

博士論文

丁-庵原-三木代数に付随する可積分波動方程式

(Integrable wave equations associated with Ding-Iohara-Miki algebra)

渡邊 聡



# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>序論</b>	7
1.1	特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式 (単独方程式の場合) . . . . .	7
1.1.1	Intermediate long wave 方程式 . . . . .	7
1.1.2	丁-庵原-三木代数 . . . . .	8
1.1.3	丁-庵原-三木代数の古典極限 . . . . .	8
1.2	特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式 ( $N$ 成分系の場合) . . . . .	9
1.2.1	$\mathfrak{gl}(2)$ generalized Intermediate long wave 方程式と $\mathfrak{gl}(2)$ generalized Benjamin-Ono 方程式 . . . . .	9
1.2.2	Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数 . . . . .	9
1.2.3	Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数の古典極限 . . . . .	9
1.2.4	3 成分以上の多成分化 . . . . .	10
1.3	主結果 . . . . .	10
1.4	本論文の構成 . . . . .	11
<b>第 2 章</b>	<b>特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式 (単独方程式の場合)</b>	15
2.1	Intermediate long wave(ILW) 方程式 . . . . .	15
2.1.1	Intermediate long wave(ILW) 方程式の定義 . . . . .	15
2.1.2	Intermediate long wave(ILW) 方程式の極限 . . . . .	17
2.2	Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式 . . . . .	18
2.2.1	Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式の定義 . . . . .	18
2.2.2	Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式の極限 . . . . .	20
2.3	離散 Laplacian 付き Periodic Intermediate long wave( $q$ -PILW) 方程式 . . . . .	22
2.3.1	離散 Laplacian 付き Periodic Intermediate long wave( $q$ -PILW) 方程式の 定義 . . . . .	22
2.3.2	Periodic Intermeiate long wave(PILW) 方程式への極限 . . . . .	24
2.4	離散 Laplacian 付き Periodic Benjamin-Ono( $q$ -PBO) 方程式 . . . . .	26
<b>第 3 章</b>	<b>特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式 (<math>N</math> 成分系への拡張)</b>	31
3.1	Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数の定義 . . . . .	31
3.2	Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数と可積分構造 . . . . .	33
3.2.1	Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数の古典極限と $\mathfrak{gl}(2)$ generalized Benjamin-Ono 方程式 . . . . .	33

3.2.2	$\mathfrak{gl}(2)$ generalized Benjamin-Ono 方程式と bidirectional Benjamin-Ono 方程式の従属変数変換 . . . . .	35
3.3	特異積分項を持った可積分非線形波動方程式の $N$ 成分系への一般化 . . . . .	36
<b>第 4 章</b>	<b>丁-庵原-三木代数の Fock 表現と quasi-Hopf twist</b>	<b>39</b>
4.1	丁-庵原-三木代数の定義と Fock 表現 . . . . .	39
4.1.1	丁-庵原-三木代数の定義 . . . . .	39
4.1.2	丁-庵原-三木代数の Fock 表現 . . . . .	41
4.2	丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist . . . . .	44
4.2.1	丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist . . . . .	45
4.2.2	丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の Fock 表現 . . . . .	46
<b>第 5 章</b>	<b>丁-庵原-三木代数の Fock 表現の古典極限と特異積分項を持った可積分非線形波動方程式 (単独方程式の場合)</b>	<b>49</b>
5.1	丁-庵原-三木代数の古典極限と $q$ -PBO . . . . .	49
5.2	丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の古典極限と $q$ -PILW . . . . .	55
<b>第 6 章</b>	<b>丁-庵原-三木代数の <math>N</math> 階テンソル表現の古典極限と特異積分項を持った可積分非線形波動方程式 (<math>N</math> 成分系への拡張)</b>	<b>59</b>
6.1	丁-庵原-三木代数の $N$ 階テンソルの古典極限の連立波動方程式 . . . . .	59
6.1.1	丁-庵原-三木代数の $N$ 階テンソル積表現と古典極限 . . . . .	59
6.1.2	古典極限と $N$ 成分相互作用の連立波動方程式 . . . . .	62
6.1.3	$N = 2$ のときの連立波動方程式と $\mathfrak{gl}(2)$ generalized Benjamin-Ono 方程式について . . . . .	65
6.2	丁-庵原-三木代数の $N$ 階テンソルの古典極限と双線形方程式 . . . . .	67
6.2.1	$N$ 階テンソルの古典極限と $q$ -PBO の多成分拡張の双線形方程式 . . . . .	67
6.2.2	もう一つの時間 $\bar{t}$ での微分と双線形方程式 . . . . .	72
6.3	2次元戸田場方程式 . . . . .	73
<b>第 7 章</b>	<b>丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の <math>N</math> 階テンソル表現の古典極限と可積分非線形波動方程式 (<math>N</math> 成分系への拡張)</b>	<b>75</b>
7.1	丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の $N$ 階テンソルの古典極限と双線形方程式 . . . . .	75
7.1.1	丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の $N$ 階テンソルの古典極限 . . . . .	75
7.1.2	quasi-Hopf twist の $N$ 階テンソルの古典極限と $q$ -PILW の多成分拡張の双線形方程式 . . . . .	78
7.1.3	$q$ -PILW の多成分拡張の双線形方程式の極限 . . . . .	80
<b>第 8 章</b>	<b>結論と今後の展望</b>	<b>83</b>
<b>付録 A</b>	<b>Macdonald 対称関数</b>	<b>87</b>
A.1	対称多項式と対称関数 . . . . .	87

A.2	Macdonald 対称関数 . . . . .	88
<b>付録 B</b>	<b>Nekrasov 分配関数</b>	<b>91</b>
B.1	Nekrasov 分配関数の定義 . . . . .	91
B.2	$\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$ の primary 場と AFLT 基底の一意性定理 . . . . .	92
B.3	IM の固有値の縮退 . . . . .	93
<b>付録 C</b>	<b><math>N</math> 成分相互作用の連立波動方程式が閉じた形で書けることの証明</b>	<b>95</b>
<b>付録 D</b>	<b>丁-庵原-三木代数の <math>N</math> 階テンソルの古典極限での <math>\partial_t</math> と <math>\partial_{\bar{t}}</math> が可換性の証明</b>	<b>99</b>
<b>付録 E</b>	<b><math>\Phi^\pm(z)</math> が 2 次元戸田場方程式を満たすことの証明</b>	<b>103</b>
<b>付録 F</b>	<b><math>q</math>-PILW の多成分版の双線形方程式系が成立することの証明</b>	<b>107</b>
F.1	$\alpha_k, \bar{\alpha}_k$ の時間発展 . . . . .	107
F.2	命題の証明 . . . . .	109
<b>参考文献</b>		<b>111</b>



# 第 1 章

## 序論

本論文では丁-庵原-三木代数という量子群の表現を用いて、特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式の多成分への拡張及び差分化を統一的に扱った。そこでまず特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式で単独方程式の場合についての背景を述べたあと、多成分系の場合についての背景を述べる。そして主結果、本論文の構成について述べる。

### 1.1 特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式 (単独方程式の場合)

単独方程式の場合で特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式である Intermediate long wave(ILW) 方程式について述べる。また丁-庵原-三木代数の表現の古典極限を用いることで Intermediate long wave(ILW) 方程式の  $q$  差分化であり可積分であるような方程式が導かれるということについて述べる。

#### 1.1.1 Intermediate long wave 方程式

Intermediate long wave(ILW) 方程式は、有限の深さの密度の異なる 2 層の流体の境界面を伝わる波を記述する方程式であり 1977, 1978 年頃に Joseph, Egri, Kubota, Ko, Dobbs によって [8], [9], [10] において導入された。(以下 ILW 方程式と呼ぶ) この ILW 方程式は特異積分作用素を含む非線形偏微分・積分方程式であり

$$u_t + (1/\delta)u_x + 2uu_x + T[u]_{xx} = 0, \quad (1.1)$$

$$T[f](x) := \frac{1}{2\delta} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \coth \frac{\pi(y-x)}{2\delta} f(y) dy, \quad (1.2)$$

で定義される。 $\delta$  は流体の深さを表す媒介変数であり、 $\delta \rightarrow 0$  の浅水波の極限において Korteweg-de Vries(KdV) 方程式 [1],[2], また  $\delta \rightarrow \infty$  の深水波の極限において Benjamin-Ono(BO) 方程式 [3], [4] に移行する。このように ILW 方程式は浅水波極限 (KdV), 深水波極限 (BO) の中間にある方程式であるため Intermediate long wave 方程式と呼ばれている。ILW 方程式の広田の直接法を用いた  $N$  ソリトン解の導出は [11], [12] においてなされた。また ILW 方程式に対する Bäcklund 変換と無限個の保存量を与える手法は [13] で与えられた。また逆散乱法を用いた初期値問題, および  $N$  ソリトン解の導出は [14], [15] においてなされた。またその後長い間 KP 階層や佐藤理論との関係は知られていなかったが, 2002 年に [18] において変形 KP 階層の簡約との関係が解明され, ILW 方程式を

最低次の order で含むような可積分階層が得られた. また Riemann 面に付随した代数幾何的な解の構成も永年知られていなかったが 2017 年に種数 2 の Riemann 面に付随する解の構成が [22] においてなされた. ILW 方程式の空間方向に周期的な方程式への拡張である Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式は [16] において導入され, また広田の直接法による変換も考察されている. (以下 PILW 方程式と呼ぶ)

### 1.1.2 丁-庵原-三木代数

次に丁-庵原-三木代数について述べる. まず 1997 年に [23] において丁と庵原は量子アフィン代数  $U_q(\widehat{sl}_n)$  の Drinfeld realization のある一般化を提唱した. 彼らは Drinfeld generator で定義される代数の構造関数  $g_{i,j}(z)$  がどんな条件を満たすときに Drinfeld coproduct を持つかについて考察し, Drinfeld realization を一般化した. その後 2007 年に三木が [25] で  $W_{1+\infty}$  代数の  $q$  変形に研究において導入した代数における構造関数が [23] において導入された量子群の Drinfeld realization の条件を満たすことがわかった. よってここで三木が導入した代数を丁-庵原-三木代数 (Ding-Iohara-Miki 代数, DIM) と呼ぶ.

また丁-庵原-三木代数は Macdonald 対称多項式の研究の中においても出現することが 2009 年に [24] において示されている. これは無限変数の対称関数環, 及びそこに作用する Macdonald 作用素を自由ボゾンを用いて表示したときに, Macdonald 作用素を生成する頂点作用素同士の OPE を計算すると丁-庵原-三木代数が表れるというものである, このとき丁-庵原-三木代数の作用する空間はボゾン Fock 空間であり対称関数の空間と同一視される. ここで大事なのは代数の Fock 表現の中で, Macdonald 作用素  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) が無限個の可換な作用素の族, (Integrals of Motion) を成していること, すなわち  $[E_i, E_j] = 0$  ( $i, j \geq 1$ ) となっていることである.

また [24] とほぼ同時期の別の研究 [26],[27],[28],[29],[30] においてもこの代数は現れている.

### 1.1.3 丁-庵原-三木代数の古典極限

丁-庵原-三木代数の Fock 表現において古典極限を考える. 無限個の可換な作用素の族  $[E_i, E_j] = 0$  ( $i, j \geq 1$ ) においてスケーリングしながら  $t \rightarrow 1$  の古典極限を取る. このとき Poisson 可換な無限個の保存量  $\{E_i, E_j\} = 0$  ( $i, j \geq 1$ ) が誘導され, 包含系, すなわち可積分系が導出されることがわかる. ハミルトニアンを  $\eta_0 := E_1$  として  $\partial_t^* := \{\eta_0, *\}$  と時間微分を定義すると, 丁-庵原-三木代数の古典極限から離散 Laplacian 付き Periodic Benjamin-Ono( $q$ -PBO) 方程式という Periodic Benjamin-Ono(PBO) 方程式の差分化が得られることが 2009, 2010 年頃に [20],[21] において示された.

丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の古典極限についても同様に Poisson 可換な無限個の保存量  $\{E_i, E_j\} = 0$  ( $i, j \geq 1$ ) が誘導され, 可積分系においてハミルトニアンから時間発展を定義することができる. このとき離散 Laplacian 付き Intermediate long wave( $q$ -PILW) 方程式という Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式の差分化が得られることは 2009 年に [19] において示された. これは PILW の  $q$  差分類似の可積分非線形波動方程式であり  $q \rightarrow 1$  の極限で PILW 方程式に移行する. そのため単独方程式については丁-庵原-三木代数の表現から ILW 方程式を含む現在知られている非局所型の中で最も一般的な可積分非線形波動方程式の階層が得られたことになる.



## 1.2 特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式 ( $N$ 成分系の場合)

2成分の場合で特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式である  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Intermediate long wave 方程式, 及び  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式について述べる. また丁-庵原-三木代数のときと同様に Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数の古典極限から  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式が得られることを述べる. またこれに関係して研究の動機となっている3成分以上の多成分化について述べる.

### 1.2.1 $\mathfrak{gl}(2)$ generalized Intermediate long wave 方程式と $\mathfrak{gl}(2)$ generalized Benjamin-Ono 方程式

Intermediate long wave(ILW) 方程式の2成分化である  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Intermediate long wave 方程式は1983年に Lebedev, Radul によって [36] において導入された. これは Zhakharov, Shabat の dressing method [39] を Intermediate long wave(ILW) 方程式に用いることで構成されたもので次の形をしている.

$$\begin{cases} u_t + vu_x + 2uv_x + \frac{1}{2}v_{xxx} = 0, \\ v_t + \frac{1}{2}u_x + Tv_{xx} + vv_x = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

(ここで特異積分の項を Benjamin-Ono の特異積分に変えたものが  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式である) この研究で方程式系 (1.3) において Poisson 可換な無限個の保存量が存在することも示された. よってこの方程式系を含む可積分系の階層が存在することもわかった. 1991年には [37], [38] においてこの  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Intermediate long wave 方程式を含む階層に対するミウラ変換, 及び戸田階層との関係についても明らかにされている.

### 1.2.2 Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数

Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数  $\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$  は2011年に Alba, Fateev, Litvinov, Tarnopolskiy によって [33] において導入された. 彼らは Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数の最高ウェイト表現において特殊な直交基底を考察した. この特殊な直交基底は Nekrasov 分配関数に関係していると同時に, この基底によって同時対角化される可換な作用素の族  $[\mathbf{I}_j, \mathbf{I}_k] = 0 (j, k \geq 2)$  (Integrals of Motion) が考察された.

### 1.2.3 Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数の古典極限

代数  $\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$  の古典極限を取ることによって Poisson 可換な保存量  $\{I_j, I_k\} = 0 (j, k \geq 2)$  が誘導され, 包含系, すなわち可積分系が導出されることがわかる. ハミルトニアンを  $I_3$  として  $\partial_t^* := \{I_3, *\}$  と時間微分を定義すると [36] で導入された  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式という可積分波動方程式, 及びその階層が現れることもまた [33] において示された.

### 1.2.4 3成分以上の多成分化

一方, 3成分以上への特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式の拡張は今まで知られていなかった. [33]の研究に関連した多成分化への試みに関しては, 2012年に[34]において Fateev, Litvinov によって導入された  $W_n$  代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数に関連したものがある. この代数についても特殊な直交基底が Nekrasov 分配関数に関係していると同時に, この基底によって同時対角化される可換な作用素の族が存在することが明らかにされた. (この直交基底と Nekrasov 分配関数の関係が [34]の主目的である) 場が多成分になることによって古典極限を取った古典の可積分系にも多成分の従属変数が出現する. しかし今の所, この多成分系は Benjamin-Ono 方程式との関係などは明らかになっていない.

## 1.3 主結果

本研究では丁-庵原-三木代数の  $N$  階テンソル表現とそれに付随する可換な無限個の作用素の族 (Integrals of Motion) を用いることで, Benjamin-Ono 方程式の多成分への拡張及び差分化を統一的に扱った. まず丁-庵原-三木代数の余積は代数射であるから,  $N$  階テンソル表現においても  $[I_j, I_k] = 0$  ( $j, k \geq 1$ ) となる無限個の可換な作用素の族が存在する. よって古典極限においても Poisson 可換な無限個の保存量  $\{I_j, I_k\} = 0$  ( $j, k \geq 1$ ) が誘導され, 包含系, すなわち可積分系が導出されることがわかる. ハミルトニアンを  $X_0 := I_1$  として  $\partial_t * := \{X_0, *\}$  と時間微分を定義する. このとき  $N$  階テンソル表現において  $N$  個の従属変数  $E_1(z), E_2(z), \dots, E_N(z)$  を適切に設定すると,

$$\begin{aligned} \partial_t E_r(z) = & \left( E_1^+(z) - E_1^+(qz) - E_1^-(q^{1-r}z) + E_1^-(q^{-r}z) \right) E_r(z) \\ & + E_{r+1}(qz) - E_{r+1}(z), \quad (r = 1, \dots, N), \\ & (\text{ただし } E_{N+1}(z) = 0), \end{aligned} \quad (1.4)$$

という閉じた方程式系が導出される. これは右辺の括弧の中が従属変数変換をすることで積分で書ける項になっている. この方程式系は副節 1.1.3 で述べた, 丁-庵原-三木代数の表現から導出された離散 Laplacian 付き Periodic Benjamin-Ono ( $q$ -PBO) 方程式 [20],[21] の可積分な  $N$  成分への拡張になっている. よってこの結果によって  $q$  差分化も統一的に扱うことによって特異積分項を持った可積分非線形波動方程式を初めて 3成分以上の一般の  $N$  成分に拡張できた. 特に  $N = 2$  のときのこの連立方程式系

$$\begin{cases} \partial_t X(z) = \left( X^+(z) - X^+(qz) - X^-(z) + X^-(q^{-1}z) \right) X(z) + Y(qz) - Y(z), \\ \partial_t Y(z) = \left( X^+(z) - X^+(qz) - X^-(q^{-1}z) + X^-(q^{-2}z) \right) Y(z), \end{cases} \quad (1.5)$$

の  $\gamma \rightarrow 0$  ( $q \rightarrow 1$ ) の極限で  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式に移行することを示した. つまり  $N = 2$  のときは  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式の  $q$  差分化になっていることがわかった. ( $N = 1$  のときが Benjamin-Ono 方程式の  $q$  差分化である)

丁-庵原-三木代数の  $N$  階テンソル表現とそれに付随する可換な無限個の作用素の族 (IM) とその古典極限から導出される特異積分項を持った  $N$  成分の古典可積分系は [34] の  $q$  差分化による更なる

一般化になっている.  $N = 2$  のときは [33] の一般化になっている. また [33], [34] において IM の明示式までは得られていないが,  $q$  差分化することによって IM の明示式も得ることができる.

また  $N$  階テンソル表現において  $N + 1$  個の  $\tau$  関数,  $\tilde{\tau}_0(z), \tilde{\tau}_1(z), \dots, \tilde{\tau}_N(z)$  に関する次の閉じた連立の広田双線形方程式が成り立つことがわかった.

$$(\partial_t \tilde{\tau}_i(z)) \tilde{\tau}_{i-1}(z) - \tilde{\tau}_i(z) (\partial_t \tilde{\tau}_{i-1}(z)) = \varepsilon_{N-i+1} \tilde{\tau}_{i-1}(qz) \tilde{\tau}_i(q^{-1}z), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.6)$$

さらに  $E_1(z), E_2(z), \dots, E_N(z)$  と  $\tau$  関数  $\tilde{\tau}_0(z), \tilde{\tau}_1(z), \dots, \tilde{\tau}_N(z)$  が従属変数の変換でつながっていることがわかったため, この連立の広田双線形方程式の解を求めることで (1.4) の解も求めることができるということがわかった.

また  $N$  階テンソル表現においてある元  $\Phi^\pm(z)$  が存在して次の 2 次元戸田場方程式を満たすことを示した.

$$\partial_t \partial_t \Phi^\pm(z) = e^{\Phi^\pm(z) - \Phi^\pm(z/q)} - e^{\Phi^\pm(qz) - \Phi^\pm(z)}. \quad (1.7)$$

また  $\Phi^\pm(z)$  は  $\tau_0(z), \tau_N(z)$  と従属変数の変換でつながっていることを示した. ( $\tau_0(z), \tau_N(z)$  は  $\tilde{\tau}_0(z), \tilde{\tau}_N(z)$  をゲージ変換したものである) 2 次元戸田場方程式のソリトン解については [21] で与えられているので, ソリトン解に対応する  $\tau_0(z), \tau_N(z)$  が求められるということがわかった.

次に丁庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の  $N$  階テンソル表現においても無限個の可換な作用素の族が存在する. よって古典極限においても Poisson 可換な無限個の保存量  $\{I_j, I_k\} = 0$  ( $j, k \geq 1$ ) が誘導され, ハミルトン系, すなわち可積分系が導出される. この場合は離散 Laplacian 付き Intermediate long wave( $q$ -PILW) 方程式の  $N$  成分化はまだ得られていないが広田の双線形方程式を先に得ることができた.  $N$  階テンソル表現において  $N + 1$  個の  $\tau$  関数  $\tau_0(z; p), \tau_1(z; p), \dots, \tau_N(z; p)$  に関して次の連立の広田の双線形方程式系

$$\begin{aligned} & (\partial_t \tau_i(z; p)) \tau_{i-1}(z; p) - \tau_i(z; p) (\partial_t \tau_{i-1}(z; p)) \\ & = \varepsilon_{N-i+1} q^{u_{N-i+1}} \tau_{i-1}(qz; p) \tau_i(q^{-1}z; p) - q^{u_{N-i+1}} \Lambda_{N-i+1,0} \tau_{i-1}(z; p) \tau_i(z; p), \quad (i = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\tau_0(pq^{N-1}z; p) = \tau_N(z; p), \quad (1.9)$$

が成り立つことを示した. この双線形方程式系は副節 1.1.3 で述べた離散 Laplacian 付き Intermediate long wave( $q$ -PILW) 方程式 [19] の双線形方程式の多成分の拡張になっている.

本研究の主結果は東大数理の白石潤一准教授, 神奈川工科大の土谷洋平准教授との共同研究によるものであり, 来年度中に投稿予定である.

## 1.4 本論文の構成

ここでは本論文の構成を述べる. 2, 3(3.3 節は除く), 4, 5 章は先行研究のレビューである. 2 章では特異積分項を持った可積分非線形波動方程式で単独方程式の場合をレビューする. Intermediate long wave 方程式がどのように導出されるか簡単にまとめたあと浅水波極限での Korteweg-de Vries(KdV) 方程式への移行, 深水波極限での Benjamin-Ono(BO) 方程式, Periodic Intermediate long wave 方程式における浅水波極限, 深水波極限, 周期無限大の極限での移行, 離散 Laplacian 付き Periodic Intermediate long wave 方程式の  $q \rightarrow 1$  極限, 及び離散 Laplacian 付き Periodic

Benjamin-Ono 方程式についてレビューする.

3 章ではまず特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式で 2 成分の場合をレビューする. Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソルした代数と, その古典極限に  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式が現れること, 及びその従属変数変換について述べる. そして本論文の主結果について簡潔に述べる.

4 章では丁-庵原-三木代数の定義と Fock 表現, 及び丁-庵原-三木代数の楕円変形である quasi-Hopf twist の定義と Fock 表現についてレビューする.

5 章では丁-庵原-三木代数の古典極限から  $q$ -PBO 方程式が現れること, 及び丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の古典極限から  $q$ -PILW 方程式が現れることについてレビューする.

