

審査の結果の要旨

氏名 井元隆史

$S=1/2$ の XXZ スピン鎖は、一次元量子可積分系の代表例であるとともに統計力学の諸問題および固体物性の磁性を理解する上での標準的な模型の一つである。1931年に提唱された Bethe 仮説方程式の解を求めることにより、元々の模型のエネルギー固有値及び固有ベクトルが得られることが知られており、基底状態に関してはすべての解が実数となることに準拠した厳密解が得られている。

有限温度においては Bethe 仮説方程式の解について足しあげが必要となるがそれを実行することは容易ではなく、1971年になって高橋が string 解という特定の解の形式を仮定することで自由エネルギーをはじめとする熱力学量を求めることに成功している。またその後の研究で、string 仮説を利用しない量子転送行列によってより多くの物理量が数値的に得られている。このように熱力学極限での有限温度の物理量に関しては、概ね経験則的に正しい結果が得られることが広く受け入れられている一方で、有限サイズの系で、真に厳密な解に対してこれらの仮説の正当性が定量的および定性的にどの程度担保されるものかは一部の例を除き殆どわかっていなかった。

井元隆史氏の学位請求論文は、イジング異方性の強い反強磁性 massive XXZ 模型において全スピンのうち2つが下向きの場合に（以後 two-down-spin sector と呼ぶ）特異解も含めた複素解のすべてを仮定なしに厳密に導出した結果をまとめたものである。

本論文は、5章からなり、第2章では、相互作用に異方性のない massless XXX 模型における代数的 Bethe 仮説の定式化、および Bethe 仮説方程式の両辺が発散する解である特異解の過去の取り扱いについてまとめている。更に本論文の内容と直結する XXX 模型の two-down-spin sector における先行研究として、複素解がペアになって実解に還元される collapse と呼ばれる現象の発見、および collapse 領域の同定に成功した手法について詳しく言及している。第3章は massive XXZ 鎖の複素解についてのオリジナルな解析結果をまとめている。対数形式の Bethe 仮説方程式を実部と虚部に分け、Bethe 量子数が満たすべき条件を整理し、そこから系のサイズ N および異方性パラメタの関数である counting function を定義した。この counting function が Bethe 量子数と一致するような量子数の取りうる範囲を同定し、その個数を数え上げることで方程式の持つ解の分布およびその値を実際に求めることに成功している。Massive XXZ 鎖の場合はこの counting function の取り扱いに特定の工夫を要し、正面から扱おうと N 次多項式を解くという解析不可能な問題に陥るところを、代わりに二次関数の係数を整理して解析的に厳密に解ける条件式に落とし込むことで問題を解決している。その結果、異方性と N がともに小さな領域では、XXX 鎖と類似した collapse 現象が逐次的に起こる領域があらわれるものの、その領域が異方性

と N の増大とともに冪的に減少し、熱力学極限で消失することが明らかになった。更に collapse 領域におきかわる形で、逆に実解1ペアが複素解に転化する現象が支配的になることを新たに見出した。井元氏らはこの解を extra-two-string 解と命名している。もともと string 仮説では システムサイズ N に対して $N-3$ 個の複素解が存在するという要請があったが、本結果は解空間における実解と複素解の分布が、厳密な計算においては string 仮説で予言されたものとは異なっていることを示している。特に extra-two-string 解の出現は massive XXZ 模型で初めて見つかった現象であり、数理科学的に新規な発見といえる。また、得られた $N-1$ 個の複素解が、string 解へとシステムサイズの指数関数程度のずれで熱力学極限に向かって外挿されることを初めて厳密に示した。このような外挿は異方性のない XXX 模型では起こらない。このことから massive XXZ 模型独自の string 仮説の安定性を示したことになる。第4章では、実解に関して複素解と類似した counting function による解析を示している。この解析は厳密な意味で完成した定式化には至ってはいないものの、本論文全体として massive XXZ 模型の解空間に関してまとまった理解を与えるうえでの役割を果たしており、今後の研究の発展にも有意義なものとなっている。

以上のように、井元氏の論文はこれまで知られていなかった反強磁性 massive XXZ 鎖の two-down-spin sector での真に厳密な解の全貌を明らかにしたものであり、これまで経験則的にほぼ厳密であると信じられてきた string 解との関係、およびその破れの具合を実際に示し、かつその有用性がどの程度のサイズやパラメタ領域で数理的に保証されるかに関しても定量的に提示している。数理的な手法上も、Bethe 仮説方程式に対する独特の工夫により計算の困難を乗り越えており、一定の進展を与えている。

なお本論文は、出口哲生氏および佐藤純氏との共同研究に基づいているが、佐藤氏は counting function の単調性を過去に数値的に評価した未発表の結果で井元氏の解析的な結果を保証したという寄与が明確であり、また上記の解析計算本体や主要な工夫に関しての寄与は本人によるものであることも認められている。ゆえに、論文審査委員会は全員一致で博士(学術)の学位授与が適当であると認めた。