \Theta_{nm}(x_\alpha^n - x_\beta^m) \tag{2.106}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \theta(x) &\equiv 2 \tan^{-1}(x) \\ \Theta_{nm}(x) &= \begin{cases} \theta\left(\frac{x}{|n-m|}\right) + 2\theta\left(\frac{x}{|n-m|+2}\right) + \cdots + 2\theta\left(\frac{x}{n+m-2}\right) + \theta\left(\frac{x}{n+m}\right) & (n \neq m) \\ 2\theta\left(\frac{x}{2}\right) + 2\theta\left(\frac{x}{4}\right) + \cdots + 2\theta\left(\frac{x}{2n-2}\right) + 2\theta\left(\frac{x}{2n}\right) & (n = m) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.107)$$

量子数 I_α^n は $N - Mn$ が奇数 (偶数) のときには整数 (半整数) であり、次の関係式を満たす。

$$|I_\alpha^n| \leq \frac{1}{2} \left(N - 1 - \sum_{m=1}^{\infty} t_{nm} M_m \right) \quad (2.108)$$

$$t_{nm} \equiv 2 \min(n, m) - \delta_{nm} \quad (2.109)$$

量子数の集合 $\{I_\alpha^n\}$ の成分の数は $M = \sum_{n=1}^{\infty} n M_n$ という条件下で $C_M^N - C_{M-1}^N$ である。このときのエネルギーは

$$E(\{I_\alpha^n\}) = N \left(-h - \frac{J}{4} \right) + \sum_{n,\alpha} \left(\frac{2Jn}{(x_\alpha^n)^2 + n^2} + 2hn \right) \quad (2.110)$$

また、このとき分配関数は

$$\mathcal{Z} = \sum_{M=0}^{[\frac{N}{2}]_{\text{Gauss}}} \frac{1 - \exp(-2(N+1-2M)\frac{h}{T})}{1 - \exp(-2\frac{h}{T})} \sum_{\{I_\alpha^n\}} \exp[-T^{-1} E(\{I_\alpha^n\})] \quad (2.111)$$

自由エネルギーは

$$G = -T \ln \mathcal{Z} \quad (2.112)$$

となる。ただし、 $[x]_{\text{Gauss}}$ は Gauss 記号とし、 x より小さい最大の整数と定義する。

2.4.2 熱力学極限

熱力学極限について考える。 $\rho_n(x)$ を n -string での分布関数、 $\rho_n^h(x)$ を n -string での hole の分布関数とする。 x と $x+dx$ の間の string と hole の数は $\rho_n N dx$ と $\rho_n^h N dx$ となる。したがって有限系の string 仮説を用いた Bethe 仮説方程式 (2.106)

$$N\theta\left(\frac{x_\alpha^n}{n}\right) = 2\pi I_\alpha^n + \sum_{(m,\beta) \neq (n,\alpha)} \Theta_{nm}(x_\alpha^n - x_\beta^m)$$

の両辺を N で割ると

$$\theta\left(\frac{x_\alpha^n}{n}\right) = 2\pi \frac{I_\alpha^n}{N} + \frac{1}{N} \sum_{(m,\beta) \neq (n,\alpha)} \Theta_{nm}(x_\alpha^n - x_\beta^m)$$

となり、極限 $N \rightarrow \infty$ を取ると

$$2\pi \int^x (\rho_n(t) + \rho_n^h(t)) dt = \theta_n(x) - \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{nm}(x-y) \rho_m(y) dy$$

となる。 x に関して微分すると

$$a_n(x) = \rho_n(x) + \rho_n^h(x) + \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \rho_m(x) \quad (2.113)$$

となる。ただし、

$$\theta(x) \equiv 2 \tan^{-1}(x) \quad (2.114)$$

$$T_{nm}(x) \equiv \begin{cases} a_{|n-m|}(x) + 2a_{|n-m|+2}(x) + \cdots + 2a_{n+m-2}(x) + a_{n+m}(x) & \text{for } n \neq m \\ 2a_2(x) + 2a_4(x) + \cdots + 2a_{2n-2}(x) + a_{2n}(x) & \text{for } n = m \end{cases} \quad (2.115)$$

$$a_n(x) \equiv \frac{1}{\pi} \frac{n}{x^2 + n^2} \quad (2.116)$$

$$a_0(x) \equiv \delta(x) \quad (2.117)$$

とする。また、 $*$ は畳み込みを表し、 $a * b(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} a(x-y)b(y) dy$ と定義する。ここでエネルギー密度は (2.110) より

$$e = -\left(\frac{J}{4} + h\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \rho_n(x) dx \quad (2.118)$$

$$g_n(x) \equiv 2\pi J a_n(x) + 2nh \quad (2.119)$$

となる。またエントロピー密度は

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \rho_n(x) \ln \left(1 + \frac{\rho_n^h(x)}{\rho_n(x)} \right) + \rho_n^h(x) \ln \left(1 + \frac{\rho_n(x)}{\rho_n^h(x)} \right) \right\}$$

となる。熱力学的平衡状態が実現するのは自由エネルギー密度 $f = e - Ts$ が最小となるときなので、そのようになる $\rho_n(x)$ と $\rho_n^h(x)$ を求めればよい。

$$0 = \delta(e - Ts) = \sum_{n=1}^{\infty} \int dx \left\{ \left[g_n(x) - T \ln \left(1 + \frac{\rho_n^h(x)}{\rho_n(x)} \right) \right] \delta \rho_n(x) - T \ln \left(1 + \frac{\rho_n(x)}{\rho_n^h(x)} \right) \delta \rho_n^h(x) \right\} \quad (2.120)$$

ここで (2.113) の変分を $\rho_n(x)$ と $\rho_n^h(x)$ についてとると、

$$\delta \rho_n^h = -\delta \rho_n(x) - \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \delta \rho_m(x) \quad (2.121)$$

となる。また、 $\eta_n(x) \equiv \frac{\rho_n^h(x)}{\rho_n(x)}$ として、これらを (2.120) に代入すると

$$\begin{aligned}
0 &= T \sum_{n=1}^{\infty} \int \left\{ \left[\frac{g_n(x)}{T} - \ln \left(1 + \frac{\rho_n^h(x)}{\rho_n(x)} \right) \right] \delta \rho_n(x) - \ln \left(1 + \frac{\rho_n(x)}{\rho_n^h(x)} \right) \left[-\delta \rho_n - \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \delta \rho_m(x) \right] \right\} \\
&= T \sum_{n=1}^{\infty} \int \left\{ \left[\frac{g_n(x)}{T} - \ln \left(\frac{\rho_n^h(x) + \rho_n(x)}{\rho_n(x)} \right) \right] \left(\frac{\rho_n^h(x)}{\rho_n^h(x) + \rho_n(x)} \right) \delta \rho_n(x) + \ln \left(1 + \frac{\rho_n(x)}{\rho_n^h(x)} \right) \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \delta \rho_m(x) \right\} \\
&= T \sum_{n=1}^{\infty} \int \left\{ \frac{g_n(x)}{T} - \ln \eta_n(x) + \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \ln(1 + \eta_m^{-1}(x)) \right\} \delta \rho_n(x) dx
\end{aligned}$$

となる。したがって、次のような関係式が成り立つ。

$$\ln \eta_n(x) = \frac{g_n(x)}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \ln(1 + \eta_m^{-1}(x)) \quad (2.122)$$

ここで自由エネルギー密度は

$$f = e - Ts = -\left(\frac{J}{4} + h\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \int \left\{ g_n \rho_n - T \left[\rho_n \ln(1 + \eta_n) + \rho_n^h \ln(1 + \eta_n^{-1}) \right] \right\} dx \quad (2.123)$$

となり、(2.113) を用いて ρ_n^h を消去すると、

$$\begin{aligned}
f &= -\left(\frac{J}{4} + h\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \int \left\{ g_m \rho_m - T \left[\rho_m \ln(1 + \eta_m) + (a_m(x) - \rho_m(x) - \sum_{n=1}^{\infty} T_{nm} * \rho_n(x)) \ln(1 + \eta_m^{-1}) \right] \right\} dx \\
&= -\left(\frac{J}{4} + h\right) + T \sum_{m=1}^{\infty} \int \left\{ \frac{g_m \rho_m}{T} - \left[\rho_m \ln(1 + \eta_m) + (a_m(x) - \rho_m(x) - \sum_{n=1}^{\infty} T_{nm} * \rho_n(x)) \ln(1 + \eta_m^{-1}) \right] \right\} dx \\
&= -\left(\frac{J}{4} + h\right) + T \sum_{m=1}^{\infty} \int \left\{ \frac{g_m \rho_m}{T} - \left[\rho_m(x) \ln(\eta_m) + a_m(x) \ln(1 + \eta_m^{-1}) - \sum_{n=1}^{\infty} T_{nm} * \rho_n(x) \ln(1 + \eta_n^{-1}) \right] \right\} dx \\
&= -\left(\frac{J}{4} + h\right) - T \sum_{m=1}^{\infty} \int \left\{ \ln(1 + \eta_m^{-1}) a_m(x) + \rho_m \left[\ln \eta_m - \frac{g_m}{T} - \sum_{n=1}^{\infty} T_{nm} * \ln(1 + \eta_n^{-1}) \right] \right\} dx
\end{aligned} \quad (2.124)$$

ここで、(2.122) を用いると、

$$f = -\left(\frac{J}{4} + h\right) - T \sum_{m=1}^{\infty} \int \left\{ \ln(1 + \eta_m^{-1}) a_m(x) \right\} dx \quad (2.125)$$

(2.122) で $n = 1$ の場合を考えると、

$$\begin{aligned}
\ln \eta_1(x) &= \frac{g_1(x)}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} T_{1m} * \ln(1 + \eta_m^{-1}(x)) \\
&= \frac{g_1(x)}{T} + \sum_{m=2}^{\infty} T_{1m} * \ln(1 + \eta_m^{-1}(x)) + a_2(x) * \ln(1 + \eta_1^{-1}(x)) \\
&= \frac{g_1(x)}{T} + a_2(x) * \ln(1 + \eta_1^{-1}(x)) + \left((a_1(x) + a_3(x)) * \ln(1 + \eta_2^{-1}) + (a_2(x) + a_4(x)) * \ln(1 + \eta_3^{-1}) + \dots \right) \\
&= \frac{g_1(x)}{T} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_{l-1} + a_{l+1}) * \ln(1 + \eta_l^{-1}) - a_0 * \ln(a + \eta_1^{-1}) \tag{2.126}
\end{aligned}$$

ここで、 $a_0 * \ln(1 + \eta_1^{-1})$ を左辺に移項して計算すると

$$\begin{aligned}
\ln \eta_1(x) + a_0 * \ln(1 + \eta_1^{-1}) &= \ln \eta_1(x) + \int \ln(1 + \eta_1^{-1})(y) a_0(x - y) dy \\
&= \ln \eta_1(x) + \ln(1 + \eta_1^{-1})(x) \\
&= \ln(\eta_1 + 1) \tag{2.127}
\end{aligned}$$

となるので、

$$\ln(1 + \eta_1) = \frac{2\pi J a_1(x) + 2h}{T} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_{l-1} + a_{l+1}) * \ln(1 + \eta_l^{-1}) \tag{2.128}$$

ここで $\int dx s(x)$ を両辺に作用させると

$$\int dx s(x) \ln(1 + \eta_1) = \frac{2\pi J}{T} \int s(x) a_1 dx + \frac{h}{T} + \sum_{l=1}^{\infty} \int a_l(x) \ln(1 + \eta_l^{-1}(x)) dx \tag{2.129}$$

となる。ただし、

$$s(x) \equiv \frac{1}{4} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \tag{2.130}$$

とする。これを用いて (2.125) を表すと、

$$\begin{aligned}
f &= -\left(\frac{J}{4} + h\right) - T \sum_{n=1}^{\infty} \int a_n(x) \ln(1 + \eta_n^{-1}(x)) dx \\
&= -\frac{J}{4} - h + h + 2\pi J \int s(x) a_1(x) dx - T \int s(x) \ln(1 + \eta_1) dx \\
&= -\frac{J}{4} + J \ln 2 - T \int s(x) \ln(1 + \eta_1) dx \tag{2.131}
\end{aligned}$$

次に η_n について考える。(2.122) の両辺を J に関して微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\eta_n(x)} \frac{\partial \eta_n(x)}{\partial J} &= \frac{1}{T} \frac{\partial g_n(x)}{\partial J} + \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \frac{1}{1 + \eta_m^{-1}(x)} (-\eta_m^{-2}(x)) \frac{\partial \eta_m}{\partial J} \\
&= \frac{2\pi a_n(x)}{T} + \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \frac{1}{1 + \eta_m^{-1}(x)} (-\eta_m^{-2}(x)) \frac{\partial \eta_m}{\partial J} \\
\therefore \frac{2\pi a_n(x)}{T} &= \frac{1}{\eta_n(x)} \frac{\partial \eta_n(x)}{\partial J} + \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm} * \frac{1}{(1 + \eta_m(x)) \eta_m(x)} \frac{\partial \eta_m}{\partial J} \tag{2.132}
\end{aligned}$$

となる。また (2.113) と比較して

$$\begin{aligned}\rho_m(x) &= \frac{T}{2\pi} \frac{1}{(1 + \eta_m(x))\eta_m(x)} \frac{\partial \eta_m}{\partial J} \\ \rho_m(x) + \rho_m^h(x) &= \frac{T}{2\pi} \frac{1}{\eta_m(x)} \frac{\partial \eta_m(x)}{\partial J} \\ &= \frac{T}{2\pi} \frac{\partial \ln \eta_m}{\partial J}\end{aligned}\tag{2.133}$$

を得ることができる。

2.5 XXX 鎖の two-down-spin sector に関する結果

この章では結果は出口-Giri による文献 [27] の結果をもとに two-down-spin sector の XXX 鎖の場合の結果についてまとめる。ただし、対数関数の分岐を用いた Arctan 関数の分岐は本論文では付録 A.3 の取り方を用いているが、本節のみ文献 [27] に合わせて付録 A.4 の取り方を用いている。

まず、two-down-spin sector の XXX 鎖の Bethe 仮説方程式は

$$\left(\frac{\lambda_1 + \frac{i}{2}}{\lambda_1 - \frac{i}{2}}\right)^N = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + i}{\lambda_1 - \lambda_2 - i}\tag{2.134}$$

$$\left(\frac{\lambda_2 + \frac{i}{2}}{\lambda_2 - \frac{i}{2}}\right)^N = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 + i}{\lambda_2 - \lambda_1 - i}\tag{2.135}$$

となる。対数関数形式の Bethe 仮説方程式は

$$2 \tan^{-1}(2\lambda_1) = \frac{2\pi}{N} J_1 + \frac{1}{N} 2 \tan^{-1}(\lambda_1 - \lambda_2)\tag{2.136}$$

$$2 \tan^{-1}(2\lambda_2) = \frac{2\pi}{N} J_2 + \frac{1}{N} 2 \tan^{-1}(\lambda_2 - \lambda_1)\tag{2.137}$$

となる。ここで、 J_1, J_2 を対数関数の分岐を指定する値とし、これを Bethe 量子数と呼ぶ。

まず、§2.5.1 では複素解の場合を考える。Bethe 仮説方程式に出てくる逆正接関数を展開して実部と虚部分けて、虚部を拘束条件とみなして一変数の方程式とする。Bethe 量子数を含む項とその他の項に分け、両辺を N で割ったものを counting function とする。この counting function の性質を調べることによって複素解の個数と Bethe 量子数の取りうる範囲を求めることができる。また §2.5.2 では、このときの解の個数と string 仮説で予言される解の個数と比較して collapse している解の個数を求めると

$$N_{\text{missing}} = 2 \left[\frac{N-1}{2} - \frac{N}{\pi} \tan^{-1}(\sqrt{N-1}) \right]_{\text{Gauss}}\tag{2.138}$$

が導出される。ただし、 $[A]_{\text{Gauss}}$ は Gauss 記号であり、 A 以下の最大の整数を表している。次に、実解の場合を考える。ここでは解の組を $\lambda = x \pm \gamma$ という形で書く。このとき、Bethe 仮説方程式の逆正接関数を虚数部分が出てくるように展開する。Bethe 仮説方程式の虚数部分を拘束条件として、実数部分の Bethe 仮説方程式を一変数の方程式とする。Bethe 量子

数を含む項とその他の項に分け、両辺を N で割ったものを counting function とする。この counting function の性質を調べることによって実解の個数と Bethe 量子数の取りうる範囲を求める。具体的には §2.5.3 で collapse によって増えた分の実解について調べ、§2.5.4 では、それ以外の一般的な実解について調べる。

また、実解と複素解の合計を求めることによって XXX 鎖の完全性についても示される。

2.5.1 複素解の場合

Bethe 仮説方程式 (2.137) の複素解は Vladimirov の文献 [44] より、

$$\lambda_1 = x + \frac{i}{2}(1 + 2\delta) \quad (2.139)$$

$$\lambda_2 = x - \frac{i}{2}(1 + 2\delta) \quad (2.140)$$

という形であることがわかる。ここで $x, \delta \in \mathbb{R}$ として x を string センターと呼び、 δ を string からのずれを表す。この表示を用いて Bethe 仮説方程式を表すと

$$2 \tan^{-1}(2x + i(1 + 2\delta)) = \frac{2\pi}{N} J_1 + \frac{1}{N} 2 \tan^{-1}(i(1 + 2\delta)) \quad (2.141)$$

$$2 \tan^{-1}(2x - i(1 + 2\delta)) = \frac{2\pi}{N} J_2 + \frac{1}{N} 2 \tan^{-1}(-i(1 + 2\delta)) \quad (2.142)$$

となる。一つ目の Bethe 仮説方程式 (2.139) の左辺を (A.10) を用いて虚部と実部に分けると

$$2 \tan^{-1}(2x + i(1 + 2\delta)) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{1 + \delta}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x}{\delta}\right) + \pi H(\delta) \operatorname{sgn}(x_+) + \frac{1}{2i} \log\left(\frac{x^2 + \delta^2}{x^2 + (1 + \delta)^2}\right) \quad (2.143)$$

となる。ただし、階段関数 $H(y)$ を

$$H(y) \equiv \begin{cases} 1 & (y > 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.144)$$

と定義し、 $\operatorname{sgn}(y_+)$ を

$$\operatorname{sgn}(y_+) \equiv 1 - 2H(-y) \quad (2.145)$$

とする。

ここで counting function $Z_{\pm}(x, \delta)$ を x, δ の二つの変数の関数として次のように定義する。

$$2\pi Z_{\pm}(x, \delta) = \pi H(\delta) \left(\operatorname{sgn}(x_{\pm}) - (\pm 1) \frac{1}{N} \right) + \tan^{-1}\left(\frac{x}{1 + \delta}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x}{\delta}\right) \quad (2.146)$$

一つ目の Bethe 仮説方程式 (2.141) を (2.143) を用いて実部と虚部に分けて counting function (2.146) を用いて表すと

$$\frac{2\pi}{N} J_1 = 2\pi Z_+(x, \delta) \quad (2.147)$$

$$\log\left(\frac{x^2 + \delta^2}{x^2 + (1 + \delta)^2}\right) = \frac{1}{N} \log\left(\frac{\delta^2}{(1 + \delta)^2}\right) \quad (2.148)$$

となる。次に二つ目の Bethe 仮説方程式 (2.142) について考える。二つ目の Bethe 仮説方程式 (2.142) の虚数部分は i を $-i$ に入れ替えたものなので、(2.148) と同じである。この場合の実部に対応する Bethe 仮説方程式は

$$\frac{2\pi}{N}J_2 = 2\pi Z_-(x, \delta) \quad (2.149)$$

となる。(2.147)、(2.148)、(2.149) より、 $x \neq 0$ の場合に J_1 と J_2 の関係は

$$J_2 = J_1 + H(\delta) \quad (2.150)$$

であることがわかる。次に Bethe 仮説方程式の虚部 (2.148) を

$$\frac{x^2 + \delta^2}{x^2 + (1 + \delta)^2} = \left(\frac{\delta^2}{(1 + \delta)^2} \right)^{\frac{1}{N}} \quad (2.151)$$

と表すことができ、 x^2 を δ の関数として表すと

$$x^2 = (1 + \delta)^2 \frac{\left(\frac{\delta^2}{(1 + \delta)^2} \right)^{\frac{1}{N}} - \frac{\delta^2}{(1 + \delta)^2}}{1 - \left(\frac{\delta^2}{(1 + \delta)^2} \right)^{\frac{1}{N}}} \quad (2.152)$$

となる。 w を

$$w \equiv \frac{\delta^2}{(1 + \delta)^2} \quad (2.153)$$

と定義する。(2.151) より、 $\frac{x^2}{(1 + \delta)^2}$ と $\frac{x^2}{\delta^2}$ を w の関数で表すと、

$$\frac{x^2}{(1 + \delta)^2}(w) = \frac{w^{\frac{1}{N}} - w}{1 - w^{\frac{1}{N}}} \quad (2.154)$$

$$\frac{x^2}{\delta^2}(w) = \frac{w^{\frac{1}{N}-1} - 1}{1 - w^{\frac{1}{N}}} \quad (2.155)$$

となる。したがって $\frac{x}{1 + \delta}$ 、 $\frac{x}{\delta}$ は

$$\frac{x}{1 + \delta}(w) = \epsilon_1 \sqrt{\frac{w^{\frac{1}{N}} - w}{1 - w^{\frac{1}{N}}}} \quad (2.156)$$

$$\frac{x}{\delta}(w) = \epsilon_2 \sqrt{\frac{w^{\frac{1}{N}-1} - 1}{1 - w^{\frac{1}{N}}}} \quad (2.157)$$

となる。ただし $\epsilon_1 = \pm 1$ 、 $\epsilon_2 = \pm 1$ とする。したがって ϵ_1 と ϵ_2 には $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (+, +), (-, -), (+, -), (-, +)$ の 4 パターンがある。それぞれ、(i) $\delta > 0$ かつ $x > 0$ 、(ii) $\delta > 0$ かつ $x < 0$ 、(iii) $\delta < 0$ かつ $x > 0$ 、(iv) $\delta < 0$ かつ $x < 0$ と対応している。ここで (2.156) および (2.157) より

$$\delta = \frac{1}{1 - \epsilon_1 \epsilon_2} - 1 \quad (2.158)$$

となる。ここで $\Theta(w)$ を

$$\Theta(w) \equiv \tan^{-1}\left(\frac{x}{1+\delta}(w)\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x}{\delta}(w)\right) \quad (2.159)$$

と定義する。これを用いて counting function $Z_{\pm}(x, \delta)$ を w の関数として表すと、

$$2\pi Z_{\pm}(x(w), \delta(w)) = \Theta(w) + \pi H(\delta(w)) \left(\operatorname{sgn}(x(w) + 0_{\pm}) - (\pm) \frac{1}{N} \right) \quad (2.160)$$

となる。 Θ を直接 w で微分をすると

$$\frac{d\Theta}{dw} = \frac{\epsilon_1(1-w)(w^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}} - \epsilon_1\epsilon_2) + \epsilon_2 N(1 - \epsilon_1\epsilon_2 w^{\frac{1}{2}})(1 - w^{\frac{1}{N}})}{2Nw(1-w)\sqrt{(1-w^{\frac{1}{N}})(w^{\frac{1}{N}-1} - 1)}} \quad (2.161)$$

となる。counting function $Z_{\pm}(w)$ の単調性を求めるために以下の二つの Lemma を用いる。

Lemma 2.5.1. $0 < w < 1$ に対して

$$(1-w)(w^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}} - 1) + N(1-w^{\frac{1}{2}})(1-w^{\frac{1}{N}}) > 0 \quad (2.162)$$

となる。

Lemma 2.5.2. $0 < w < 1$ に対して、

$$(1-w)(1+w^{\frac{1}{N}-\frac{1}{2}}) - N(1+w^{\frac{1}{2}})(1-w^{\frac{1}{N}}) \geq 0 \quad (N=2 \text{ のとき成立}) \quad (2.163)$$

となる。

Lemma 2.5.1, Lemma 2.5.2 と (2.161) より、(i)-(+,+) と (iii)-(+,-) のときは $\frac{d\Theta}{dw} > 0$ となり、(iv)-(-,+) と (ii)-(-,-) のときには $d\Theta/dw < 0$ となる。したがって $\frac{d\Theta}{dw} > 0$ であるとき counting function $Z_{\pm}(w)$ は $0 < w < 1$ の区間で単調増加であるので $NZ_{\pm}(0) < J_1 < NZ_{\pm}(1)$ となる。一方、 $\frac{d\Theta}{dw} < 0$ であるとき counting function $Z_{\pm}(w)$ は $0 < w < 1$ の区間で単調減少であるので $NZ_{\pm}(1) < J_1 < NZ_{\pm}(0)$ となる。したがって、 δ と x の符号で場合分けをすると Bethe 量子数が存在する領域は次のようになる。

- Case(i): $\delta > 0$ かつ $x > 0$

$$\frac{N}{4} - \frac{1}{2} \leq J_1 < \frac{N}{2} - \frac{1}{2} \quad (2.164)$$

- Case(ii): $\delta > 0$ かつ $x < 0$

$$-\frac{N}{2} - \frac{1}{2} < J_1 \leq -\frac{N}{4} - \frac{1}{2} \quad (2.165)$$

- Case(iii): $\delta < 0$ かつ $x > 0$

$$\frac{N}{4} \leq J_1 < \frac{N}{\pi} \tan^{-1}(\sqrt{N-1}) \quad (2.166)$$

- Case(iv): $\delta < 0$ かつ $x < 0$

$$-\frac{N}{\pi} \tan^{-1}(\sqrt{N-1}) < J_1 \leq -\frac{N}{4} \quad (2.167)$$

Bethe 量子数を指定すると Bethe 根が指定されるので、上記の議論から two-string 解の個数を決めることができる。

ここで $J < \frac{N-1}{2}$ を満たす最大の Bethe 量子数は $J = \frac{N-3}{2}$ であることに注意する。(iii) の場合 (すなわち、 $\delta < 0$ かつ $x > 0$ であるとき)、 J_1 の上界は $\frac{N}{\pi} \tan^{-1}(\sqrt{N-1})$ となる。この上界と一致するとき、すなわち $J_1 = \frac{N}{\pi} \tan^{-1}(\sqrt{N-1})$ であるとき、 $\delta = -\frac{1}{2}$ に対応する。したがって、string 仮説の予想から減る分の複素解の個数は $\left[\frac{N-3}{2} - \frac{N}{\pi} \tan^{-1}(\sqrt{N-1}) + 1 \right]_{\text{Gauss}}$ 個となる。(iv) の場合も同様なのでこれらから複素解から減る分は

$$N_{\text{missing}} = 2 \left[\frac{N-1}{2} - \frac{N}{\pi} \tan^{-1}(\sqrt{N-1}) \right]_{\text{Gauss}} \quad (2.168)$$

となる。ただし、 $[x]_{\text{Gauss}}$ は Gauss 記号とし、 x より小さい最大の整数と定義する。

2.5.2 Collapse が起こる最小のサイト数 N について

N_c を collapse の閾値を与えるサイト数とする。具体的には、 N_c を $N < N_c$ のときに $N_{\text{missing}} = 0$ 、 $N \geq N_c$ のときに $N_{\text{missing}} \geq 1$ となるような定数と定義する。

この N_c は文献 [23] によって $N_c = 22$ であることが知られている。(2.168) を用いて調べてみる。 $N = 22$ とすると $J_1 = \frac{N-3}{2} = 9.5$ となる。一方、 $\frac{N}{\pi} \tan^{-1}(\sqrt{N-1})$ は $N = 22$ とすると

$$\frac{22}{\pi} \tan^{-1}(\sqrt{22-1}) = 9.49545 \dots \quad (2.169)$$

となり、 $N_{\text{missing}} > 0$ となる。

2.5.3 実解の場合 (collapse した場合)

ここでは Bethe 仮説方程式の実解について解析する。複素解の節で設定した解 (2.139)、(2.140) に対して δ を

$$\delta = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\gamma \quad (2.170)$$

とすると、Bethe 根 (2.139)、(2.140) は

$$\lambda_1 = x + i \frac{1+2\delta}{2} = x - \gamma \quad (2.171)$$

$$\lambda_2 = x - i \frac{1+2\delta}{2} = x + \gamma \quad (2.172)$$

という形でかける。

このときの Bethe 仮説方程式の左辺を展開すると

$$\begin{aligned}
2 \tan^{-1}(2x + i(1 + 2\delta)) &= 2 \tan^{-1}(2x - \gamma) \\
&= \frac{1}{i} \log\left(\frac{1 + i(2x - \gamma)}{1 - i(2x - \gamma)}\right) \\
&= \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1 + i(2x - \gamma)}{1 - i(2x - \gamma)}\right) + \frac{1}{i} \log\left(\frac{1 + i(2x + \gamma)}{1 - i(2x + \gamma)}\right) \\
&\quad + \frac{1}{i} \log\left(\frac{1 + i(2x - \gamma)}{1 - i(2x - \gamma)}\right) - \frac{1}{i} \log\left(\frac{1 + i(2x + \gamma)}{1 - i(2x + \gamma)}\right) \\
&= \tan^{-1}(2x + \gamma) + \tan^{-1}(2x - \gamma) + \frac{1}{2i} \log\left(\frac{(1 - i\gamma)^2 + 4x^2}{(1 + i\gamma)^2 + 4x^2}\right) \quad (2.173)
\end{aligned}$$

となる。これを用いると

$$\begin{aligned}
2 \tan^{-1}(2x + i(1 + 2\delta)) - \frac{1}{N} 2 \tan^{-1}(i(1 + 2\delta)) \\
= \tan^{-1}(2x - \gamma) + \tan^{-1}(2x + \gamma) + \frac{1}{2i} \left\{ \log\left(\frac{(1 - i\gamma)^2 + 4x^2}{(1 + i\gamma)^2 + 4x^2}\right) - \frac{1}{N} \log\left(\frac{(1 - i\gamma)^2}{(1 + i\gamma)^2}\right) \right\} \quad (2.174)
\end{aligned}$$

が得られる。ここで実解の counting function $W(x, \gamma)$ を

$$2\pi W(x, \gamma) = \tan^{-1}(2x - \gamma) + \tan^{-1}(2x + \gamma) \quad (2.175)$$

と定義する。これを用いると Bethe 仮説方程式は

$$\frac{2\pi}{N} J_1 = 2\pi W(x, \gamma) - \frac{1}{2i} \left\{ \log\left(\frac{(1 + i\gamma)^2 + 4x^2}{(1 - i\gamma)^2 + 4x^2}\right) - \frac{1}{N} \log\left(\frac{(1 + i\gamma)^2}{(1 - i\gamma)^2}\right) \right\} \quad (2.176)$$

$$\frac{2\pi}{N} J_2 = 2\pi W(x, \gamma) + \frac{1}{2i} \left\{ \log\left(\frac{(1 + i\gamma)^2 + 4x^2}{(1 - i\gamma)^2 + 4x^2}\right) - \frac{1}{N} \log\left(\frac{(1 + i\gamma)^2}{(1 - i\gamma)^2}\right) \right\} \quad (2.177)$$

となる。複素数 $\log(z)$ に対する N 重根を整数 n を用いて

$$\frac{1}{N} \log\left(\frac{(1 + i\gamma)^2}{(1 - i\gamma)^2}\right) = \log\left\{ \exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right) \left(\frac{(1 + i\gamma)^2}{(1 - i\gamma)^2}\right)^{\frac{1}{N}} \right\} \quad (2.178)$$

と表す。これを用いて、Bethe 仮説方程式 (2.176)、(2.177) の虚数部分を 0 とするために、整数 $m = 0, 1, \dots, N - 1$ に対して

$$\frac{(1 + i\gamma)^2 + 4x^2}{(1 - i\gamma)^2 + 4x^2} = \exp\left(\frac{2\pi i m}{N}\right) \times \left(\frac{(1 + i\gamma)^2}{(1 - i\gamma)^2}\right)^{\frac{1}{N}} \quad (2.179)$$

となる。したがって (2.179) を用いて Bethe 仮説方程式 (2.176)、(2.177) から、 J_1 、 J_2 に関して

$$\frac{2\pi}{N} J_1 = 2\pi W(x, \gamma) - \frac{m\pi}{N} \quad (2.180)$$

$$J_1 = J_2 - m \quad (2.181)$$

という関係が得られる。

ここで、拘束条件 (2.179) を x について解く。ここで変数 ϕ を $\phi = \tan^{-1}(\gamma)$ と定義する。このとき、 $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$ を満たすことに注意する。(2.179) より x^2 を ϕ を用いて次のように表現する。

$$x^2(\phi) = \frac{1}{4 \cos^2(\phi)} \frac{\sin(2\phi - \frac{2\phi+m\pi}{N})}{\sin(\frac{2\phi+m\pi}{N})} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (2.182)$$