6, 7 章では 3.3 節で述べた本論文の主結果の詳細を与える. 6 章では丁-庵原-三木代数の  $N$  階テンソルの Fock 表現の古典極限を用いて  $q$ -PBO 方程式の  $N$  成分への拡張を導出する. さらに 2 成分のときに  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式の  $q$  差分類似になっていることを示した. 次に  $\tau$  関数を定義し, 広田の双線形方程式が成り立つこと, 及び  $\tau$  関数と  $q$ -PBO 方程式の  $N$  成分版の従属変数が変換で移り合うことを示した. 最後にある元が 2 次元戸田場方程式を満たすことを示した.

7 章では丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の  $N$  階テンソルの Fock 表現の古典極限を考察する. まず楕円変形の  $N$  階テンソルのときにどのようにスケールしながら古典極限を取れば良いかについて考察した. 次に  $\tau$  関数を定義して  $q$ -PILW の多成分版の双線形方程式であり可積分であるものを導出した.

8 章では本論文の結果をまとめ, 今後の課題及び展望などを記した.

1成分系

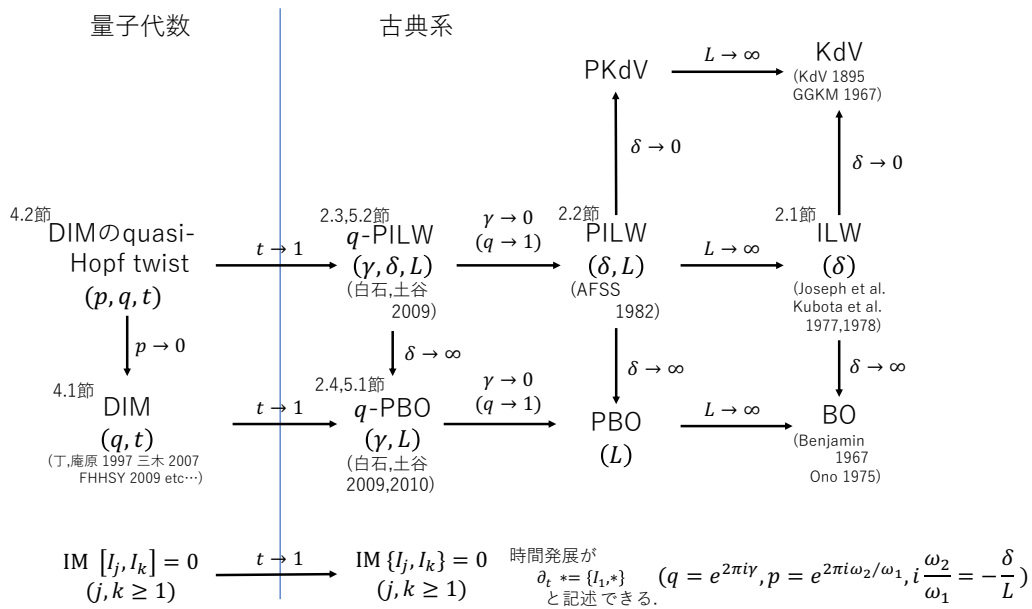


図 1.1 1 成分系の遷移図

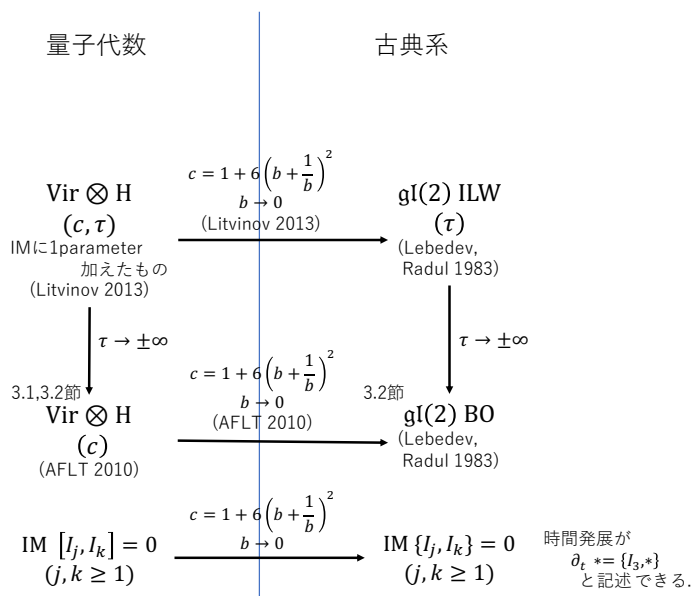


図 1.2 2成分系の遷移図

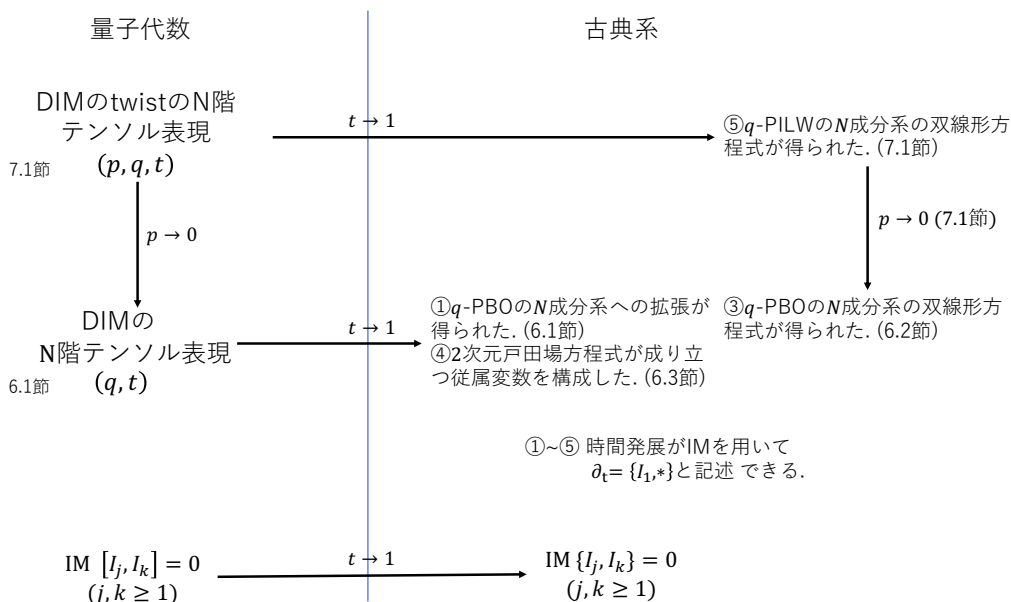


図 1.3 主結果 (N 成分系)

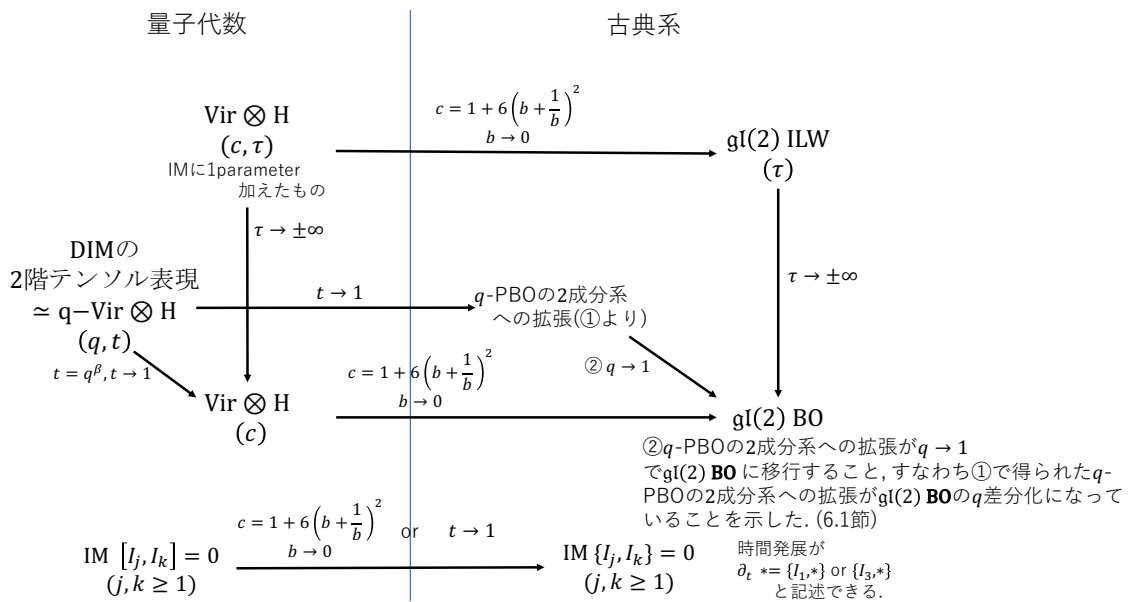


図 1.4 主結果 (2 成分系)

## 第 2 章

# 特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式 (単独方程式の場合)

Intermediate long wave 方程式は, 有限の深さの密度の異なる 2 層の流体の境界面を伝わる波を記述する方程式であり Joseph, Egri, Kubota, Ko, Dobbs によって [8], [9], [10] において導入された. この Intermediate long wave(ILW) 方程式は特異積分作用素を含む非線形偏微分・積分方程式であり, 浅水波の極限において Korteweg-de Vries(KdV) 方程式 [1],[2], また深水波極限において Benjamin-Ono(BO) 方程式 [3], [4] に移行する. ILW 方程式の広田の直接法, 逆散乱法などを用いたソリトン解の導出については [8], [9], [10], [11], [12],[14], [15] において研究された. また 2017 年には Riemann 面に付随する解の構成についても [22] において議論されている. 本章では Intermediate long wave 方程式の導出及び浅水波極限, 深水波極限, 空間方向に周期的な方程式への拡張 [16], 空間方向に周期的でありさらに離散 Laplacian を付随させた方程式への拡張 [19] について復習する. また Benjamin-Ono 方程式の空間方向に周期的でありさらに離散 Laplacian を付随させた方程式への拡張 [20],[21] についても復習する.

### 2.1 Intermediate long wave(ILW) 方程式

#### 2.1.1 Intermediate long wave(ILW) 方程式の定義

Intermediate long wave 方程式を定義するためにまず特異積分作用素を定義する.

**定義 2.1.**  $\delta$  は流体の深さを表す媒介変数である.

**定義 2.2.** ここで特異積分作用素  $T$  を次で定義する.

$$T[f](x) := \frac{1}{2\delta} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \coth \frac{\pi(y-x)}{2\delta} f(y) dy. \quad (2.1)$$

$\text{P} \int_{-\infty}^{\infty}$  は Cauchy の主値積分を表す.

**定義 2.3.**  $x$  を空間変数,  $t$  を時間変数を表す実独立変数とする. Intermediate long wave(ILW) 方程式は次の式で定義される偏微分・積分方程式である. ここに  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  を

表す.

$$u_t + (1/\delta)u_x + 2uu_x + T[u]_{xx} = 0. \quad (2.2)$$

**定義 2.4.** 微分の逆演算子  $\partial^{-1}$  を次のように定義する.

$$(\partial^{-1})[f](x) := F(x), \quad F'(x) = f(x), \quad (\text{ただし } F(x) \text{ の定数項が } 0 \text{ となる原始関数をとる}). \quad (2.3)$$

**命題 2.5.** 次が成立する.

$$(T + \frac{1}{\delta}\partial^{-1})[f](x) = \frac{1}{\delta} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sgn}(y-x)}{\exp(\frac{\pi|y-x|}{\delta}) - 1} f(y) dy. \quad (2.4)$$

**証明.** 次副節 2.1.2 の計算 (2.18) によってわかる.  $\square$

**定義 2.6.** 特異積分作用素  $G$  を次で定義する.

$$G := T + \frac{1}{\delta}\partial^{-1}. \quad (2.5)$$

**系 2.7.** Intermediate long wave 方程式は

$$\begin{aligned} u_t + 2uu_x + G[u]_{xx} &= 0, \\ G[f](x) &:= \frac{1}{\delta} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sgn}(y-x)}{\exp(\frac{\pi|y-x|}{\delta}) - 1} f(y) dy, \end{aligned} \quad (2.6)$$

の形にも書くことができる.

