論文の内容の要旨

論文題目 $S = 1/2$ XXZ 鎖の two-down-spin sector における two-string 解の崩壊と新たな解の出現に関する厳密な研究

Exact study on the collapse of two-string solutions and the emergent extra string solutions in the two-down-spin sector of the $S = 1/2$ XXZ chain

氏名 井元隆史

一次元量子可積分系の代表的な解析手法は Bethe 仮説である。Bethe 仮説は模型に対応する Bethe 仮説方程式と呼ばれる方程式の解を求めることによってもともとの模型のエネルギー固有値と固有ベクトルが求まるというものである。しかし、Bethe 仮説方程式の解は厳密に求められていない。本論文では、代表的な量子可積分系である XXZ 鎖を考える。そのハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N}\left(\sigma_j^X\sigma_{j+1}^X + \sigma_j^Y\sigma_{j+1}^Y + \Delta\left(\sigma_j^Z\sigma_{j+1}^Z\right)\right),\ \sigma_{N;1}^a = \sigma_1^a \tag{1}$$

のように与えられる。ただし、N をサイト数、$\sigma^a(a = X, Y, Z)$ をスピン演算子とし、Δ を異方性パラメータとする。この模型の磁化 $\sum_{j=1}^{N} S^z$ は保存量なので、模型の解空間は下向きスピンの数で指定された互いに独立な部分空間に分けられる。今回、特に $\Delta > 1$ の massive XXZ 模型における two-down-spin sector の場合に着目し、Bethe 仮説方程式の解析を Bethe 量子数（後出）を用いて行った。

Two-down-spin sector の場合には Bethe 仮説方程式の解は、Bethe 仮説方程式の解に対する拘束条件から、実数解と呼ばれる実数二つの組で構成される解と複素解と呼ばれる実数でない複素数とその共役の複素数から構成される解に分類されることが 1986 年に Vladimirov によって報告されている。1993 年に Essler-Korepin-Schoutens によって XXX 鎖の場合にサイト数 N が 21.86 を超えると string 仮説に予言される複素解のうち一

組が実解になる collapse と呼ばれる現象が起こることが報告されている。また, 2016 年には出口-Giri によって, $\Delta = 1$ の two-down-spin の XXX 鎖において、厳密な量子数が特異解を含めてすべて求められ、また複素解が実解に collapse する個数が解析的に求められた。これらの例からわかるように、string 仮説で予言されている複素解および実解の個数は、厳密な計算とは異なっている可能性があったが、XXZ 鎖の場合に関しては、その詳細はわかっていなかった。

本論文では, massive XXZ 模型のパラメタである $\Delta(>1)$ と N の関数として, string 仮説の予想が破れて collapse が起こる領域を厳密に同定し、さらに, extra-two-string 解と呼ばれる、予想よりも一組多い複素解が出現することを初めて明らかにした。Collapse 解と extra-two-string 解は排他的であり、特に $N \to \infty$ の極限では collapse 解は $\Delta = 1$ においてしか存在せずすべての $\Delta > 1$ で extra-two-string 解出現領域となることなども明らかにした。一般に量子多体系の解析は近似的、数値的な手法をもってしても困難であることから, 厳密に計算できる模型は物理的にも重要であり、近似を用いた数値計算手法の精度を測るためにも重要である。その応用例として、近年の平衡状態の熱化の有無を同定することなどが挙げられるが、今回の結果は、物理的に重要な問題を精査する基準として参考となると考えている。

具体的には以下のような解析を行った。まず、Bethe 仮説方程式を数値的に解くための方法として、Bethe 仮説方程式の両辺を対数を取るやり方がある。このとき、対数関数の分岐を指定するものを Bethe 量子数と呼ぶ。適切に Bethe 量子数を指定することによって対応する有限系の Bethe 仮説方程式の解を数値的に求めることができる。対数形式の Bethe 仮説方程式は

$$2\tan^{-1}\left(\frac{\tan\lambda_1}{\tanh(\zeta/2)}\right) = \frac{2\pi}{N}J_1 + \frac{2}{N}\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_1-\lambda_2)}{\tanh\zeta}\right) \tag{2}$$

$$2\tan^{-1}\left(\frac{\tan\lambda_2}{\tanh(\zeta/2)}\right) = \frac{2\pi}{N}J_2 + \frac{2}{N}\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_2-\lambda_1)}{\tanh\zeta}\right) \tag{3}$$