この後、この節では $m = 0$ の場合を考える。 $\epsilon_3 = \pm 1$ とすると (2.182) から x は

$$x(\phi) = \frac{\epsilon_3}{2 \cos(\phi)} \sqrt{\frac{\sin(2\phi(1 - \frac{1}{N}))}{\sin(2\frac{\phi}{N})}} \quad (0 < \phi < \frac{\pi}{2}) \quad (2.183)$$

と表せる。ここで (v) $x > 0$ ($\epsilon_3 = +1$) と (vi) $x < 0$ ($\epsilon_3 = -1$) の二つの場合について考える。

$$\frac{d}{d\phi} x^2(\phi) = \frac{\sin(2\frac{\phi}{N}) \cos(\phi - 2\frac{\phi}{N}) - (\frac{1}{N}) \sin(2\phi) \cos(\phi)}{2 \cos^3(\phi) \sin^2(2\frac{\phi}{N})} \quad (2.184)$$

ここで、 $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ の領域で (2.184) の値が正であるとき、つまり

$$\frac{d}{d\phi} x^2(\phi) > 0 \quad (0 < \phi < \frac{\pi}{2}) \quad (2.185)$$

であるとき $x(\phi)^2$ が単調増加であることがわかる。(2.185) であることを示す。まず、 $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ に対して不等式 $\cos(\phi - 2\frac{\phi}{N}) > \cos(\phi)$ であることを確認する。また次の Lemma を用いる。

Lemma 2.5.3. $0 < \alpha < 1$ を満たす α に対して

$$\sin \alpha x > \alpha \sin x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}) \quad (2.186)$$

この Lemma の証明は両辺を x に関して微分をすればよい。このとき、 $\sin(\frac{2\phi}{N}) > \frac{1}{N} \sin(2\phi)$ であることを用いると (2.184) が正であることが示せ、(2.185) が成り立つことがわかる。

$\phi \rightarrow 0$ としたとき、(2.185) より $x(\phi)^2$ は最小の値をとる。したがって、

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} x(\phi)^2 = \frac{1}{4} \frac{1 - \frac{1}{N}}{\frac{1}{N}} = \frac{N-1}{4} \quad (2.187)$$

となる。

次に $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ とすると $x(\phi)^2$ は $+\infty$ に発散する。 $\kappa(\phi)$ を $\kappa(\phi) = 2\pi W(x(\phi), \gamma(\phi))$ と定義する。この関数は

$$\kappa(\phi) = \tan^{-1}(2x(\phi) - \gamma(\phi)) + \tan^{-1}(2x(\phi) + \gamma(\phi)) \quad (2.188)$$

と書き下せる。ここで、 $\kappa(\phi)$ を ϕ について微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{d\kappa}{d\phi} &= \frac{4(1+4x^2+\gamma^2)\frac{dx}{d\phi} - 8x\gamma\frac{d\gamma}{d\phi}}{\{(2x-\gamma)^2+1\}\{(2x+\gamma)^2+1\}} \\
&= \frac{(4x^2 + \frac{1}{\cos^2(\phi)})\frac{d}{d\phi}x^2 - 4x^2\frac{\sin(\phi)}{\cos^3(\phi)}}{\frac{x}{2}\{(2x-\gamma)^2+1\}\{(2x+\gamma)^2+1\}}
\end{aligned} \tag{2.189}$$

となる。付録Dより

$$\left(4x^2 + \frac{1}{\cos^2(\phi)}\right)\frac{d}{d\phi}x^2(\phi) > 4x^2\frac{\sin(\phi)}{\cos^3(\phi)} \quad (0 < \phi < \frac{\pi}{2}) \tag{2.190}$$

となるのでこの不等式より、 $x > 0$ のとき、 $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ に対して $\kappa(\phi)$ は正となる。一方、 $0 > x$ のとき、 $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ に対して $\kappa(\phi)$ は負となる。したがって、 $x > 0$ のとき $\kappa(\phi)$ の最小値と最大値はそれぞれ $\kappa(0)$ と $\kappa(\frac{\pi}{2})$ で与えられる。一方、 $x < 0$ のとき $\kappa(\phi)$ の最小値と最大値はそれぞれ $\kappa(\frac{\pi}{2})$ と $\kappa(0)$ で与えられる。

ここで $x > 0$ の場合について考える。 $\kappa(\frac{\pi}{2})$ を $\phi < \frac{\pi}{2}$ の区間で $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ の極限を取ることによって計算することを考える。まず、 $2x(\phi) + \gamma(\phi)$ の項は $2x(\phi) + \gamma(\phi) \rightarrow \infty$ となるので、

$$\lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan^{-1}(2x(\phi) + \gamma(\phi)) = \frac{\pi}{2} \tag{2.191}$$

となる。 $2x(\phi) - \gamma$ の項は $\phi = \frac{\pi}{2} - \epsilon$ と置いて ϵ に関して展開することによって計算すると

$$\lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2x(\phi) - \gamma(\phi) = \cot\left(\frac{\pi}{N}\right) \tag{2.192}$$

となる。ここで $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$ であることに注意する。このとき

$$\begin{aligned}
\lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \kappa(\phi) &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N}\right) + \frac{\pi}{2} \\
&= \pi - \frac{\pi}{N}
\end{aligned} \tag{2.193}$$

となる。一方、 $\kappa(0)$ を $\phi > 0$ の区間で $\phi \rightarrow 0$ と極限を取ることによって計算すると

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \kappa(\phi) = 2 \tan^{-1}(\sqrt{N-1}) \tag{2.194}$$

となる。したがって、次の結果が得られる。

- Case(v): $x > 0$ かつ $\delta = \frac{-1+i\gamma}{2}$

$$\frac{N}{\pi} \tan^{-1}(\sqrt{N-1}) \leq J_1 < \frac{N}{2} - \frac{1}{2} \tag{2.195}$$

- Case(vi): $x < 0$ かつ $\delta = \frac{-1+i\gamma}{2}$

$$-\frac{N}{2} + \frac{1}{2} < J_1 \leq -\frac{N}{\pi} \tan^{-1}(\sqrt{N-1}) \tag{2.196}$$

2.5.4 一般的な実解

$m = 1, 2, \dots, N-1$ に対して $x(\phi)$ を次のように表現できる。

$$x(\phi) = \frac{\epsilon_3}{2 \cos(\phi)} \sqrt{\frac{\sin\left(2\phi - \frac{2\phi+m\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{2\phi+m\pi}{N}\right)}} \quad (2.197)$$

$x(\phi)^2$ は非負でなければならないので、パラメータ ϕ の範囲は

$$\frac{m\pi}{2(N-1)} \leq \phi < \frac{\pi}{2} \quad (m = 1, 2, \dots, N-1) \quad (2.198)$$

となる。ここで、 $m = N-1$ のとき不等式 (2.198) を満たすものは存在しないのでここでは考えない。また、 ϕ の最小の値を $\phi_{min} = \frac{m\pi}{2(N-1)}$ とする。 $x(\phi)^2$ の ϕ に関する微分を計算すると

$$\frac{d}{d\phi} x(\phi)^2 = \frac{\sin\left(\frac{2\phi+m\pi}{N}\right) \cos\left(\phi - \frac{2\phi+m\pi}{N}\right) - \left(\frac{1}{N}\right) \sin(2\phi) \cos(\phi)}{2 \cos^3 \phi \sin^2\left(\frac{2\phi+m\pi}{N}\right)} \quad (2.199)$$

となり、 $\frac{m\pi}{2(N-1)} \leq \phi < \frac{\pi}{2}$ に対して § 付録 D より (2.199) は正であることがわかる。したがって、 $x(\phi)^2$ は $\phi_{min} \leq \phi < \frac{\pi}{2}$ の領域で単調増加であることがわかる。

$$\frac{d}{d\phi} x(\phi)^2 > 0 \quad \left(\frac{m\pi}{2(N-1)} < \phi < \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.200)$$

(2.200) を証明するために以下の不等式と

$$\cos\left(\phi - \frac{2\phi+m\pi}{N}\right) > \cos(\phi) \quad \left(\frac{m\pi}{2(N-1)} < \phi < \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.201)$$

次の Lemma を用いる。

Lemma 2.5.4. N を $N > 1$ を満たす実数とすると

$$\sin\left(\frac{2\phi+m\pi}{N}\right) > \frac{1}{N} \sin(2\phi) \quad \left(\frac{m\pi}{2(N-1)} < \phi < \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.202)$$

この Lemma の証明は (2.202) の両辺を ϕ に関して微分すればよい。

(2.200) と (2.202) より、次の不等式

$$\sin\left(\frac{2\phi+m\pi}{N}\right) \cos\left(\phi - \frac{2\phi+m\pi}{N}\right) > \frac{1}{N} \sin(2\phi) \cos(\phi) \quad \left(\frac{m\pi}{2(N-1)} < \phi < \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.203)$$

が成り立つことがわかる。したがって (2.199) の分子が正であるので (2.200) が成り立つことがわかり、 $x(\phi)^2$ は単調増加であることがわかる。 $\kappa(\phi)$ を collapse 解の場合と同様に $m = 1, 2, \dots, N-1$ に対して

$$\kappa(\phi) = \tan^{-1}(2x(\phi) - \gamma(\phi)) + \tan^{-1}(2x(\phi) + \gamma(\phi)) \quad (2.204)$$

と定義する。付録Eより、 $m = 1, 2, \dots, N-2$ に対して

$$\left(4x^2 + \frac{1}{\cos^2(\phi)}\right) \frac{d}{d\phi} x^2 > 4x^2 \frac{\sin(\phi)}{\cos^3(\phi)}, \quad \left(\frac{m\pi}{2(N-1)} < \phi < \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.205)$$

が成り立つ。したがって、

$$\frac{d\kappa}{d\phi} = \frac{(4x^2 + \frac{1}{\cos^2(\phi)}) \frac{d}{d\phi} x^2 - 4x^2 \frac{\sin(\phi)}{\cos^3(\phi)}}{\frac{x}{2} \{(2x - \gamma)^2 + 1\} \{(2x + \gamma)^2 + 1\}} \quad (2.206)$$

であるので、 $x > 0$ のとき (2.205) より $\frac{m\pi}{2(N-1)} < \phi < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\frac{d\kappa(\phi)}{d\phi} > 0$ となり、 $\kappa(\phi)$ が単調増加である。それゆえ、 $x > 0$ に対して $\kappa(\phi)$ の最小値、最大値はそれぞれ $\kappa(\phi_{min})$ 、 $\kappa(\frac{\pi}{2})$ となる。

$\kappa(\frac{\pi}{2})$ を $\phi < \frac{\pi}{2}$ の区間で $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ と極限をとって計算する。 $2x(\phi) + \gamma(\phi)$ の項は $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ と極限を取ると ∞ に発散するので、

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi/2} \tan^{-1}(2x(\phi) + \gamma(\phi)) = \frac{\pi}{2} \quad (2.207)$$

となる。次に $2x - \gamma$ に対して、 $\phi = \pi/2 - \epsilon$ を ϵ に関して展開して極限を取ると

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi/2} 2x(\phi) - \gamma(\phi) = \cot\left(\frac{(m+1)\pi}{N}\right) \quad (2.208)$$

となる。それゆえ、

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi/2} \kappa(\phi) = \pi - \frac{(m+1)\pi}{N} \quad (2.209)$$

となる。 $\phi > \phi_{min}$ の範囲で $\phi \rightarrow \phi_{min}$ に極限をとって $\kappa(\phi_{min})$ を計算すると

$$\lim_{\phi \rightarrow \phi_{min}} \kappa(\phi) = 0 \quad (2.210)$$

となる。したがって、これらをまとめると次の結果が得られる。

- Case(vii): $x > 0$ であるとき

$$-\frac{m}{2} \leq J_1 < \frac{N}{2} - \frac{1}{2} - m \quad (2.211)$$

- Case(viii): $x < 0$ であるとき

$$-\frac{N}{2} + \frac{1}{2} < J_1 \leq -\frac{m}{2} \quad (2.212)$$

となる。(vii) (viii) の二つを合わせると

$$-\frac{N-2}{2} < J_1 < J_2 < \frac{N}{2} - \frac{1}{2} - m \quad (2.213)$$

となる。

ここで J_2 について考えると (2.181) より $J_2 = J_1 + m$ ただし $m = 1, 2, \dots, N-1$ となる。したがって Bethe 量子数 J_1, J_2 の組は次の不等式を満たすもの全体となる。

$$-\frac{N-2}{2} < J_1 < J_2 < \frac{N-2}{2} \quad (2.214)$$

2.5.5 特異解について

$N = 4n$ としたとき特異解に対応する Bethe 量子数 (J_1, J_2) は $\left(\frac{N}{4} - \frac{1}{2}, \frac{N}{4} + \frac{1}{2}\right)$ と $\left(-\frac{N}{4} - \frac{1}{2}, -\frac{N}{4} + \frac{1}{2}\right)$ となる。 $N = 4n+2$ としたとき特異解に対応する Bethe 量子数 (J_1, J_2) は $\left(\frac{N}{4}, \frac{N}{4}\right)$ と $\left(-\frac{N}{4}, -\frac{N}{4}\right)$ となる。

2.5.6 Two-down-spin sector の Bethe 根の完全性について

XXX 鎖における Bethe 根の完全性は複素解、実解、特異解の個数を $N = 4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3$ の四つの場合分けをしてそれぞれ個数を数えることによって示すことができる。

第3章 Massive regime の複素解

本章では、massive regime の XXZ 鎖の two-down-spin sector について議論する。Vladimirov(文献 [44]) の結果より、この sector の Bethe 仮説方程式の解の組は実数の二つの組として構成される実解か、複素共役の関係にある複素数の組である複素解 (two-string 解) に分類される。本章ではこのうちの複素解 (two-string 解) について解析する。まず、§3.1 で複素解の形を仮定する。このとき、対数形式の Bethe 仮説方程式に対して複素数の引数を持つ逆正接関数を展開することによって、方程式を実部と虚部の二つに分割する。このときの虚部を拘束条件として、実部の Bethe 仮説方程式を一変数の方程式とみなすことによって方程式の解を考察する。また、実部の Bethe 仮説方程式の両辺をサイト数 N で割り、量子数を含む項とその他の項で移項して分けたときに、量子数を含まない項を counting function と定義する。本論文では、この counting function の性質を考察することによって複素解の性質を調べる。まず、§3.2 では後の解析で必要となる counting function が、ある領域で単調性をもつことを明らかにする。§3.3 ではこの単調性を用いて複素解の数が string 仮説で予言されているものと比べてどのように変化しているかについて調べた結果を提示する。ここでは具体的に、サイト数 N 、異方性パラメータ Δ と collapse する複素解の個数に関する関係を求める。また、サイト数 N 、異方性パラメータ Δ が大きな領域では、string 仮説で予言されているよりも一組多くの複素解が出現することを発見したので、それについて詳しく述べる。我々はこの解を extra-two-string 解と命名することとし、その出現条件についても明らかにする。§3.4 ではサイト数 N を大きくしていくと複素解が指数関数的に string 仮説で予言される解の形に近づくことを解析的に示した結果を報告する。extra-two-string 解および指数関数的な解の漸近性はともに、XXX 鎖では見られなかった新しい結果である。§3.5 では、異方性パラメータ Δ を 1 に近づけたときの量子数の XXX 鎖と XXZ 鎖の対応について述べる。

§3.6.3 では、本論文の方法を使って、佐藤氏によって具体的に求められた Bethe 仮説方程式の解を記述する。ここで記述する領域は extra-two-string 解が存在する領域であり、具体的な extra-two-string 解を求めることに成功したことになる。§3.6 では、佐藤氏によってサイト数 N と異方性パラメータ Δ が変化するときの複素解の振る舞いが数値的に求められた。この解の振る舞いは本論文の §3.3、§3.4 の結果を数値的に検証することになっている。

3.1 Two-down-spin sector の解の形

Vladimirov (文献 [44]) の結果より Bethe 仮説方程式の解の形は実解が二つの組か、複素共役の関係にある二つの複素数の解しか存在しない。ここでは、この二つの解の形について述

べる。まず、複素解 (two-string 解) の実部を x とし、これを string センターと呼ぶ。また虚部を $\frac{\zeta}{2}$ としたときの string 解 $x \pm \frac{i}{2}\zeta$ からのずれを δ とする。このとき、複素解 (two-string 解) は

$$\lambda_1 = x + \frac{i}{2}\zeta + i\delta \quad (3.1)$$

$$\lambda_2 = x - \frac{i}{2}\zeta - i\delta \quad (3.2)$$

と記述できる。ただし、異方性パラメータ Δ と ζ の関係は $\Delta = \cosh \zeta$ であることに注意する。次に、実解の場合を考える。ここでは (3.1)、(3.2) の δ を $-\frac{1}{2}\zeta + \frac{i}{2}\gamma\zeta$ とし、次のような形で表す。

$$\lambda_1 = x + \frac{i}{2}\zeta + i\delta = x - \frac{1}{2}\gamma\zeta \quad (3.3)$$

$$\lambda_2 = x - \frac{i}{2}\zeta - i\delta = x + \frac{1}{2}\gamma\zeta \quad (3.4)$$

3.1.1 複素解と counting function

本節では具体的に複素解の解析を始める。複素解を実部と虚部に分割し、拘束条件となる虚部を考察する。まず、前節の解の形のうちで複素解 (two-string 解) を考える。Bethe 仮説方程式は

$$2 \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_1)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) = \frac{2\pi}{N} J_1 + \frac{2}{N} \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_1 - \lambda_2)}{\tanh(\zeta)} \right) \quad (3.5)$$

$$2 \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_2)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) = \frac{2\pi}{N} J_2 + \frac{2}{N} \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_2 - \lambda_1)}{\tanh(\zeta)} \right) \quad (3.6)$$

であるので、前節で仮定した複素解 (3.1)、(3.2) を用いて次のように表せる。

$$2 \tan^{-1} \left(\frac{\tan(x + \frac{i}{2}\zeta + i\delta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) = \frac{2\pi}{N} J_1 + \frac{2}{N} \tan^{-1} \left(\frac{\tan(i(\zeta + 2\delta))}{\tanh(\zeta)} \right) \quad (3.7)$$

$$2 \tan^{-1} \left(\frac{\tan(x + \frac{i}{2}\zeta + i\delta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) = \frac{2\pi}{N} J_2 + \frac{2}{N} \tan^{-1} \left(\frac{\tan(-i(\zeta + 2\delta))}{\tanh(\zeta)} \right) \quad (3.8)$$

Bethe 仮説方程式の各成分を計算する。まず、 $\tan(\lambda_1)$ に着目すると

$$\begin{aligned}
 \tan \lambda_1 &= \tan\left(x + \frac{i}{2}\zeta + i\delta\right) \\
 &= \frac{\tan(x) + \tan\left(\frac{i}{2}\zeta + i\delta\right)}{1 - \tan(x)\tan\left(\frac{i}{2}\zeta + i\delta\right)} \\
 &= \frac{\tan(x) + i \tanh\left(\frac{\zeta}{2} + \delta\right)}{1 - i \tan(x)\tanh\left(\frac{\zeta}{2} + \delta\right)} \\
 &= \frac{\left(\tan(x) + i \tanh\left(\frac{\zeta}{2} + \delta\right)\right)\left(\tan(x) + i \tanh\left(\frac{\zeta}{2} + \delta\right)\right)}{1 + \tan^2(x)\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2} + \delta\right)} \\
 &= \frac{\tan(x)\left(1 - \tanh^2\left(\frac{\zeta}{2} + \delta\right)\right) + i\left(1 + \tan^2(x)\right)\tanh\left(\frac{\zeta}{2} + \delta\right)}{1 + \tan^2(x)\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2} + \delta\right)} \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

$$\tag{3.10}$$

となる。ここで次の変数 t と w を次のように導入する。

$$t \equiv \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tag{3.11}$$

$$w \equiv \frac{\tanh\left(\delta + \frac{\zeta}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right)} \tag{3.12}$$

ここで $w < \frac{1}{t}$ であることに注意して、 t を用いると

$$\frac{\tan(\lambda_1)}{\tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right)} = \frac{\tan(x)\left(1 - \tanh^2\left(\frac{\zeta}{2} + \delta\right)\right) + i\left(1 + \tan^2(x)\right)\tanh\left(\frac{\zeta}{2} + \delta\right)}{\tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right)\left(1 + \tan^2(x)\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2} + \delta\right)\right)} \tag{3.13}$$

と表すことができる。ここで (3.13) を実部と虚部に分けてそれぞれを a 、 b で表すと

$$(3.13) = a + ib \tag{3.14}$$

となる。ただし、 a 、 b はそれぞれ

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\tan(x)(1 - \tanh^2(\frac{\zeta}{2} + \delta))}{\tanh(\frac{\zeta}{2})(1 + \tan^2(x) \tanh^2(\frac{\zeta}{2} + \delta))} \\
&= \frac{\tan x(1 - w^2 \tanh^2(\frac{\zeta}{2}))}{\tanh(\frac{\zeta}{2})(1 + (\tan^2 x)w^2 \tanh^2(\frac{\zeta}{2}))} \\
&= \frac{\tan(x)(1 - w^2 t^2)}{t(1 + \tan^2(x)w^2 t^2)} \tag{3.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{(1 + \tan^2(x) \tanh(\frac{\zeta}{2} + \delta))}{\tanh(\frac{\zeta}{2})(1 + \tan(x)^2 \tanh^2(\frac{\zeta}{2} + \delta))} \\
&= \frac{(1 + \tan^2(x))w}{(1 + \tan^2(x)w^2 \tanh^2(\frac{\zeta}{2}))} \\
&= \frac{(1 + \tan^2(x))w}{(1 + \tan^2(x)w^2 t^2)} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

とする。これらを用いて Bethe 仮説方程式の左辺を付録 A を用いて展開すると、

$$\begin{aligned}
2 \tan^{-1}\left(\frac{\tan(x + \frac{i}{2}\zeta + i\delta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{a}{1-b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{a}{1+b}\right) \\
&\quad + \pi H(b-1) + 2\pi H(1-b)H(-a) - \pi H(-b-1) \operatorname{sgn}(a_-) + \frac{1}{2i} \log\left(\frac{a^2 + (b-1)^2}{a^2 + (b+1)^2}\right) \tag{3.17}
\end{aligned}$$

と表される。ただし、階段関数 $H(y)$ を

$$H(y) \equiv \begin{cases} 1 & (y > 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{3.18}$$

と定義し、 $\operatorname{sgn}(y_+)$ を

$$\operatorname{sgn}(y_+) \equiv 1 - 2H(-y) \tag{3.19}$$

とする。同様に Bethe 仮説方程式の右辺も次のように展開し実部と虚部に分割する。

$$\begin{aligned}
\frac{2}{N} \tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_1 - \lambda_2)}{\tanh \zeta}\right) &= \frac{2}{N} \tan^{-1}\left(\frac{i \tanh(\zeta + 2\delta)}{\tanh \zeta}\right) \\
&= \frac{1}{N} \left(\pi H\left(\frac{\tanh(\zeta + 2\delta)}{\tanh \zeta} - 1\right) \operatorname{sgn}(0_+) + \pi H\left(-\frac{\tanh(\zeta + 2\delta)}{\tanh \zeta} - 1\right) \operatorname{sgn}(0_-) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2i} \log\left(\frac{\left(\frac{\tanh(\zeta + 2\delta)}{\tanh \zeta} - 1\right)^2}{\left(\frac{\tanh(\zeta + 2\delta)}{\tanh \zeta} + 1\right)^2}\right) \\
&= \frac{1}{N} \left\{ \pi H(\delta) + \frac{1}{2i} \log\left(\frac{\left(\frac{\tanh(\zeta + 2\delta)}{\tanh \zeta} - 1\right)^2}{\left(\frac{\tanh(\zeta + 2\delta)}{\tanh \zeta} + 1\right)^2}\right) \right\} \tag{3.20}
\end{aligned}$$

したがって、(3.17) と (3.20) を用いると J_1 に関する Bethe 仮説方程式 (3.7) は

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{N} J_1 = & \tan^{-1}\left(\frac{a}{1-b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{a}{1+b}\right) + \pi\left(\mathrm{H}(b-1) + 2\mathrm{H}(1-b)\mathrm{H}(-a) - \frac{\mathrm{H}(\delta)}{N}\right) \\ & + \frac{1}{2i} \log\left\{\left(\frac{a^2 + (b-1)^2}{a^2 + (b+1)^2}\right) \left(\frac{\left(\frac{\tanh(\zeta+2\delta)}{\tanh(\zeta)} + 1\right)^2}{\left(\frac{\tanh(\zeta+2\delta)}{\tanh(\zeta)} - 1\right)^2}\right)^{\frac{1}{N}}\right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

と表せる。ここで (3.21) を実部と虚部に分けて、虚部を拘束条件とし、string センター x を string のずれ δ の式として表す。実部の (3.21) に対して x を δ で表し、指定した量子数 J_1 に対する δ, x を求める。したがって δ は w で表すことができるので、 x も w で表すことができる。ここで (3.21) の右辺の実部を counting function と呼び、次のように定義する。

$$Z_1(\delta(w), x(w), \zeta) \equiv \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{1-b}\right) + \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{1+b}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathrm{H}(b-1) + 2\mathrm{H}(1-b)\mathrm{H}(-a) - \frac{\mathrm{H}(\delta)}{N}\right) \quad (3.22)$$

Counting function (3.22) を用いて Bethe 仮説方程式の実部 (3.21) を表すと

$$Z_1(\delta(w), x, \zeta(w)) = \frac{J_1}{N} \quad (3.23)$$

となり、 J_1 に対応する w を求めることによって Bethe 仮説方程式の解を求めることができる。

Bethe 量子数 J_1 、 J_2 の差

J_1 に関しては前節で調べた。そこで次に、 J_2 に関する Bethe 仮説方程式 (3.8) について考察し、量子数 J_1 と J_2 の差を調べる。まず、(3.15)、(3.16) を用いて $\frac{\tan(\lambda_2)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})}$ を

$$\frac{\tan(\lambda_2)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} = a - ib \quad (3.24)$$

と表せる。したがって、 J_2 に関する counting function $Z_2(w)$ を次のように定義する。

$$Z_2(w) \equiv \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{1-b}\right) + \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{1+b}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathrm{H}(b-1)\mathrm{sgn}(a_-) + \frac{1}{N}\mathrm{H}(\delta)\right). \quad (3.25)$$

ここで、二つの counting function、(3.22) で表される $Z_1(w)$ と (3.25) で表される $Z_2(w)$ の差を計算すると次のようになる。

$$Z_2(w) - Z_1(w) = \frac{1}{N}\mathrm{H}(\delta) - \mathrm{H}(-a) \quad (3.26)$$

したがって、 J_1 、 J_2 は

$$\begin{aligned} J_2 - J_1 &= \mathrm{H}(\delta) - N\mathrm{H}(-a) \\ &= \mathrm{H}(\delta) \end{aligned} \quad (3.27)$$

という関係になる。

Bethe 仮説方程式の虚部

本節では Bethe 仮説方程式 (3.21) の虚部を拘束条件として x を w で表す。まず、Bethe 仮説方程式 (3.21) の虚部は

$$\frac{a^2 + (b-1)^2}{a^2 + (b+1)^2} = \left(\frac{\frac{\tanh(\zeta+2\delta)}{\tanh(\zeta)} - 1}{\frac{\tanh(\zeta+2\delta)}{\tanh(\zeta)} + 1} \right)^{\frac{2}{N}} \quad (3.28)$$

となる。ここで X を次のように定義する。

$$X \equiv \tan^2 x. \quad (3.29)$$

(3.28) を X 、 w 、 t で表すと

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{X(1-w^2t^2)^2}{t^2} + \left((1-w) + X(-w + w^2t^2) \right)^2}{\frac{X(1-w^2t^2)^2}{t^2} + \left((1+w) + X(w + w^2t^2) \right)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{-(1-w)(1-wt^2)}{1+w^2t^2} \right)^{\frac{2}{N}}}{\left(\frac{(1+w)(1+wt^2)}{1+w^2t^2} \right)^{\frac{2}{N}}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

となり、この式を展開すると

$$\begin{aligned} & \left(\left\{ X(-w + w^2t^2) + (1-w) \right\}^2 + \frac{X(1-w^2t^2)^2}{t^2} \right) \left(\frac{(1+w)(1+wt^2)}{1+w^2t^2} \right)^{\frac{2}{N}} \\ &= \left(\left\{ X(w + w^2t^2) + (1+w) \right\}^2 + \frac{X(1-w^2t^2)^2}{t^2} \right) \left(\frac{-(1-w)(1-wt^2)}{1+w^2t^2} \right)^{\frac{2}{N}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

となる。これを関数 $A(w)$ 、 $B(w)$ 、 $C(w)$ を用いて簡便な形に直すと、以下のようになる。

$$A(w)X^2 + B(w)X + C(w) = 0 \quad (3.32)$$

ただし、関数 $A(w)$ 、 $B(w)$ 、 $C(w)$ は

$$\begin{aligned} A(w) &= w^2(1+wt^2)^2 \left\{ \left(\frac{-(1-w)(1-wt^2)}{1+w^2t^2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} - w^2(1-wt^2)^2 \left\{ \left(\frac{(1+w)(1+wt^2)}{1+w^2t^2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} \\ B(w) &= \left\{ \frac{(1-w^2t^2)^2}{t^2} + 2w(1+w)(1+wt^2) \right\} \left\{ \left(\frac{-(1-w)(1-wt^2)}{1+w^2t^2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} \\ &\quad - \left\{ \frac{(1-w^2t^2)^2}{t^2} - 2w(1-w)(1-wt^2) \right\} \left\{ \left(\frac{(1+w)(1+wt^2)}{1+w^2t^2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} \\ C(w) &= (1+w)^2 \left\{ \left(\frac{-(1-w)(1-wt^2)}{1+w^2t^2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} - (1-w)^2 \left\{ \left(\frac{(1+w)(1+wt^2)}{1+w^2t^2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

である。ここで、指数関数 $(1-w)^{2/N}$ の分岐を

$$(1-w)^{\frac{2}{N}} = ((1-w)^2)^{\frac{1}{N}} \quad (3.34)$$

とする。 $X (= \tan^2 x)$ を w で次のように表現する。

$$X_{\pm} = \frac{1}{2A(w)} \left(-B(w) \pm \sqrt{B(w)^2 - 4A(w)C(w)} \right) \quad (3.35)$$

ただし、 X_+ 、 X_- をそれぞれ X_p 、 X_m と表す。

ここで、 x が実数となるには X が正の値となる必要がある。 $X_{\pm} \geq 0$ である w の領域を調べるために次の二つの Lemma を示す。

Lemma 3.1.1. $N \geq 2$ であるとき $C(w) \geq 0$ となる。また $C(w=1) = 0$ である。

Proof. $\tanh(\frac{\xi}{2}) \leq 1$ と $0 \leq w$ を用いると次の不等式が得られる。

$$\begin{aligned} C(w) \times (1+w^2t^2)^{\frac{1}{N}} &= (1+w)^2 \left\{ \left(-(1-w)(1-wt^2) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} - (1-w)^2 \left\{ \left((1+w)(1+wt^2) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} \\ &\geq (1+w)^2 \left\{ (1-w)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} \left\{ (1-w)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} - (1-w)^2 \left\{ (1+w)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} \left\{ (1+w)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} \\ &\begin{cases} = 0 & (N=2) \\ \geq (1+w)^2(1-w)^2 - (1-w)^2(1+w)^2 = 0 & (N>2) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.36)$$

したがって、命題が示された。 □

Lemma 3.1.2. $N \geq 2$ に対して $A(w) \geq 0$ のときに $B(w) \geq 0$ となる。

Proof. $0 < w < \frac{1}{t}$ に対して不等式 $A(w) \geq 0$ を次のように表す。

$$\left\{ \left(\frac{-(1-w)(1-wt^2)}{(1+w)(1+wt^2)} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} \geq \frac{(1-wt^2)^2}{(1+wt^2)^2} \quad (3.37)$$