Intermediate long wave 方程式 (2.2), (2.6) の導出について簡単に復習する. 深さ  $D$  の流体の有限振幅擾乱の伝播を表す流れ関数は弱い非線形性の仮定の下に  $\psi(x, z, t) = \phi(z)u(x, t)$  という形で書き表される. ここで  $z$  は鉛直方向の座標,  $x$  は水平方向の座標である. この流体のナビエストークス方程式を解くと [5] の結果より  $\phi, u$  は次の方程式を満たす.

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + \left( \frac{N^2(z)}{c^2(k)} - k^2 \right) \phi = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Cu(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', t) G(x' - x) dx' = 0, \quad (2.8)$$

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk. \quad (2.9)$$

ここに  $C$  は非線形性を特徴付ける媒介変数,  $c(k)$  は位相速度,  $N(z)$  は Brunt-Väisälä 振動数と呼ばれる流体塊の上下運動の振動数である.  $z = 0$  を水面,  $z = -D$  を海底とする境界条件として  $\phi(0) = \phi(-D) = 0$  を課す. さらに  $|x| \rightarrow \infty$  のときに  $u \rightarrow 0$  を仮定する. ここで考える流体の模型において  $z = -d$  近辺に 2 層の流体の境界面が位置するものとする. すなわち  $-D \leq z \leq -d - \varepsilon$  及び  $-d + \varepsilon \leq z \leq 0$  においては密度が一定, すなわち  $N(z) = 0$  とする. そして  $|z + d| < \varepsilon$ , つまり  $z = -d$  の中心としてその周辺で深さに対して急激に密度が変化すると仮定する.  $|z + d| < \varepsilon$  の領域においては  $N^2(z)$  は 0 にならない. (2.7) を解いた際の  $c(k)$  は [6] の結果より

$$c^2(k) = \frac{g\delta\rho}{\rho_0} \left[ k \left( k\varepsilon + \coth(kd) + \coth(k(D-d)) \right) \right]^{-1}, \quad (2.10)$$



となる. ここで  $g$  は重力加速度,  $\delta\rho$  は上層と下層の間の密度の差,  $\rho_0$  は上層と下層の密度の平均値である.  $\varepsilon \ll d \ll D$  と仮定すると (2.10) は次のようになる.

$$c(k) = c_0 \left[ 1 - \frac{1}{2}kd \left( \coth(kD) - \frac{1}{kD} \right) \right]. \quad (2.11)$$

ここで  $c_0 = (gd \frac{\delta\rho}{\rho_0})^{1/2}$  である. (2.11) を (2.9) に代入して留数計算を行うと, 次が導かれる.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + Cu(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{c_0 d}{2D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', t) H(x' - x) dx' = 0. \quad (2.12)$$

ここに

$$H(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\exp(\pi|x|/D) - 1}, \quad (2.13)$$

とおいた. ここで  $c_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$  の項を  $t' = t, x' = x - c_0 t$  と Galilei 変換することによって消去すると,  $D = \delta$  として (2.12) は (2.6) に一致する.

## 2.1.2 Intermediate long wave(ILW) 方程式の極限

本副節では ILW(2.2) の浅水波極限と深水波極限について述べる.

**命題 2.8.** 浅水波の極限  $\delta \rightarrow 0$  の極限において (2.2) は  $\delta$  の 3 次以降を無視して, Korteweg-de Vries(KdV) 方程式 [1],[2]

$$u_t + 2uu_x + \frac{\delta}{3}u_{xxx} = 0, \quad (2.14)$$

に移行する.

**証明.** 浅水波の極限  $\delta \rightarrow 0$  のとき, 特異積分作用素が

$$T[f] = -\frac{1}{\delta} \partial^{-1} f + \frac{\delta}{3} f_x + \frac{\delta^3}{45} f_{xxx} + O(\delta^5), \quad (2.15)$$

と展開できることを示せばよい. まず  $T[f]$  の展開の  $\delta^{-1}$  の項を見る.

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta T[f](x) &:= \frac{1}{2} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \coth \frac{\pi(y-x)}{2\delta} f(y) dy \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta T[f](x) := \frac{1}{2} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + e^{-\frac{\pi(y-x)}{\delta}}}{1 - e^{-\frac{\pi(y-x)}{\delta}}} f(y) dy = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x f(y) dy + \frac{1}{2} \int_x^{\infty} f(y) dy \\ &= -F(x). \end{aligned} \quad (2.16)$$

ただし  $F'(x) = f(x)$  で  $F(\infty) = F(-\infty) = 0$  とした. よって

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta T[f](x) = -\partial^{-1} f = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(y-x) f(y) dy. \quad (2.17)$$

次に  $\delta$  の 0 次以降の項を見る.

$$\begin{aligned}
(T + \frac{1}{\delta}\partial^{-1})[f](x) &:= \frac{1}{2\delta} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} (\coth \frac{\pi(y-x)}{2\delta} - \text{sgn}(y-x))f(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\delta} \left( \frac{e^{\frac{\pi(y-x)}{\delta}} + 1}{e^{\frac{\pi(y-x)}{\delta}} - 1} + 1 \right) f(y)dy + \int_x^{\infty} \frac{1}{2\delta} \left( \frac{1 + e^{-\frac{\pi(y-x)}{\delta}}}{1 - e^{-\frac{\pi(y-x)}{\delta}}} - 1 \right) f(y)dy \\
&= - \int_{-\infty}^x \left( \frac{1}{\delta} \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{m\pi(y-x)}{\delta}} \right) f(y)dy + \int_x^{\infty} \left( \frac{1}{\delta} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m\pi(y-x)}{\delta}} \right) f(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^x \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\pi} e^{\frac{m\pi(y-x)}{\delta}} \right) f'(y)dy + \int_x^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\pi} e^{-\frac{m\pi(y-x)}{\delta}} \right) f'(y)dy \\
&= \frac{\delta}{3} f'(x) - \int_{-\infty}^x \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{m^2\pi^2} e^{\frac{m\pi(y-x)}{\delta}} \right) f''(y)dy + \int_x^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{m^2\pi^2} e^{-\frac{m\pi(y-x)}{\delta}} \right) f''(y)dy. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

ここで 2 回部分積分を行い, 無限遠での境界条件を用いた. 以下部分積分を繰り返すことにより  $\delta \rightarrow 0$  での  $T$  の展開 (2.15) が得られる.  $\square$

次に深水波の極限を述べるために次の積分作用素を定義する.

**定義 2.9.** ヒルベルトの積分作用素  $H$  を次で定義する.

$$H[f](x) := \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y-x} f(y)dy. \quad (2.19)$$

**命題 2.10.** 深水波の極限  $\delta \rightarrow \infty$  のとき, (2.2) は Benjamin-Ono(BO) 方程式 [3], [4]

$$u_t + 2uu_x + H[u]_{xx} = 0, \quad (2.20)$$

に移行する.

**証明.**  $\lim_{\delta \rightarrow \infty} (1/2\delta) \cdot \coth(\pi(y-x)/2\delta) = 1/\pi(y-x)$  からわかる.  $\square$

以上より ILW は浅水波極限 (KdV), 深水波極限 (BO) の中間にある方程式であるため Intermediate long wave 方程式と呼ばれている.

## 2.2 Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式

Intermediate long wave 方程式の空間的に周期性を持った場合への拡張は [16] において導入された. 本節ではこれについて復習する.

### 2.2.1 Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式の定義

Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式の特異積分変換  $T$  に空間方向に対する周期性を与えるために Weierstrass のゼータ関数を思い出す.

**定義 2.11.** Weierstrass のゼータ関数  $\zeta(z) = \zeta(z; 2\omega_1, 2\omega_2)$  を次で定義する.

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left\{ \frac{1}{z - 2m\omega_1 - 2n\omega_2} + \frac{1}{2m\omega_1 + 2n\omega_2} + \frac{z}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right\}. \quad (2.21)$$

ここで  $2\omega_1, 2\omega_2$  は Weierstrass のゼータ関数の複素媒介変数であり, ゼータ関数は

$$\zeta(-z) = -\zeta(z), \quad (2.22)$$

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\zeta(\omega_1), \quad (2.23)$$

$$\zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z) + 2\zeta(\omega_2), \quad (2.24)$$

を満たす.

**補題 2.12.** Weierstrass のゼータ関数  $\zeta(z) = \zeta(z; 2\omega_1, 2\omega_2)$  は次のように Fourier 級数展開される.

$$\zeta(z) = \frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1} z + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \frac{\pi z}{2\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin \frac{n\pi z}{\omega_1}, \quad q = \exp(i\pi\omega_2/\omega_1). \quad (2.25)$$

**定義 2.13.**  $2L$  を空間方向の周期を表す媒介変数,  $\delta$  を深さを表す媒介変数とする.

**定義 2.14.** 特異積分作用素  $T'$  を次で定義する.

$$T'[f](x) := \frac{1}{2L} \text{P} \int_{-L}^L \tilde{T}(\xi - x; \delta, L) f(\xi) d\xi, \quad (2.26)$$

ここで

$$\tilde{T}(x; \delta, L) := \frac{2\omega_1}{\pi} \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1 x}{L}\right) - \frac{\zeta(\omega_1)}{L} x \right]. \quad (2.27)$$

**定義 2.15.** 周期  $2L$  の Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式は次のように定義される.

$$u_t + (1/\delta)u_x + 2uu_x + T'[u]_{xx} = 0. \quad (2.28)$$

**注釈 2.16.** ここで模型の媒介変数  $\delta, L$  からゼータ関数の周期は  $-i\frac{\omega_2}{\omega_1} = \delta/L$  という条件によって定められる. ここで周期の比のみが模型の媒介変数によって決まるということに注意する. 今後利用する  $\tilde{T}$  の Fourier 級数での展開のために,  $\int_{-L}^L u dx = 0$  を  $u$  に課す必要がある. これは Galilei 変換  $u' = u + \alpha, x' = x + 2\alpha t$  によっていつも満たすように独立変数及び従属変数を変換することができるので今後  $\int_{-L}^L u dx = 0$  を仮定する.

以下で用いる  $\tilde{T}$  の性質を述べておく.

**命題 2.17.**  $\tilde{T}$  の Fourier 級数表示は

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x; \delta, L) &:= \cot\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin \frac{n\pi x}{L} \\ &= -i \sum_{n \neq 0} \coth\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right) \exp\left(\frac{in\pi x}{L}\right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

**証明.**  $q = \exp(i\pi\omega_2/\omega_1) = \exp(-\pi\delta/L)$  と次の恒等式

$$\cot \frac{1}{2}\theta = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin m\theta, \quad (2.30)$$

を用いるとわかる. □

系 2.18. 命題 2.17 より次の系が従う.

$$T'[u](x) := i \sum_{n \neq 0} \coth\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right) \hat{u}_n \exp\left(\frac{in\pi x}{L}\right). \quad (2.31)$$

ここで  $\{\hat{u}_n\}$  は  $u$  の Fourier 係数である. つまり

$$\hat{u}_n := \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \exp\left(-\frac{in\pi\xi}{L}\right) u(\xi) d\xi, \quad (n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}). \quad (2.32)$$

## 2.2.2 Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式の極限

空間方向に周期  $2L$  を持つ Benjamin-Ono 方程式の拡張, すなわち Periodic Benjamin-Ono(PBO) 方程式を復習する.