と表せる。ただし、λ_1, λ_2 をこの Bethe 仮説方程式の解、$\Delta = \cosh\zeta$ を満たすものとし、J_1, J_2 を Bethe 量子数とする。

(i) 複素解について考える。Bethe 仮説方程式の解を $\lambda_1 = x + \frac{i}{2}\zeta + i\delta$、$\lambda_2 = x - \frac{i}{2}\zeta - i\delta$ と置く。ただし、$x, \delta \in \mathbb{R}$ とし、i 虚数単位とする。ここで w を次のように導入する

$$w \equiv \frac{\tanh(\zeta/2+\delta)}{\tanh(\zeta/2)}$$

tangent 関数及び、Arctangent 関数を展開することによって一つ目の対数形式の Bethe 仮説方程式 (2) を実部と虚部に分け、Bethe 仮説方程式の虚部を拘束条件として Bethe 仮説方程式の実部をについて解析する。Bethe 仮説方程式の Bethe 量子数に関する項とその他の項を分けるように移項し、その他の項から counting function $Z_1(w)$ を

$$2\pi Z_1(w) = 2\tan^{-1}\left(\frac{\lambda_1}{\tanh(\zeta/2)}\right) - \frac{1}{N}2\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_1-\lambda_2)}{\tanh\zeta}\right) \tag{4}$$

を満たすように定義する。このとき、Bethe 仮説方程式は

$$Z_1(w) = \frac{J_1}{N} \tag{5}$$

と表せる。Counting function Z_1 の形が求まると、Bethe 量子数 J_1 を指定したときに Bethe 仮説方程式の解である $w \geq 0$ を求めることができる。また, 量子数 J_1 がわかれば、もう一方の量子数 J_2 の値も、対数形式の Bethe 仮説方程式 (3) に対する解析を使って求めることができる。

そこで、我々は Counting function $Z_1(w)$ を解析し、Bethe 量子数の取りうる範囲を求め、複素解の数について数え上げた。その結果、図 1 のように N と ζ(あるいは Δ) について、collapse する個数ごとの領域を解析的に求めることができた。さらに、Δ が大きな領域 (図 1 を参照) で collapse とは逆に複素解が string 仮説で予言される数よりも一組増える現象が起こることを新たに見出した。この増えた解を extra-two-string 解と命名する。これは massive XXZ 鎖特有の現象である。この結果は解析的に厳密だが, counting function $Z_1(w)$ の一部の範囲の単調性については数値的に確認したものとなっている。

また、図 1 の破線より上の領域において, 複素解:$\lambda_1 = x + \frac{i}{2}\zeta + i\delta, \lambda_2 = x - \frac{i}{2}\zeta - i\delta$ と string 仮説によって予言される複素解の形である完全 string 解:$x + \frac{i}{2}\zeta, x - \frac{i}{2}\zeta$ との差がそれぞれ $O(\exp(-dN))$ であることを解析的に示すことができた。このことから、XXZ 鎖の真に厳密な解は extra-two-string 解を含め $N \to \infty$ で string 解に一致する。XXX 鎖においてはこのような現象は起こらない。一方, $N = \infty$ の極限では extra-two-string 解の領域が $\Delta > 1$ となり、これと排他的な collapse 領域は $\Delta = 1$ の XXX 鎖の場合に限られる。今回得られた解に関して $\Delta \to 1$ の極限は N によらず出口-Giri による XXX 鎖の結果に一致することも確認された。

(ii) 実解に関しては対数形式の Bethe 仮説方程式 (2) の解を $\lambda_1 = x + \frac{1}{2}\gamma\zeta, \lambda_2 = x - \frac{1}{2}\gamma\zeta$ と置く。ただし $x, \gamma \in \mathbb{R}$ とする。複素数の場合と異なり, Bethe 仮説方程式 (2) は実数となるため、二変数に対して一つの Bethe 仮説方程式のみでは、解が一意に定まらず counting function を確定できない。そこでやや技巧的な工夫により、Bethe 仮説方程式の $\tan^{-1}\left(\frac{\tan\lambda_1}{\tanh(\zeta/2)}\right)$ 及び、$\tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_1 - \lambda_2)}{\tanh\zeta}\right)$ を複素数に分割し、実解に関する counting fuction を構築した。その結果、複素解の場合と同様に Bethe 量子数を指定することによって解を求めることができる。