この関係を用いて

$$\begin{aligned} B(w) \geq &\left[\left\{ \frac{(1-w^2t^2)^2}{t^2} + 2w(1+w)(1+wt^2) \right\} \left(\frac{1-wt^2}{1+wt^2} \right)^2 \right. \\ &\left. - \left\{ \frac{(1-w^2t^2)^2}{t^2} - 2w(1-w)(1-wt^2) \right\} \left[\left(\frac{(1+w)(1+wt^2)}{1+w^2t^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{N}} \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

$\left\{ \left(\frac{(1+w)(1+wt^2)}{1+w^2t^2} \right)^2 \right\}^{1/N} \geq 0$ であるので、

$$\begin{aligned}
& \frac{B(w)}{\left\{ \left(\frac{(1+w)(1+wt^2)}{1+w^2t^2} \right)^2 \right\}^{1/N}} \\
& \geq \frac{(1-w^2t^2)^2}{t^2} \left(\frac{1-wt^2}{1+wt^2} \right)^2 + 2w(1+w)(1+wt^2) \left(\frac{1-wt^2}{1+wt^2} \right)^2 + 2w(1-w)(1-wt^2) - \frac{(1-w^2t^2)^2}{t^2} \\
& = \frac{2w}{(1+wt^2)^2} 2(1-w^2t^2)w^2t^2(1-t^2) \\
& \geq 0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

であることがわかる。したがって $A(w) \geq 0$ のときに $B(w) \geq 0$ であることがわかる。 \square

A、B、C の符号と X_p 、 X_m の符号の対応

ここでは各 A、B、C の符号ごとに X_p 、 X_m の符号を調べて X が正の領域を調べる。まず、 $w \neq 1$ の場合を考える。初めに X_p の符号を調べる。Lemma 3.1.1 より $C \geq 0$ であるので A、B の符号のみ考察する。

(1) $A > 0, B > 0$:

$$X_p = \frac{1}{2A} \left(-|B| + \sqrt{|B|^2 - 4|A||C|} \right) < 0 \tag{3.40}$$

(2) $A > 0, B < 0$:

$$X_p = \frac{1}{2A} \left(|B| + \sqrt{|B|^2 - 4|A||C|} \right) > 0 \tag{3.41}$$

(3) $A < 0, B > 0$:

$$X_p = \frac{-1}{2A} \left(|B| - \sqrt{|B|^2 + 4|A||C|} \right) < 0 \tag{3.42}$$

(4) $A < 0, B < 0$:

$$X_p = \frac{-1}{2A} \left(-|B| - \sqrt{|B|^2 + 4|A||C|} \right) < 0 \tag{3.43}$$

この中で $X_p > 0$ であるのは (2) のみである。しかし、この条件は Lemma 3.1.2 の $A(w) \geq 0 \Rightarrow B(w) \geq 0$ に反する。次に X_m の符号について調べる。

(5) $A > 0, B > 0$:

$$X_m = \frac{1}{2A} \left(-|B| - \sqrt{|B|^2 - 4|A||C|} \right) < 0 \tag{3.44}$$

(6) $A > 0, B < 0$:

$$X_m = \frac{1}{2A} \left(|B| - \sqrt{|B|^2 - 4|A||C|} \right) > 0 \tag{3.45}$$

(7) $A < 0, B > 0$:

$$X_m = \frac{-1}{2A} \left(|B| + \sqrt{|B|^2 + 4|A||C|} \right) > 0 \quad (3.46)$$

(8) $A < 0, B < 0$:

$$X_m = \frac{-1}{2A} \left(-|B| + \sqrt{|B|^2 + 4|A||C|} \right) > 0 \quad (3.47)$$

このとき、 $X_m > 0$ となるのは (6)、(7)、(8) である。しかし、(6) は Lemma 3.1.2 に反する。したがって $w \neq 1$ のときに $X > 0$ となるのは $A < 0$ のときの X_m のみである。次に $w = 1$ の場合についても調べる。 $C(w = 1) = 0$ なので

$$A(w = 1)X^2 + B(w = 1)X = 0 \quad (3.48)$$

となる。ここで $A(w = 1) < 0$ と $B(w = 1) < 0$ であるので $X_m = 0$ となる。このとき、 $w = 1$ なので $x = 0$ かつ $\delta = 0$ であることがわかる。これは特異解に対応する。これについては詳しくは後の §3.3.3 で議論する。以上をまとめると次のようになる。

Proposition 3.1.3. $X_{\pm}(w) > 0$ は $X_{-}(w)$ に対して $A(w) < 0$ であることと同値である。

まとめると Bethe 量子数 J_1 を与えられると counting function $Z(w)$ (3.22) より w を数値的に求めることができ、(3.35) を用いて $X_m(w)$ から x を求めることができる。また二つ目の Bethe 量子数 J_2 は (3.27) から求めることができる。

3.2 Counting function の単調性について

複素解の string 解からのずれが $\delta < 0$ である場合の Bethe 仮説方程式の解を narrow pair、 $\delta > 0$ である場合の Bethe 仮説方程式の解を wide pair と呼ぶ。したがって w に関して $0 < w < 1$ を満たす区間は $\delta < 0$ に対応して narrow pair になり、 $1 < w < \frac{1}{t}$ を満たす区間は $\delta > 0$ と対応して wide pair になる。

w に関する方程式 $A(w) = 0$ は区間 $0 < w < 1$ で解を最大で一つ持つ。この解を w_1 とする。この領域に解を持たないときは $0 < w < 1$ に対して $A(w) < 0$ かつ、 $A(0) = 0$ となることを示す。また、このときの w_1 を $w_1 = 0$ と定義する。一方、 $1 < w < \frac{1}{t}$ の区間では w に関する方程式 $A(w) = 0$ の解は一つだけ存在することを示す。この区間での Bethe 仮説方程式の解を w_3 と定義する。

$\tilde{A}(w)$ を次のように定義する。

$$\tilde{A}(w) \equiv -A(w) \frac{\left(\frac{(1+w^2t^2)}{(1+wt^2)(1-wt^2)} \right)^{\frac{2}{N}}}{w^2} \quad (3.49)$$

これは

$$\tilde{A}(w) = \left((1 - \omega t^2)^{N-1} (1 + \omega) \right)^{\frac{2}{N}} - \left((1 + \omega t^2)^{N-1} (1 - \omega) \right)^{\frac{2}{N}} \quad (3.50)$$

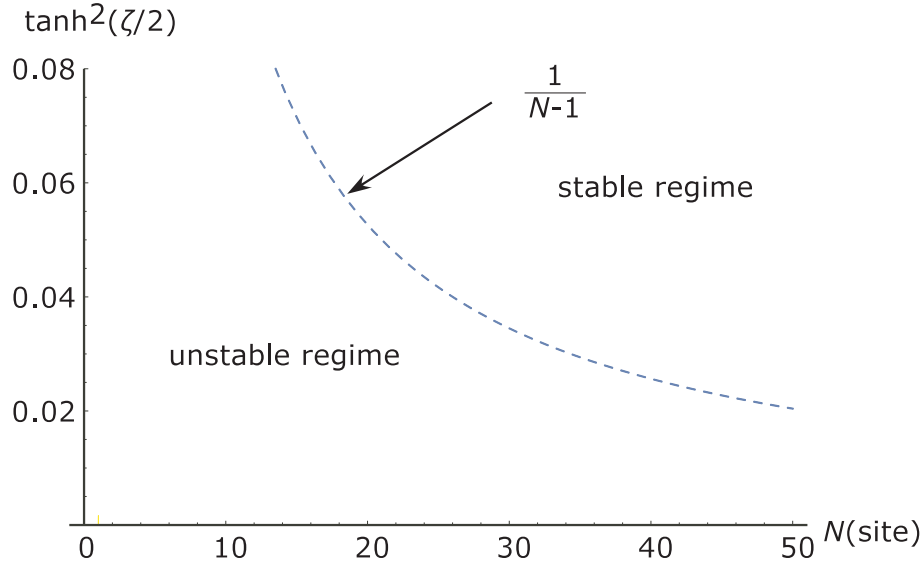


図 3.1: 安定領域と不安定領域を表している。破線が各領域の境界であり、 $\tanh^2(\zeta/2) = \frac{1}{N-1}$ となる。縦軸は異方性パラメータに依存する $\tanh^2 \zeta/2$ 、横軸はサイト数 N である。ただし、 $\Delta = \cosh(\zeta)$ であることに注意する。

と表せる。 $0 < w < 1$ のときは $1 + w^2 t^2$ 、 $1 + w t^2$ 、 $1 - w t^2$ が 0 でないので $A(w) = 0$ と $\tilde{A}(w) = 0$ は同値である。 $\tilde{A}(w)$ を微分すると付録 B より

$$\frac{d\tilde{A}}{dw}(w) = \text{sgn}(1-w) \left| \frac{1+wt^2}{1-w} \right|^{1-\frac{2}{N}} 2t^2 \left(\frac{N_\zeta}{N} + w - 1 \right) + \left(\frac{1-wt^2}{1+w} \right)^{1-\frac{2}{N}} 2t^2 \left(\frac{N_\zeta}{N} - 1 - w \right) \quad (3.51)$$

となる。 $\frac{d}{dw} \tilde{A}(w)$ に $w = 0$ を代入すると

$$\frac{d}{dw} \tilde{A}(w=0) = 4t^2 \left(\frac{N_\zeta}{N} - 1 \right) \quad (3.52)$$

となる。ただし、 $N_\zeta = 1 + \frac{1}{\tanh^2(\frac{\zeta}{2})}$ とする。したがって $N > N_\zeta$ であるとき式 (3.52) の値は負になる。逆に $N < N_\zeta$ であるときは式 (3.52) の値は正である。 $N > N_\zeta$ を安定領域と呼び、 $N < N_\zeta$ を不安定領域と呼ぶ。 N_ζ は ζ のみに依存し、 $\Delta = \cosh \zeta$ であるのでそれぞれの領域は図 3.1 のように異方性パラメータ Δ とサイト数 N で区分することができる。

3.2.1 $0 < w < 1$ 上の安定領域について

$(N-1)t^2 > 1$ であるとき、 $\frac{d\tilde{A}}{dw}(w=0)$ は負の値をとる。また、この領域では $\frac{d\tilde{A}}{dw}(w)$ を

$$\frac{d\tilde{A}}{dw}(w) = 2t^2 \left(\frac{1+wt^2}{1-w} \right)^{1-\frac{2}{N}} \left[\left(\frac{N_\zeta}{N} + w - 1 \right) - \left(1 - \frac{N_\zeta}{N} + w \right) \left(\frac{(1-w)(1-wt^2)}{(1+w)(1+wt^2)} \right)^{1-\frac{2}{N}} \right] \quad (3.53)$$

と表せる。ここで $0 < w < 1$ に対して不等式

$$\left| \left(\frac{(1-w)(1-wt^2)}{(1+w)(1+wt^2)} \right)^{1-\frac{2}{N}} \right| < 1 \quad (3.54)$$

が成り立つので、 $w > 1 - \frac{N_\zeta}{N}$ であるとき (3.53) の主要項 $\frac{N_\zeta}{N} + w - 1$ は正となる。それゆえ、 $\frac{d\tilde{A}}{dw}(w)$ が負から正になる点が 0 と 1 の間に存在し、その点を w_α とする。したがって $w_\alpha < w < 1$ で $\frac{d\tilde{A}}{dw}(w) > 0$ となる。

ここで $w = 0$ としたときに $\tilde{A}(w = 0) = 0$ であり、 $\frac{d\tilde{A}}{dw}(w = 0) < 0$ であることに注意する。それゆえ $\tilde{A}(w)$ は $w = 0$ で減少関数であり、 $w = 0$ の近傍で $\tilde{A}(w)$ は負となる。しかしながら、 $w > w_\alpha$ において $\frac{d\tilde{A}}{dw} > 0$ であるので増加関数に変化する。加えて $\tilde{A}(w)$ は $w = 1$ で

$$\tilde{A}(1) = 2^{\frac{2}{N}}(1-t^2)^{2-\frac{2}{N}} > 0 \quad (3.55)$$

となり正となる。それゆえ、 $\tilde{A}(w) = 0$ となる w は $0 < w < 1$ においてただ一つとなる。この点を w_1 と定義する。

3.2.2 $0 < w < 1$ 上の不安定領域について

不安定領域となる $N < N_\zeta$ では $w = 0$ で (3.53) より $\frac{d\tilde{A}}{dw}(w = 0) > 0$ となる。それゆえ、(3.53) の主要項は増加関数であり $0 < w < 1$ で常に正である。したがって、 $\frac{d\tilde{A}}{dw}(w)$ は $0 < w < 1$ で常に正である。 $\tilde{A}(0) = 0$ であることに注意すると、 $0 < w < 1$ の領域では

$$\tilde{A}(w) > 0 \quad (3.56)$$

となる。

区間 $1 < w < \frac{1}{t}$ 上での $\mathbf{A}(w) = 0$ となる w の一意性について

$w > 1$ において $\tilde{A}(w)$ を具体的に書くと

$$\tilde{A}(w) = \left(\left((1-wt^2)^{N-1}(1+w) \right)^2 \right)^{\frac{1}{N}} - \left(\left((1+wt^2)^{N-1}(1-w) \right)^2 \right)^{\frac{1}{N}} \quad (3.57)$$

であり、これを微分したものは

$$\frac{d\tilde{A}}{dw}(w) = 2t^2 \left(\frac{1+wt^2}{w-1} \right)^{1-\frac{2}{N}} \left[-\left(w-1 + \frac{N_\zeta}{N} \right) - \left(w+1 - \frac{N_\zeta}{N} \right) \left(\frac{(w-1)(1-wt^2)}{(1+w)(1+wt^2)} \right)^{1-\frac{2}{N}} \right] \quad (3.58)$$

となる。 $w - 1 + \frac{Nt}{N}$ は $w > 1$ の領域で常に正となるので、(3.58) の主要項は常に負であり、 $1 < w < \frac{1}{t}$ の区間で $\tilde{A}(w)$ は単調減少である。ここで (3.55) より $\tilde{A}(1) > 0$ であることを確認する。 $\tilde{A}\left(\frac{1}{t}\right)$ の符号は

$$\tilde{A}\left(\frac{1}{t}\right) = t^{-\frac{2}{N}}(1+t)^2 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\frac{2}{N}} \left\{ \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{2-\frac{4}{N}} - 1 \right\} < 0 \quad (3.59)$$

となる。したがって、 $\tilde{A}(w) = 0$ となるのは $1 < w < \frac{1}{t}$ の領域ではただ一つであることがわかる。この点を w_3 と定義する。したがって、 w の方程式 $A(w) = 0$ の解は $1 < w < \frac{1}{t}$ 上で解をただ一つ持つことがわかる。

3.2.3 w_1 及び w_3 の近似的な値について

区間 $0 < w < 1$ 上での narrow pair について

w に関する方程式 $A(w) = 0$ は

$$\left(\frac{1-wt^2}{1+wt^2}\right)^{N-1} = \frac{1-w}{1+w} \quad (3.60)$$

と同値である。 N が十分大きいとき (3.60) の左辺は近似的に指数関数を用いて次のように表すことができる。

$$\left(\frac{1-wt^2}{1+wt^2}\right)^{N-1} \approx \exp(-2(N-1)t^2w) \quad (3.61)$$

w の方程式 (3.61) は次のように

$$w = \tanh((N-1)t^2w) \quad (3.62)$$

表せる。この方程式を解く。まず、不安定領域である $(N-1)t^2 < 1$ の場合を考える。この場合、方程式 (3.62) は $w = 0$ しか解をもたないので $w_1 = 0$ となる。次に、安定領域である $(N-1)t^2 > 1$ の場合について考える。この場合、方程式 (3.62) は $w = 0$ 以外の解を持つ。 $(N-1)t^2$ が 1 よりも十分に大きいとき、近似的に w_1 は

$$w_1 = 1 - 2\exp(-2(N-1)t^2) + O(\exp(-4(N-1)t^2)) \quad (3.63)$$

となる。したがって、 w_1 は N に関して指数関数的に 1 に近づいていくことがわかる。

区間 $1 < w < \frac{1}{t}$ 上の wide pair について

w_3 は

$$\left(\frac{1-wt^2}{1+wt^2}\right)^{N-1} = \frac{w-1}{w+1} \quad (3.64)$$

の解なので、近似的な解は

$$w_3 = 1 + 2 \exp(-2(N-1)t^2) + O(\exp(-4(N-1)t^2)) \quad (3.65)$$

これによって w_3 は N を十分に大きくすると近似的に指数関数的に 1 に近づくことがわかる。

3.2.4 $B(w)$ 、 $C(w)$ のグラフについて

$\hat{B}(w)$ の単調性について

まず、 $\hat{B}(w)$ を次のように定義する。

$$\hat{B}(w) = B(w) \frac{\left(\frac{(1+w^2t^2)}{(1+wt^2)(1-wt^2)} \right)^{\frac{2}{N}}}{w} \quad (3.66)$$

これは

$$\hat{B}(w) = \left\{ \frac{(1-w^2t^2)^2}{wt^2} + 2(1+w)(1+wt^2) \right\} \left(\frac{1-w}{1+wt^2} \right)^{\frac{2}{N}} - \left\{ \frac{(1-w^2t^2)^2}{wt^2} - 2(1-w)(1-wt^2) \right\} \left(\frac{1+w}{1-wt^2} \right)^{\frac{2}{N}} \quad (3.67)$$

となる。これを付録 B を用いて展開すると

$$\hat{B}(w) = 4 \left(1 - \frac{N_\xi}{N} \right) + \left\{ -\frac{4}{3} \frac{N_\xi}{N} + 4t^2 \left(1 - \frac{2(1+2t^2)}{3} \frac{N_\xi}{N} + (1+t^2) \frac{N_\xi^2}{N^2} - \frac{2t^2}{3} \frac{N_\xi^2}{N^2} \right) \right\} w^2 + O(w^4) \quad (3.68)$$

となる。よって $w=0$ のとき

$$\hat{B}(0) = 4 \left(1 - \frac{N_\xi}{N} \right) \quad (3.69)$$

となる。したがって $\hat{B}(0)$ が正であるときは安定領域となり、一方、 $\hat{B}(0)$ が負であるときは不安定領域となる。次に $w=w_2=1$ であるとき、 $\hat{B}(w)$ は

$$\hat{B}(1) = -\frac{4}{t^2} \left(\frac{1-t^2}{2} \right)^{2-\frac{2}{N}} < 0 \quad (3.70)$$

となり負となる。同様に $w = \frac{1}{t}$ であるとき

$$\hat{B}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2(1+t)^2}{t^{1+\frac{2}{N}}} \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^{\frac{2}{N}} \left\{ 1 - \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^{2-\frac{4}{N}} \right\} > 0 \quad (3.71)$$

となる。

前節 §3.2.3 より、 N が大きいときに安定領域では w_1 は 1 に近づき、安定領域、不安定領域共に w_3 は 1 に近づく。 w_1 、 w_3 は w_2 に近づくので N が大きいときに w の範囲が 1 の近傍に制限される。このとき、 $\frac{d\hat{B}(w)}{dw}$ の具体的な式 (B.3) の因子 $|w_2 - w|^{-1}$ が支配的にな

る。したがって、安定領域で $w_1 < w < w_2$ (narrow pair) では N が大きいときに $\frac{d\hat{B}(w)}{dw} < 0$ となり、安定領域あるいは不安定領域で $w_2 < w < w_3$ (wide pair) では N が大きいときに $\frac{d\hat{B}(w)}{dw} > 0$ となる。よって、以下のようなことがわかる。

- $w_1 < w < w_2$ (narrow pair)

- 安定領域では $\hat{B}(w)$ は単調減少であることが示された。これは $\frac{d\hat{B}(w)}{dw} < 0$ であることからわかる。
- 不安定領域では $\hat{B}(w)$ は単調減少であることが予想される。 $w = 0$ の近傍では $\hat{B}(w)$ の単調減少であることが示すことができる。これは $\hat{B}(w)$ についての式 (3.68) の w^2 の係数が負であることからわかる。

- $w_2 < w < w_3$ (wide pair)

- 安定、不安定領域ともに N が大きいとき $\hat{B}(w)$ が単調増加である。これは $\frac{d\hat{B}(w)}{dw} > 0$ であることから確認できる。

$\hat{C}(w)$ の単調性について

まず、 $\hat{C}(w)$ を次のように定義する。

$$\hat{C}(w) = C(w) \frac{\left(\frac{(1+w^2t^2)}{(1+wt^2)(1-wt^2)} \right)^{\frac{2}{N}}}{w} \quad (3.72)$$

これは

$$\hat{C}(w) = \frac{(1+w)^2}{w} \left(\frac{1-w}{1+wt^2} \right)^{\frac{2}{N}} - \frac{(1-w)^2}{w} \left(\frac{1+w}{1-wt^2} \right)^{\frac{2}{N}} \quad (3.73)$$

となる。 $0 < w < 1$ の区間で付録の (C.2) を用いて展開すると、

$$\hat{C}(w) = 4 \left(1 - t^2 \frac{N_\xi}{N} \right) + \left\{ -\frac{4}{3} t^2 ((2-t^2)^2 + 3) \frac{N_\xi}{N} + 4t^4 (3-t^2) \left(\frac{N_\xi}{N} \right)^2 - \frac{8t^6}{3} \left(\frac{N_\xi}{N} \right)^3 \right\} w^2 + O(w^4) \quad (3.74)$$

となる。したがって、 $w = 0$ のときは

$$\hat{C}(0) = 4 \left(1 - t^2 \frac{N_\xi}{N} \right) \quad (3.75)$$

となる。 $N > 2 > 1 + t^2 = t^2 N_\xi$ なので、 $\hat{C}(0) > 0$ であることがわかる。一方、 $w = \frac{1}{t}$ のときは

$$\hat{C}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{(1+t)^2}{t^{1+\frac{2}{N}}} \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^{\frac{2}{N}} \left\{ 1 - \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^{2-\frac{4}{N}} \right\} > 0 \quad (3.76)$$

となるので $\hat{C}\left(\frac{1}{t}\right) > 0$ であることがわかる。

前節 §3.2.3 より、 N が大きいときに安定領域では w_1 は 1 に近づき、安定領域、不安定領域共に w_3 は 1 に近づく。 w_1, w_3 は w_2 に近づくので N が大きいときに w の範囲が 1 の近傍に制限される。このとき、 $\frac{d\hat{C}(w)}{dw}$ の具体的な式 (B.4) の因子 $|w_2 - w|^{-1}$ が支配的にな

る。したがって、安定領域で $w_1 < w < w_2$ (narrow pair) では N が大きいときに $\frac{d\hat{C}(w)}{dw} < 0$ となり、安定領域あるいは不安定領域で $w_2 < w < w_3$ (wide pair) では N が大きいときに $\frac{d\hat{C}(w)}{dw} > 0$ となる。よって、以下のようなことがわかる。

- $w_1 < w < w_2$ (narrow pair)

- 安定領域では $\hat{C}(w)$ は単調減少であることが示された。これは $\frac{d\hat{C}(w)}{dw} < 0$ であることからわかる。
- 不安定領域では $\hat{C}(w)$ は単調減少であることが予想される。 $w = 0$ の近傍では $\hat{C}(w)$ の単調減少であることが示すことができる。これは $\hat{C}(w)$ についての式 (3.74) の w^2 の係数が負であることからわかる。

- $w_2 < w < w_3$ (wide pair)

- 安定、不安定領域ともに N が大きいとき $\hat{C}(w)$ が単調増加である。これは $\frac{d\hat{C}(w)}{dw} > 0$ であることから確認できる。

3.2.5 X の単調性について

X の単調性について調べる。まず、 $\hat{A}(w)$ を

$$\hat{A}(w) = w\tilde{A}(w) \quad (3.77)$$

と定義し、 K を

$$K \equiv \frac{\left(\frac{(1+w^2t^2)}{(1+w^2)(1-w^2)}\right)^{\frac{2}{N}}}{w} \quad (3.78)$$

と定義する。このとき \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} は

$$\hat{A} = -AK \Leftrightarrow A = -K^{-1}\hat{A} \quad (3.79)$$

$$\hat{B} = BK \Leftrightarrow B = K^{-1}\hat{B} \quad (3.80)$$

$$\hat{C} = CK \Leftrightarrow C = K^{-1}\hat{C} \quad (3.81)$$

となる。これを用いると X_m は

$$\begin{aligned} X_m &= \frac{1}{2A} \left(-B - \sqrt{B^2 - 4AC} \right) \\ &= \frac{1}{-2K^{-1}\hat{A}} \left(-K^{-1}\hat{B} - \sqrt{K^{-2}\hat{B}^2 + 4K^{-2}\hat{A}\hat{C}} \right) \\ &= \frac{1}{2\hat{A}} \left(\hat{B} + \sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}} \right) \end{aligned} \quad (3.82)$$

と書ける。ここで、 $w \neq 1$ の場合を考えるので、 X を X_m とする。これを微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dw} &= \left(\frac{d}{dw} \frac{1}{2\hat{A}} \right) (\hat{B} + \sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}}) + \left(\frac{1}{2\hat{A}} \right) \left\{ \frac{d}{dw} (\hat{B} + \sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}}) \right\} \\
&= \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{\hat{A}^2} \right) \frac{d\hat{A}}{dw} \right\} (\hat{B} + \sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}}) + \frac{1}{2\hat{A}} \left(\frac{d\hat{B}}{dw} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2\hat{A}} \hat{B} \left(\frac{d\hat{B}}{dw} \right) \frac{1}{\sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}}} + \frac{1}{4\hat{A}} \frac{1}{\sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}}} \left(4 \frac{d\hat{A}}{dw} \hat{C} + 4 \frac{d\hat{C}}{dw} \hat{A} \right) \\
&= \frac{1}{2\hat{A}} \left(\frac{d\hat{B}}{dw} \right) \frac{\sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}} + \hat{B}}{\sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}}} + \frac{1}{\hat{A} \sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}}} \left\{ \hat{A} \frac{d\hat{C}}{dw} - \frac{1}{2\hat{A}} \frac{d\hat{A}}{dw} (\hat{B} \sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}} + \hat{B}^2 + 2\hat{A}\hat{C}) \right\}
\end{aligned} \tag{3.83}$$

とかける。ここで次の Lemma を準備する。

Lemma 3.2.1. $\alpha, \beta > 0$ に対して、

$$\beta^2 - \beta \sqrt{\beta^2 + 2\alpha} + \alpha > 0 \tag{3.84}$$

となる。

Proof.

$$\begin{aligned}
&\beta^4 + 2\alpha\beta^2 + \alpha^2 > \beta^4 + 2\alpha\beta^2 \\
&\Leftrightarrow (\beta^2 + \alpha)^2 > \beta^2(\beta^2 + 2\alpha) \\
&\Leftrightarrow \beta^2 + \alpha > \beta \sqrt{\beta^2 + 2\alpha} \\
&\Leftrightarrow \beta^2 - \beta \sqrt{\beta^2 + 2\alpha} + \alpha > 0
\end{aligned} \tag{3.85}$$

□

次の関係

$$\frac{d\hat{A}}{dw} = \tilde{A} + w \frac{d\tilde{A}}{dw} \tag{3.86}$$

を確認する。これを用いて w の各領域について解析する。まず、区間 $w_1 < w < w_2$ 上では $\frac{d\tilde{A}}{dw} > 0$ かつ $\tilde{A} > 0$ なので $\frac{d\hat{A}}{dw} > 0$ である。一方、 $w_2 < w < w_3$ の領域では N が十分大きいときに $\frac{d\hat{A}}{dw} < 0$ となる。

区間 $w_2 < w < w_3$ では安定領域、不安定領域含めて十分大きな N に対して $\frac{d\hat{B}}{dw} > 0$ 、 $\frac{d\hat{C}}{dw} > 0$ である。一方で、 N は十分大きいとき $\tilde{A} < 0$ かつ $\frac{d\tilde{A}}{dw} < 0$ なので $\frac{d\hat{A}}{dw} < 0$ となる。したがって、 $\alpha = 2\hat{A}\hat{C}$ 、 $\beta = -\hat{B}$ として Lemma 3.2.1 に代入すると、

$$\hat{B}^2 + \hat{B} \sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}} + 2\hat{A}\hat{C} > 0 \tag{3.87}$$

となるので (3.83) より $\frac{dX}{dw} > 0$ となり $w_2 < w < w_3$ 領域で X は単調増加である。

区間 $w_1 < w < w_2$ 上で安定領域の場合は十分大きな N に対して $\frac{d\hat{B}}{dw} < 0$, $\frac{d\hat{C}}{dw} < 0$ である。 $\frac{d\hat{A}}{dw} > 0$ かつ $\hat{A} > 0$ であるので $\frac{d\hat{A}}{dw}$ は正であることを確認する。したがって (3.83) と Lemma 3.2.1 より $\frac{dX}{dw} < 0$ となりこの区間で X は単調減少である。

最後に区間 $w_1 < w < w_2$ で不安定領域の場合を考える。 $\frac{d\hat{B}}{dw} < 0$, $\frac{d\hat{C}}{dw} < 0$ であることを示しているのは $w = 0$ 近傍のみである。区間 $w_1 < w < w_2$ 上全ての点で $\frac{d\hat{B}}{dw} < 0$, $\frac{d\hat{C}}{dw} < 0$ であることを仮定すると (3.83) と Lemma 3.2.1 より $\frac{dX}{dw} < 0$ となり、この区間で X は単調減少となる。

3.2.6 Counting function $Z(w)$ の単調性について

解析的に扱える領域とその議論

前節までの結果より解析的に扱えるのは $w_2 < w < w_3$ と $w_1 < w < w_2$ の安定領域のみである。本節ではこの領域について扱い、 $w_1 < w < w_2$ の不安定領域については次節で数値的に検証する。まず counting function の定義を思い出す。

$$Z(w) = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{1-b}\right) + \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{1+b}\right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{H}(b-1) + 2\mathbf{H}(1-b)\mathbf{H}(-a) - \frac{1}{N}\mathbf{H}(\delta) \right) \quad (3.88)$$

ここで $\Delta Z(w)$ を

$$\Delta Z(w) \equiv Z(w) - \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{a}{1+b}\right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{H}(b-1) + 2\mathbf{H}(1-b)\mathbf{H}(-a) - \frac{1}{N}\mathbf{H}(\delta) \right) \quad (3.89)$$

と定義する。ここで、加法定理を用いて

$$\begin{aligned} \tan(-2\pi\Delta Z(w)) &= \tan\left(-\tan^{-1}\left(\frac{a}{1-b}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{a}{1+b}\right)\right) \\ &= \frac{2a}{a^2 + b^2 - 1} \\ &= \frac{2\sqrt{X}(1 + Xw^2t^2)\frac{(1-w^2t^2)}{t}}{w^2(1-w^2t^4)X^2 + (t^{-2} + w^4t^2 - 2w^2t^2)X + (w^2 - 1)} \end{aligned} \quad (3.90)$$

と表すことができる。

Counting function $Z(w)$ が区間 $w_1 < w < w_2$ で単調減少、区間 $w_2 < w < w_3$ で単調増加になることについて議論する。

まず、 N が十分に大きいときの ($w_2 = 1 < w < w_3$) の領域について考える。 ($w_2 = 1 < w < w_3$) の領域では、サイト数 N を十分大きくすると $w_3 - w_2 = O\left(\exp\left(-\frac{N}{2}\right)\right)$ となり、 w は 1 の近傍に値をとる。

したがって、(3.90) は 1 を中心として w で展開し、近似すると

$$\tan(-2\pi\Delta Z(w)) = \frac{2a}{a^2 + b^2 - 1} \Big|_{w=1} \approx \frac{2t}{\sqrt{X}(1+t^2)} \quad (3.91)$$

とすることができる。ここで X はこの領域で w に関して単調増加なので $\tan(-2\pi\Delta Z(w))$ は単調減少であることがわかる。したがって、この区間では counting function $Z(w)$ は区間 $w_2 < w < w_3$ 上で単調増加であることがわかる。

一方、 N が十分に大きいときの ($w_1 < w < w_2 = 1$) の領域の安定領域の場合について考える。 $(w_1 < w < w_2 = 1)$ の領域では、サイト数 N を十分大きくすると $w_2 - w_1 = O(\exp(-\frac{N}{2}))$ となり、 w は 1 の近傍に値をとる。したがって、(3.90) は 1 を中心として w で展開し、近似すると

$$\tan(-2\pi\Delta Z(w)) = \frac{2a}{a^2 + b^2 - 1} \Big|_{w=1} \approx \frac{2t}{\sqrt{X}(1+t^2)} \quad (3.92)$$