定義 2.19. ここで特異積分作用素  $H'$  を次で定義する.

$$H'[f](x) := \frac{1}{2L} \text{P} \int_{-L}^L \cot \frac{\pi(\xi - x)}{2L} f(\xi) d\xi. \quad (2.33)$$

定義 2.20. 周期  $2L$  の Periodic Benjamin-Ono(PBO) 方程式は次のように定義される.

$$u_t + 2uu_x + H'[u]_{xx} = 0. \quad (2.34)$$

命題 2.21.  $L \rightarrow \infty$  のとき PBO(2.34) は BO(2.20) に移行する. すなわち

$$\frac{1}{2L} \text{P} \int_{-L}^L \cot \frac{\pi(\xi - x)}{2L} f(\xi) d\xi \rightarrow \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi - x} f(\xi) d\xi. \quad (2.35)$$

証明.  $L \rightarrow \infty$  のとき  $(1/2L) \left( \cot \frac{\pi(\xi - x)}{2L} \right) \rightarrow 1/\pi(\xi - x)$  よりわかる.  $\square$

Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式の周期が無限大の極限, 深水波極限, 浅水波極限について述べる.

命題 2.22.  $\delta$  を固定したまま空間周期が無限大の極限 ( $L \rightarrow \infty$ ) を取ったとき PILW(2.28) は ILW(2.2) に移行する. すなわち

$$\frac{1}{2L} \text{P} \int_{-L}^L \tilde{T}(\xi - x; \delta, L) f(\xi) d\xi \rightarrow \frac{1}{2\delta} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \coth \frac{\pi(\xi - x)}{2\delta} f(\xi) d\xi.$$

証明.  $\delta$  を固定したまま  $L \rightarrow \infty$  の周期が無限大の極限を考える.  $\omega_1 = L, i\omega_2 = -\delta$  として  $\omega_1 \rightarrow \infty$  とすればいいので,

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \tilde{T}(x; \delta, L) &:= \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\pi} \left\{ \zeta(x) - \frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1} x \right\} \right] \\ &= \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left( \frac{1}{x - 2m\omega_1 - 2n\omega_2} + \frac{1}{2m\omega_1 + 2n\omega_2} + \frac{x}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{x}{\omega_1^2} - \frac{x}{\omega_1} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left( \frac{1}{\omega_1 - 2m\omega_1 - 2n\omega_2} + \frac{1}{2m\omega_1 + 2n\omega_2} + \frac{\omega_1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{x} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{x - 2n\omega_2} \right) = \frac{1}{2\delta} \coth \frac{\pi x}{2\delta}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

つまり

$$T'[f](x) \rightarrow \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\delta} \coth \frac{\pi(\xi - x)}{2\delta} f(\xi) d\xi. \quad (2.37)$$

□

**命題 2.23.**  $L$  を固定したまま海底までの距離  $\delta$  が無限大の極限 ( $\delta \rightarrow \infty$ ) を取ったとき PILW(2.28) は PBO(2.34) に移行する. すなわち

$$\frac{1}{2L} \text{P} \int_{-L}^L \tilde{T}(\xi - x; \delta, L) f(\xi) d\xi \rightarrow \frac{1}{2L} \text{P} \int_{-L}^L \cot \frac{\pi(\xi - x)}{2L} f(\xi) d\xi. \quad (2.38)$$

**証明.**  $L$  を固定したまま  $\delta \rightarrow \infty$  の  $\delta$  が無限大の極限を考える.  $\omega_1 = L, i\omega_2 = -\delta$  として  $\omega_2 \rightarrow \infty$  とすればいいので,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \tilde{T}(x; \delta, L) &:= \lim_{\omega_2 \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\pi} \left\{ \zeta(x) - \frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1} x \right\} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{x} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{x - 2n\omega_1} \right) = \frac{1}{2L} \cot \frac{\pi x}{2L}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

つまり

$$T'[f](x) \rightarrow \frac{1}{2L} \text{P} \int_{-L}^L \cot \frac{\pi(\xi - x)}{2L} f(\xi) d\xi. \quad (2.40)$$

□

**命題 2.24.**  $L$  を固定したまま浅水波極限 ( $\delta \rightarrow 0$ ) を取ったとき PILW(2.28) は Periodic KdV(PKdV) 方程式

$$u_t + 2uu_x + \frac{\delta}{3} u_{xxx} = 0, \quad (2.41)$$

に移行する.

**注釈 2.25.** 方程式が local なので方程式は周期媒介変数  $2L$  を含まないが, 解  $u$  が周期性を持っているという意味で Periodic KdV(PKdV) 方程式と呼ぶ.

**証明.**  $\coth$  のテイラー展開  $\coth\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right) = \frac{L}{n\pi\delta} + \frac{1}{3}\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right) - \frac{1}{45}\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right)^3 + O(\delta^5)$  を用いると,

$$\begin{aligned} T'[u](x) &:= i \sum_{n \neq 0} \coth\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right) \hat{u}_n \exp\left(\frac{in\pi x}{L}\right) = i \sum_{n \neq 0} \left( \frac{L}{n\pi\delta} + \frac{1}{3}\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right) - \frac{1}{45}\left(\frac{n\pi\delta}{L}\right)^3 + O(\delta^5) \right) \hat{u}_n \exp\left(\frac{in\pi x}{L}\right) \\ &= \left( -\frac{1}{\delta} \partial^{-1} + \frac{\delta}{3} \partial + \frac{\delta^3}{45} \partial^3 + O(\delta^5) \right) \sum_{n \neq 0} \hat{u}_n \exp\left(\frac{in\pi x}{L}\right) = \left( -\frac{1}{\delta} \partial^{-1} + \frac{\delta}{3} \partial + \frac{\delta^3}{45} \partial^3 + O(\delta^5) \right) u(x). \end{aligned} \quad (2.42)$$

よって PILW(2.28) は  $u_t + 2uu_x + \frac{\delta}{3} u_{xxx} = 0$  に移行する. □

## 2.3 離散 Laplacian 付き Periodic Intermediate long wave( $q$ -PILW) 方程式

Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式, Periodic Benjamin-Ono(PBO) 方程式, Periodic KdV(PKdV) 方程式などすべてを特殊な場合として含む離散 Laplacian 付き Periodic Intermediate long wave( $q$ -PILW) 方程式は [19] において導入された. この波動方程式は丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の Fock 表現の古典極限と関係する. その関係については第 5 章で述べる. ここでは離散 Laplacian 付き Periodic Intermediate long wave( $q$ -PILW) 方程式について復習する.

### 2.3.1 離散 Laplacian 付き Periodic Intermediate long wave( $q$ -PILW) 方程式の定義

**定義 2.26.**  $\omega_1, \omega_2, \gamma$  を複素媒介変数として  $\delta$  を  $\delta := \omega_2/\omega_1$  で  $\text{Im}(\delta) > 0, 0 < \text{Im}(\gamma) < \text{Im}(\delta)$  を満たすものとする.

$x, t$  を実独立変数として  $\eta(x, t)$  を周期条件  $\eta(x+1, t) = \eta(x, t)$  を満たす解析関数とする.  $\zeta(x) = \zeta(x; 2\omega_1, 2\omega_2)$  を Weierstrass のゼータ関数を改めて

$$\zeta(z) = \frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1} z + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \frac{\pi z}{2\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{1-p^n} \sin \frac{n\pi z}{\omega_1}, \quad (2.43)$$

とおく. ここで

$$p = e^{2\pi i \delta} = e^{2\pi i \omega_2/\omega_1}, \quad q = e^{2\pi i \gamma}, \quad (2.44)$$

とする.

**注釈 2.27.** ここで前副節での楕円ノームを  $1/2$  乗したものを新しく  $p$  と置いた. ここでの  $q$  は Macdonald 理論 [7] における  $q, t$  という 2 つの媒介変数を含む対称多項式の理論における  $q$  と一致する.

**定義 2.28.** 離散 Laplacian  $\Delta_\gamma$  を次で定義する.

$$(\Delta_\gamma f)(x) := f(x-\gamma) - 2f(x) + f(x+\gamma). \quad (2.45)$$

**定義 2.29.** 特異積分変換  $\mathbb{T}$  を次で定義する.

$$(\mathbb{T}f)(x) := \frac{i\omega_1}{\pi} \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} (\Delta_\gamma \zeta)(2\omega_1(y-x)) \cdot f(y) dy. \quad (2.46)$$

ただし  $f$  は周期条件  $f(x+1) = f(x)$  を満たす解析関数である.

**定義 2.30.**  $\eta(x, t)$  を複素従属変数とする. 離散 Laplacian 付き Periodic Intermediate long wave( $q$ -PILW) 方程式は次の式で定義される.

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(x, t) = \eta(x, t) \cdot \frac{i\omega_1}{\pi} \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} (\Delta_\gamma \zeta)(2\omega_1(y-x)) \cdot \eta(y, t) dy. \quad (2.47)$$

**注釈 2.31.** 時間微分を  $\frac{\partial}{\partial t} f = \dot{f}$  と書くとこれは簡単に  $\dot{\eta} = \eta(T\eta)$  と書くことができる.

**定義 2.32.** 領域  $D$  を複素  $z$  平面において  $0 \leq \text{Im}(z) \leq \text{Im}(\delta)$  を満たす無限帯状領域とする.

以下  $z = e^{2\pi ix}$  とする.

**補題 2.33.** 任意の 0 でない整数  $m$  に対して

$$\mathbb{T}(e^{2\pi imx}) = \frac{(1 - q^m)(1 - p^m q^{-m})}{1 - p^m} e^{2\pi imx}. \quad (2.48)$$

また,  $\mathbb{T}(1) = 0$  である.

**証明.** Weierstrass の  $\zeta$  関数の Fourier 級数展開から従う. □

**系 2.34.**  $D$  上の解析関数  $f(z)$  が  $f(x+1) = f(x)$  を満たすとする. このとき

$$\mathbb{T}(f(x) - f(x + \gamma)) = f(x) - f(x + \gamma) - f(x + \delta - \gamma) + f(x + \delta). \quad (2.49)$$

が成り立つ.

**証明.**  $D$  上の解析関数  $f(z)$  が  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{-n} e^{2\pi inx}$  と Fourier 級数展開できることと  $\mathbb{T}$  の線型性より  $\mathbb{T}(e^{2\pi imx} - p^m e^{2\pi imx}) = (1 - q^m)(1 - p^m q^{-m}) e^{2\pi imx}$  となることから従う. □

**定義 2.35.**  $x$  変数に関する差分作用素  $T, S$  を次で定義する.

$$Tf(x) = f(x + \delta), \quad (2.50)$$

$$Sf(x) = f(x + \gamma). \quad (2.51)$$

表示の単純化のために  $\hat{f} = Tf(x) = f(x + \delta)$ ,  $\bar{f} = Sf(x) = f(x + \gamma)$ ,  $\underline{f} = S^{-1}f(x) = f(x - \gamma)$  と書く.

この定義のもと, 例えば (2.49) は

$$\mathbb{T}(f - \hat{f}) = (1 - S)(1 - TS^{-1})f, \quad (2.52)$$

と書ける.  $g = (1 - T)f$  と置くと形式的に

$$\mathbb{T}g = \frac{(1 - S)(1 - TS^{-1})}{1 - T}g, \quad (2.53)$$

と書ける. 以下従属変数の変換を行う.