まとめると、今回得られた結果は次のようになる。これらの結果は解析的なものであるが 1〜3 に関しては counting function の一部の範囲の単調性について、数値的に確認したものとなっている。

1. 特異解を含めた複素解に対応する Bethe 量子数の範囲を求めた。
2. String 仮説が予言する複素解の個数と実際の解の個数の関係を確定した (図 1)。
3. 複素解の個数が増えるという XXX 鎖では存在しない現象を発見した。この新たな解を extra-two-string 解と命名し、出現領域をサイト数と異方性パラメータによって特定した (図 1)。
4. サイト数 N が大きい場合、N が大きくしていくにしたがって複素解が指数関数的に完全 string 解に近づくことを解析的に示した (図 1)。
5. Massive-XXZ 鎖の two-down-spin sector に関する Bethe 仮説方程式の実解に関する counting function を求めた。

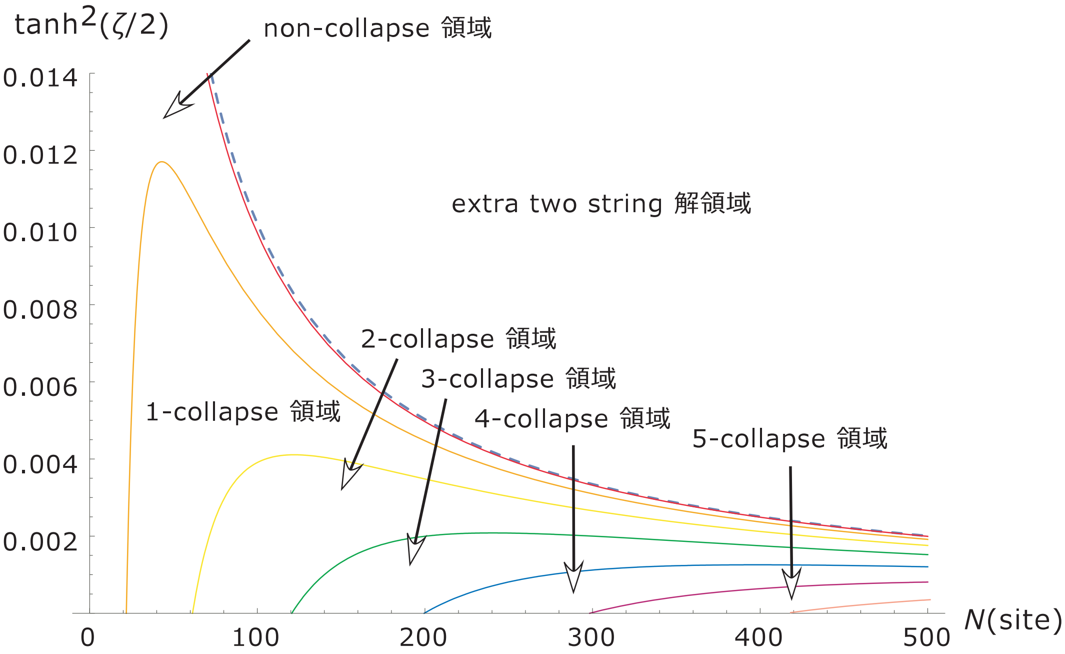

図 1　extra-two-string 解の collapse する複素解の組の個数。図中の m-collapse 領域は collapse した複素解の組が m 個であることを表している。縦軸は、XXZ 鎖の相互作用 J の z 軸方向の異方性を表すパラメータ $\Delta = \cosh\zeta$ に関連した、$\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right)$、横軸はサイト数 N である。$\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) = 0$ が XXX 鎖の場合に相当し、$\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) = \infty$ が Ising 鎖の場合に相当する。また、$N \to \infty$ としたときは異方性パラメータ $\Delta > 1$(すなわち $\tanh^2\left(\frac{\zeta}{2}\right) > 0$) の領域はすべて、extra-two-string 解を持つ領域になる。破線より上の領域では複素解が string 仮説によって予言される完全 string 解との差が $O(\exp(-dN))$ となる。