とすることができる。ここで X はこの領域で w に関して単調減少なので $\tan(-2\pi\Delta Z(w))$ は単調増加であることがわかる。したがって、安定領域で、この区間では counting function $Z(w)$ は単調増加であることがわかる。

解析的に扱えない領域

前節で示したようにすべての領域について counting function の単調性が解析的に示せているわけではない。しかし、数値的には単調性が多くの領域 (特に、解析的に扱えていない不安定領域で区間 $w_1 < w < w_2$ の場合) で成り立つことが確認でき、すべての場合に単調性が成り立つと予想している。ここでは数値的に確認した領域について図 3.2 で示した。この図では縦軸を異方性パラメータを用いた $\tanh^2(\frac{\zeta}{2})$ とし、横軸をサイト数 N としてある。実線は collapse する複素解の個数を区別しており、点線が安定領域と不安定領域を区別している。

3.3 複素解の解析的な数え上げについて

§3.1.1 と proposition 3.1.3 を思い出すと、 x が実数値を持つこと、つまり $X > 0$ であることと $A(w) < 0$ であることは同値である。したがって counting function $Z(w)$ の定義域と $A(w) < 0$ である領域は等しくなる。加えて §3.2 で議論したように $0 < w < 1$ の範囲で $A(w) = 0$ を満たす w は 0 個または 1 個である。このときの w を w_3 と定義する。同様に $1 < w < \frac{1}{t}$ の範囲で $A(w) = 0$ を満たす w は必ず 1 個である。このときの w を w_1 と定義する。 $A(w = 1) < 0$ かつ、 $A(w)$ が連続であるので counting function $Z(w)$ の定義域は $\inf\{w|A(w) \leq 0\}$ と $\sup\{w|A(w) \leq 0\}$ の区間となる。また、 w_2 を 1 と定義する。まとめると

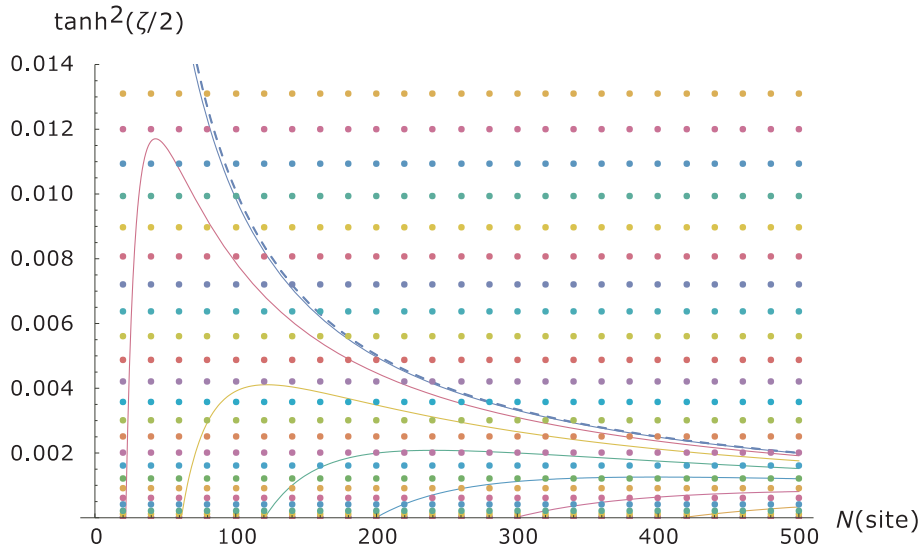


図 3.2: 点は数値的に counting function の単調性を確認したポイント。縦軸は $\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right)$ 、横軸はサイト数 N である。ただし、 $\Delta = \cosh(\zeta)$ であることに注意する。破線が安定領域と不安定領域の境界であり、実線は複素解の個数が変化する線である。

w_1, w_2, w_3 は次のようになる。

$$w_1 \equiv \inf\{w|A(w) \geq 0\} \quad (3.93)$$

$$w_2 \equiv 1 \quad (3.94)$$

$$w_3 \equiv \sup\{w|A(w) \geq 0\} \quad (3.95)$$

このときの counting function は図 3.3、3.4 のようなグラフになる。前節 §3.2 で counting function $Z(w)$ の単調性が区間 $w_1 < w < w_3$ 上の安定領域と区間 $w_2 < w < w_3$ 上の安定領域に対しては解析的に、区間 $w_2 < w < w_3$ 上の不安定領域に対しては図 3.2 のポイントで数値的に確認された。

本節では $x > 0$ (つまり、 $\tan x > 0$) の場合で、counting function $Z(w)$ が区間 $w_2 < w < w_3$ 上で単調減少し、区間 $w_2 < w < w_3$ 上で単調増加すると仮定した場合を考える。 $x < 0$ の場合も counting function $Z(w)$ の単調性は同様になると考える。これらの単調性より $Z(w_1)$ 、 $Z(w_2)$ 、 $Z(w_3)$ の値を求めると、複素解に対する narrow pair と wide pair に対応する複素解の数を求めることができる。ここでは具体的に $Z(w_1)$ 、 $Z(w_2)$ 、 $Z(w_3)$ の値を安定領域、不安定領域、それぞれの場合について求める。

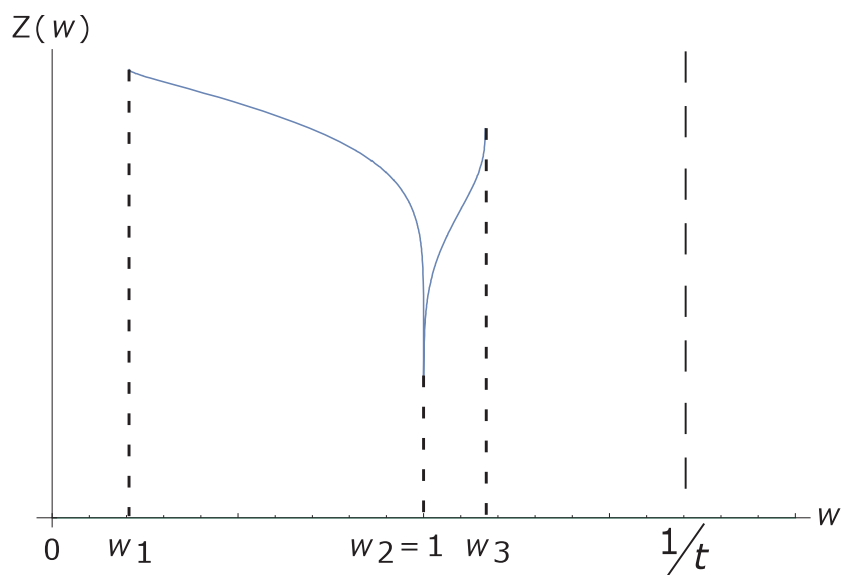


図 3.3: 安定領域の counting function $Z(w)$ の w 依存性

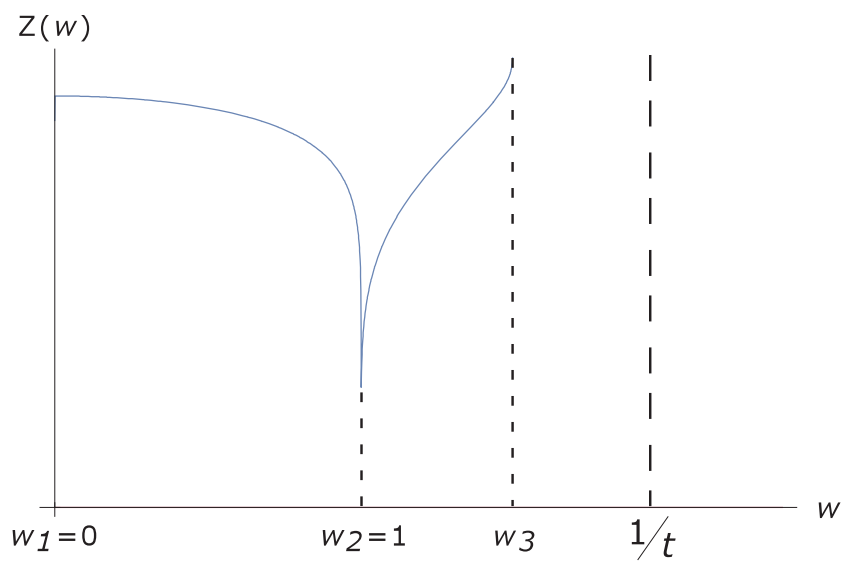


図 3.4: 不安定領域の counting function $Z(w)$ の w 依存性

3.3.1 Narrow pairs ($w_1 < w < w_2$) の場合

$w < w_2$ としたときの **counting function** $Z(w)$ の $w \rightarrow w_2$ 極限について

まず ϵ を $\epsilon \equiv 1 - w$ と定義する。ここで $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ を ϵ について展開する。

$$\hat{A}(1 - \epsilon) = 4 \left(\frac{1 - t^2}{2} \right)^{2 - \frac{2}{N}} - (1 + t^2)^{2 - \frac{2}{N}} \epsilon^{\frac{2}{N}} + \dots \quad (3.96)$$

$$\hat{B}(1 - \epsilon) = -\frac{4}{t^2} \left(\frac{1 - t^2}{2} \right)^{2 - \frac{2}{N}} + (t^{-2} + 2 + 5t^2) \frac{\epsilon^{\frac{2}{N}}}{(1 + t^2)^{\frac{2}{N}}} + \dots \quad (3.97)$$

$$\hat{C}(1 - \epsilon) = 4 \frac{\epsilon^{\frac{2}{N}}}{(1 + t^2)^{\frac{2}{N}}} + \dots \quad (3.98)$$

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ を用いると $X = \tan^2 x$ は次のように書ける。

$$X(w) \equiv \frac{1}{2\hat{A}} \left(\hat{B} + \sqrt{\hat{B}^2 + 4\hat{A}\hat{C}} \right) \quad (3.99)$$

したがって、これを ϵ の関数で書くと

$$X(w) = \frac{t^2}{(1 + t^2)^{\frac{2}{N}}} \left(\frac{2}{1 - t^2} \right)^{2 - \frac{2}{N}} \epsilon^{\frac{2}{N}} + \dots \quad (3.100)$$

となる。よって $\epsilon \rightarrow 0$ としたとき $X(1 - \epsilon) \rightarrow 0$ となる。また a, b は X を用いて表すと

$$a = \frac{\sqrt{X}(1 - w^2 t^2)}{t(1 + X^2 w^2 t^2)} \quad (3.101)$$

$$b = \frac{(1 + X)w}{1 + Xw^2 t^2} \quad (3.102)$$

となる。したがって、 $w \rightarrow w_2$ としたときに a に関しては $a \rightarrow 0$ となる。次に b に関しては ϵ で表すと

$$b = 1 + \frac{t^2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^{\frac{2}{N}}} \left(\frac{2}{1 - t^2} \right)^{2 - \frac{2}{N}} \epsilon^{\frac{2}{N}} + \dots \quad (3.103)$$

となる。したがって、 $b \rightarrow 1$ となる。(3.101)、(3.103) を用いると $w < w_2$ に対して $\tan x > 0$ の場合に

$$\frac{a}{1 - b} \rightarrow -\infty \quad (w \uparrow w_2) \quad (3.104)$$

$$\frac{a}{1 + b} \rightarrow 0 \quad (w \uparrow w_2) \quad (3.105)$$

となる。したがって、(3.22) で定義されている **counting function** $Z(w)$ は ($w \uparrow w_2$) としたときに

$$\begin{aligned} Z(w) &\rightarrow -\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{2} \quad (w \uparrow w_2) \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

となる。 $w \rightarrow 1$ としたとき、 \sqrt{X} の極限は 0 に近づく。**counting function** $Z(w)$ は $\frac{1}{4}$ になる。この **Bethe** 量子数に対応する解は特異解に対応している。

安定領域内での $w = w_1 (0 < w_1)$ における

counting function $Z(w)$ と extra-two-string 解の出現について

Lemma 3.1.1、Lemma 3.1.2 を用いると $\hat{C}(w_1) = 0$ 、 $\hat{B}(w_1) > 0$ であるので、 $w \downarrow w_1$ と極限をとると (3.99) であることから、

$$X(w) \rightarrow \infty \quad (w \downarrow w_1) \quad (3.107)$$

となる。したがって

$$a = \frac{\sqrt{X}(1 - w^2 t^2)}{t(1 + X^2 w^2 t^2)} \rightarrow 0 \quad (w \downarrow w_1) \quad (3.108)$$

$$b = \frac{(1 + X)w}{1 + Xw^2 t^2} \rightarrow \frac{1}{w_1 t^2} > 1 \quad (w \downarrow w_1) \quad (3.109)$$

$\tan x > 0$ の場合、(3.22) より、counting function $Z(w)$ は

$$Z(w) \rightarrow 0 + 0 + \frac{1}{2} \quad (w \downarrow w_1) \quad (3.110)$$

となる。したがって

$$NZ(w_1) = \frac{N}{2} \quad (3.111)$$

となる。よって、これを満たす最大の Bethe 量子数は $J_1 = \frac{N-1}{2}$ となる。string 仮説を満たす最大の Bethe 量子数は $J_1 = \frac{N-3}{2}$ であるので、 $J_1 = \frac{N-1}{2}$ に対応する Bethe 仮説方程式の根は string 仮説で予想されない根である。この根のことを“extra-two-string 解”と命名する。安定領域においては常に最大の Bethe 量子数は $J_1 = \frac{N-1}{2}$ であるので extra-two-string 解を持つことがわかる。

不安定領域内での $w = 0$ における

counting function $Z(w = 0)$ と複素解の collapse の条件について

まず、不安定領域では $w_1 = 0$ であることを確認する。 $0 < w \ll 1$ のとき $X(w)$ を展開すると

$$X(w) = \frac{\hat{C}(w)}{|\hat{B}(w)|} + \dots = \frac{N - t^2 N_\zeta}{N_\zeta - N} + \dots \quad (3.112)$$

となる。 X は $w \rightarrow 0$ としたときに定数に収束するので、

$$b \rightarrow 0 \quad (w \rightarrow 0) \quad (3.113)$$

となる。それゆえ、counting function $Z(w)$ は、 $w \rightarrow 0$ とすると

$$\begin{aligned} Z(w) &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \left\{ 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{t} \sqrt{\frac{\hat{C}(0)}{|\hat{B}(0)|}} \right) \right\} \quad (w \rightarrow 0) \\ &= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{N - (1 + t^2)}{1 - (N - 1)t^2}} \right) \end{aligned} \quad (3.114)$$

となる。ここで $Z(0)$ を $Z_0^{(\zeta, N)}$ と表す。 $\zeta \rightarrow 0$ の極限、つまり XXX 極限について考える。このとき、

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} NZ_0^{(\zeta, N)} = \frac{N}{\pi} \tan^{-1}(\sqrt{N-1}) \quad (3.115)$$

となる。これは XXX 鎖の場合の結果と一致する。 N サイトにおける複素解が m 個 collapse する条件は

$$NZ_0^{(\zeta, N)} < \frac{N - (1 + 2m)}{2} \quad (3.116)$$

となる。また、extra-two-string 解が存在する条件は

$$\frac{N-1}{2} < NZ_0^{(\zeta, N)} \quad (3.117)$$

となる。それゆえ、次の結果が得られる。

Conjecture 1. N, ζ が

$$\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) < \frac{1 - (N-1) \tan^2\left(\pi \frac{1+2m}{2N}\right)}{(N-1) - \tan^2\left(\pi \frac{1+2m}{2N}\right)} \quad (3.118)$$

を満たすとき、 m 組の collapse が起こる。

Conjecture 2. N, ζ が

$$\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) > \frac{1 - (N-1) \tan^2\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{(N-1) - \tan^2\left(\frac{\pi}{2N}\right)} \quad (3.119)$$

を満たすとき、一組の extra-two-string 解が存在する。

Conjecture 1 と Conjecture 2 の結果を $\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right)$ とサイト数 N に関するグラフで表すと図 3.5、3.6 になる。ただし、異方性パラメータと ζ の関係は $\Delta = \cosh \zeta$ であることに注意する。また、 $N \rightarrow \infty$ と極限を取ったときを考えると (3.118) の右辺は、

$$\frac{1 - (N-1) \tan^2\left(\pi \frac{1+2m}{2N}\right)}{(N-1) - \tan^2\left(\pi \frac{1+2m}{2N}\right)} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (3.120)$$

であり、(3.119) の右辺は、

$$\frac{1 - (N-1) \tan^2\left(\frac{\pi}{2N}\right)}{(N-1) - \tan^2\left(\frac{\pi}{2N}\right)} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (3.121)$$

となる。したがって、 $N \rightarrow \infty$ とした場合には異方性パラメータが $\Delta > 0$ (すなわち $\zeta > 0$) であるときには extra-two-string 解を持つことがわかる。

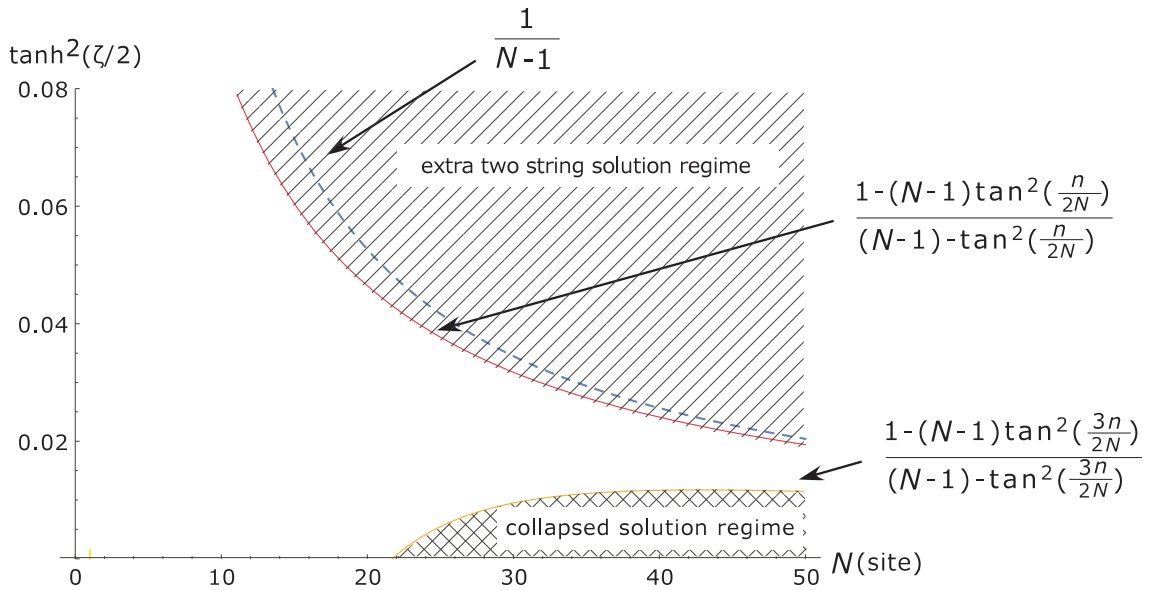


図 3.5: 縦軸を異方性に依存する $\tanh^2(\frac{\zeta}{2})$ とし、横軸をサイト数 N としたときに、得られる解の性質ごとにパラメタ領域を整理した図。赤線よりも上が extra-two-string 解が現れる領域である。また黄色線よりも下が collapse を起こす領域である。また、破線は安定領域と不安定領域の境界である。ただし、 $\Delta = \cosh(\zeta)$ であることに注意する。

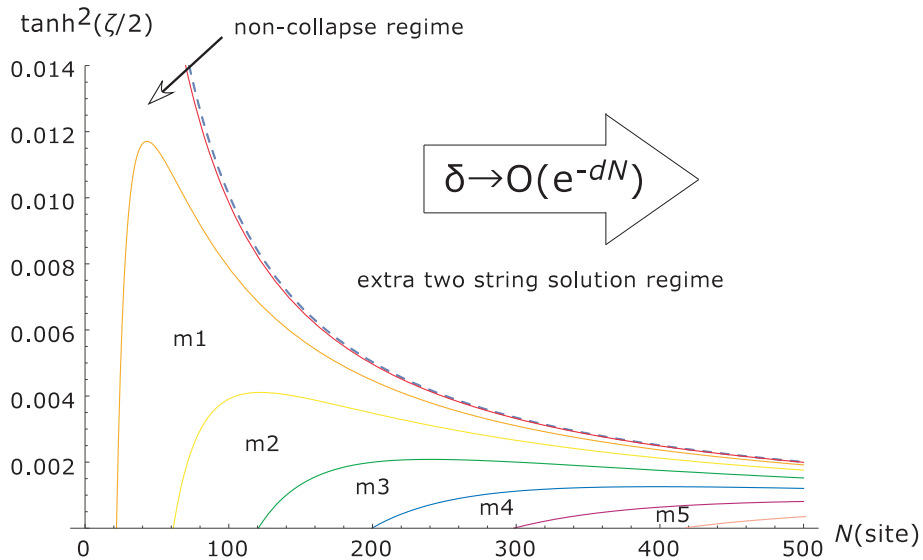


図 3.6: 縦軸を異方性に依存する $\tanh^2(\frac{\zeta}{2})$ とし、横軸をサイト数 N としたときに、得られる collapse している組の個数をパラメタ領域として整理した図。破線は安定領域と不安定領域の境界である。安定領域ではサイト数に対して指数関数的に完全 string 解に近づくことがわかる。mk となっている部分は collapse が起こっている組が k であることを表している。また、 $\Delta = \cosh(\zeta)$ であることに注意する。

Narrow pair ($w_1 < w < w_2$) の Bethe 量子数の範囲

(i) 安定領域の narrow pair の Bethe 量子数 J_1 の範囲は

$$\frac{N}{4} \leq J_1 < \frac{N}{2} \quad (\tan x > 0) \quad (3.122)$$

$$-\frac{N}{2} < J_1 \leq -\frac{N}{4} \quad (\tan x < 0) \quad (3.123)$$

となる。

(ii) 不安定領域の narrow pair の Bethe 量子数 J_1 の範囲は

$$\frac{N}{4} \leq J_1 \leq \frac{N}{\pi} \tan\left(\sqrt{\frac{N-(1+t^2)}{1-(N-1)t^2}}\right) \quad (\tan x > 0) \quad (3.124)$$

$$-\frac{N}{\pi} \tan\left(\sqrt{\frac{N-(1+t^2)}{1-(N-1)t^2}}\right) \leq J_1 \leq -\frac{N}{4} \quad (\tan x < 0) \quad (3.125)$$

となる。

3.3.2 Wide pairs ($w_2 < w < w_3$)

本節では wide pairs ($w_2 < w < w_3$) の場合の counting function $Z(w)$ について調べる。

$w = w_3$ 上での counting function $Z(w)$ について

Lemma3.1.1 より $\hat{C}(w_3) > 0$ であることを確認する。また $\hat{B}(w_3) > 0$ であることに注意する。このとき、 $w \uparrow w_3$ とすると、 $\hat{A}(w) \rightarrow 0$ となるので、式 (3.99) より、 $X(w)$ は ($w \uparrow w_3$) と極限を取ると

$$X(w) \rightarrow \infty \quad (w \uparrow w_3) \quad (3.126)$$

となり、 $+\infty$ に発散する。それゆえ w の関数 a と関数 b は、

$$a \rightarrow 0 \quad (w \uparrow w_3) \quad (3.127)$$

$$b \rightarrow \frac{1}{w_3 t^2} > 1 \quad (w \uparrow w_3) \quad (3.128)$$

となる。したがって N を大きくすると w_3 は指数関数的に 1 に近づく。それゆえ (3.22) より

$$Z(w) \rightarrow 0 + 0 + \pi\left(1 - \frac{1}{N}\right) \quad (w \rightarrow 1) \quad (3.129)$$

となる。したがって $NZ(w_3)$ は

$$NZ(w_3) = \frac{N-1}{2} \quad (3.130)$$

となる。これは w を w_3 へ極限を取ったときの値なので wide pairs の最大 Bethe 量子数は $J_1 = \frac{N-3}{2}$ となる。

極限 $w \downarrow w_2$ を取ったときの counting function $Z(w)$ について

w が 1 の近傍であるとしたときの ϵ を $\epsilon \equiv w - 1$ と定義する。このときに \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} 、を ϵ について次のように展開する。

$$\hat{A}(1 + \epsilon) = 4 \left(\frac{1 - t^2}{2} \right)^{2 - \frac{2}{N}} - (1 + t^2)^{2 - \frac{2}{N}} \epsilon^{\frac{2}{N}} + \dots \quad (3.131)$$

$$\hat{B}(1 + \epsilon) = -\frac{4}{t^2} \left(\frac{1 - t^2}{2} \right)^{2 - \frac{2}{N}} + (t^{-2} + 2 + 5t^2) \frac{\epsilon^{\frac{2}{N}}}{(1 + t^2)^{\frac{2}{N}}} + \dots \quad (3.132)$$

$$\hat{C}(1 + \epsilon) = 4 \frac{\epsilon^{\frac{2}{N}}}{(1 + t^2)^{\frac{2}{N}}} + \dots \quad (3.133)$$

(3.99) から、 $X(w)$ は次のように展開できる。

$$X(w) = \frac{t^2}{(1 + t^2)^{\frac{2}{N}}} \left(\frac{2}{1 - t^2} \right)^{2 - \frac{2}{N}} \epsilon^{\frac{2}{N}} + \dots \quad (3.134)$$

それゆえ、 $\epsilon \rightarrow 0$ としたとき $X(1 + \epsilon) \rightarrow 0$ となることがわかる。加えて、 b については

$$b = 1 + \frac{t^2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^{\frac{2}{N}}} \left(\frac{2}{1 - t^2} \right)^{2 - \frac{2}{N}} \epsilon^{\frac{2}{N}} + \dots \quad (3.135)$$

となる。したがって $0 < \epsilon \ll 1$ としたときには $b > 0$ となる。(3.134) を用いて $X(1 + \epsilon)$ を展開すると

$$\frac{a}{1 - b} \rightarrow -\infty \quad (\epsilon \downarrow 0) \quad (3.136)$$

$$\frac{a}{1 + b} \rightarrow 0 \quad (\epsilon \downarrow 0) \quad (3.137)$$

となる。したがって ($w_2 < w < w_3$) に対する $NZ(w_2)$ は

$$\begin{aligned} NZ(w) &\rightarrow -\frac{N}{4} + 0 + \frac{N}{2} \left(1 - \frac{1}{N} \right) \quad (w \downarrow w_2) \\ &= \frac{N}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.138)$$

となる。

Wide pair ($w_2 < w < w_3$) の Bethe 量子数の範囲

ここで、wide pair に関する解析結果を Bethe 量子数の範囲を用いてまとめる。Counting function $Z(w)$ の各値と単調性から wide pair の複素解に対応する Bethe 量子数は次の不等式を満たすものになる。

$$\frac{N}{4} - \frac{1}{2} \leq J_1 < \frac{N - 1}{2} \quad (\tan x > 0) \quad (3.139)$$

$$-\frac{N + 1}{2} < J_1 \leq -\frac{N}{4} - \frac{1}{2} \quad (\tan x < 0) \quad (3.140)$$

次に $NZ(w)$ の $w = w_2 = 1$ への右側極限と左側極限は値が異なることをについて注意して、このときの各値をそれぞれ調べる。

(i) $\delta > 0$ の条件下で δ を 0 に近づけたとき: $\delta \downarrow 0$

$$NZ(w_2) = \frac{N}{4} - \frac{1}{2} \quad (w \downarrow w_2) \quad (3.141)$$

となる。特異解は整数 n に対してサイト数が $N = 4n$ となるときに対応する。

(ii) $\delta < 0$ の条件下で δ を 0 に近づけたとき: $\delta \uparrow 0$

$$NZ(w_2) = \frac{N}{4} \quad (w \uparrow w_2) \quad (3.142)$$

となる。特異解は整数 n に対してサイト数が $N = 4n + 2$ となるときに対応する。

3.3.3 特異解に対する量子数について

Two-down-spin sector では特異解は $\delta = 0$ かつ $x = 0$ であることであり、これは $w = 1$ であるときに対応することを §3.1.1 の最後で確認した。したがって、 $J_1 = Z(w = 1)$ となるときに J_1 が特異解に対応する Bethe 量子数となる。

(3.141)、(3.142) より、 n を自然数とし、サイト数が $N = 4n$ であるとき、特異解に対応する Bethe 量子数は $(J_1, J_2) = \left(\frac{N}{4} - \frac{1}{2}, \frac{N}{4} + \frac{1}{2}\right)$ と $(J_1, J_2) = \left(-\frac{N}{4} - \frac{1}{2}, -\frac{N}{4} + \frac{1}{2}\right)$ となる。同様にサイト数が $N = 4n + 2$ であるとき特異解に対応する Bethe 量子数は $(J_1, J_2) = \left(\frac{N}{4}, \frac{N}{4}\right)$ と $(J_1, J_2) = \left(-\frac{N}{4}, -\frac{N}{4}\right)$ となる。

3.4 複素根のサイト数 N に対して指数関数的に完全 string 解に近づくことについて

この章では $N \rightarrow \infty$ としたときに Bethe 根が完全 string 解に近づくことについて考える。massive-XXZ 鎖の two-down-spin sector における完全 string 解は

$$\lambda_j = x + \frac{1}{2}(2 + 1 - 2j)\zeta i, \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.143)$$

であることに注意する。したがってこの場合に完全 string 解に近づくということは

$$\lambda_j = x + \frac{1}{2}(2 + 1 - 2j)\zeta i + O(\exp(-dN)), \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.144)$$

ということになる。ただし $d > 0$ とする。それゆえ、 N に関する極限をとると Bethe 根は指数関数的に 0 に近づくことを意味する。この形は string 仮説が要求する形を満たしている。

3.4.1 関数 f と g の定義とそれらに関する二つの Lemma

本節では複素解が指数関数的に完全 string 解に近づくことを示すための準備を行う。
 $f^{(N,\zeta)}(w), g^{(N,\zeta)}(w)$ について次のように定義する。

$$f^{(N,\zeta)}(w) \equiv \left\{ \left(\frac{1+wt^2}{1-wt^2} \right)^2 \right\}^{1-\frac{1}{N}} \quad (3.145)$$

$$g^{(N,\zeta)}(w) \equiv \left\{ \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{N}} \quad (3.146)$$

このとき w に関する方程式 $\tilde{A}(w) = 0$ と w に関する方程式 $f^{(N,\zeta)}(w) = g^{(N,\zeta)}(w)$ は同値の方程式である。加えて、 $0 < w < \frac{1}{t}$ の領域上で $\tilde{A}(w) < 0$ と $f^{(N,\zeta)}(w) > g^{(N,\zeta)}(w)$ は同値である。

Lemma 3.4.1. $N_2 > N_1 (> 1)$ を満たす整数に対して、

$$g^{(N_1,\zeta)}(w) > g^{(N_2,\zeta)}(w) \quad (0 < w < 1 \text{ または } 1 < w < \frac{1}{t}) \quad (3.147)$$

となる。

Proof. 次の不等式

$$\left(\frac{1+w}{1-w} \right)^2 > 1 \quad (3.148)$$

が成り立つので $g^{(N_1,\zeta)}(w)$ の定義 (3.146) より明らか。 \square

Lemma 3.4.2. $N_2 > N_1 (> 1)$ を満たす二つの整数 N_1, N_2 に対して、

$$f^{(N_2,\zeta)}(w) > f^{(N_1,\zeta)}(w) \quad (1 < w < \frac{1}{t}) \quad (3.149)$$

となる

Proof. 次の不等式

$$\left(\frac{1+wt^2}{1-wt^2} \right)^2 > 1 \quad (3.150)$$

が成り立つので $f^{(N_2,\zeta)}(w)$ の定義 (3.145) より明らかである。 \square

3.4.2 $0 < w < 1$ の領域での N を大きくしたときの完全 string 解とのずれの振る舞いについて

安定領域の narrow pair について考える。まず整数 N_1, N_2 を $N_2 > N_1 > 1$ を満たすように固定する。 w_1 を w が方程式 $\tilde{A}(w) = 0$ を満たすように定義したことを思い出す。§3.2.1 で w_1 が一意であることは確認した。サイト数が N_1 のときに $\tilde{A}(w) = 0$ は $f^{(N_1,\zeta)}(w) = g^{(N_1,\zeta)}(w)$