**命題 2.36.**  $w(z)$  を領域  $D$  上の正則関数で周期条件  $w(x+1) = w(x)$  を満たすものとする.

$$\eta(x) = w(x) - w(x + \delta) + \eta_0, \quad (2.54)$$

とする. ただし  $\eta_0 = \int_{-1/2}^{1/2} \eta(x) dx$  は Fourier 級数の 0 モード. すると (2.47) は次のように書くことができる.

$$\frac{\partial}{\partial t}(w - \hat{w} + \eta_0) = (w - \hat{w} + \eta_0)(w - \bar{w} - \underline{\hat{w}} + \hat{w}). \quad (2.55)$$

**証明.** 系 2.34 から従う. □

**注釈 2.37.**  $d\eta_0/dt = 0$  である. これは右辺の  $z^0$  の係数が 0 であることからわかる.

**定義 2.38.** 多変数関数の 2 つの組  $f(x_1, x_2, x_3, \dots), g(x'_1, x'_2, x'_3, \dots)$  に対して広田微分を次で定義する.

$$D_{x_1}^l D_{x_2}^m D_{x_3}^n \cdots f \cdot g = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x'_1} \right)^l \left( \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x'_2} \right)^m \left( \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x'_3} \right)^n \cdots \\ f(x_1, x_2, x_3, \dots) g(x'_1, x'_2, x'_3, \dots) \Big|_{x'_1=x_1, x'_2=x_2, x'_3=x_3, \dots}, \quad (l, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}). \quad (2.56)$$

**命題 2.39.**  $\epsilon, \eta_0$  を定数とする.  $w = -\frac{\partial_t \tau}{\tau}$  とおき  $w$  は (2.55) を満たすとすると  $\tau$  が次の広田の双線形方程式を満たす.

$$D_t \widehat{\tau} \cdot \tau = \epsilon \widehat{\tau} \tau - \eta_0 \widehat{\tau} \tau. \quad (2.57)$$

**証明.** (2.55) より

$$\partial_t \log(w - \widehat{w} + \eta_0) = w - \bar{w} - \widehat{w} + \widehat{w}. \quad (2.58)$$

これに  $w = -\frac{\partial_t \tau}{\tau}$  を代入すると,

$$\partial_t \log\left(-\frac{\partial_t \tau}{\tau} + \frac{\partial_t \widehat{\tau}}{\widehat{\tau}} + \eta_0\right) = \partial_t \left( \log\left(\frac{\widehat{\tau} \tau}{\widehat{\tau} \tau}\right) \right). \quad (2.59)$$

両辺を  $t$  で積分して, 積分定数を  $\log \epsilon$  とおくと

$$\log\left(-\frac{\partial_t \tau}{\tau} + \frac{\partial_t \widehat{\tau}}{\widehat{\tau}} + \eta_0\right) = \log \frac{\widehat{\tau} \tau}{\widehat{\tau} \tau} + \log \epsilon. \quad (2.60)$$

よって (2.57) が成り立つ. □

### 2.3.2 Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式への極限

ここで  $q$  差分が空間微分に退化する極限 ( $\gamma \rightarrow 0$ ) を考える.  $\mathcal{T}$  を次の特異積分作用素とする.

$$(\mathcal{T}f)(x) = \frac{i\omega_1}{\pi} \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} \{\zeta(2\omega_1(y-x)) - 2\zeta(\omega_1)(y-x)\} \cdot f(y) dy. \quad (2.61)$$

これは (2.27) のスケールを変えたものと実質的に同じものである.

**補題 2.40.** 次が成立する.

$$\mathcal{T}(e^{2\pi i m x}) = -\frac{1}{2} \frac{1+p^m}{1-p^m} e^{2\pi i m x}, \quad (m \neq 0), \\ \mathcal{T}(1) = 0. \quad (2.62)$$

**系 2.41.** 形式的には

$$\mathcal{T}g = -\frac{1}{2} \frac{1+T}{1-T} g, \quad (2.63)$$

と書くことができる.



**補題 2.42.**  $q$ -PILW の特異積分変換  $\mathbb{T}$  は次のように  $\gamma$  で展開される.

$$\mathbb{T} = -\gamma\partial + \gamma^2\mathcal{T}\partial^2 + O(\gamma^3). \quad (2.64)$$

**証明.** (2.48) より  $q = e^{2\pi i\gamma}$  として  $\gamma$  で展開すると

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(e^{2\pi imx}) &= (1 - e^{2\pi im\gamma}) \frac{(1 - p^m e^{-2\pi im\gamma})}{1 - p^m} e^{2\pi imx} \\ &= \left(-2\pi im\gamma - \frac{(2\pi im)^2}{2}\gamma^2 + O(\gamma^3)\right) \frac{1 - p^m \left(1 - (2\pi im)\gamma + \frac{(2\pi im)^2}{2}\gamma^2 + O(\gamma^3)\right)}{1 - p^m} e^{2\pi imx} \\ &= \left(-\gamma(2\pi im) - \gamma^2 \frac{1}{2} \frac{1 + p^m}{1 - p^m} (2\pi im)^2 + O(\gamma^3)\right) e^{2\pi imx} \\ &= \left(-\gamma\partial + \gamma^2\mathcal{T}\partial^2 + O(\gamma^3)\right) e^{2\pi imx}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

□

**命題 2.43.**  $\gamma \rightarrow 0$  で  $q$ -PILW(2.47) は PILW

$$u_t = au_x - uu_x + \varepsilon\mathcal{T}[u_{xx}], \quad (2.66)$$

に移行する.

**証明.** ここで  $q$ -PILW 方程式  $\dot{\eta} = \eta(\mathbb{T}\eta)$  に Galilei 変換  $(x, t) \mapsto (x - ct, t)$  をほどこす. このとき

$$\frac{d}{dt}\eta(x - ct, t) = -c\partial_x\eta(x - ct, t) + \partial_t\eta(x - ct, t), \quad (2.67)$$

である. また

$$\eta(x - ct, t) = \varepsilon + \gamma u(x, t) + O(\gamma^2), \quad (2.68)$$

と  $\gamma$  で展開できると仮定すると  $q$ -PILW において両辺を  $\gamma$  で展開すると

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= -c\gamma u_x + \gamma u_t + \dots, \\ \text{RHS} &= (\varepsilon + \gamma u(x, t) + O(\gamma^2))(-\gamma\partial + \gamma^2\mathcal{T}\partial^2 + O(\gamma^3))(\varepsilon + \gamma u(x, t) + O(\gamma^2)) \\ &= -\varepsilon\gamma^2 u_x + \varepsilon\gamma^3\mathcal{T}[u_{xx}] - \gamma^3 uu_x + \dots. \end{aligned}$$

ここで

$$c = \varepsilon\gamma + a\gamma^2 + O(\gamma^3), \quad (2.69)$$

として, さらにスケール変換

$$t \rightarrow \gamma^{-2}t, \quad (2.70)$$

とすると, 上の方程式の  $\gamma$  の 3 次の項より

$$u_t = au_x - uu_x + \varepsilon\mathcal{T}[u_{xx}].$$

よって  $\gamma \rightarrow 0$  で  $q$ -PILW は PILW に移行する.

□

**注釈 2.44.** (2.66) は独立変数及び従属変数の変換によって (2.28) と同じ形になる.

**注釈 2.45.**  $q$ -PILW の双線形方程式 (2.57) が  $\gamma \rightarrow 0$  で PILW の双線形方程式に移行することは節 2.4 の最後の  $q$ -PBO の双線形方程式が  $\gamma \rightarrow 0$  で PBO の双線形方程式に移行する計算と同様である.

## 2.4 離散 Laplacian 付き Periodic Benjamin-Ono( $q$ -PBO) 方程式

離散 Laplacian 付き Periodic Benjamin-Ono( $q$ -PBO) 方程式は [20],[21] において丁-庵原-三木代数や Macdonald 理論の古典極限と関連して導入された.  $q$ -PBO は離散 Laplacian 付き Periodic Intermediate long wave( $q$ -PILW) 方程式 (2.47) の  $p \rightarrow 0$  の極限からも出てくる.

$\gamma$  を複素パラメーターとして  $\text{Im}(\gamma) \geq 0$  を満たすものとする.  $x, t$  を実独立変数として  $\eta(x, t)$  を周期条件  $\eta(x+1, t) = \eta(x, t)$  を満たす解析関数とする.

**定義 2.46.** 特異積分変換  $H$  を次で定義する.

$$\begin{aligned} (Hf)(x) &= \frac{i}{2} \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} \left( \Delta_\gamma \cot(\pi(y-x)) \right) f(y) dy \\ &= \frac{i}{2} \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} \left( \cot(\pi(y-x-\gamma)) - 2 \cot(\pi(y-x)) + \cot(\pi(y-x+\gamma)) \right) f(y) dy. \end{aligned} \quad (2.71)$$

ただし  $f$  は周期条件  $f(x+1) = f(x)$  を満たす解析関数である.

**定義 2.47.** 離散 Laplacian 付き Periodic Benjamin-Ono( $q$ -PBO) 方程式は次の方程式で定義される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \eta(x, t) &= \eta(x, t) \cdot \frac{i}{2} \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} \left( \Delta_\gamma \cot(\pi(y-x)) \right) \eta(y, t) dy \\ &= \eta(x, t) \cdot \frac{i}{2} \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} \left( \cot(\pi(y-x-\gamma)) - 2 \cot(\pi(y-x)) + \cot(\pi(y-x+\gamma)) \right) \eta(y, t) dy. \end{aligned} \quad (2.72)$$

**注釈 2.48.** 時間微分を  $\frac{\partial}{\partial t} f = \dot{f}$  と書くとこれは簡単に  $\dot{\eta} = \eta(H\eta)$  と書くことができる.

**注釈 2.49.**  $q$ -PBO が  $\gamma \rightarrow 0$  で PBO に移行することは命題 2.43 の  $q$ -PILW のときと同様に示すことができる.

以下  $z = e^{2\pi i x}$ ,  $q = e^{2\pi i \gamma}$  とおく.  $\eta(x, t) = \eta(z)$  とも書くことにする.  $\eta(z)$  が周期関数であることから  $\eta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_{-n} z^n$  と Fourier 級数展開することができる.

**定義 2.50.**  $\eta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_{-n} z^n$  と Fourier 級数展開するとき正モード成分, 負モード成分を次のように定義する.

$$\eta_+(z) = \sum_{n>0} \eta_{-n} z^n, \quad (2.73)$$

$$\eta_-(z) = \sum_{n>0} \eta_n z^{-n}. \quad (2.74)$$

よって  $\eta(z) = \eta_+(z) + \eta_0 + \eta_-(z)$  と書ける.

**命題 2.51.**  $q$ -PBO(2.72) は次のように書ける.

$$\begin{aligned} \partial_t \eta(x, t) &= \eta(z) \cdot \frac{i}{2} \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} \left( \Delta_\gamma \cot(\pi(y-x)) \right) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \eta_{-m} e^{2\pi i m y} dy \\ &= \eta(z) \sum_{m \neq 0} \text{sgn}(m) (1 - q^{|m|}) \eta_{-m} z^m \\ &= \eta(z) (\eta_+(z) - \eta_+(qz) - \eta_-(z) + \eta_-(z/q)). \end{aligned} \quad (2.75)$$

この命題を示すために次の補題を示す.