と表せることに注意する。\$y = f^{(N_1, \zeta)}(w)\$、\$y = g^{(N_1, \zeta)}(w)\$ の交点を \$\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, \zeta)}\$ と表す。このとき \$K^{(N_1, \zeta)}\$ を次のように定義する。

$$K^{(N_1, \zeta)} \equiv f^{(N_1, \zeta)}(\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, \zeta)}) \left(= g^{(N_1, \zeta)}(\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, \zeta)}) \right) \quad (3.151)$$

ここで \$K^{(N_1, \zeta)}\$ は \$w\$ に関して定数関数で \$y = g^{(N_2, \zeta)}(w)\$ は \$w = 1\$ で発散する増加関数であることに注意する。次に \$\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, N_2, \zeta)}\$ を \$y = K^{(N_1, \zeta)}\$ と \$y = g^{(N_2, \zeta)}(w)\$ の交点と定義する。ここで次の不等式が成り立つことに注意する。

$$\frac{1+z}{1-z} > \exp(2z) \quad (-1 < z < 1) \quad (3.152)$$

\$K^{(N_1, \zeta)}\$ に対して上記の不等式を用いて評価する。

$$K^{(N_1, \zeta)} = f^{(N_1, \zeta)}(\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, \zeta)}) \quad (3.153)$$

$$= \left(\frac{1 + \tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, \zeta)} t^2}{1 - \tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, \zeta)} t^2} \right)^{2 - \frac{2}{N_1}} > \exp\left(4\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, \zeta)} t^2 \left(1 - \frac{1}{N_1}\right)\right) \quad (3.154)$$

また、\$N_2\$ が十分大きいときに \$\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, N_2, \zeta)}\$ を \$N_2\$ の関数として表すと、

$$\begin{aligned} g^{(N_2, \zeta)}(\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, N_2, \zeta)}) &= K^{(N_1, \zeta)} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1 + \tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, N_2, \zeta)}}{1 - \tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, N_2, \zeta)}} \right) &= (K^{(N_1, \zeta)})^{\frac{N_2}{2}} \\ \Leftrightarrow \tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, N_2, \zeta)} &= \frac{1 - (K^{(N_1, \zeta)})^{-\frac{N_2}{2}}}{1 + (K^{(N_1, \zeta)})^{-\frac{N_2}{2}}} < 1 - 2 \exp(-\alpha(N_1, \zeta) N_2) \end{aligned} \quad (3.155)$$

となる。ただし、\$\alpha(N_1, \zeta)\$ を

$$\alpha(N_1, \zeta) = 2\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, \zeta)} \left(1 - \frac{1}{N_1}\right) t^2 \quad (3.156)$$

とする。したがって、\$N_2\$ を大きくしていくと \$\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, N_2, \zeta)}\$ が指数関数的に 1 に近づくことがわかる。

\$g^{(N, \zeta)}(w)\$ と \$f^{(N, \zeta)}(w)\$ がともに \$w\$ に関して単調増加であることと、Lemma 3.4.2 から \$\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, \zeta)} < w < 1\$ を満たす \$w\$ に対して

$$K^{(N_1, \zeta)} < f^{(N_1, \zeta)}(w) < f^{(N_2, \zeta)}(w) \quad (3.157)$$

が成り立つ。またこの不等式と Lemma 3.4.1、\$g^{(N, \zeta)}(w)\$ が \$w\$ に関して単調増加であることをあわせると、

$$\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, N_2, \zeta)} < \tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_2, \zeta)} \quad (3.158)$$

であることがわかる。したがって、\$\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_1, N_2, \zeta)}\$ が \$N_2\$ を大きくしたときに指数関数的に 1 に近づくので \$\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N_2, \zeta)}\$ も \$N_2\$ を大きくしたときに指数関数的に 1 に近づくことがわかる。

次に \$N\$ が大きいときの \$\alpha(N, \zeta)\$ の振る舞いを調べる。\$N'\$ を \$N\$ より大きい整数とすると \$\alpha(N', \zeta)\$ の値は \$\alpha(N, \zeta)\$ に比べて \$2t^2\$ に近づく。したがって、\$N \to \infty\$ としたときに、\$\alpha(N, \zeta)\$ の値は \$2t^2\$ に近づくと予想する。すなわち、\$N \to \infty\$ としたときに \$\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N, \zeta)} \left(1 - \frac{1}{N}\right)\$ は 1 に近づく。したがって、\$N\$ が十分大きいときに \$\tilde{w}_{\text{fg}}^{(N, \zeta)} < 1 - 2 \exp(-2t^2 N)\$ となる。

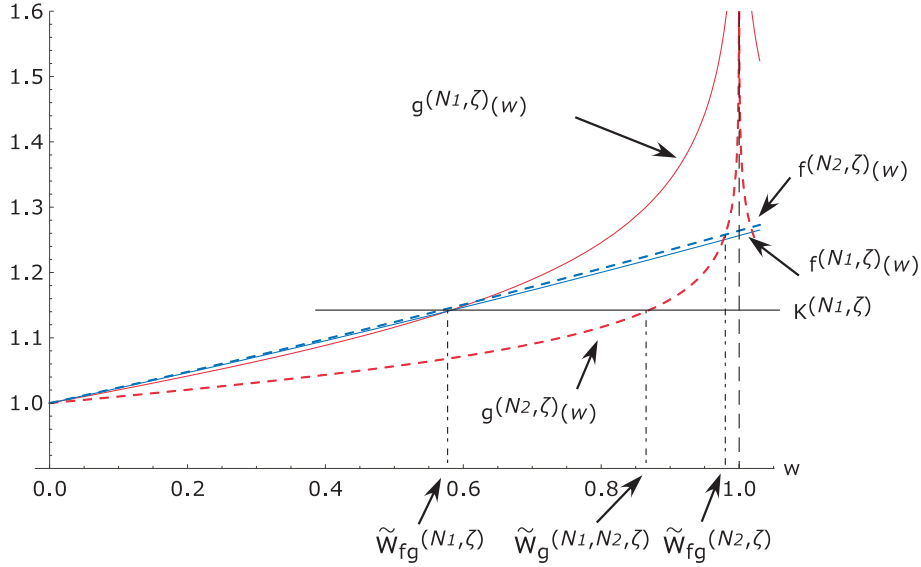


図 3.7: Narrow pair に関して $0 < w < 1$ において、安定領域の Bethe 仮説方程式の解が指数関数的に完全 string 解に近づくことを証明するための補助図であり、以下の関係が見て取れる。 $f^{(N_2, \zeta)}$ と $g^{(N_2, \zeta)}$ の交点 $\tilde{w}_{fg}^{(N_2, \zeta)}$ は $f^{(N_1, \zeta)}$ と $g^{(N_1, \zeta)}$ の交点 $\tilde{w}_{fg}^{(N_1, \zeta)}$ よりも 1 に近いことが見て取れる。

3.4.3 $1 < w < \frac{1}{t}$ の領域での N を大きくしたときの完全 string 解とのずれの振る舞いについて

Wide pair の場合について考える。 N_1, N_2 を $N_2 > N_1 > 1$ を満たす整数とする。 $K_1^{(N, \zeta)}$ を次のように定義する。

$$K_1^{(N, \zeta)} \equiv f^{(N, \zeta)}(w = 1). \quad (3.159)$$

まず $y = K_1^{(N_1, \zeta)}$ と $y = g^{(N_2, \zeta)}(w)$ の二つのグラフの交点を考える。 $K_1^{(N_1, \zeta)}$ は定数関数であり、 $g^{(N_2, \zeta)}(w)$ は w に関して単調減少であり、 $w = 1$ で発散する。したがって、交点は必ず一意に存在する。その交点を $w_g^{(N_1, N_2, \zeta)}$ と表す。次に $y = f^{(N_2, \zeta)}(w)$ と $y = g^{(N_2, \zeta)}(w)$ の二つのグラフについて考える。 $1 < w < \frac{1}{t}$ の領域では $y = f^{(N_2, \zeta)}(w)$ は w に関して単調減少であり、一方で $y = g^{(N_2, \zeta)}(w)$ は w に関して単調増加である。それゆえ、明らかに交点を持ちその交点を $w_{fg}^{(N_2, \zeta)}$ とする。次に Lemma 3.4.2 より、

$$K_1^{(N_1, \zeta)} = f^{(N_1, \zeta)}(w = 1) < K_1^{(N_2, \zeta)} = f^{(N_2, \zeta)}(w = 1) \quad (3.160)$$

であることがわかる。 $f^{(N_2, \zeta)}(w)$ は単調増加なので、

$$f^{(N_2, \zeta)}(w = 1) < f^{(N_2, \zeta)}(w_{fg}^{(N_2, \zeta)}) = g^{(N_2, \zeta)}(w_{fg}^{(N_2, \zeta)}) \quad (3.161)$$

となる。この不等式と $g^{(N_2, \zeta)}(w)$ が単調減少であることから

$$1 < w_{\text{fg}}^{(N_2, \zeta)} < w_{\text{g}}^{(N_1, N_2, \zeta)} \quad (3.162)$$

となることがわかる。 $g^{(N_2, \zeta)}(w_{\text{g}}^{(N_1, N_2, \zeta)})$ に着目する。 $w_{\text{g}}^{(N_1, N_2, \zeta)}$ を次のように表す。

$$\begin{aligned} g^{(N_2, \zeta)}(w_{\text{g}}^{(N_1, N_2, \zeta)}) &= K_1^{(N_1, \zeta)} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{w_{\text{g}}^{(N_1, N_2, \zeta)} + 1}{w_{\text{g}}^{(N_1, N_2, \zeta)} - 1} \right)^2 &= (K_1^{(N_1, \zeta)})^{N_2} \\ \Leftrightarrow w_{\text{g}}^{(N_1, N_2, \zeta)} &= \frac{1 + (K_1^{(N_1, \zeta)})^{-N_2/2}}{1 - (K_1^{(N_1, \zeta)})^{-N_2/2}} \\ &< 1 + 2(K_1^{(N_1, \zeta)})^{-N_2/2} \end{aligned} \quad (3.163)$$

不等式 (3.150) に $K_1^{(N, \zeta)}$ を代入すると

$$K_1^{(N, \zeta)} = f^{(N, \zeta)}(w = 1) \quad (3.164)$$

$$= \left(\frac{1 + t^2}{1 - t^2} \right)^{2 - \frac{2}{N_1}} > \exp\left(4t^2\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right) \quad (3.165)$$

したがって、

$$w_{\text{g}}^{(N_1, N_2, \zeta)} < 1 + 2 \exp\left(-2t^2\left(1 - \frac{1}{N_1}\right)N_2\right) \quad (3.166)$$

となる。 $N_2 \rightarrow \infty$ とすると $w_{\text{g}}^{(N_1, N_2, \zeta)}$ は指数関数的に 1 に収束することと (3.162) より $N_2 \rightarrow \infty$ としたときに $w_{\text{fg}}^{(N_2, \zeta)}$ は指数関数的に 1 に近づくことがわかる。

それゆえ、この解は two-down-spin sector において string 仮説が要請する解の形

$$\lambda_1 = x + \frac{i}{2}\zeta + iO(\exp(-dN)) \quad (3.167)$$

$$\lambda_2 = x - \frac{i}{2}\zeta + iO(\exp(-dN)) \quad (3.168)$$

を満たすことがわかる。

3.5 Bethe 量子数の XXX/XXZ 対応

この章では XXX 鎖と XXZ 鎖の Bethe 量子数の間の対応について調べる。XXX 鎖の場合は SU(2) 対称性があるが、XXZ 鎖の場合は SU(2) 対称性がないので解の個数が XXX 鎖に比べて多い。ここで、XXZ 鎖で XXX 極限を取ったときに有限の値が残る解と発散する解が存在することに注意する。XXX 鎖に関しては two-down-spin sector における解の完全性が証明されている [27]。この事実を用いて XXX 極限 $\zeta \rightarrow 0$ を取ったときに有限の Bethe 仮説方程式の解について two-down-spin sector で XXZ 鎖の発散しない解が異なる Bethe 量子数の場合に異なる Bethe 仮説方程式の解を取ることを示す。

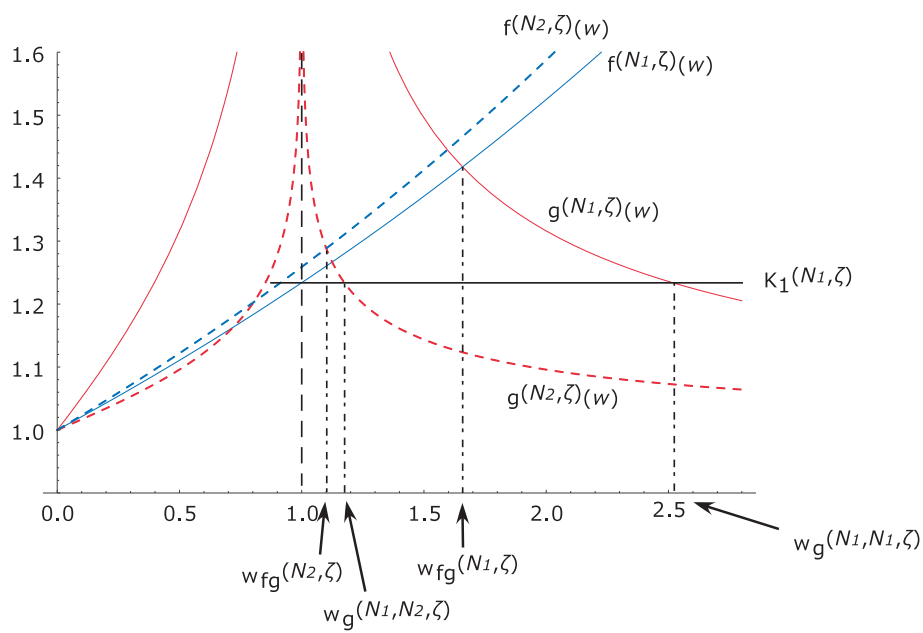


図 3.8: Wide pair に関して $1 < w < \frac{1}{f}$ において、安定領域の Bethe 仮説方程式の解が指数関数的に完全 string 解に近づくことを証明するための補助図であり、以下の関係が見て取れる。 $0 < N_1 < N_2$ に対して $f^{(N_2, \zeta)}$ と $g^{(N_2, \zeta)}$ の交点 $w_{fg}^{(N_2, \zeta)}$ は $f^{(N_1, \zeta)}$ と $g^{(N_1, \zeta)}$ の交点 $w_{fg}^{(N_1, \zeta)}$ よりも 1 に近いことが見て取れる。

まず、spin-1/2 XXX 鎖 ($\Delta = 1$) の M -down-spin sector の Bethe 仮説方程式は

$$2 \tan^{-1}(2\lambda_i) = \frac{2\pi}{N} J_i + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M 2 \tan^{-1}(\lambda_i - \lambda_k) \quad (3.169)$$

$$J_i \equiv \frac{1}{2}(N - M + 1) \pmod{1} \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (3.170)$$

となる。これ以降では $M = 2$ の場合を考える。XXZ 鎖の Bethe 根 λ_1, λ_2 をそれぞれ ζ で割ったものを次のように定義する。

$$\bar{\lambda}_1 \equiv \frac{\lambda_1}{\zeta}, \quad \bar{\lambda}_2 \equiv \frac{\lambda_2}{\zeta} \quad (3.171)$$

この関係から $\lambda_1 = \zeta \bar{\lambda}_1, \lambda_2 = \zeta \bar{\lambda}_2$ となる。これを Bethe 仮説方程式 (3.5) にそれぞれ代入する。まず、左辺に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\tan(\lambda_1)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} &= \frac{\tan(\zeta \bar{\lambda}_1)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \\ &\approx \frac{(\zeta \bar{\lambda}_1) + \frac{1}{3}(\zeta \bar{\lambda}_1)^3}{(\frac{\zeta}{2}) - \frac{1}{3}(\frac{\zeta}{2})^3} \\ &\approx 2\bar{\lambda}_1 + \frac{2}{3}(\bar{\lambda}_1)^3 \zeta^2 \quad (\zeta \ll 1) \end{aligned} \quad (3.172)$$

となる。次に Bethe 仮説方程式 (3.5) の右辺の主要な部分に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\tan(\lambda_1 - \lambda_2)}{\tanh(\zeta)} &= \frac{\tan(\zeta(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2))}{\tanh(\zeta)} \\ &\approx \frac{\zeta(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) + \frac{1}{3}\zeta^3(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^3}{\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3} \\ &\approx (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) + \frac{1}{3}(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^3 \zeta^2 \quad (\zeta \ll 1) \end{aligned} \quad (3.173)$$

となる。(3.172)、(3.173) を (3.5) に代入すると Bethe 仮説方程式は

$$2 \tan^{-1}\left(2\bar{\lambda}_1 + \frac{2}{3}\bar{\lambda}_1^3 \zeta^2\right) = \frac{2\pi}{N} J_1 + \frac{2}{N} \tan^{-1}\left((\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) + \frac{1}{3}(\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^3 \zeta^2\right) \quad (3.174)$$

となる。 $\zeta \rightarrow 0$ の極限で (3.171) の $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ が発散せず、有限の値に収束するとき、Bethe 仮説方程式 (3.174) は XXX 鎖の Bethe 仮説方程式に収束する。

よって、XXX 極限で発散しない場合、同じ Bethe 量子数の組である場合には同じ Bethe 仮説方程式の解に収束することがわかる。XXX 鎖の場合には [27] より異なる Bethe 量子数の場合に異なる Bethe 仮説方程式の解を取ることを示されている。したがって、 $\zeta \rightarrow 0$ の極限を取ったときに有限になる XXZ 鎖の Bethe 仮説方程式の解について考えると、異なる Bethe 量子数の場合に異なる Bethe 仮説方程式の解を取ることがわかる。

3.6 数値計算

本章では、ここまでの解析的な結果を佐藤氏による数値計算と比較して確認する。まず、§3.6.1 ではサイト数 $N = 1000$ と固定し異方性パラメータを動かしたときの Bethe 根の振

る舞いを確認する。特に collapse の個数について比較する。次に §3.6.2 では異方性パラメータ $\Delta = 1.001$ と固定しサイト数を $N = 1000, 2000, 3000, 6000$ としたときの Bethe 根の振る舞いを確認する。こちらは特に collapse の個数の比較とサイト数 N を大きくしたときに指数関数的に完全 string 解に近づくことを確認する。最後に §3.6.3 では Bethe 量子数から two-down-spin sector の Bethe 仮説方程式の複素解を具体的に求め、特に特異解と extra-two-string 解が存在することが確認された。

3.6.1 異方性パラメータ Δ を動かしたときの振る舞い

サイト数を $N = 1000$ としたときに異方性パラメータ Δ を $\Delta = 1.001, 1.01, 1.1, 2$ としたときのそれぞれ Bethe 根についての数値計算の結果が図 3.6.1 である。 Δ が大きくなるにつれて、数値解が完全 string 解に近づいていることがわかる。また解析的に調べた collapse した解の個数 n_{collapse} と、数値計算から求めた collapse した解の個数 n_{collapse} を具体的に比較する。 n_{collapse} は Conjecture 1 では m に対応することに注意する。まず、この場合に解析的な方法で collapse した解の個数を調べる。§3.3.1 の Conjecture 1 を変形すると次のようになる。

$$n_{\text{collapse}} < \frac{N}{\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 - (N-1)t^2}{N-1-t^2}} \right) - \frac{1}{2} \quad (3.175)$$

異方性パラメータを $\Delta = 1.001$ としたとき、不等式 (3.175) の右辺は $6.6253\dots$ となるので不等式 (3.175) を満たす最大の整数 n_{collapse} は 6 である。したがって六個のペアの複素解が collapse することがわかる。これに対しても、数値的に得られた結果においても、 $\Delta = 1.001$ としたときの collapse している解の個数は六個であることがわかる。したがって、解析的に求められた結果と数値計算の結果が一致していることが確認された。

3.6.2 サイト数 N を動かしたときの振る舞い

異方性パラメータ Δ を $\Delta = 1.001$ として $N = 1000, 2000, 3000, 6000$ としたときのそれぞれの Bethe 根についての数値計算の結果が図 3.6.2 である。この図を見ると、 N を大きくしていくと Bethe 根が完全 string 解に近づくことが確認できる。 $N = 1000$ の場合については前節 §3.6.1 の $\Delta = 1.001$ と同じものを示している。次に $N = 2000$ のときの collapse する個数を解析的に調べて数値計算と比較する。先ほどと同様に Conjecture 1 を変形すると次のようになる。

$$n_{\text{collapse}} < \frac{N}{\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 - (N-1)t^2}{N-1-t^2}} \right) - \frac{1}{2} \quad (3.176)$$

このときの右辺は $-0.049841\dots$ となる。したがって (3.176) を満たす自然数 n_{collapse} は存在しないので collapse はおこらない。一方、数値計算の $N = 2000$ と注目すると実軸上に Bethe 根は存在しないが、これは実際に、collapse がおこらないことを表している。したがって、両者の結果は一致していることが確認できた。

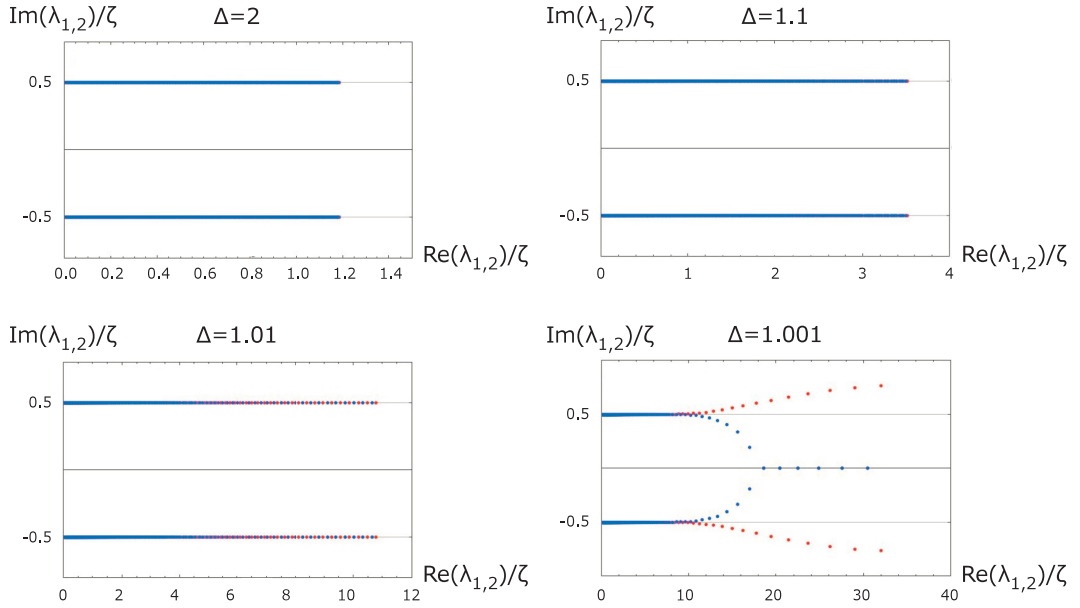


図 3.9: 縦軸は two-string 解の虚部を異方性 ζ で割ったものを表している。横軸は two-string 解の実部を異方性 ζ で割ったものを表している。異方性パラメータ Δ は 2, 1.1, 1.01, 1.001、サイト数 N は 1000 である。また Δ と ζ の関係が $\Delta = \cosh(\zeta)$ であることに注意する。

3.6.3 XXZ 鎖の解の具体例

本節ではサイト数 $N = 12$ 、異方性パラメータを $\Delta = \cosh \zeta$ とし ζ が $\zeta = 0.6$ のときの two-down-spin sector の massive-XXZ 鎖の複素解と対応するエネルギーを具体的に紹介する (文献 [86] 佐藤氏による)。このパラメータ領域では、extra-two-string 解が出現することを §3.3.1 で解析的に示したが、数値解析からも、実際にこの解が存在することがわかる。表 3.1 の中で、No.1 と No.6 の解が extra-two-string 解に相当する解であり、string 仮説では予言されない解である。また No.9 の解は特異解に相当する解である。

具体的に $N = 12$ 、 $\zeta = 0.6$ の場合の解の個数を §3.3 の方法を用いて確認する。

まず、wide pair の場合を考える。このとき、Bethe 量子数の最大値、最小値は (3.139)、(3.140) より

$$\frac{N}{4} - \frac{1}{2} \leq J_1 < \frac{N-1}{2} \quad (\tan x > 0) \quad (3.177)$$

$$-\frac{N+1}{2} < J_1 \leq -\frac{N}{4} - \frac{1}{2} \quad (\tan x \leq 0) \quad (3.178)$$

の間であることを思い出す。 $x > 0$ の場合は $\frac{N-1}{2} = \frac{11}{2}$ となるので J_1 の最大の値は $J_1 = \frac{9}{2}$ となる。一方、最小の値は $\frac{N}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ となる。wide pair の場合は $J_2 = J_1 + 1$ なので、

$$(J_1, J_2) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right), \left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right) \quad (3.179)$$

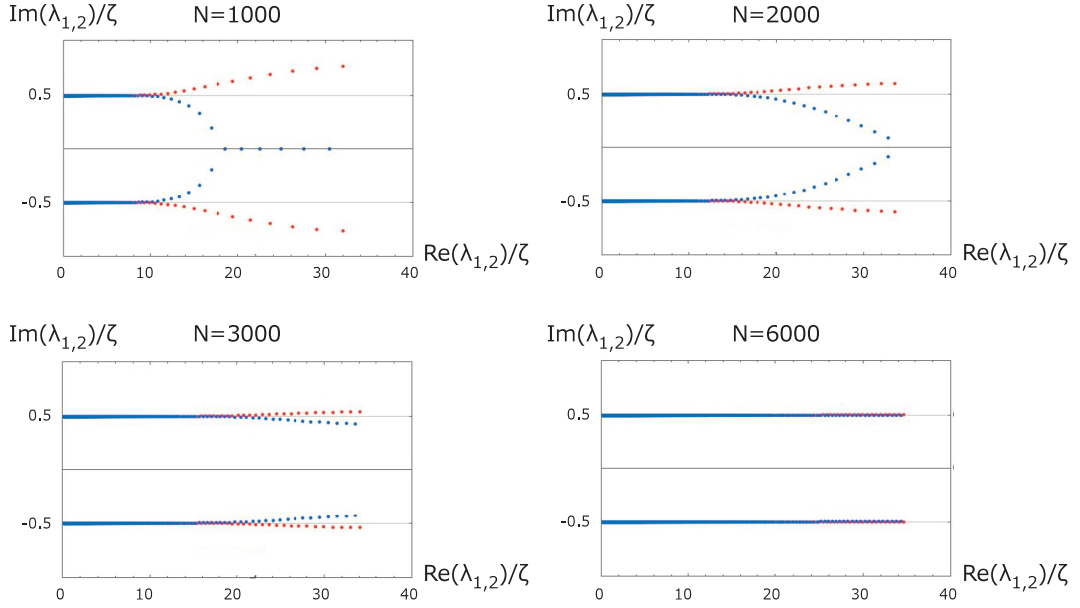


図 3.10: 縦軸は two-string 解の虚部を異方性 ζ で割ったものを表している。横軸は two-string 解の実部を異方性 ζ で割ったものを表している。異方性パラメータ Δ は 1.001、サイト数 N は 1000, 2000, 3000, 6000 である。また Δ と ζ の関係が $\Delta = \cosh(\zeta)$ であることに注意する。

となる。ただし、 $(J_1, J_2) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ は特異解に対応する。

逆に、 $x < 0$ の場合は $\frac{N+1}{2} = \frac{13}{2}$ なので J_1 の最小の値は $J_1 = -\frac{11}{2}$ となる。一方、最大の値は $-\frac{N}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ となる。ここでも $J_2 = J_1 + 1$ なので、

$$(J_1, J_2) = \left(-\frac{11}{2}, -\frac{9}{2}\right), \left(-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right), \left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right) \quad (3.180)$$

となる。ただし、 $(J_1, J_2) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ は特異解に対応する。よって、 $(J_1, J_2) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ と同じ Bethe 仮説方程式の解を表す。

次に narrow pair の場合を考える。まず、

$$N_\zeta = 1 + \frac{1}{\tanh^2(\frac{\zeta}{2})} \approx 12.7836 > N (= 12) \quad (3.181)$$

なので不安定領域である (N_ζ と安定領域、不安定領域の関係は図 3.6.3 を参照)。したがって、Bethe 量子数の範囲は

$$\frac{N}{4} \leq J_1 \leq \frac{N}{\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{N - (1+t^2)}{1 - (N-1)t^2}} \right) \quad (\tan x > 0) \quad (3.182)$$

$$-\frac{N}{\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{N - (1+t^2)}{1 - (N-1)t^2}} \right) \leq J_1 \leq -\frac{N}{4} \quad (\tan x < 0) \quad (3.183)$$

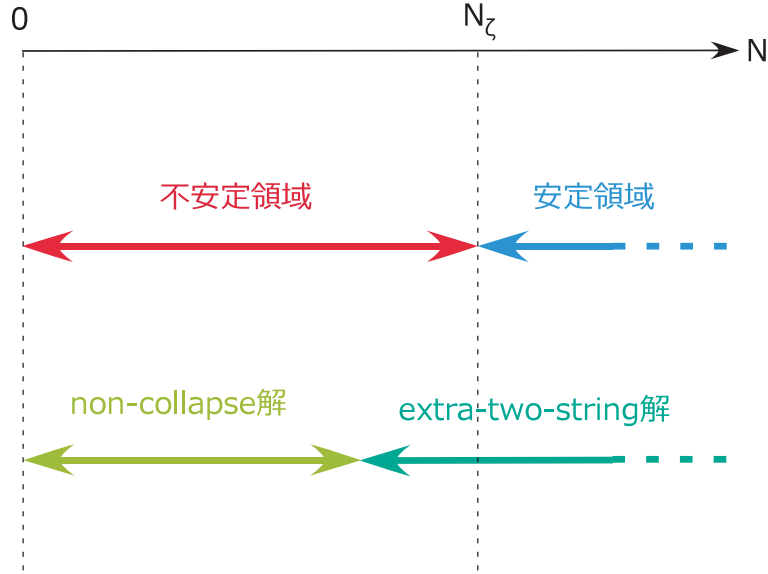


図 3.11: $\zeta = 0.6$ の場合のサイト数 N に対する安定、不安定領域の変化及び、non-collapse、extra-two-string 解領域の変化を表している。 N_ζ は安定領域と不安定領域の境目の値になり、 $N > N_\zeta$ のときに安定領域になる。

となる。まず、 $x > 0$ の場合を考える。 $\frac{N}{\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{N - (1 + t^2)}{1 - (N - 1)t^2}} \right) \approx 5.70244$ なので、Bethe 量子数の最大値は $\frac{11}{2}$ となる。また、 $\frac{N}{4} = 3$ なので最小の値は $\frac{7}{2}$ となる。Narrow pair では $J_1 = J_2$ なので Bethe 量子数は

$$(J_1, J_2) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right), \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2} \right), \left(\frac{11}{2}, \frac{11}{2} \right) \quad (3.184)$$

となる。ここで、 $\left(\frac{11}{2}, \frac{11}{2} \right)$ が extra-two-string 解に対応している。

次に、 $x < 0$ の場合を考えると $-\frac{N}{\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{N - (1 + t^2)}{1 - (N - 1)t^2}} \right) \approx -5.70244$ となるので最小の値は $-\frac{11}{2}$ となる。一方で、 $-\frac{N}{4} = -3$ なので、最大の値は $-\frac{7}{2}$ となる。この場合の Bethe 量子数は

$$(J_1, J_2) = \left(-\frac{11}{2}, -\frac{11}{2} \right), \left(-\frac{9}{2}, -\frac{9}{2} \right), \left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{2} \right) \quad (3.185)$$

となり、 $\left(-\frac{11}{2}, -\frac{11}{2} \right)$ が extra-two-string 解に対応している。

表 3.1: サイト数 $N = 12$ 、異方性 $\zeta = 0.6$ ($\Delta = \cosh \zeta$) の two-down-spin sector の Bethe 仮説方程式の複素解の一覧。No.1 と No.6 の解が extra-two-string 解であり、No.9 の解が特異解である。特異解に対応するエネルギー固有値は付録 §F.2 を用いて求めた。

No.	J	λ	Energy
1	11/2	$1.13537646891480325577+0.16312176718062221300i$	-0.42692157141886207577
	11/2	$1.13537646891480325577-0.16312176718062221300i$	
2	9/2	$0.49443316603739513350+0.29840352572689955991i$	-0.76659148423211189359
	9/2	$0.49443316603739513350-0.29840352572689955991i$	
3	7/2	$0.14292089534049196825+0.29999999114716871863i$	-1.12895830143233665108
	7/2	$0.14292089534049196825-0.29999999114716871863i$	
4	-7/2	$-0.14292089534049196825+0.29999999114716871863i$	-1.12895830143233665108
	-7/2	$-0.14292089534049196825-0.29999999114716871863i$	
5	-9/2	$-0.49443316603739513350+0.29840352572689955991i$	-0.76659148423211189359
	-9/2	$-0.49443316603739513350-0.29840352572689955991i$	
6	-11/2	$-1.13537646891480325577+0.16312176718062221300i$	-0.42692157141886207577
	-11/2	$-1.13537646891480325577-0.16312176718062221300i$	
7	11/2	$0.74045039986314916894+0.31469282216447499146i$	-0.54303402832662696979
	9/2	$0.74045039986314916894-0.31469282216447499146i$	
8	9/2	$0.30062425150856577406+0.30002387970572190065i$	-0.97443500257666539810
	7/2	$0.30062425150856577406-0.30002387970572190065i$	
9	-5/2	0.3i	-1.18546521824226770375
	-7/2	-0.3i	
10	-7/2	$-0.30062425150856577406+0.30002387970572190065i$	-0.97443500257666539810
	-9/2	$-0.30062425150856577406-0.30002387970572190065i$	
11	-9/2	$-0.74045039986314916894+0.31469282216447499146i$	-0.54303402832662696979
	-11/2	$-0.74045039986314916894-0.31469282216447499146i$	

第4章 Massive-XXZ 鎖の実解に関する解析

本章では、massive regime の XXZ 鎖の two-down-spin sector の実解について議論する。複素解のときの δ を $\delta = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\gamma$ と置く。このとき Bethe 仮説方程式の解は x と γ の二変数を用いて $x \pm \frac{1}{2}\zeta\gamma$ と表せる。まず、§4.1 では実解の場合の counting function を導出する。

次に 4.2 では量子数の差について調べる。複素解の場合は narrow pair の場合は量子数の差が 0 であり、wide pair の場合は 1 であった。しかし、サイト数が N のとき、実解の場合は量子数の差が、 $0 \sim N-1$ の場合があることを確認した。本章では対数関数の性質を用いるために Arctan 関数は A.4 で記述した、symmetric 分岐のみを用いた定義を採用している。また、本章の内容は実解の性質を完全に網羅したものにはなっておらず、今後、以下の項目を精査する必要があることに留意したい。

- Counting function の性質から Bethe 量子数を求める。
- Bethe 量子数の数を全て数えることによって複素解の場合と合わせて two-down-spin sector の完全性を示す。
- Extra-two-string 解の出現することによって実解が減る様子を確認する。
- Collapse 解が出現することによって実解が増える様子を確認する。

4.1 Counting function

本節では実解の counting function を導出する。複素解の場合と同様に実部と虚部に展開し、虚部を拘束条件として変数を一つにする。具体的には、まず Bethe 仮説方程式の複素解が (3.3)、(3.4) と置けることを思い出す。ここで、複素解の string からのずれ δ を $\delta = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\gamma$ と置くと解の組が実数となり

$$\lambda_1 = x + \frac{i}{2}\zeta + i\zeta\delta = x - \frac{1}{2}\gamma\zeta \quad (4.1)$$

$$\lambda_2 = x - \frac{i}{2}\zeta - i\zeta\delta = x + \frac{1}{2}\gamma\zeta \quad (4.2)$$

となる。ここで、 x を実解のセンターとし、 γ をセンターからのずれとする。実部と虚部に展開した Bethe 仮説方程式の虚部を拘束条件としてセンター x をずれ γ で表現し、一変数にする。

まず、各項を実部と虚部に展開する。Bethe 仮説方程式が

$$2 \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_1)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) = \frac{2\pi}{N} J_1 + \frac{2}{N} \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_1 - \lambda_2)}{\tanh \zeta} \right) + \frac{2\pi}{N} \left[\frac{2(\lambda_1 - \lambda_2) + \pi}{2\pi} \right]_{\text{Gauss}} \quad (4.3)$$

$$2 \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_2)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) = \frac{2\pi}{N} J_2 + \frac{2}{N} \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_2 - \lambda_1)}{\tanh \zeta} \right) + \frac{2\pi}{N} \left[\frac{2(\lambda_2 - \lambda_1) + \pi}{2\pi} \right]_{\text{Gauss}} \quad (4.4)$$

となることを確認する。各項について計算する。Bethe 仮説方程式 (4.3) の左辺が

$$\begin{aligned} 2 \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_1)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) &= 2 \tan^{-1} \left(\frac{\tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) \\ &= \frac{1}{i} \left\{ \log \left(1 + i \frac{\tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) - \log \left(1 - i \frac{\tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{i} \log \left\{ \frac{\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta)} \right\} \\ &= \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta)} \right\} + \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta)} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta)} \right\} - \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta)} \right\} \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{\tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))}{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))} \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

となる。一方、Bethe 仮説方程式の右辺第二項を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_1 - \lambda_2)}{\tanh \zeta} \right) &= \frac{2}{N} \tan^{-1} \left(\frac{\tan(-\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta)} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{i} \log \left(1 + i \frac{\tan(-\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta)} \right) - \frac{1}{i} \log \left(1 - i \frac{\tan(-\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta)} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{i} \log \left(\frac{\tanh(\zeta) + i \tan(-\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta) - i \tan(-\gamma\zeta)} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{2i} \log \left(\frac{(\tanh(\zeta) + i \tan(-\gamma\zeta))^2}{(\tanh(\zeta) - i \tan(-\gamma\zeta))^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる。(4.7)、(4.6) を用いて $W(x, \gamma, \zeta)$ を次のように定義する。

$$2\pi W(x, \gamma, \zeta) \equiv \tan^{-1} \left(\frac{\tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) - \frac{2\pi}{N} \left[\frac{2(\lambda_1 - \lambda_2) + \pi}{2\pi} \right]_{\text{Gauss}} \quad (4.7)$$

$W(x, \gamma, \zeta)$ を用いて実解の counting function を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{N} J_1 &\equiv 2 \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_1)}{\tanh(\frac{\zeta}{2})} \right) - \frac{2}{N} \tan^{-1} \left(\frac{\tan(\lambda_1 - \lambda_2)}{\tanh \zeta} \right) - \frac{2\pi}{N} \left[\frac{2(\lambda_1 - \lambda_2) + \pi}{2\pi} \right]_{\text{Gauss}} \\ &= 2\pi W(x, \gamma, \zeta) + \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))}{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{N} \left\{ \frac{1}{2i} \log \left(\frac{(\tanh(\zeta) + i \tan(-\gamma\zeta))^2}{(\tanh(\zeta) - i \tan(-\gamma\zeta))^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

次に counting function の虚部を計算する。まず、(4.8) の右辺の虚部の第二項が

$$\frac{1}{N} \left\{ \log \left(\frac{(\tanh(\zeta) + i \tan(-\gamma\zeta))^2}{(\tanh(\zeta) - i \tan(-\gamma\zeta))^2} \right) \right\} = \log \left\{ \exp \left(\frac{2\pi i n}{N} \right) \left(\frac{(\tanh(\zeta) + i \tan(-\gamma\zeta))^2}{(\tanh(\zeta) - i \tan(-\gamma\zeta))^2} \right)^{1/N} \right\}$$

であることを確認する。これを用いて 虚部 = 0 の十分条件を

$$\left\{ \frac{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))}{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))} \right\} = \exp \left(\frac{2\pi i n}{N} \right) \left(\frac{(\tanh(\zeta) + i \tan(-\gamma\zeta))^2}{(\tanh(\zeta) - i \tan(-\gamma\zeta))^2} \right)^{\frac{1}{N}} \quad (4.9)$$

と表せる。ただし、 $n = 0, 1, \dots, N-1$ とする。ここで (4.9) を Bethe 仮説方程式 (4.8) に代入し計算すると

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{N} J_1 &= 2\pi W(x, \gamma, \zeta) + \frac{1}{2i} \log \exp \left(\frac{2\pi i n}{N} \right) \\ &= 2\pi W(x, \gamma, \zeta) + \frac{1}{2i} \left(\frac{2\pi i n}{N} \right) \\ &= 2\pi W(x, \gamma, \zeta) + \frac{\pi n}{N} \end{aligned} \quad (4.10)$$

になる。(4.9) から $\tan x$ について解くことを考える。まず (4.9) の左辺が

$$\left(\text{LHS of (4.9)} \right) = \frac{\tanh^2(\frac{\zeta}{2}) - i \tanh(\frac{\zeta}{2}) (\tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta) - \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta)) + \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta) \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh^2(\frac{\zeta}{2}) + i \tanh(\frac{\zeta}{2}) (\tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta) - \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta)) + \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta) \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta)} \quad (4.11)$$

であることを確認する。ここで次の二つの関係式

$$\begin{aligned} \tan \left(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta \right) - \tan \left(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta \right) &= \frac{\tan(x) + \tan(\frac{1}{2}\gamma\zeta)}{1 - \tan(x) \tan(\frac{1}{2}\gamma\zeta)} - \frac{\tan(x) - \tan(\frac{1}{2}\gamma\zeta)}{1 + \tan(x) \tan(\frac{1}{2}\gamma\zeta)} \\ &= \frac{2 \tan^2(x) \tan(\frac{1}{2}\gamma\zeta) + 2 \tan(\frac{1}{2}\gamma\zeta)}{1 - \tan^2(x) \tan^2(\frac{1}{2}\gamma\zeta)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

と

$$\tan \left(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta \right) \tan \left(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta \right) = \frac{\tan^2(x) - \tan^2(\frac{1}{2}\gamma\zeta)}{1 - \tan^2(x) \tan^2(\frac{1}{2}\gamma\zeta)} \quad (4.13)$$

に注意すると、(4.11) は

$$\begin{aligned}
& \frac{\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) - i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \left(\frac{2 \tan^2(x) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 2 \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)}{1 - \tan^2(x) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)} \right) + \frac{\tan^2(x) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)}{1 - \tan^2(x) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)}}{\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) + i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \left(\frac{2 \tan^2(x) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 2 \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)}{1 - \tan^2(x) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)} \right) + \frac{\tan^2(x) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)}{1 - \tan^2(x) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)}} \\
&= \frac{\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \left(1 - \tan^2(x) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)\right) - i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \left(2 \tan^2(x) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 2 \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)\right) + \tan^2(x) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)}{\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \left(1 - \tan^2(x) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)\right) + i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \left(2 \tan^2(x) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 2 \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)\right) + \tan^2(x) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right)} \\
&= \frac{\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + \tan^2(x) \left(-\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 1\right)}{\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + \tan^2(x) \left(-\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 1\right)} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

と表現できる。\$X\$ を \$X \equiv \tan^2(x)\$ と定義すると、拘束条件 (4.14) = \$\exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right) \left(\frac{\tanh(\zeta) + i \tan(-\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta) - i \tan(-\gamma\zeta)}\right)^{\frac{1}{N}}\$ は

$$\frac{A + BX}{A' + B'X} = C \quad (4.15)$$

という形で書くことができる。ただし、\$A\$、\$B\$、\$A'\$、\$B'\$、\$C\$ は

$$A = \tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) \quad (4.16)$$

$$B = -\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 1 \quad (4.17)$$

$$A' = \tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) \quad (4.18)$$

$$B' = -\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 1 \quad (4.19)$$

$$C = \exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right) \left(\frac{\tanh(\zeta) + i \tan(-\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta) - i \tan(-\gamma\zeta)}\right)^{\frac{1}{N}} \quad (4.20)$$

とする。\$X\$ について解くと、

$$\begin{aligned}
A + BX &= CA' + CB'X \\
(B - CB')X &= CA' - A \\
\therefore X &= \frac{CA' - A}{B - CB'} \quad (4.21)
\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\tan^2(x) = \frac{\exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right) \left(\frac{\tanh(\zeta) + i \tan(-\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta) - i \tan(-\gamma\zeta)}\right)^{\frac{1}{N}} \left\{ \tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) \right\}}{\left\{ -\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 1 \right\}} \frac{-\left\{ \tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) \right\}}{-\exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right) \left(\frac{\tanh(\zeta) + i \tan(-\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta) - i \tan(-\gamma\zeta)}\right)^{\frac{1}{N}} \left\{ -\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 1 \right\}}$$

(4.22)

となる。さらに

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tanh(\zeta) + i \tan(-\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta) - i \tan(-\gamma\zeta)}\right)^2 &= \left(\frac{\tanh(\zeta) - i \tan(\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta) + i \tan(\gamma\zeta)}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\tanh(\zeta) - i \frac{2 \tan(\frac{1}{2}\gamma\zeta)}{1 - \tan^2(\frac{1}{2}\gamma\zeta)}}{\tanh(\zeta) + i \frac{2 \tan(\frac{1}{2}\gamma\zeta)}{1 - \tan^2(\frac{1}{2}\gamma\zeta)}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\tanh(\zeta)(1 - \tan^2(\frac{1}{2}\gamma\zeta)) - i2 \tan(\frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta)(1 - \tan^2(\frac{1}{2}\gamma\zeta)) + i2 \tan(\frac{1}{2}\gamma\zeta)}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

に注意して ϕ を

$$\phi \equiv \frac{1}{2}\gamma\zeta \quad (\text{i.e. } \gamma = \frac{2\phi}{\zeta}) \quad (4.24)$$

と定義する。このとき $\tan^2 x$ を ϕ で表すと

$$\begin{aligned}
\tan^2(x) &= \frac{\exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right) \left(\frac{\tanh(\zeta) + i \tan(-\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta) - i \tan(-\gamma\zeta)}\right)^{\frac{1}{N}} \left\{ \tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) \right\}}{\left\{ -\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 1 \right\}} \\
&\quad - \frac{\left\{ \tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) \right\}}{\left\{ -\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 1 \right\}} \\
&= \frac{\exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right) \left(\frac{\tanh(\zeta)(1 - \tan^2(\frac{1}{2}\gamma\zeta)) - i2 \tan(\frac{1}{2}\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta)(1 - \tan^2(\frac{1}{2}\gamma\zeta)) + i2 \tan(\frac{1}{2}\gamma\zeta)}\right)^{\frac{1}{N}} \left\{ \tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) \right\}}{\left\{ -\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 1 \right\}} \\
&\quad - \frac{\left\{ \tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) - \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) \right\}}{\left\{ -\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan\left(\frac{1}{2}\gamma\zeta\right) + 1 \right\}} \\
&= \frac{\exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right) \left(\frac{\tanh(\zeta)(1 - \tan^2(\phi)) - i2 \tan(\phi)}{\tanh(\zeta)(1 - \tan^2(\phi)) + i2 \tan(\phi)}\right)^{\frac{1}{N}} \left\{ \tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan(\phi) - \tan^2(\phi) \right\}}{\left\{ -\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2(\phi) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan(\phi) + 1 \right\}} \\
&\quad - \frac{\left\{ \tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan(\phi) - \tan^2(\phi) \right\}}{\left\{ -\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2(\phi) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan(\phi) + 1 \right\}} \\
&= \frac{\exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right) \left(\frac{\tanh(\zeta)(1 - \tan^2(\phi)) - i2 \tan(\phi)}{\tanh(\zeta)(1 - \tan^2(\phi)) + i2 \tan(\phi)}\right)^{\frac{1}{N}} \left\{ -\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2(\phi) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan(\phi) + 1 \right\}}{\left\{ -\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2(\phi) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan(\phi) + 1 \right\}} \\
&\quad - \frac{\left\{ \tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) - 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan(\phi) - \tan^2(\phi) \right\}}{\left\{ -\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan^2(\phi) + 2i \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tan(\phi) + 1 \right\}} \tag{4.25}
\end{aligned}$$

となる。よって (4.25) を用いると Bethe 仮説方程式は (4.3) は変数が ϕ のみの方程式になる。したがって、(4.25)、(4.10) より一つ目の Bethe 量子数 J_1 を指定すると数値的に ϕ を求めることができ、(4.24) より、センターからのずれ γ を求めることができる。また、センター x は (4.25) より、 n を指定することによって求めることができる。ここで、 n に関しては次章 §4.2 で述べるが、 J_1 、 J_2 の差と対応していることがわかる。

4.2 量子数の差

前節では一つ目の Bethe 仮説方程式に関する counting function を求めた。今節ではこの Bethe 仮説方程式に関する量子数 J_1 と二つ目の Bethe 仮説方程式に関する量子数 J_2 との関係を導出する。

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{N}(J_1 - J_2) &= \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))}{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2iN} \left\{ \log \left(\frac{\tanh(\zeta) + i \tan(-\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta) - i \tan(-\gamma\zeta)} \right)^2 \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))}{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2iN} \left\{ \log \left(\frac{\tanh(\zeta) + i \tan(\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta) - i \tan(\gamma\zeta)} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))}{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))}{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{iN} \log \left\{ \left(\frac{\tanh(\zeta) + i \tan(\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta) - i \tan(\gamma\zeta)} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{i} \log \left\{ \frac{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))}{(\tanh(\frac{\zeta}{2}) - i \tan(x - \frac{1}{2}\gamma\zeta))(\tanh(\frac{\zeta}{2}) + i \tan(x + \frac{1}{2}\gamma\zeta))} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{iN} \log \left\{ \left(\frac{\tanh(\zeta) + i \tan(\gamma\zeta)}{\tanh \zeta - i \tan(\gamma\zeta)} \right)^2 \right\} \\
&\quad \quad \quad \frac{1}{i} \log \left\{ \exp \left(\frac{2\pi i n}{N} \right) \left(\frac{\tanh(\zeta) + i \tan(\gamma\zeta)}{\tanh(\zeta) - i \tan(\gamma\zeta)} \right)^{\frac{2}{N}} \right\} \\
&= \frac{1}{i} \log \exp \left(\frac{2\pi i n}{N} \right) \\
&= \frac{2\pi}{N} n \tag{4.26}
\end{aligned}$$

$$\therefore J_1 - J_2 = n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \tag{4.27}$$

したがって、二つの量子数 J_1 、 J_2 の差は $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ のそれぞれの場合があることがわかる。

第5章 まとめと展望

本論文では massive-XXZ 鎖の two-down-spin sector について Bethe 量子数を用いて厳密に解析した。特に複素解について詳しく解析した。String 仮説で予言される複素解が実数になる collapse と呼ばれる現象が起こる条件、特に、複素解が collapse する個数とサイト数、異方性パラメータの関係を求めた。また、サイト数、異方性パラメータによっては string 仮説で予言された解の個数を超えて解が増える現象があることを発見し、増えた解を extra-two-string 解と命名した。各サイト数、各異方性パラメータごとの複素解の Bethe 量子数を求めた。これは、Bethe 仮説方程式の解を counting function を用いて直接求めるときだけでなく、再帰的に求めるためにも必要な情報である。次に、サイト数が十分大きいときに string 仮説が予言する複素解の完全 string 解に、今回求めた厳密な複素解が、サイト数 N に対して指数関数的に近づくことがわかった。これは XXX 鎖の場合とは異なる結果である。また、massive-XXZ 鎖の XXX 極限を取ったときの Bethe 量子数に対応していることがわかった。最後に実解の場合の counting function を求めた。Counting function の性質を調べることによって解の個数と Bethe 量子数を求めることが将来期待される。

XXX 鎖の場合に比べて massive-XXZ 鎖の解析の数学的に困難な点としては、Bethe 仮説方程式が複雑になることによって Bethe 仮説方程式の虚部に依存する変数を w としたときに counting function $Z(w)$ の定義域が容易に求められないことがあげられる。これは XXX 鎖では見られず、massive-XXZ 鎖特有の困難である。本研究では Bethe 仮説方程式の解の実部 x に対して $X(= \tan^2 x) > 0$ が虚部の Bethe 仮説方程式から導出される関数 $A(w)$ に関する不等式 $A(w) < 0$ と等価であることを発見、証明し、この関係を用いることによってサイト数 N 及び、異方性に関するパラメータ ζ に依存する定義域の概形を求めた。特に $w = 0$ が counting function $Z(w)$ の定義域に含まれるか否かが重要な点である。また、counting function $Z(w)$ の端点の値は高次の代数方程式を求めることが必要になり、一般に求めることはできない。そこで、counting function $Z(w)$ の端点の値を求めずに、counting function $Z(w)$ の端点は $A(w) = 0$ を満たすという条件から端点の counting function $Z(w)$ の値を求めた。これによって XXX 鎖の場合にはない massive-XXZ 鎖固有の困難を克服した。また、massive-XXZ 鎖の場合にはサイト数 N に関して完全 string 解に指数関数的に近づく。これを解析的に示すことは Bethe 仮説方程式の解のみに着目すると容易ではない。しかし、counting function $Z(w)$ の端点に注目し、端点の振る舞いから不等式を作ることによって、直接 Bethe 仮説方程式の解を扱わずに指数関数的に完全 string 解に近づくことを解析的に示した。これは本研究の新しい方法である。

今後の研究の展望としては、まず、two-down-spin sector における massive-XXZ 鎖の実解の Bethe 量子数を全て求めることがあげられる。複素解の Bethe 量子数は求めてあるので

実解の Bethe 量子数が全て求まると two-down-spin sector の完全性を確認できる。また、同様の解析を massless-XXZ 鎖においても行うことも重要である。Collapse とサイト数、異方性の関係は massive の場合とは大きく異なることが予想され、また string 仮説との関係も massive の場合とは異なることが予想されるのでどのような結果が得られるかは非常に興味深い。

本研究は two-down-spin sector に限定した解析であったが、down-spin の数が 3 以上の場合の議論はまだ少ない。しかし、Bethe 仮説を用いて厳密な物理量を求めるためには $1 \sim \frac{N}{2}$ down-spin の各 Bethe 仮説方程式の解が必要となる。特に、厳密な Bethe 量子数は再帰的に Bethe 仮説方程式の解を求める場合にも必要となる。

Two-down-spin sector において、massive-XXZ 鎖ではサイト数が大きくなるにつれて extra-two-string 解の一群を除いて string 仮説が予言する解の形である完全 string 解に複素解が指数関数的に近づくことがわかった。実解は元から完全 string 解の形を取っているため string 仮説を満たさない解は一群だけである。down-spin の数が 3 以上の場合にも複素解が完全 string 解に指数関数的に近づくのか、また各 sector の解の個数と string 仮説が予言する解の個数とのずれに関しては、今後、研究の進展が望まれる。これらの情報は string 仮説を用いて求めた熱力学極限を取ったときの物理量が厳密な値に収束するのか、あるいはどのような誤差があるのかを知るために非常に重要である。

その他の展望としては、任意の初期状態が与えられた場合の、XXZ 系の厳密な時間発展がどうなるかという問題があげられる。近年、孤立量子系の熱平衡化の有無が盛んに研究されている。特に可積分系の場合は十分時間が経過した後の系の分布関数は、一般化 Gibbs 分布に近づくことが予想されているが、実際には、任意の初期状態に対して厳密な時間発展を求めることは未だ達成されていない [68, 69, 70, 71, 72, 73, 74]。本研究から two-down-spin sector の場合の Bethe 仮説方程式の厳密な解を全て数値的に求めることによって (文献 [79]) から任意の状態の Bethe ベクトルを構成することができる。Two-down-spin sector の完全性から展開することによって厳密な時間発展を求めることができる。これは two-down-spin sector のみの解析であるが時間発展の数値計算の手法のベンチマークとしても有用である。ただし、この時間発展を実行するためには特異解の内積公式 (文献 [80, 81, 82])、ノルム公式 (文献 [83, 84, 85]) を求めることなども必要な課題である。

謝辞

指導教員の堀田知佐先生には本論文の制作をはじめ、院生生活全般でお世話になりました。深く感謝いたします。

出口哲生先生には量子可積分系の基礎からご教授いただき、本論文についても共同研究をしていただきました。深く感謝いたします。

佐藤純先生には共同研究をしていただき、また様々な助言をいただきました。深く感謝いたします。

桃井勉先生には貴重な助言をいただきました。深く感謝します。

同じ研究室で生活をさせていただいた Xavier Plat 氏、中間庭崇氏、田中克大氏、上田和正氏、横山祐人氏、川野雅敬氏、渡邊健太氏には公私ともに非常にお世話になりました。深く感謝します。

付録A 対数関数の分岐について

本章では複素数に対する Arctan 関数の定義と分岐の取り方について定義する。複素数に対する Arctan 関数は複素数の値をとる、二つの対数関数から定義される。したがって、Arctan 関数の分岐は二つの対数関数の分岐の取り方によって決まることがわかる。

ここでは本論文で用いた symmetric 分岐と positive 分岐の二種類の取り方を用いた定義を A.3 で明記する。一方、出口-Giri (文献 [27]) および、本論文の 2.5 では symmetric 分岐のみを用いた定義を採用しており、これを A.4 で明記する。

A.1 Symmetric 分岐

複素数 $z = \alpha + i\beta$ に対して対数関数を取ったときの分岐の選び方について考える。 $\log^{(s)} z$ の定義を

$$\log^{(s)}(\alpha + i\beta) = i(\theta^{(s)}(\alpha + i\beta) + 2\pi n) + \frac{1}{2} \log(\alpha^2 + \beta^2) \quad (\text{A.1})$$

とする。ただし $n \in \mathbb{Z}$ を対数関数の分岐に対応し、また $\theta^{(s)}(z)$ を

$$\theta^{(s)}(\alpha + i\beta) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \pi H(-\alpha) \text{sgn}(\beta_+) & (\alpha \neq 0) \\ \frac{\pi}{2} \text{sgn}(\beta_+) & (\alpha = 0) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

と定義する。ただし $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ であることに注意する。また、 $\text{sgn}(x_+) = \text{sgn}(x + 0_+) = 1 - 2H(-x)$ と定義する。このとき、

$\theta^{(s)}(\alpha + i\beta)$ は $\beta \neq 0$ であるときに α の関数としてみたときの $\alpha = 0$ 上で連続である。また $\beta \neq 0$ のときに、 $-\pi < \theta(z) < \pi$ となることに注意する。次に $\beta = 0$ かつ $\alpha > 0$ であるときに $\theta(z) = 0$ となり、 $\beta = 0$ かつ $\alpha < 0$ であるときに $\theta(z) = \pi$ となる。

A.2 Positive 分岐

対数関数 $\log^{(+)}$ を次のように定義する。

$$\log^{(+)}(\alpha + i\beta) = i(\theta^{(+)}(\alpha + i\beta) + 2\pi n) + \frac{1}{2} \log(\alpha^2 + \beta^2) \quad (\text{A.3})$$

ただし $n \in \mathbb{Z}$ を対数関数の分岐に対応する整数とする。また $\theta^{(+)}(z)$ を次のように定義する。

$$\theta^{(+)}(\alpha + \beta) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \pi H(-\alpha) + 2\pi H(\alpha_+)H(-\beta) & (\alpha \neq 0) \\ \frac{\pi}{2}\text{sgn}(\beta_+) + 2\pi H(-\beta) & (\alpha = 0) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A.3 Symmetric 分岐と positive 分岐を用いた Arctan 関数

a, b を実数として 0 でない複素数 $a + ib$ に対する Arctan 関数 $\tan^{-1}(a + ib)$ を次のように定義する。

$$\tan^{-1}(a + ib) = \frac{1}{2i}(\log^{(+)}(1 - b + ia) - \log^{(s)}(1 + b - ia)) \quad (\text{A.5})$$

$b \neq \pm 1$ としたときに

$$\begin{aligned} 2 \tan^{-1}(a + ib) &= \tan^{-1}\left(\frac{a}{1 - b}\right) + \pi H(b - 1)\text{sgn}(a_+) + 2\pi H(1 - b)H(-a) \\ &\quad + \tan^{-1}\left(\frac{a}{1 + b}\right) - \pi H(-b - 1)\text{sgn}(a_-) + \frac{1}{2i} \log\left(\frac{a^2 + (b - 1)^2}{a^2 + (b + 1)^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

となる。ここで $b > 0$ の場合を考える。分岐を $-\pi < \text{Im}(\log(z)) \leq \pi$ としたとき

$$-\pi < \text{Re}(2 \tan^{-1}(a + ib)) < \pi \quad (a \neq 0), \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Re}(2 \tan^{-1}(a + ib)) = \pm\pi \quad (a = 0) \quad (\text{A.8})$$

であることがわかる。

A.4 Symmetric 分岐を用いた Arctan 関数

a, b を実数として 0 でない複素数 $a + ib$ に対する Arctan 関数 $\tan^{-1}(a + ib)$ を次のように定義する。

$$\tan^{-1}(a + ib) = \frac{1}{2i}(\log^{(s)}(1 - b + ia) - \log^{(s)}(1 + b - ia)) \quad (\text{A.9})$$

$b \neq \pm 1$ としたときに

$$\begin{aligned} 2 \tan^{-1}(a + ib) &= \tan^{-1}\left(\frac{a}{1 - b}\right) + \pi H(b - 1)\text{sgn}(a_+) \\ &\quad + \tan^{-1}\left(\frac{a}{1 + b}\right) + \pi H(-b - 1)\text{sgn}(a_-) + \frac{1}{2i} \log\left(\frac{a^2 + (b - 1)^2}{a^2 + (b + 1)^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となる。ここで $b > 0$ の場合を考える。分岐を $-\pi < \text{Im}(\log(z)) \leq \pi$ としたとき

$$-\pi < \text{Re}(2 \tan^{-1}(a + ib)) < \pi \quad (a \neq 0), \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Re}(2 \tan^{-1}(a + ib)) = \pm\pi \quad (a = 0) \quad (\text{A.12})$$

であることがわかる。

付録B $\tilde{\mathbf{A}}(w)$ 、 $\hat{\mathbf{A}}(w)$ 、 $\hat{\mathbf{B}}(w)$ 、 $\hat{\mathbf{C}}(w)$ の微分について

本章では $\tilde{\mathbf{A}}(w)$ 、 $\hat{\mathbf{A}}(w)$ 、 $\hat{\mathbf{B}}(w)$ 、 $\hat{\mathbf{C}}(w)$ の微分について明示的に記述する。まず区間 $0 < w < \frac{1}{t}$ に対して

$$\frac{d\tilde{\mathbf{A}}(w)}{dw} = \operatorname{sgn}(1-w)2t^2\left(\frac{N_\xi}{N} - 1 + w\right)\left|\frac{1+wt^2}{1-w}\right|^{1-\frac{2}{N}} + 2t^2\left(\frac{N_\xi}{N} - 1 - w\right)\left(\frac{1-wt^2}{1+w}\right)^{1-\frac{2}{N}} \quad (\text{B.1})$$

となる。これを用いると

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{A}}}{dw} &= \tilde{\mathbf{A}} + w \frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{dw} \\ &= -2t^2 \frac{N_\xi}{N} w \left(\operatorname{sgn}(w-1) \left| \frac{1+wt^2}{w-1} \right|^{1-\frac{2}{N}} - \left(\frac{1-wt^2}{1+w} \right)^{1-\frac{2}{N}} \right) \\ &\quad + (1-3wt^2)(1-wt^2)^{1-\frac{2}{N}}(w+1)^{\frac{2}{N}} \\ &\quad - (1+3wt^2)(1+wt^2)^{1-\frac{2}{N}}|w-1|^{\frac{2}{N}} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

次に $0 < w < \frac{1}{t}$ に対して $\hat{\mathbf{B}}(w)$ の微分を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{B}}(w)}{dw} &= \frac{(1-w^2t^2)(1+3w^2t^2)}{t^2w^2} \left\{ \left(\frac{1+w}{1-wt^2} \right)^{\frac{2}{N}} - \left(\frac{1-w}{1+wt^2} \right)^{\frac{2}{N}} \right\} \\ &\quad + \left| \frac{1-w}{1+wt^2} \right|^{\frac{2}{N}} \left\{ -\frac{2N_\xi}{N} \frac{(1-w^2t^2)^2}{w(1-w)(1+wt^2)} - \frac{4(1+t^2)}{N} \frac{1+w}{1-w} + 2(1+t^2+2t^2w) \right\} \\ &\quad + \left(\frac{1+w}{1-wt^2} \right)^{\frac{2}{N}} \left\{ -\frac{2N_\xi}{N} \frac{(1-w^2t^2)^2}{w(1+w)(1-wt^2)} + \frac{4(1+t^2)}{N} \frac{1-w}{1+w} - 2(1+t^2-2t^2w) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