**補題 2.52.**

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} \left( \cot(\pi(y-x-\gamma)) - 2 \cot(\pi(y-x)) + \cot(\pi(y-x+\gamma)) \right) e^{2\pi i m y} dy \\ = \text{sgn}(m) (1 - q^{|m|}) e^{2\pi i m x}, \quad (m \in \mathbb{Z}_{\neq 0}), \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\frac{i}{2} \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} \left( \cot(\pi(y-x-\gamma)) - 2 \cot(\pi(y-x)) + \cot(\pi(y-x+\gamma)) \right) 1 dy = 0. \quad (2.77)$$

**証明.**  $m = 0$  のときは  $\cot$  の周期性より明らか. まず  $m > 0$  の場合を考える.

$$\frac{i}{2} \int_C \left( \cot(\pi(y-x-\gamma)) - 2 \cot(\pi(y-x)) + \cot(\pi(y-x+\gamma)) \right) e^{2\pi i m y} dy. \quad (2.78)$$

以下  $R$  は十分大きい正の実数,  $\varepsilon$  は十分小さい正の実数とする. ここで積分路は  $y = -1/2 \rightarrow 1/2$  まで, ただし  $y = x$  において極があるのでこの部分においては  $y = x + \varepsilon e^{i\theta}$ ,  $\theta = \pi \rightarrow 2\pi$  と取る (この部分を  $C_1$  とする). 次に  $y = 1/2 + i0 \rightarrow 1/2 + iR$  (この部分を  $C_2$  とする). 次に  $y = 1/2 + iR \rightarrow -1/2 + iR$  (この部分を  $C_3$  とする). 最後に  $y = -1/2 + iR \rightarrow -1/2 + i0$  と取る (この部分を  $C_4$  とする). この積分路の中には極が  $x, x + \gamma$  にある. また周期性より  $C_2, C_4$  の積分は打ち消しあう. 以上より

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} \left( \cot(\pi(y-x-\gamma)) - 2 \cot(\pi(y-x)) + \cot(\pi(y-x+\gamma)) \right) e^{2\pi i m y} dy \\ &= \frac{i}{2} \int_{C_1+C_3} \left( \cot(\pi(y-x-\gamma)) - 2 \cot(\pi(y-x)) + \cot(\pi(y-x+\gamma)) \right) e^{2\pi i m y} dy \\ &= 2\pi i \text{Res} \left( y = x; \frac{i}{2} \left( \cot(\pi(y-x-\gamma)) - 2 \cot(\pi(y-x)) + \cot(\pi(y-x+\gamma)) \right) e^{2\pi i m y} \right) \\ & \quad + 2\pi i \text{Res} \left( y = x + \gamma; \frac{i}{2} \left( \cot(\pi(y-x-\gamma)) - 2 \cot(\pi(y-x)) + \cot(\pi(y-x+\gamma)) \right) e^{2\pi i m y} \right). \end{aligned} \quad (2.79)$$

$R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$  とすると  $m > 0$  より  $C_3$  における積分が 0 になる. また  $C_1$  において半周期分の留

数の寄与が出てくる. 以上より

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2} \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} \left( \cot(\pi(y-x-\gamma)) - 2 \cot(\pi(y-x)) + \cot(\pi(y-x+\gamma)) \right) e^{2\pi i m y} dy \\
&= \pi i \text{Res} \left( y = x; \frac{i}{2} \left( \cot(\pi(y-x-\gamma)) - 2 \cot(\pi(y-x)) + \cot(\pi(y-x+\gamma)) \right) e^{2\pi i m y} \right) \\
&\quad + 2\pi i \text{Res} \left( y = x + \gamma; \frac{i}{2} \left( \cot(\pi(y-x-\gamma)) - 2 \cot(\pi(y-x)) + \cot(\pi(y-x+\gamma)) \right) e^{2\pi i m y} \right) \\
&= e^{2\pi i m x} - e^{2\pi i m(x+\gamma)} = (1 - q^m) e^{2\pi i m x}. \tag{2.80}
\end{aligned}$$

$m < 0$  のときの積分路は  $y = 1/2 \rightarrow -1/2$  まで (ただし  $y = x$  において極があるのでこの部分においては  $y = x + \varepsilon e^{i\theta}$ ,  $\theta = 0 \rightarrow \pi$  と取る), 次に  $y = -1/2 - i0 \rightarrow -1/2 - iR$  を取り, 次に  $y = -1/2 - iR \rightarrow 1/2 - iR$  を取り, 最後に  $y = 1/2 - iR \rightarrow 1/2 - i0$  と取って  $m > 0$  のときと同様に計算すれば良い.  $\square$

この補題より命題 2.51 の (2.75) が従う.

**注釈 2.53.**  $q$ -PBO の波動方程式 (2.72) が  $\gamma \rightarrow 1$  で PBO の波動方程式 (2.34) に移行することは命題 2.43 の計算と同様である.

**命題 2.54.**  $\varepsilon, \eta_0$  を定数とする.  $\eta_+(z) = -\frac{\partial_t \tau_+(z)}{\tau_+(z)}$ ,  $\eta_-(z) = \frac{\partial_t \tau_-(z)}{\tau_-(z)}$  となる  $\tau_+(z), \tau_-(z)$  をとり  $\eta(z)$  は (2.75) を満たすとする.  $\tau$  が次の広田の双線形方程式を満たす.

$$D_t \tau_-(z) \cdot \tau_+(z) = \varepsilon \tau_-(z/q) \tau_+(qz) - \eta_0 \tau_-(z) \tau_+(z). \tag{2.81}$$

**証明.** (2.75) より

$$\partial_t \log \left( \eta_+(z) + \eta_-(z) + \eta_0 \right) = \eta_+(z) - \eta_+(qz) - \eta_-(z) + \eta_-(z/q) \tag{2.82}$$

これに  $\eta_+(z) = -\frac{\partial_t \tau_+(z)}{\tau_+(z)}$ ,  $\eta_-(z) = \frac{\partial_t \tau_-(z)}{\tau_-(z)}$  を代入すると,

$$\partial_t \log \left( -\frac{\partial_t \tau_+(z)}{\tau_+(z)} + \frac{\partial_t \tau_-(z)}{\tau_-(z)} + \eta_0 \right) = \partial_t \left( \log \left( \frac{\tau_+(qz) \tau_-(z/q)}{\tau_+(z) \tau_-(z)} \right) \right). \tag{2.83}$$

両辺を  $t$  で積分して, 積分定数を  $\log \varepsilon$  とおくと

$$\log \left( -\frac{\partial_t \tau_+(z)}{\tau_+(z)} + \frac{\partial_t \tau_-(z)}{\tau_-(z)} + \eta_0 \right) = \log \left( \frac{\tau_+(qz) \tau_-(z/q)}{\tau_+(z) \tau_-(z)} \right) + \log \varepsilon. \tag{2.84}$$

よって (2.81) が成り立つ.  $\square$

**命題 2.55.**  $q$ -PBO の双線形方程式 (2.81) は  $\gamma \rightarrow 1, (q \rightarrow 1)$  のとき PBO の双線形方程式 [16]

$$D_t \hat{\tau}_-(x) \cdot \hat{\tau}_+(x) = \frac{\varepsilon}{2} D_x^2 \hat{\tau}_-(x) \cdot \hat{\tau}_+(x), \tag{2.85}$$

に移行する.

**証明.** これは  $z = e^{2\pi i x}$ ,  $q = e^{2\pi i \gamma}$  より右辺の従属変数を  $x$  変数で書いて  $\gamma$  で展開すると

$$\begin{aligned} D_t \tau_-(x) \cdot \tau_+(x) &= \varepsilon \tau_-(x - \gamma) \tau_+(x + \gamma) - \eta_0 \tau_-(x) \tau_+(x) \\ &= (\varepsilon - \eta_0) \tau_-(x) \tau_+(x) + \varepsilon \gamma \left( \tau_-(x) (\partial_x \tau_+(x)) - (\partial_x \tau_-(x)) \tau_+(x) \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon \gamma^2}{2} D_x^2 \tau_-(x) \cdot \tau_+(x) + O(\gamma^3). \end{aligned} \quad (2.86)$$

ここで  $\tau_-(x, t) = e^{\alpha t} \cdot \tilde{\tau}_-(x, t)$  とおくと,

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \alpha e^{\alpha t} \tilde{\tau}_-(x) \tau_+(x) + e^{\alpha t} (\partial_t \tilde{\tau}_-(x)) \tau_+(x) - e^{\alpha t} \tilde{\tau}_-(x) (\partial_t \tilde{\tau}_+(x)), \\ \text{RHS} &= (\varepsilon - \eta_0) e^{\alpha t} \tilde{\tau}_-(x) \tau_+(x) + \varepsilon \gamma e^{\alpha t} \left( \tilde{\tau}_-(x) (\partial_x \tau_+(x)) - (\partial_x \tilde{\tau}_-(x)) \tau_+(x) \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon e^{\alpha t} \gamma^2}{2} D_x^2 \tilde{\tau}_-(x) \cdot \tau_+(x) + O(\gamma^3). \end{aligned}$$

つまり方程式は

$$\begin{aligned} &\alpha \tilde{\tau}_-(x) \tau_+(x) + (\partial_t \tilde{\tau}_-(x)) \tau_+(x) - \tilde{\tau}_-(x) (\partial_t \tilde{\tau}_+(x)) \\ &= (\varepsilon - \eta_0) \tilde{\tau}_-(x) \tau_+(x) + \varepsilon \gamma \left( \tilde{\tau}_-(x) (\partial_x \tau_+(x)) - (\partial_x \tilde{\tau}_-(x)) \tau_+(x) \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon \gamma^2}{2} D_x^2 \tilde{\tau}_-(x) \cdot \tau_+(x) + O(\gamma^3). \end{aligned}$$

微分演算子がかかっている項を相殺するために,  $\alpha = \varepsilon - \eta_0$  とおく.

つまり  $\tau_-(x, t) = e^{(\varepsilon - \eta_0)t} \cdot \tilde{\tau}_-(x, t)$  と従属変数の変換をしたことにすると,

$$\left[ (\partial_t + \varepsilon \gamma \partial_x) \tilde{\tau}_-(x) \right] \tau_+(x) - \tilde{\tau}_-(x) \left[ (\partial_t + \varepsilon \gamma \partial_x) \tau_+(x) \right] = \frac{\varepsilon \gamma^2}{2} \tilde{\tau}_-(x) \cdot \tau_+(x) + O(\gamma^3).$$

ここで  $\hat{\tau}_-(x, t) = \tilde{\tau}_-(x - ct, t)$ ,  $\hat{\tau}_+(x, t) = \tau_+(x - ct, t)$  と速度  $c$  による Galilei 変換を施し  $(x - ct, t)$  において方程式を考える.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\tau}_-(x - ct, t) &= -c \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\tau}_-(x - ct, t) + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\tau}_-(x - ct, t) = -c \partial_x \hat{\tau}_-(x, t) + \partial_t \hat{\tau}_-(x, t), \\ \frac{d}{dt} \tau_+(x - ct, t) &= -c \partial_x \hat{\tau}_+(x, t) + \partial_t \hat{\tau}_+(x, t). \end{aligned} \quad (2.87)$$

$\eta_0$  で導入した  $t$  微分は本来は  $\frac{d}{dt}$  であるため, これを用いて

$$\left[ (\partial_t + (\varepsilon \gamma - c) \partial_x) \hat{\tau}_-(x) \right] \hat{\tau}_+(x) - \hat{\tau}_-(x) \left[ (\partial_t + (\varepsilon \gamma - c) \partial_x) \hat{\tau}_+(x) \right] = \frac{\varepsilon \gamma^2}{2} \hat{\tau}_-(x) \cdot \hat{\tau}_+(x) + O(\gamma^3).$$

$c = \varepsilon \gamma + O(\gamma^3)$  とすると,

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (\partial_t \hat{\tau}_-(x)) \hat{\tau}_+(x) - \hat{\tau}_-(x) (\partial_t \hat{\tau}_+(x)) + O(\gamma^3), \\ \text{RHS} &= \frac{\varepsilon \gamma^2}{2} \hat{\tau}_-(x) \cdot \hat{\tau}_+(x) + O(\gamma^3). \end{aligned} \quad (2.88)$$

$t \rightarrow \gamma^{-2} t$  とスケール変換して,  $\gamma^2$  の項をとってくると

$$D_t \hat{\tau}_-(x) \cdot \hat{\tau}_+(x) = \frac{\varepsilon}{2} D_x^2 \hat{\tau}_-(x) \cdot \hat{\tau}_+(x). \quad (2.89)$$

よって PBO の双線形方程式が出てくる.  $\square$



## 第 3 章

# 特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式 ( $N$ 成分系への拡張)

Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数  $\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$  は Alba, Fateev, Litvinov, Tarnopolskiy によって [33] において導入された. 彼らは Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数の最高ウェイト表現において特殊な直交基底を考察した. この特殊な直交基底は Nekrasov 分配関数に関係していると同時に, この基底によって同時対角化される可換な作用素の族 (つまり Integrals of Motion) が考察された. さらに代数  $\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$  の古典極限を取ることで  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式 [36], [37], [38] という Benjamin-Ono 方程式の 2 成分の拡張となる可積分波動方程式の階層が現れることも示された [33]. 一方 3 成分以上の可積分な Benjamin-Ono 方程式の拡張は今まで得られていなかった. 本研究で丁-庵原-三木代数を用いることで Benjamin-Ono 方程式の多成分への拡張及び差分化を統一的に扱うことができることが示された. 本章では代数  $\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$  の古典極限について復習し, 本章の 3.3 節において本論文の主結果を述べる.