となる。最後に $0 < w < \frac{1}{t}$ に対して $\hat{\mathbf{C}}(w)$ の微分を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{C}}(w)}{dw}(w) &= \left| \frac{1-w}{1+wt^2} \right|^{\frac{2}{N}} \left\{ -\frac{1-w^2}{w^2} - \frac{2N_\xi}{N} \frac{t^2}{w} \frac{(1+w)^2}{(1-w)(1+wt^2)} \right\} \\ &\quad + \left(\frac{1+w}{1-wt^2} \right)^{\frac{2}{N}} \left\{ \frac{1-w^2}{w^2} - \frac{2N_\xi}{N} \frac{t^2}{w} \frac{(1-w)^2}{(1+w)(1-wt^2)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

となる。

付録C 分数関数の展開公式

$0 < w < 1$ に対して、 $\left(\frac{1-w}{1+wt^2}\right)^{\frac{2}{N}}$ を Taylor 展開すると次のようになる。

$$\left(\frac{1-w}{1+wt^2}\right)^{\frac{2}{N}} = 1 - \frac{2(1+t^2)}{N}w + \left(-\frac{1-t^4}{N} + \frac{2(1+t^2)^2}{N^2}\right)w^2 \quad (\text{C.1})$$

$$+ \left(-\frac{2(1+t^6)}{3N} + \frac{2(1+t^2)(1-t^4)}{N^2} - \frac{4(1+t^2)^3}{3N^3}\right)w^3 + O(w^4) \quad (\text{C.2})$$

付録D (2.190)の証明

まず $\sin^2(2\frac{\phi}{N}) \frac{\cos^5(\phi)}{\sin(\phi)}$ を両辺に掛ける。

$$\cos^2\left(\phi - \frac{2\phi}{N}\right) - \cos(\phi) \cos\left(\phi - \frac{2\phi}{N}\right) \frac{\sin(2\phi)}{N \sin(2\frac{\phi}{N})} > \sin\left(\frac{2\phi}{N}\right) \sin\left(2\phi - \frac{2\phi}{N}\right) \quad (\text{D.1})$$

これを $\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$ と $\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$ を用いて計算すると

$$\frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(2\phi - \frac{4\phi}{N}\right)\right) - \cos \phi \cos\left(\phi - \frac{2\phi}{N}\right) \frac{\sin(2\phi)}{N \sin(2\phi/N)} > \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{4\phi}{N} - 2\phi\right) - \cos(2\phi)\right) \quad (\text{D.2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \cos(\phi) \cos\left(\phi - \frac{2\phi}{N}\right) \frac{2 \sin(\phi) \cos(\phi)}{N \sin(2\frac{\phi}{N})} > -\frac{1}{2} (2 \cos^2(\phi) - 1) \quad (\text{D.3})$$

両辺に $\frac{\sin(2\frac{\phi}{N})}{\cos^2(\phi)}$ をかけると

$$\sin\left(\frac{2\phi}{N}\right) > \frac{2}{N} \sin(\phi) \cos\left(\phi - \frac{2\phi}{N}\right) \quad \left(0 < \phi < \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{D.4})$$

となる。これは Lemma 2.5.3 より $\sin(\alpha x) > \alpha \sin(x)$ なので $\alpha = \frac{2}{N}$ とすると

$$\sin\left(\frac{2\phi}{N}\right) > \frac{2}{N} \sin(\phi) > \frac{2}{N} \sin(\phi) \cos\left(\phi - \frac{2\phi}{N}\right) \quad \left(0 < \phi < \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{D.5})$$

となり、(D.4) が成り立つことがわかる。

付録E (2.205)の証明

$$\begin{aligned} & \cos^2\left(\phi - \frac{2\phi + m\pi}{N}\right) - \cos(\phi) \cos\left(\phi - \frac{2\phi + m\pi}{N}\right) \frac{\sin(2\phi)}{N \sin\left(\frac{2\phi + m\pi}{N}\right)} \\ & > \sin\left(\frac{2\phi + m\pi}{N}\right) \sin\left(2\phi - \frac{2\phi + m\pi}{N}\right) \left(\frac{m\pi}{2(N-1)} < \phi < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

これを $\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$ と $\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$ を用いて両辺を計算すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(2\phi - \frac{4\phi + 2m\pi}{N}\right)\right) - \cos(\phi) \cos\left(\phi - \frac{2\phi + m\pi}{N}\right) \frac{\sin(2\phi)}{N \sin\left(\frac{2\phi + m\pi}{N}\right)} \\ & > \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(\frac{4\phi + 2m\pi}{N} - 2\phi\right) - \cos(2\phi) \right\} \left(\frac{m\pi}{2(N-1)} < \phi < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

となり、 $\sin(2\phi) = 2 \sin(\phi) \cos(\phi)$ と $\cos(2\phi) = 2 \cos^2(\phi) - 1$ で展開すると

$$\frac{1}{2} - \cos \phi \cos\left(\phi - \frac{2\phi + m\pi}{N}\right) \frac{2 \sin(\phi) \cos(\phi)}{N \sin\left(\frac{2\phi + m\pi}{N}\right)} > -\frac{1}{2} (2 \cos^2(\phi) - 1) \quad (\text{E.3})$$

となり両辺に $\frac{\sin\left(\frac{2\phi + m\pi}{N}\right)}{\cos^2(\phi)}$ をかけると

$$\sin\left(\frac{2\phi + m\pi}{N}\right) > \frac{2}{N} \sin(\phi) \cos\left(\phi - \frac{2\phi + m\pi}{N}\right) \left(\frac{m\pi}{2(N-1)} < \phi < \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{E.4})$$

となる。ここで次の不等式

$$\sin\left(\frac{2\phi + m\pi}{N}\right) > \frac{2}{N} \sin(\phi) \cos\left(\phi - \frac{2\phi + m\pi}{N}\right) \quad (0 < \phi < \pi) \quad (\text{E.5})$$

を証明する。ここで、関数 $f(\phi)$ を

$$f(\phi) \equiv \sin\left(\frac{2\phi + m\pi}{N}\right) - \frac{2}{N} \sin(\phi) \cos\left(\phi - \frac{2\phi + m\pi}{N}\right) \quad (\text{E.6})$$

と定義する。この関数を ϕ に関して微分すると

$$\frac{df}{d\phi} = \frac{4}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sin(\phi) \sin\left(\phi - \frac{2\phi + m\pi}{N}\right) \quad (\text{E.7})$$

となる。 $\phi = \frac{m\pi}{N-2}$ としたときに (E.7) は 0 になる。それゆえ、 $f(\phi)$ は $\phi = \frac{m\pi}{N-2}$ としたときに最小値をとるのでこのとき

$$f(\phi_{min}) = \left(1 - \frac{2}{N}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{N-2}\right) \quad (\text{E.8})$$

となる。 $m = 1, 2, \dots, N-3$ のときに $f(\phi)$ は正となり、 $m = 0, N-2$ のときは $f(\phi) = 0$ となるので (E.5) が示せた。

付録F XXZ鎖における特異解のエネルギーについて

本章では §2.3.2、§2.3.3、§2.3.4 で議論した Nepomechie-Wang の正則化の方法を用いて massless 及び massive の XXZ 鎖の特異解を議論する。

特異解が Hamiltonian の固有ベクトルになることと、特異解に対応するエネルギーを massless-XXZ 鎖の場合を §F.1 で議論し、massive-XXZ 鎖の場合を §F.2 で議論する。

F.1 Massless XXZ 鎖の特異解

Spin-1/2 massless Heisenberg XXZ 鎖の Hamiltonian $H_N^{XXZmassless} : \otimes_{k=1}^N \mathbb{C}^2 \rightarrow \otimes_{k=1}^N \mathbb{C}^2$ を次のように定義する。

$$H_N^{XXZmassless} := \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \left(\sigma_k^X \sigma_{k+1}^X + \sigma_k^Y \sigma_{k+1}^Y + \cos \zeta (\sigma_k^Z \sigma_{k+1}^Z - \mathbb{1}_N) \right) \quad (\text{F.1})$$

まず、摂動的な特異解を次のように定義する。

$$\lambda_1 = \frac{i}{2} \zeta + \zeta \epsilon + \zeta c \epsilon^N \quad (\text{F.2})$$

$$\lambda_2 = -\frac{i}{2} \zeta + \zeta \epsilon \quad (\text{F.3})$$

このとき、転送行列と Bethe ベクトルの関係式 (2.25) に対応する Λ 、 Λ_j 、 $j = 1, \dots, l$ は次のようになることに注意する。

$$\Lambda(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) = \left(\sinh\left(\lambda + \frac{i}{2}\zeta\right) \right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\sinh(\lambda - \lambda_j - i\zeta)}{\sinh(\lambda - \lambda_j)} + \left(\sinh\left(\lambda - \frac{i}{2}\zeta\right) \right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda - i\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \lambda)} \quad (\text{F.4})$$

$$\begin{aligned} \Lambda_j(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) = & \frac{i \sin(\zeta)}{\sinh(\lambda - \lambda_j)} \left\{ - \left(\sinh\left(\lambda_j + \frac{i}{2}\zeta\right) \right)^N \prod_{i=1, i \neq j}^l \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda_i - i\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_i)} \right. \\ & \left. + \left(\sinh\left(\lambda_j - \frac{i}{2}\zeta\right) \right)^N \prod_{i=1, i \neq j}^l \frac{\sinh(\lambda_i - \lambda_j - i\zeta)}{\sinh(\lambda_i - \lambda_j)} \right\} \quad (\text{F.5}) \end{aligned}$$

F.1.1 Massless XXZ 鎖の摂動的な正則化に対する特異解に対応する波動関数の収束性

$B^{(N)}(\lambda_1)B^{(N)}(\lambda_2) \sim \epsilon^N$ を示す

L-演算子を

$$L = \begin{pmatrix} \sin\left(\lambda + \frac{i\zeta}{2}\sigma_n^z\right) & \sin(i\zeta\sigma_n^-) \\ \sin(i\zeta\sigma_n^+) & \sin\left(\lambda - \frac{i\zeta}{2}\sigma_n^z\right) \end{pmatrix} \quad (\text{F.6})$$

とする。まず、

$$B^{(N)}\left(\frac{i\zeta}{2} + \epsilon\zeta + c\zeta\epsilon^{N-1}\right)B^{(N)}\left(-\frac{i\zeta}{2} + \epsilon\zeta\right) \sim \epsilon^{N-1} \quad (\text{F.7})$$

と仮定する。モノドロミー行列と L-演算子の関係から

$$\begin{pmatrix} A^{(N)}(\lambda) & B^{(N)}(\lambda) \\ C^{(N)}(\lambda) & D^{(N)}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_N(\lambda) & b_N(\lambda) \\ c_N(\lambda) & d_N(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(N-1)}(\lambda) & B^{(N-1)}(\lambda) \\ C^{(N-1)}(\lambda) & D^{(N-1)}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (\text{F.8})$$

が導かれる。ただし、

$$a_N(\lambda) = \begin{pmatrix} \sin\left(\lambda + \frac{i\zeta}{2}\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(\lambda - \frac{i\zeta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{F.9})$$

$$b_N(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin(i\zeta) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.10})$$

$$c_N(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(i\zeta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.11})$$

$$d_N(\lambda) = \begin{pmatrix} \sin\left(\lambda - \frac{i\zeta}{2}\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(\lambda + \frac{i\zeta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{F.12})$$

とする。このとき $B^{(N)}(\lambda)$ の成分は

$$B^{(N)}(\lambda) = a_N(\lambda)B^{(N-1)}(\lambda) + b_N(\lambda)D^{(N-1)}(\lambda) \quad (\text{F.13})$$

であるので、次の関係が導ける。

$$\begin{aligned} & B^{(N)}(\lambda_1)B^{(N)}(\lambda_2) \left[a_N(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_1) + b_N(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_1) \right] \\ & \quad \times \left[a_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_2) + b_N(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_2) \right] \\ & = \left[a_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_2) + a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) \right. \\ & \quad \left. + b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_2) + b_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

仮定より、

$$B^{(N-1)}(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_2) \sim \epsilon^{N-1} \quad (\text{F.15})$$

であることに注意して、特異解の正則化を (F.14) に代入して各成分について計算する。まず第一項について考える。

$$a_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sin(i\zeta + \zeta\epsilon + c\zeta\epsilon^N) \sin(\zeta\epsilon) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \zeta\epsilon$$

となるので仮定より (F.66) の第一項は ϵ^N のオーダーであることがわかる。次に第四項について考える。

$$b_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{F.16})$$

より第四項は 0 となる。

次に、交換関係

$$\begin{aligned} D(\lambda_1)B(\lambda_2) &= \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2 + i\zeta)}{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)} B(\lambda_2)D(\lambda_1) - \frac{\sin(i\zeta)}{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)} B(\lambda_1)D(\lambda_2) \\ &= \frac{\sin(2i\zeta + c\zeta\epsilon^N)}{\sin(i\zeta + c\zeta\epsilon^N)} B(\lambda_2)D(\lambda_1) - \frac{\sin(i\zeta)}{\sin(i\zeta + c\zeta\epsilon^N)} B(\lambda_1)D(\lambda_2) \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

であることを用いて (F.14) の第二項、第三項を計算すると

$$\begin{aligned} & \left[a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) + b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_2) \right] |0\rangle^{(N)} \\ &= \left[a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) + b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2) \left(\frac{\sin(2i\zeta + c\zeta\epsilon^N)}{\sin(i\zeta + c\zeta\epsilon^N)} B^{(N-1)}(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\sinh(i\zeta)}{\sin(i\zeta + c\zeta\epsilon^N)} B^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) \right) \right] \\ &= b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2) \frac{\sin(2i\zeta + c\zeta\epsilon^N)}{\sin(i\zeta + c\zeta\epsilon^N)} B^{(N-1)}(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1) \\ & \quad + \left(a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2) - \frac{\sin(i\zeta)}{\sin(i\zeta + c\zeta\epsilon^N)} \right) B^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

$$a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin(i\zeta) \sin(\epsilon\zeta + c\zeta\epsilon^N) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \epsilon$$

$$b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin(i\zeta) \sin(\epsilon\zeta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \epsilon$$

$2 \cos(\zeta)b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2)|0\rangle^{(N-1)} \sim \epsilon$ 、 $D^{(N-1)}(\lambda_1)|0\rangle^{(N-1)} = (\sin(\zeta\epsilon + c\zeta\epsilon))^N |0\rangle^{(N-1)} \sim \epsilon^{N-1}$ なので $B^{(N-1)}(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_2) \sim \epsilon^{N-1}$ を仮定すると

$$B^{(N)}(\lambda_1)B^{(N)}(\lambda_2) \sim \epsilon^N \quad (\text{F.19})$$

であることが言える。 $N = 2$ のときは自明なので数学的帰納法より、一般に

$$B^{(N)}(\lambda_1)B^{(N)}(\lambda_2) \sim \epsilon^N \quad (\text{F.20})$$

であることがわかる。

c をうまく選んだ時の $\Lambda_1 \sim \epsilon^{N+1}, \Lambda_2 \sim \epsilon^{N+1}$ であることについて
まず、次の二つの Lemma を証明する。

Lemma F.1.1. (a) c を

$$c = \frac{2 \cos(\zeta) \zeta^{N-1}}{(\sinh(i\zeta))^{N-1}} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sinh(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.21})$$

としたときに

$$\Lambda_1 \sim \frac{i \sin(\zeta)}{\sinh(\lambda - \frac{i}{2}\zeta - \zeta\epsilon - \zeta c \epsilon^N)} \epsilon^{N+1} \quad (\text{F.22})$$

となる。

(b) c を

$$c = 2 \cos(\zeta) \frac{\sinh(i\zeta)}{(\sinh(-i\zeta))^N} \zeta^{N-1} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i + \frac{3}{2}i\zeta)}{\sinh(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.23})$$

としたときに

$$\Lambda_2 \sim \frac{i \sin(\zeta)}{\sinh(\lambda + \frac{i}{2}\zeta - \zeta\epsilon)} \epsilon^{N+1} \quad (\text{F.24})$$

となる。

Proof. (a)

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{i \sin(\zeta)}{\sinh(\lambda - \frac{i}{2}\zeta - \zeta\epsilon - \zeta c \epsilon^N)} \left\{ -(\sinh(i\zeta + \zeta\epsilon + \zeta c \epsilon^N))^N \frac{\sinh(\zeta c \epsilon^N)}{\sinh(\zeta c \epsilon^N + i\zeta)} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(-\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta + \zeta\epsilon + \zeta c \epsilon^N)}{\sinh(-\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta + \zeta\epsilon + \zeta c \epsilon^N)} \right. \\ &\quad \left. + (\sinh(\zeta\epsilon + \zeta c \epsilon^N))^N \frac{\sinh(-\zeta c \epsilon^N - 2i\zeta)}{\sinh(-\zeta c \epsilon^N - i\zeta)} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i - \frac{3}{2}i\zeta - \zeta\epsilon - \zeta c \epsilon^N)}{\sinh(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta - \zeta\epsilon - \zeta c \epsilon^N)} \right\} \\ &\sim \frac{i \sin(\zeta)}{\sinh(\lambda - \frac{i}{2}\zeta - \zeta\epsilon - \zeta c \epsilon^N)} \left\{ -(\sinh(i\zeta))^N \frac{\sinh(\zeta c \epsilon^N)}{\sinh(i\zeta)} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \right. \\ &\quad \left. + (\sinh(\zeta\epsilon))^N \frac{\sinh(2i\zeta)}{\sinh(i\zeta)} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sinh(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \right\} \quad (\text{F.25}) \end{aligned}$$

ここで次の二つの関係について確認する。

$$\frac{\sinh(2i\zeta)}{\sinh(i\zeta)} = \frac{2 \sinh(i\zeta) \cosh(i\zeta)}{\sinh(i\zeta)} = 2 \cosh(i\zeta) = 2 \cos(\zeta) \quad (\text{F.26})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sinh(\zeta c \epsilon^N)}{(\sinh(\zeta \epsilon))^N} &= \frac{\zeta c \epsilon^N + \frac{1}{3!}(\zeta c \epsilon^N)^3 + \dots}{\left(\zeta \epsilon + \frac{1}{3!}(\zeta \epsilon)^3 + \dots\right)^N} \\
&= \frac{\zeta c \epsilon^N + \frac{1}{3!}(\zeta c \epsilon^N)^3 + \dots}{(\zeta \epsilon)^N + \frac{1}{3!}N(\zeta \epsilon)^{N+2} \dots} \\
&\sim \frac{\zeta c}{\zeta^N} = \zeta^{1-N} c
\end{aligned} \tag{F.27}$$

この二つの関係式 (F.26)、(F.27) を (F.25) に代入して

$$\text{(F.25)} \sim \frac{i \sin(\zeta) (\sinh(\zeta \epsilon))^N}{\sinh(\lambda - \frac{i}{2}\zeta - \zeta \epsilon - \zeta c \epsilon^N)} \left\{ -(\sinh(i\zeta))^{N-1} \zeta^{1-N} c \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} + 2 \cos(\zeta) \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sinh(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \right\} \tag{F.28}$$

となる。したがって、

$$c = \frac{2 \cos(\zeta) \zeta^{N-1}}{(\sinh(i\zeta))^{N-1}} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sinh(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)} \tag{F.29}$$

としたときに (F.22) となることがわかる。 \square

Proof. (b) について (a) と同様に計算する。

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= \frac{i \sin(\zeta)}{\sinh(\lambda - \lambda_2)} \left\{ -(\sinh(\zeta \epsilon))^N \frac{\sinh(\lambda_2 - \lambda_1 - i\zeta)}{\sinh(\lambda_2 - \lambda_1)} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_2 - \lambda_i - i\zeta)}{\sinh(\lambda_2 - \lambda_i)} \right. \\
&\quad \left. + (\sinh(-i\zeta + \zeta \epsilon))^N \frac{\sinh(\lambda_1 - \lambda_2 - i\zeta)}{\sinh(\lambda_1 - \lambda_2)} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i - \lambda_2 - i\zeta)}{\sinh(\lambda_i - \lambda_2)} \right\} \\
&= \frac{i \sin(\zeta)}{\sinh(\lambda - \lambda_2)} \left\{ -(\sinh(\zeta \epsilon))^N \frac{\sinh(-2i\zeta - \zeta c \epsilon^N)}{\sinh(-i\zeta - \zeta c \epsilon^N)} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(-\frac{3}{2}i\zeta + \zeta \epsilon - \lambda_i)}{\sinh(-\frac{i}{2}\zeta + \zeta \epsilon - \lambda_i)} \right. \\
&\quad \left. + (\sinh(-i\zeta + \zeta \epsilon))^N \frac{\sinh(\zeta c \epsilon^N)}{\sinh(i\zeta + \zeta c \epsilon^N)} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta - \zeta \epsilon)}{\sinh(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta - \zeta \epsilon)} \right\} \\
&\sim \frac{i \sin(\zeta) (\sinh(\zeta \epsilon))^N}{\sinh(\lambda - \lambda_2)} \left\{ -2 \cos(\zeta) \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i + \frac{3}{2}i\zeta)}{\sinh(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)} + \frac{(\sinh(-i\zeta))^N}{\sinh(i\zeta)} \zeta^{1-N} c \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)} \right\} \tag{F.30}
\end{aligned}$$

このとき、

$$c = 2 \cos(\zeta) \frac{\sinh(i\zeta)}{(\sinh(-i\zeta))^N} \zeta^{N-1} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i + \frac{3}{2}i\zeta)}{\sinh(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \tag{F.31}$$

としたときに (F.22) となることがわかる。 \square

(F.21)、(F.23) の二つを同時に満たす条件について議論する。まず特異解の Bethe 仮説方程式を考えると

$$\left(\frac{\sinh(\lambda_k + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_k - \frac{i}{2}\zeta)} \right)^{N-1} \frac{\sinh(\lambda_k - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sinh(\lambda_k + \frac{3}{2}i\zeta)} = \prod_{j=3, j \neq k}^l \frac{\sinh(\lambda_k - \lambda_j + i\zeta)}{\sinh(\lambda_k - \lambda_j - i\zeta)} \quad (\text{F.32})$$

であることが分かる。次に両辺に $\prod_{k=3}^l$ を取ると、

$$\begin{aligned} & \prod_{k=3}^l \left(\frac{\sinh(\lambda_k + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_k - \frac{i}{2}\zeta)} \right)^{N-1} \frac{\sinh(\lambda_k - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sinh(\lambda_k + \frac{3}{2}i\zeta)} = 1 \\ \Leftrightarrow & \prod_{k=3}^l \left(\frac{\sinh(\lambda_k + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_k - \frac{i}{2}\zeta)} \right)^{N-1} = \prod_{k=3}^l \frac{\sinh(\lambda_k - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sinh(\lambda_k + \frac{3}{2}i\zeta)} \end{aligned} \quad (\text{F.33})$$

であることがわかる。次に、(F.21)=(F.23) から

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\sinh(i\zeta))^{N-1}} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sinh(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)} &= \frac{\sinh(i\zeta)}{(\sinh(-i\zeta))^N} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i + \frac{3}{2}i\zeta)}{\sinh(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \\ \Leftrightarrow 1 &= \underbrace{\left(\frac{\sinh(i\zeta)}{-\sinh(i\zeta)} \right)^N}_{(-1)^N} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \frac{\sinh(\lambda_i + \frac{3}{2}i\zeta)}{\sinh(\lambda_i - \frac{3}{2}i\zeta)} \end{aligned} \quad (\text{F.34})$$

となる。これに (F.33) を代入すると

$$\begin{aligned} 1 &= (-1)^N \prod_{i=3}^l \left(\frac{\sinh(\lambda_k + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_k - \frac{i}{2}\zeta)} \right)^N \\ &= \left(- \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_k + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_k - \frac{i}{2}\zeta)} \right)^N \end{aligned} \quad (\text{F.35})$$

となる。したがって、これが満たされると仮定すると (F.20)、(F.22)、(F.24) から今回仮定した正則化を用いた特異解が Hamiltonian の固有ベクトルに収束することがわかる。

F.1.2 Massless XXZ 鎖の特異解に対応するエネルギー

本節では、[32] に沿って (1)~(6) のステップで massless XXZ 鎖の特異解に対応するエネルギーを求める。

(1) エネルギー固有値 ϵ は次のように求められる。

$$\epsilon_{massless}^{XXZ} = \frac{1}{2} \left\{ i \sin(\zeta) \frac{d}{d\lambda} \log \Lambda(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) \Big|_{\lambda=\frac{i}{2}\zeta} - \cos(\zeta) N \right\} \quad (\text{F.36})$$

ただし、

$$\Lambda(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) \equiv \left\{ \sinh\left(\lambda + \frac{i}{2}\zeta\right) \right\}^N \prod_{j=1}^N \frac{\sinh(\lambda - \lambda_j - i\zeta)}{\sinh(\lambda - \lambda_j)} + \left\{ \sinh\left(\lambda - \frac{i}{2}\zeta\right) \right\}^N \prod_{j=1}^N \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda - i\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \lambda)} \quad (\text{F.37})$$

とする。また、次の関係式

$$\tilde{\epsilon} = i \frac{d}{d\lambda} \log \Lambda \Big|_{\lambda=\frac{i}{2}\zeta} = \frac{i \frac{d\Lambda}{d\lambda}}{\Lambda} \Big|_{\lambda=\frac{i}{2}\zeta} \quad (\text{F.38})$$

を確認する。

(2) $\tilde{\epsilon}$ の分母を $\tilde{\epsilon}_{deno}$ とする。

$$\tilde{\epsilon}_{deno} = \Lambda\left(\frac{i}{2}\zeta : \lambda_1, \dots, \lambda_l\right) = \{i \sin(\zeta)\}^N \prod_{j=1}^l \frac{\sinh(\lambda_j + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.39})$$

正則化した Bethe 仮説方程式の解を代入すると

$$\tilde{\epsilon}_{deno} = \left(i \sin(\zeta)\right)^N \frac{\sinh(i\zeta + \zeta\epsilon + c\zeta\epsilon^N)}{\sinh(\zeta\epsilon + c\zeta\epsilon^N)} \frac{\sinh(\zeta\epsilon)}{\sinh(\zeta\epsilon - i\zeta)} \prod_{j=3}^l \frac{\sinh(\lambda_j + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.40})$$

となる。

(3) ここで次の恒等式

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\sinh(\lambda - \lambda_i - i\zeta)}{\sinh(\lambda - \lambda_i)} = \frac{i \sin(\zeta)}{\sinh^2(\lambda - \lambda_i)} \quad (\text{F.41})$$

が成り立つので、次の関係式が成り立つ。

$$i \frac{d\Lambda}{d\lambda} = A_0(\lambda) + \sum_{j=1}^l A_j(\lambda) + \left[\text{terms containing as least one } \sinh\left(\lambda - \frac{i}{2}\zeta\right) \right] \quad (\text{F.42})$$

ただし、

$$A_0 = iN \left\{ \sinh\left(\lambda + \frac{i}{2}\zeta\right) \right\}^{N-1} \cosh\left(\lambda + \frac{i}{2}\zeta\right) \prod_{i=1}^l \frac{\sinh(\lambda - \lambda_i - i\zeta)}{\sinh(\lambda - \lambda_i)} \quad (\text{F.43})$$

である。また $j = 1, 2, \dots, l$ に対しては

$$A_j = i \left\{ \sinh\left(\lambda + \frac{i}{2}\zeta\right) \right\}^N \left\{ \prod_{i=1, i \neq j}^l \frac{\sinh(\lambda - \lambda_i - i\zeta)}{\sinh(\lambda - \lambda_i)} \right\} \frac{i \sin(\zeta)}{\sinh(\lambda - \lambda_j)} \quad (\text{F.44})$$

とする。

(4) ここで特異解 $\lambda = \frac{i}{2}\zeta$ に対する $A_0\left(\frac{i}{2}\zeta\right)$ を計算すると

$$A_0\left(\frac{i}{2}\zeta\right) = iN \left\{ i \sin(\zeta) \right\}^{N-1} \cos(\zeta) \frac{\sinh(\zeta\epsilon + c\zeta\epsilon^N + i\zeta)}{\sinh(\zeta\epsilon + c\zeta\epsilon^N)} \frac{\sinh(\zeta\epsilon)}{\sinh(\zeta\epsilon - i\zeta)} \prod_{i=1}^l \frac{\sinh(\lambda_j + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.45})$$

となる。それゆえ、

$$\frac{1}{\epsilon_{deno}} A_0\left(\frac{i}{2}\zeta\right) = N \frac{\cos(\zeta)}{\sin(\zeta)} \quad (\text{F.46})$$

となる。

(5) 同様に $A_1\left(\frac{i}{2}\zeta\right), A_2\left(\frac{i}{2}\zeta\right)$ についても計算する。

$$A_1\left(\frac{i}{2}\zeta\right) = i \left\{ i \sin(\zeta) \right\}^N \frac{i \sin(\zeta)}{\sinh^2(\zeta\epsilon + c\zeta\epsilon^N)} \frac{\sinh(\zeta\epsilon)}{\sinh(\zeta\epsilon - i\zeta)} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.47})$$

$$A_2\left(\frac{i}{2}\zeta\right) = i \left\{ i \sin(\zeta) \right\}^N \frac{\sinh(\zeta\epsilon + c\zeta\epsilon^N + i\zeta)}{\sinh(\zeta\epsilon + c\zeta\epsilon^N)} \frac{i \sin(\zeta)}{\sinh^2(\zeta\epsilon - i\zeta)} \prod_{i=3}^l \frac{\sinh(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.48})$$

なので、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon_{deno}} \left\{ A_1\left(\frac{i}{2}\zeta\right) + A_2\left(\frac{i}{2}\zeta\right) \right\} = -2 \frac{\cos(\zeta)}{\sin(\zeta)} \quad (\text{F.49})$$

(6) 最後に $j = 3, 4, \dots, l$ のときの $A_j\left(\frac{i}{2}\zeta\right)$ を計算する。

$$A_j\left(\frac{i}{2}\zeta\right) = i \left\{ i \sin(\zeta) \right\}^N \frac{\sinh(\zeta\epsilon + c\zeta\epsilon^N + i\zeta)}{\sinh(\zeta\epsilon + c\zeta\epsilon^N)} \frac{\sinh(\zeta\epsilon)}{\sinh(\zeta\epsilon - i\zeta)} \left\{ \prod_{i=1, i \neq j}^l \frac{\sinh(\lambda_j + \frac{i}{2}\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \frac{i}{2}\zeta)} \right\} \frac{i \sin(\zeta)}{\sinh^2(\lambda_j - \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.50})$$

であるので

$$\frac{1}{\epsilon_{deno}} A_j\left(\frac{i}{2}\zeta\right) = - \frac{\sin(\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \frac{i}{2}\zeta) \sinh(\lambda_j + \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.51})$$

(4)~(6) を (F.36) に代入して、特異解のエネルギー

$$\epsilon_{massless}^{XXZ} = -\cos(\zeta) - \frac{1}{2} \sum_{j=3}^l \frac{\sin^2(\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \frac{i}{2}\zeta) \sinh(\lambda_j + \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.52})$$

が得られる。

F.2 Massive XXZ 鎖の特異解

Spin-1/2 massive Heisenberg XXZ 鎖の Hamiltonian $H_N^{XXZmassive} : \otimes_{k=1}^N \mathbb{C}^2 \rightarrow \otimes_{k=1}^N \mathbb{C}^2$ を次のように定義する。

$$H_N^{XXZmassive} := \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \left(\sigma_k^1 \sigma_{k+1}^1 + \sigma_k^2 \sigma_{k+1}^2 + \cosh \zeta (\sigma_k^3 \sigma_{k+1}^3 - \mathbb{1}_N) \right) \quad (\text{F.53})$$

本節では [32] に沿って摂動的な正則化を行った特異解が固有ベクトルに収束することを示し、(1)~(6) のステップでエネルギー固有値を求める。まず、摂動的な特異解を次のように定義する。

$$\lambda_1 = \frac{i}{2}\zeta + \zeta\epsilon + \zeta c\epsilon^N \quad (\text{F.54})$$

$$\lambda_2 = -\frac{i}{2}\zeta + \zeta\epsilon \quad (\text{F.55})$$

このとき、転送行列と Bethe ベクトルの関係式 (2.25) に対応する Λ 、 Λ_j 、 $j = 1, \dots, l$ は次のようになることに注意する。

$$\Lambda(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) = \left(\sin\left(\lambda + \frac{i}{2}\zeta\right) \right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\sin(\lambda - \lambda_j - i\zeta)}{\sin(\lambda - \lambda_j)} + \left(\sin\left(\lambda - \frac{i}{2}\zeta\right) \right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\sin(\lambda_j - \lambda - i\zeta)}{\sin(\lambda_j - \lambda)} \quad (\text{F.56})$$

$$\begin{aligned} \Lambda_j(\lambda : \lambda_1, \dots, \lambda_l) = & \frac{i \sinh(\zeta)}{\sin(\lambda - \lambda_j)} \left\{ - \left(\sin\left(\lambda_j + \frac{i}{2}\zeta\right) \right)^N \prod_{i=1, i \neq j}^l \frac{\sin(\lambda_j - \lambda_i - i\zeta)}{\sin(\lambda_j - \lambda_i)} \right. \\ & \left. + \left(\sin\left(\lambda_j - \frac{i}{2}\zeta\right) \right)^N \prod_{i=1, i \neq j}^l \frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j - i\zeta)}{\sin(\lambda_i - \lambda_j)} \right\} \quad (\text{F.57}) \end{aligned}$$

F.2.1 Massive XXZ 鎖の摂動的な正則化に対する特異解に対応する波動関数の収束性

$B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle \sim \epsilon^N$ を示す。

L-演算子を

$$L = \begin{pmatrix} \sinh\left(\lambda + \frac{i\zeta}{2}\sigma_n^z\right) & \sinh(i\zeta\sigma_n^-) \\ \sinh(i\zeta\sigma_n^+) & \sinh\left(\lambda - \frac{i\zeta}{2}\sigma_n^z\right) \end{pmatrix} \quad (\text{F.58})$$

とする。まず、

$$B\left(\frac{i\zeta}{2} + \epsilon\zeta + c\zeta\epsilon^{N-1}\right)B\left(-\frac{i\zeta}{2} + \epsilon\zeta\right) \sim \epsilon^{N-1} \quad (\text{F.59})$$

と仮定する。モノドロミー行列と L-演算子の関係から

$$\begin{pmatrix} A^{(N)}(\lambda) & B^{(N)}(\lambda) \\ C^{(N)}(\lambda) & D^{(N)}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_N(\lambda) & b_N(\lambda) \\ c_N(\lambda) & d_N(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(N-1)}(\lambda) & B^{(N-1)}(\lambda) \\ C^{(N-1)}(\lambda) & D^{(N-1)}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (\text{F.60})$$

が導かれる。ただし、

$$a_N(\lambda) = \begin{pmatrix} \sinh\left(\lambda + \frac{i\zeta}{2}\right) & 0 \\ 0 & \sinh\left(\lambda - \frac{i\zeta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{F.61})$$

$$b_N(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sinh(i\zeta) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.62})$$

$$c_N(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \sinh(i\zeta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.63})$$

$$d_N(\lambda) = \begin{pmatrix} \sinh\left(\lambda - \frac{i\zeta}{2}\right) & 0 \\ 0 & \sinh\left(\lambda + \frac{i\zeta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{F.64})$$

とする。このとき $B^{(N)}(\lambda)$ の成分は

$$B^{(N)}(\lambda) = a_N(\lambda)B^{(N-1)}(\lambda) + b_N(\lambda)D^{(N-1)}(\lambda) \quad (\text{F.65})$$

であるので、次の関係が導ける。

$$\begin{aligned} B^{(N)}(\lambda_1)B^{(N)}(\lambda_2) &= [a_N(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_1) + b_N(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_1)] \times [a_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_2) + b_N(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_2)] \\ &= [a_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_2) + a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) \\ &\quad + b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_2) + b_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2)] \end{aligned} \quad (\text{F.66})$$

仮定より、

$$B^{(N-1)}(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_2) \sim \epsilon^{N-1} \quad (\text{F.67})$$

であることに注意して、特異解の正則化を (F.66) に代入して各成分について計算する。まず第一項について考える。

$$a_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sinh(i\zeta + \zeta\epsilon + c\zeta\epsilon^N) \sinh(\zeta\epsilon) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \zeta\epsilon \quad (\text{F.68})$$

となるので仮定より (F.66) の第一項は ϵ^N のオーダーであることがわかる。次に第四項について考える。

$$b_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{F.69})$$

より第四項は 0 となる。

次に、交換関係

$$\begin{aligned} D(\lambda_1)B(\lambda_2) &= \frac{\sinh(\lambda_1 - \lambda_2 + i\zeta)}{\sinh(\lambda_1 - \lambda_2)} B(\lambda_2)D(\lambda_1) - \frac{\sinh(i\zeta)}{\sinh(\lambda_1 - \lambda_2)} B(\lambda_1)D(\lambda_2) \\ &= \frac{\sinh(2i\zeta + c\zeta\epsilon^N)}{\sinh(i\zeta + c\zeta\epsilon^N)} B(\lambda_2)D(\lambda_1) - \frac{\sinh(i\zeta)}{\sinh(i\zeta + c\zeta\epsilon^N)} B(\lambda_1)D(\lambda_2) \end{aligned} \quad (\text{F.70})$$

であることを用いて (F.66) の第二項、第三項を計算すると

$$\begin{aligned}
& \left[a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) + b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_2) \right] |0\rangle^{(N)} \\
&= \left[a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2)B^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) \right. \\
&\quad \left. + b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2) \left(\frac{\sinh(2i\zeta + c\zeta\epsilon^N)}{\sinh(i\zeta + c\zeta\epsilon^N)} B^{(N-1)}(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1) - \frac{\sinh(i\zeta)}{\sinh(i\zeta + c\zeta\epsilon^N)} B^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) \right) \right] |0\rangle^{(N)} \\
&= b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2) \frac{\sinh(2i\zeta + c\zeta\epsilon^N)}{\sinh(i\zeta + c\zeta\epsilon^N)} B^{(N-1)}(\lambda_2)D^{(N-1)}(\lambda_1) \\
&\quad + \left(a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2) - \frac{\sinh(i\zeta)}{\sinh(i\zeta + c\zeta\epsilon^N)} B^{(N-1)}(\lambda_1)D^{(N-1)}(\lambda_2) \right) \tag{F.71}
\end{aligned}$$

となる。ここで、次の関係式に注意する。

$$\begin{aligned}
a_N(\lambda_1)b_N(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sinh(i\zeta) \sinh(\epsilon\zeta + c\zeta\epsilon^N) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \epsilon \\
b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sinh(i\zeta) \sinh(\epsilon\zeta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \epsilon \\
2 \cos(\zeta)b_N(\lambda_1)a_N(\lambda_2) |0\rangle^{(N-1)} &\sim \epsilon, \quad D^{(N-1)}(\lambda_1) |0\rangle^{(N-1)} = (\sinh(\zeta\epsilon + c\zeta\epsilon))^{N-1} |0\rangle^{(N-1)} \sim \epsilon^{N-1} \text{ なる} \\
\text{ので } B^{(N-1)}(\lambda_1)B^{(N-1)}(\lambda_2) |0\rangle^{(N-1)} &\sim \epsilon^{N-1} \text{ を仮定すると}
\end{aligned}$$

$$B^{(N)}(\lambda_1)B^{(N)}(\lambda_2) \sim \epsilon^N \tag{F.72}$$

であることが言える。 $N = 2$ のときは自明なので数学的帰納法より、一般に

$$B^{(N)}(\lambda_1)B^{(N)}(\lambda_2) \sim \epsilon^N \tag{F.73}$$

であることがわかる。

c をうまく選んだときに $\Lambda_1 \sim \epsilon^{N+1}, \Lambda_2 \sim \epsilon^{N+1}$ であることについて

まず、次の二つの Lemma を証明する。

Lemma F.2.1. (a) c を

$$c = \frac{2 \cosh(\zeta)\zeta^{N-1}}{(\sin(i\zeta))^{N-1}} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sin(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)} \tag{F.74}$$

としたときに

$$\Lambda_1 \sim \frac{i \sinh(\zeta)}{\sin(\lambda - \frac{i}{2}\zeta - \zeta\epsilon - \zeta c\epsilon^N)} \epsilon^{N+1} \tag{F.75}$$

となる。

(b) c を

$$c = 2 \cosh(\zeta) \frac{\sin(i\zeta)}{(\sin(-i\zeta))^N} \zeta^{N-1} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i + \frac{3}{2}i\zeta)}{\sin(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \tag{F.76}$$

としたときに

$$\Lambda_2 \sim \frac{i \sinh(\zeta)}{\sin(\lambda + \frac{i}{2}\zeta - \zeta\epsilon)} \epsilon^{N+1} \quad (\text{F.77})$$

となる。

Proof. (a)

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{i \sinh(\zeta)}{\sin(\lambda - \frac{i}{2}\zeta - \zeta\epsilon - \zeta c \epsilon^N)} \left\{ -(\sin(i\zeta + \zeta\epsilon + \zeta c \epsilon))^N \frac{\sin(\zeta c \epsilon^N)}{\sin(\zeta c \epsilon^N + i\zeta)} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(-\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta + \zeta\epsilon + \zeta c \epsilon)}{\sin(-\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta + \zeta\epsilon + \zeta c \epsilon)} \right. \\ &\quad \left. + (\sin(\zeta\epsilon + \zeta c \epsilon))^N \frac{\sin(-\zeta c \epsilon^N - 2i\zeta)}{\sin(-\zeta c \epsilon^N - i\zeta)} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i - \frac{3i}{2}\zeta - \zeta\epsilon - \zeta c \epsilon)}{\sin(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta - \zeta\epsilon - \zeta c \epsilon)} \right\} \\ &\sim \frac{i \sinh(\zeta)}{\sin(\lambda - \frac{i}{2}\zeta - \zeta\epsilon - \zeta c \epsilon)} \left\{ -(\sin(i\zeta))^N \frac{\sin(\zeta c \epsilon^N)}{\sin(i\zeta)} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)}{\sin(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \right. \\ &\quad \left. + (\sin(\zeta\epsilon))^N \frac{\sin(2i\zeta)}{\sin(i\zeta)} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sin(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \right\} \quad (\text{F.78}) \end{aligned}$$

ここで次の二つの関係について確認する。

$$\frac{\sin(2i\zeta)}{\sin(i\zeta)} = \frac{2 \sin(i\zeta) \cos(i\zeta)}{\sin(i\zeta)} = 2 \cos(i\zeta) = 2 \cosh(\zeta) \quad (\text{F.79})$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\zeta c \epsilon^N)}{(\sin(\zeta\epsilon))^N} &= \frac{\zeta c \epsilon^N - \frac{1}{3!}(\zeta c \epsilon^N)^3 + \dots}{\left((\zeta\epsilon) - \frac{1}{3!}(\zeta\epsilon)^3 + \dots \right)^N} \\ &= \frac{\zeta c \epsilon^N - \frac{1}{3!}(\zeta c \epsilon^N)^3 + \dots}{(\zeta\epsilon)^N - \frac{1}{3!}N(\zeta\epsilon)^{N+2} \dots} \\ &\sim \frac{\zeta c}{\zeta^N} = \zeta^{1-N} c \quad (\text{F.80}) \end{aligned}$$

この二つの関係式 (F.79)、(F.80) を (F.78) に代入して

$$\begin{aligned} (\text{F.78}) \sim & \frac{i \sinh(\zeta) (\sin(\zeta\epsilon))^N}{\sin(\lambda - \frac{i}{2}\zeta - \zeta\epsilon - \zeta c \epsilon^N)} \left\{ -(\sin(i\zeta))^{N-1} \zeta^{1-N} c \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)}{\sin(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} + 2 \cosh(\zeta) \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sin(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \right\} \\ & \quad (\text{F.81}) \end{aligned}$$

□

Proof. (b) について (a) と同様に計算する。

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= \frac{i \sinh(\zeta)}{\sin(\lambda - \lambda_2)} \left\{ -(\sin(\zeta\epsilon))^N \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1 - i\zeta)}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_i - i\zeta)}{\sin(\lambda_2 - \lambda_i)} \right. \\
&\quad \left. + (\sin(-i\zeta + \zeta\epsilon))^N \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2 - i\zeta)}{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i - \lambda_2 - i\zeta)}{\sin(\lambda_i - \lambda_2)} \right\} \\
&= \frac{i \sinh(\zeta)}{\sin(\lambda - \lambda_2)} \left\{ -(\sin(\zeta\epsilon))^N \frac{\sin(-2i\zeta - \zeta c\epsilon^N)}{\sin(-i\zeta - \zeta c\epsilon^N)} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(-\frac{3}{2}i\zeta + \zeta\epsilon - \lambda_i)}{\sin(-\frac{i}{2}\zeta + \zeta\epsilon - \lambda_i)} \right. \\
&\quad \left. + (\sin(-i\zeta + \zeta\epsilon))^N \frac{\sin(\zeta c\epsilon^N)}{\sin(i\zeta + \zeta c\epsilon^N)} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta - \zeta\epsilon)}{\sin(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta - \zeta\epsilon)} \right\} \\
&\sim \frac{i \sinh(\zeta) (\sin(\zeta\epsilon))^N}{\sin(\lambda - \lambda_2)} \left\{ -2 \cosh(\zeta) \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i + \frac{3}{2}i\zeta)}{\sin(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)} + \frac{(\sin(-i\zeta))^N}{\sin(i\zeta)} \zeta^{1-N} c \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)}{\sin(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)} \right\}
\end{aligned} \tag{F.82}$$

□

(F.74)、(F.76) の二つを同時に満たす条件について議論する。まず特異解の Bethe 仮説方程式を考えると

$$\left(\frac{\sin(\lambda_k + \frac{i}{2}\zeta)}{\sin(\lambda_k - \frac{i}{2}\zeta)} \right)^{N-1} \frac{\sin(\lambda_k - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sin(\lambda_k + \frac{3}{2}i\zeta)} = \prod_{j=3, j \neq k}^l \frac{\sin(\lambda_k - \lambda_j + i\zeta)}{\sin(\lambda_k - \lambda_j - i\zeta)} \tag{F.83}$$

であることが分かる。次に両辺に $\prod_{k=3}^l$ を取ると、

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=3}^l \left(\frac{\sin(\lambda_k + \frac{i}{2}\zeta)}{\sin(\lambda_k - \frac{i}{2}\zeta)} \right)^{N-1} \frac{\sin(\lambda_k - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sin(\lambda_k + \frac{3}{2}i\zeta)} = 1 \\
\Leftrightarrow \prod_{k=3}^l \left(\frac{\sin(\lambda_k + \frac{i}{2}\zeta)}{\sin(\lambda_k - \frac{i}{2}\zeta)} \right)^{N-1} &= \prod_{k=3}^l \frac{\sin(\lambda_k - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sin(\lambda_k + \frac{3}{2}i\zeta)}
\end{aligned} \tag{F.84}$$

であることがわかる。次に、(F.74)=(F.76) から

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\sin(i\zeta))^{N-1}} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i - \frac{3}{2}i\zeta)}{\sin(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)} &= \frac{\sin(i\zeta)}{(\sin(-i\zeta))^N} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i + \frac{3}{2}i\zeta)}{\sin(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \\
\Leftrightarrow 1 &= \underbrace{\left(\frac{\sin(i\zeta)}{-\sin(i\zeta)} \right)^N}_{(-1)^N} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)}{\sin(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \frac{\sin(\lambda_i + \frac{3}{2}i\zeta)}{\sin(\lambda_i - \frac{3}{2}i\zeta)}
\end{aligned} \tag{F.85}$$

となる。これに (F.84) を代入すると

$$\begin{aligned}
1 &= (-1)^N \prod_{k=3}^l \left(\frac{\sin(\lambda_k + \frac{i}{2}\zeta)}{\sin(\lambda_k - \frac{i}{2}\zeta)} \right)^N \\
&= \left(- \prod_{k=3}^l \frac{\sin(\lambda_k + \frac{i}{2}\zeta)}{\sin(\lambda_k - \frac{i}{2}\zeta)} \right)^N
\end{aligned} \tag{F.86}$$

となる。したがって、これが満たされると仮定すると (F.73)、(F.75)、(F.77) から今回仮定した正則化を用いた特異解が Hamiltonian の固有ベクトルに収束することがわかる。

F.2.2 Massive XXZ 鎖の特異解に対応するエネルギー

本節では、[32] に沿って (1)~(6) のステップで massive XXZ 鎖の特異解に対応するエネルギーを求める。

(1) エネルギー固有値 ϵ は

$$\epsilon_{massive}^{XXZ} = \frac{1}{2} \left\{ i \sinh(\zeta) \frac{d}{d\lambda} \log \Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_l) \Big|_{\lambda=\frac{i}{2}\zeta} - \cosh(\zeta) N \right\} \quad (\text{F.87})$$

と求められる。ここで計算を簡単にするために $\tilde{\epsilon}$ を

$$\tilde{\epsilon} = i \frac{d}{d\lambda} \log \Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_l) \Big|_{\lambda=\frac{i}{2}\zeta} = i \frac{\frac{d\Lambda}{\Lambda}}{\Lambda} \Big|_{\lambda=\frac{i}{2}\zeta} \quad (\text{F.88})$$

と定義する。

(2) $\tilde{\epsilon}$ の分母を計算する。

$$\begin{aligned} \epsilon_{deno} &= \Lambda\left(\frac{i}{2}\zeta, \lambda_1, \dots, \lambda_l\right) \\ &= \{i \sinh(\zeta)\}^N \frac{\sin(\zeta\epsilon + \zeta c\epsilon^N + i\zeta)}{\sin(\zeta\epsilon + \zeta c\epsilon^N)} \frac{\sin(\zeta\epsilon)}{\sin(\zeta\epsilon - i\zeta)} \end{aligned} \quad (\text{F.89})$$

(3) 次の恒等式を確認する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \frac{\sin(\lambda - \lambda_j - i\zeta)}{\sin(\lambda - \lambda_j)} &= \frac{d}{d\lambda} \left(\cos(i\zeta) - \sin(i\zeta) \frac{\cos(\lambda - \lambda_j)}{\sin(\lambda - \lambda_j)} \right) \\ &= i \frac{\sinh(\zeta)}{\sin^2(\lambda - \lambda_j)} \end{aligned} \quad (\text{F.90})$$

この恒等式を用いると

$$i \frac{d\Lambda}{d\lambda} = A_0(\lambda) + \sum_{j=1}^l A_j(\lambda) + \left[\text{terms containing as least one} \left(\lambda - \frac{i}{2}\zeta \right) \right] \quad (\text{F.91})$$

であることがわかる。ただし、

$$A_0(\lambda) = iN \left(\sin\left(\lambda + \frac{i}{2}\zeta\right) \right)^{N-1} \cos\left(\lambda + \frac{i}{2}\zeta\right) \prod_{i=1}^l \frac{\sin(\lambda - \lambda_i - i\zeta)}{\sin(\lambda - \lambda_i)} \quad (\text{F.92})$$

であり、また $j = 1, 2, \dots, l$ に対して、

$$A_j(\lambda) = i \left(\sin\left(\lambda + \frac{i}{2}\zeta\right) \right)^N \left\{ \prod_{i=1, i \neq j}^l \frac{\sin(\lambda - \lambda_i - i\zeta)}{\sin(\lambda - \lambda_i)} \right\} \frac{i \sinh(\zeta)}{\sin^2(\lambda - \lambda_j)}, \quad (\text{F.93})$$

である。

(4) ここで特異解 $\lambda = \frac{i}{2}\zeta$ に対する A_0 を計算すると

$$A_0\left(\frac{i}{2}\zeta\right) = i \quad (\text{F.94})$$

$$\frac{1}{\epsilon_{deno}} A_0\left(\frac{i}{2}\zeta\right) = N \frac{\cosh(\zeta)}{\sinh(\zeta)} \quad (\text{F.95})$$

(5) 同様に $A_1\left(\frac{i}{2}\zeta\right)$, $A_2\left(\frac{i}{2}\zeta\right)$ も計算する。

$$A_1\left(\frac{i}{2}\zeta\right) = i \left\{ i \sinh(\zeta) \right\}^{N+1} \frac{1}{\sin^2(\zeta\epsilon + \zeta c\epsilon^N)} \frac{\sin(\zeta\epsilon)}{\sin(\zeta\epsilon - i\zeta)} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)}{\sin(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.96})$$

$$A_2\left(\frac{i}{2}\zeta\right) = i \left\{ i \sinh(\zeta) \right\}^{N+1} \frac{1}{\sin^2(\zeta\epsilon + \zeta c\epsilon^N)} \frac{\sin(\zeta\epsilon + \zeta c\epsilon^N + i\zeta)}{\sin(\zeta\epsilon - i\zeta)} \prod_{i=3}^l \frac{\sin(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)}{\sin(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.97})$$

なので、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon_{deno}} \left\{ A_1\left(\frac{i}{2}\zeta\right) + A_2\left(\frac{i}{2}\zeta\right) \right\} = -2 \frac{\cosh(\zeta)}{\sinh(\zeta)} \quad (\text{F.98})$$

(6) 最後に $j = 3, 4, \dots, l$ の場合を計算する。

$$A_j\left(\frac{i}{2}\zeta\right) = i \left\{ i \sinh(\zeta) \right\}^N \frac{\sin(\zeta\epsilon + \zeta c\epsilon^N + i\zeta)}{\sin(\zeta\epsilon + \zeta c\epsilon^N)} \frac{\sin(\zeta\epsilon)}{\sin(\zeta\epsilon - i\zeta)} \left\{ \prod_{i \neq j}^l \frac{\sin(\lambda_i + \frac{i}{2}\zeta)}{\sin(\lambda_i - \frac{i}{2}\zeta)} \right\} \frac{i \sinh(\zeta)}{\sin^2(\lambda_j - \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.99})$$

なので、

$$\frac{1}{\epsilon_{deno}} A_j\left(\frac{i}{2}\zeta\right) = - \frac{\sinh(\zeta)}{\sin(\lambda_j + \frac{i}{2}\zeta) \sin(\lambda_j - \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.100})$$

であることがわかる。これらの結果をまとめると、

$$\tilde{\epsilon} = N \frac{\cosh(\zeta)}{\sinh(\zeta)} - 2 \frac{\cosh(\zeta)}{\sinh(\zeta)} - \sum_{j=3}^l \frac{\sinh(\zeta)}{\sin(\lambda_j + \frac{i}{2}\zeta) \sin(\lambda_j - \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.101})$$

であるので、特異解のエネルギーは

$$\epsilon_{massive}^{XXZ} = -\cosh(\zeta) - \frac{1}{2} \sum_{j=3}^l \frac{\sinh(\zeta)^2}{\sin(\lambda_j + \frac{i}{2}\zeta) \sin(\lambda_j - \frac{i}{2}\zeta)} \quad (\text{F.102})$$

であることがわかる。

関連図書

- [1] M. Suzuki, 1976 *Prog. Theor. Phys.*, **56** 1454.
- [2] S. R. White, 1992 *Phys. Rev. Lett.*, **69** 2863.
- [3] S. R. White, 1993 *Phys. Rev. B*, **48** 10345.
- [4] I. P. McCulloch, 2008 arXiv:0804.2509.
- [5] M. Fannes, B. Nachtergaele, and R. F. Werner, 1992 *Commun. Math. Phys.*, **144**, 443.
- [6] G. Vidal, 2003 *Phys. Rev. Lett.*, **91** 147902.
- [7] G. Vidal, 2004 *Phys. Rev. Lett.*, **93** 040502.
- [8] G. Vidal, 2007 *Phys. Rev. Lett.*, **98** 070201.
- [9] H. Bethe, 1931 *Z.Phys.*, **71** 205-226.
- [10] L. Hulthén, 1938 *Arkiv Mat., Astr.Fys.* **26A**, 1.
- [11] R. Orbach, 1958 *Phys. Rev.* **112**, 309.
- [12] L. R. Walker, 1959 *Phys. Rev.* **116**, 1089.
- [13] C. N. Yang and C. P. Yang, 1966 *Phys. Rev.* ,**150** 321.
- [14] M. Takahashi, 1971 *Prog. Theor. Phys.* ,**46** 401.
- [15] M. Takahashi, 1999 *Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models*, (Cambridge:Cambridge University Press).
- [16] M. Takahashi and M. Yamada, 1985 *J. Phys. Soc. Jpn.* **54** 2808.
- [17] M. Yamada and M. Takahashi, 1986 *J. Phys. Soc. Jpn.* **55** 2024.
- [18] P. Schlottmann, 1986 *Phys. Rev. B* **33** 4880.
- [19] P. Schlottmann, 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 2131.
- [20] X. Zotos, 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1764.
- [21] X. Zotos, F. Naef and P. Prelovsek, 1999 arXiv:cond-mat/9906441v1.

- [22] A. A. Vladimirov, 1984 *Phys. Lett. A* **105** 418-420.
- [23] F. H. L. Essler, V. E. Korepin and, K. Schoutens, 1992 *J. Phys. A:Math. Gen.*,**25** 4115.
- [24] K. Isler and M. P. Paranjape, 1993 *Phys. Lett. B*,**319** 209.
- [25] A. Ilakovac, M. Kolanović, S. Pallua, and P. Prester, 1999 *Phys. Rev. B*,**60** 7271.
- [26] Y. Morita, M. Kohmoto, and T. Koma, 1997 *J. Stat. Phys.*,**88** 745.
- [27] T. Deguchi and P. R. Giri, 2016 *J. Phys. A:Math. Theor.*,**49** 174001.
- [28] F. Woynarovich, 1982 *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** 2985.
- [29] O. Babelon, H. J. de Vega, and C. M. Viallet, 1983 *Nucl Phys. B* **220**13-34.
- [30] S. V. Kerov, A. N. Kirillov, and N. Yu. Reshetikhin, 1988 *J. Sov. Math.***41** 916-924.
- [31] A. N. Kirillov, and N. Yu. Reshetikhin, 1988 *J. Sov. Math.***41** 925-955.
- [32] A. N. Kirillov, and R. Sakamoto, 2014 *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** 205207.
- [33] T. Deguchi, and P. R. Giri, 2015 *J. Stat. Mech.* P02004.
- [34] P. R. Giri and T. Deguchi, 2015 *J. Stat. Mech: Theor. Exp.* P07007.
- [35] R. Sakamoto, 2015 *J. Phys. A: Math. Theor.* **48** 165201.
- [36] A. N. Kirillov and Sakamoto, 2016 *Nucl. Phys. B***905** 359-372.
- [37] T. Koma, 1987 *Prog. Theor. Phys.* **78** 1213-1218.
- [38] T. Koma, 1989 *Prog. Theor. Phys.* **81** 783-809.
- [39] A. Klümper, 1992 *Ann. Physik* **1**(7) 540-553.
- [40] A. Klümper, 1993 *Z. Physik. B* **91**(4) 507.
- [41] A. Klümper, 2004 *Lect. Notes in Phys.* **645**(4) 349-379.
- [42] A. Klümper and K. Sakai, 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** 2173.
- [43] K. Sakai, 2007 *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** 7523.
- [44] A. A. Vladimirov, 1986 *Theor. Math. Phys.*,**66** 102.
- [45] 加藤祐輔, 麦林布道, 関根克彦, 1972 数理解析研講究録, **159**: 69-89.
- [46] S. Katsura, 1965 *Ann. Phys.*,**31** 325.
- [47] T. Fujita, T. Kobayashi, and H Takahashi, 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 1553-1564.

- [48] L. V. Avdeev and A. A. Vladimirov, 1987 *Theor. Math. Phys.* **69** 1071.
- [49] R. I. Nepomechie and C. Wang, 2013 *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** 325002.
- [50] R. I. Nepomechie and C. Wang, 2014 *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** 505004.
- [51] A. N. Kirillov and R. Sakamoto, 2015 *Moscow. Math. J.* **15** 337-352.
- [52] R. Siddharthan, 1998 arXiv:cond-mat/9804210.
- [53] W. Hao, R. I. Nepomechie, and A. J. Sommes, 2013 *Phys. Rev. E.* **88** 052113.
- [54] W. Hao, R. I. Nepomechie, and A. J. Sommes, 2014 *J. Stat. Mech: Theor Exp.* **2014** P03024.
- [55] T. Koma and H. Ezawa, 1987 *Prog. Theor. Phys.*, **78** 1009.
- [56] A. N. Kirillov, 1983 *Zap. Nauch. Semin. LOMI*, **131**, 88-105 (in Russian); 1985 *J. Soviet. Math.*, **30**, 2298-3310.
- [57] A. N. Kirillov, 1985 *Zap. Nauch. Semin. LOMI*, **134**, 169-189 (in Russian); 1987 *J. Soviet. Math.*, **36**, 115-128.
- [58] R. Baxter, 2002 *J. Stat. Phys.*, Vol. **108**. Nos. (1-2) 1-48.
- [59] R. P. Langlands and Y. Saint-Aubin, 1997 *Advances in Mathematical Sciences*, CRM Proc. Lect. Note, Vol. 11.(Amer. Math. Soc.), pp. 231-301.
- [60] V. Tarasov, 2018 *Reviews in Mathematical Physics*, Vol. **30**., No. **08**., 1840018.
- [61] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, 2009 *Commun. Math. Phys.*, **288** 1-42.
- [62] K. Fabricius and B. M. McCoy, 2001 *J. Stat. Phys.* **103** 647-678.
- [63] K. Fabricius and B. M. McCoy, 2001 *J. Stat. Phys.* **104** 573-587.
- [64] A. Kuniba, T. Nakanishi, 2000 *Prog. in Math.*, **191** 185-216.
- [65] 国場敦夫, 2011 「ベータ仮説と組み合わせ論」, 朝倉書店.
- [66] R. Hagemans and J.-S. Caux, 2007 *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** 14605-14647.
- [67] T. Fukuhara, P. Schauß, M. Endres, S. Hild, M. Cheneau, I. Blach, and C. Gross, 2013 *Nature*, **502**, 76.
- [68] M. Rigol, V. Dunjko, V. Yurovsky, and M. Olshanii, 2007 *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 050405.
- [69] M. Rigol, V. Dunjko, and M. Olshanii, 2008 *Nature*, **452**, 854-858.
- [70] E. Ilievski, J. De Nardis, B. Wouters, J.-S. Caux, F. H. L. Essler, and T. Prosen, 2015 *Phys. Rev. Lett.*, **115**, 157201.

- [71] T. Deguchi, P. R. Giri, R. Hatakeyama, 2015 arXiv:1507.07470v1.
- [72] J.-S. Caux and F. H. L. Essler, 2013 *Phys. Rev. Lett.*, **110** 257203.
- [73] J.-S. Caux, 2016 *J. Stat. Mech.*, 064006.
- [74] E. Ilievski, E. Quinn, J. D. Nardis, and M. Brockmann, 2016 *J. Stat. Mech.*, 063101.
- [75] R. J. Baxter, 1982 *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, (Academic Press New York).
- [76] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, 1984 *J. Sov. Math.* **24** 241.
- [77] N. Beisert, J. A. Minahan, M. Staudacher and K. Zarembo, 2003 *J. Phys. High Energy Phys.* JHEP09 (2003)010.
- [78] P. R. Giri and T. Deguchi, 2015 *J. Phys. A: Math. Theor.* **48** 175207.
- [79] T. Deguchi, 2001 *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34** 9755.
- [80] N. A. Slavnov, 1989 *Teor. Mat. Fiz.*, **79** 232.
- [81] N. A. Slavnov, 1990 *Teor. Mat. Fiz.*, **82** 389.
- [82] N. A. Slavnov, 2007 *Russ. Math. Surv.*, **62** 727.
- [83] M. Gaudin, B. M. McCoy, T. T. Wu, 1981 *Phys. Rev. D.*, **23** 417-419.
- [84] M. Gaudin, 1983 *La fonction d'onde de Bethe*, (Paris: Masson)
M. Gaudin. 2014 *The Bethe Wavefunction*, (Cambridge: Cambridge University Press) (translation by J.-S. Caux).
- [85] V. E. Korepin, 1982 *Commun. Math. Phys.*, **86** 391.
- [86] T. Imoto, J. Sato, T. Deguchi, 2018 *J. Phys. A: Math. Theor.*, **52** 035203.
- [87] 堺和光, 2006 物性研究, **87-2** 214-266.
- [88] 出口哲生, 2000 物性研究, **74-3** 255-319.
- [89] 出口哲生, 2015 物性研究・電子版, Vol. 4, No. 1 041204.
- [90] R. Sakamoto, 2017 arXiv:1704.01650.
- [91] 佐藤純, 2017 物性研究・電子版, Vol. 6, No. 4 064233.
- [92] 南和彦, 2014 数理科学 SGC ライブラリ 108 サイエンス社.