### 3.1 Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数の定義

Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数  $\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$  を次で定義する. この代数が考えられた動機である Nekrasov 分配関数については付録 B で復習する.

**定義 3.1.**  $\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$  を次のように定義される代数とする.

$$\text{生成元: } a_n \ (n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}), \quad L_n \ (n \in \mathbb{Z}), \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \text{関係式: } [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \\ [a_n, a_m] &= \frac{n}{2}\delta_{n+m,0}, \quad [L_n, a_m] = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Virasoro 代数の中心電荷は次のように媒介変数表示される.

$$c = 1 + 6Q^2, \quad Q = b + \frac{1}{b}. \quad (3.3)$$

次に代数  $\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$  の状態空間を考える.

**定義 3.2.** 真空状態  $|P\rangle$  を次の条件式を満たすものとして定義する.

$$L_n |P\rangle = a_n |P\rangle = 0, \quad (n > 0), \quad L_0 |P\rangle = \Delta(P) |P\rangle, \quad \langle P|P\rangle = 1. \quad (3.4)$$

ただし  $P$  は共形次元を  $\Delta(P) = \frac{Q^2}{4} - P^2$  と媒介変数表示するものとする.

**定義 3.3.** 状態空間の自然な基底として次のようなものが取れる.

$$a_{-l_m} \cdots a_{-l_1} L_{-k_n} \cdots L_{-k_1} |P\rangle, \quad k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n, \quad l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_m. \quad (3.5)$$

**補題 3.4.** 基底 (3.5) は作用素  $L_0 + 2 \sum_{k>0} a_{-k} a_k$  の固有状態であり固有値は次で与えられる.

$$\Delta^{(k+l)}(P) := \Delta(P) + k + l, \quad k = \sum_{i=1}^n k_i, \quad l = \sum_{j=1}^m l_j. \quad (3.6)$$

**注釈 3.5.** 運動量  $P$  が generic な値のとき  $|P\rangle$  から生成される  $U(\mathcal{A})$  加群は既約であり, 運動量が  $\Delta^{(N)}(P)$  になる状態の個数は  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$  で  $|\vec{\lambda}| = |\lambda_1| + |\lambda_2| = N$  になるようなヤング図形の組の個数に等しい.

$$\hat{a}_{-\lambda_1} \hat{L}_{-\lambda_2} |P\rangle := a_{-l_m} \cdots a_{-l_1} L_{-k_n} \cdots L_{-k_1} |P\rangle. \quad (3.7)$$

ここで  $\lambda_1 = (l_1, \dots, l_m), \lambda_2 = (k_1, \dots, k_n)$ .

[33] において状態空間に次の基底が導入された. (AFLT 基底と呼ばれる) これは単純に (3.7) の基底を使うより, Nekrasov 分配関数との関係を探るために導入された.

**定義 3.6** (Alba, Fateev, Litvinov, Tarnopolskiy, [33]). 状態空間に次の基底 (AFLT 基底) を定義する.

$$|P\rangle_{\vec{\lambda}} = \sum_{|\vec{\mu}|=|\vec{\lambda}|} C_{\vec{\lambda}}^{\mu_1, \mu_2}(P) \hat{a}_{-\mu_1} \hat{L}_{-\mu_2} |P\rangle. \quad (3.8)$$

ここで和はヤング図形の組  $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$  で  $|\vec{\mu}| = |\vec{\lambda}|$  を満たすものに渡ってとる.  $C_{\vec{\lambda}}^{\mu_1, \mu_2}(P)$  は一意的に定まる係数である.

**注釈 3.7.**  $C_{\vec{\lambda}}^{\mu_1, \mu_2}(P)$  は付録 B の命題 B.4 の条件から一意的に定まっている.

**定義 3.8.** 代数  $\mathcal{A}$  における conjugation を次のように定義する.

$$(L_{-k_n} \cdots L_{-k_1})^\dagger = L_{k_1} \cdots L_{k_n}, \quad (a_{-n})^\dagger = a_n. \quad (3.9)$$

**定義 3.9.** AFLT 基底  $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$  の conjugation を次のように定義する. ここで係数  $C_{\vec{\lambda}}^{\mu_1, \mu_2}(P)$  の複素共役を取らないことに注意する.

$${}_{\vec{\lambda}} \langle P| = \sum_{|\vec{\mu}|=|\vec{\lambda}|} C_{\vec{\lambda}}^{\mu_1, \mu_2}(P) \langle P| (\hat{a}_{-\mu_1})^\dagger (\hat{L}_{-\mu_2})^\dagger. \quad (3.10)$$

**注釈 3.10.**  $U(n)$  ゲージ理論の Nekrasov 分配関数との関係で,  $W_n$  代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数  $W_n \otimes \mathcal{H}$  においても同様の基底が [34] において導入された. また  $W_n \otimes \mathcal{H}$  の背後にある可積分構造についても同様に議論されている.



## 3.2 Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数と可積分構造

### 3.2.1 Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数の古典極限と $\mathfrak{gl}(2)$ generalized Benjamin-Ono 方程式

AFLT 基底のような直交基底が存在するとき, これらの基底がある無限個の可換な作用素の同時対角化問題の解になっているのではないかと考えることができる. このような無限個の可換な作用素の族を Integrals of Motion, (IM) と呼ぶ. 共形場理論, 通常の Virasoro 代数の場合 IM たちの役割については [35] において研究された. この場合 IM たちは KdV 系の量子化に相当する.  $\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$  においても AFLT 基底で同時対角化される, 可換な作用素の族 (IM's) を見つけることができる. その量子可積分系の古典極限は  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式の階層 [36], [37], [38] である. これについて復習する.

$\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$  において AFLT 基底  $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$  を同時固有状態に持つ, 可換な IM たちが次のように低次の階数のものから順次定まっていく. これは自身より低次の IM と可換であり, かつ AFLT 基底で対角化されるという条件から定まっていくものである.

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_2 &= L_0 - \frac{c}{24} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} a_k, \\
\mathbf{I}_3 &= \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} a_{-k} L_k + 2iQ \sum_{k=1}^{\infty} k a_{-k} a_k + \frac{1}{3} \sum_{i+j+k=0} a_i a_j a_k, \\
\mathbf{I}_4 &= \sum_{k=1}^{\infty} L_{-k} L_k + L_0^2 - \frac{c+2}{12} L_0 + 6 \sum_{k=\infty, k \neq 0}^{\infty} \sum_{i+j=k} L_{-k} a_i a_j + 12(L_0 - \frac{c}{24}) \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} a_k \\
&+ 6iQ \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} |k| a_{-k} L_k + 2(1-5Q^2) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_{-k} a_k + 6iQ \sum_{i+j+k=0} |k| a_i a_j a_k + \sum_{i+j+k+l=0} : a_i a_j a_k a_l :, \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{3.11}$$

逆に IM たち (3.11) が AFLT 基底  $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$  を規格化を除いて特徴付けることに注意する.

**定義 3.11.** エネルギー-運動量テンソル, ボゾンの母関数を

$$T(x) = -\frac{c}{24} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n e^{-inx}, \quad J(x) = \sum_{n \neq 0} a_n e^{-inx},$$

と定義する.

**定義 3.12.** 可換な場  $u(x), v(x)$  と Poisson 括弧  $\{*, *\}$  を  $b \rightarrow 0$  の極限で

$$u(x) := -\lim_{b \rightarrow 0} b^2 T(x), \quad v(x) := \lim_{b \rightarrow 0} ib J(x), \quad \{*, *\} := -\lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi b^2} [*, *], \tag{3.12}$$

と定義する.

**補題 3.13.**

$$\begin{aligned} \{u(x), u(y)\} &= (u(x) + u(y))\delta'(x - y) + \frac{1}{2}\delta'''(x - y), \\ \{v(x), v(y)\} &= \frac{1}{2}\delta'(x - y), \quad \{u(x), v(y)\} = 0. \end{aligned}$$

**証明.**  $T(x), J(x)$  の交換関係の古典極限  $b \rightarrow 0$  から導かれる. □

**定義 3.14.**  $H$  を次の積分作用素とする.

$$HF(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y) \cot \frac{1}{2}(y - x) dy. \quad (3.13)$$

また  $D := \frac{d}{dx}H$  と定める.

**注釈 3.15.** この積分作用素  $H$  は (2.40) と同じ, つまり PBO の Hilbert 変換である.

**注釈 3.16.** 各 Fourier モードに対しては

$$H(e^{imx}) = i \cdot \operatorname{sgn}(m)e^{imx}, \quad D(e^{imx}) = -m \cdot \operatorname{sgn}(m)e^{imx}. \quad (3.14)$$

これは補題 2.52 と同様である.

ここで  $G_k$  たちを次のように定める.

$$\begin{aligned} G_2 &= u + v^2, \\ G_3 &= uv + vDv + \frac{1}{3}v^3, \\ G_4 &= u^2 + 6uv^2 + 6uDv + 5v_x^2 + 6v^2Dv + v^4, \\ G_5 &= u^2v + \frac{1}{2}uDv + 2u_xv_x + 4uvDv + v^2Du + 2uv^3 + \frac{3}{2}v_xDv_x + 3vv_x^2 \\ &\quad + 2v(Dv)^2 + \frac{4}{3}v^3Dv + \frac{1}{2}v^2Dv^2 + \frac{1}{5}v^5, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

また  $I_k = \int G_k(x)dx$  と定義する.

**命題 3.17.** 古典極限において  $\mathbf{I}_k \rightarrow I_k$  となり  $I_k$  たちは Poisson 可換になる.

ここで Benjamin-Ono 方程式の 2 成分の拡張であり可積分系でもある次の方程式を導入する.

**定義 3.18** ([36], [37], [38]).  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式を  $u, v$  に関する次の微分・積分方程式と定める.

$$\begin{cases} u_t + vu_x + 2uv_x + \frac{1}{2}v_{xxx} = 0, \\ v_t + \frac{1}{2}u_x + Hv_{xx} + vv_x = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

**命題 3.19** ([33]). 方程式系 (3.16) はハミルトン形に書くことができる.

$$u_t = \{\mathcal{H}, u(x)\}, \quad v_t = \{\mathcal{H}, v(x)\}.$$

ここにハミルトニアンは  $\mathcal{H} = I_3 = \int G_3(y)dy$  である. 従って可積分系である.

### 3.2.2 $\mathfrak{gl}(2)$ generalized Benjamin-Ono 方程式と bidirectional Benjamin-Ono 方程式の従属変数変換

bidirectional Benjamin-Ono 方程式は [41] において Calogero-Sutherland 模型の流体力学極限を考察する中で導入された可積分方程式である. multi-phase 解や双線形方程式の構造についても議論されている. ここでは  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式と bidirectional Benjamin-Ono 方程式の間の従属変数の変換について述べる.

**定義 3.20** ([41]). bidirectional Benjamin-Ono 方程式 (2BO) は次で定義される.

$$\psi_t + \frac{i}{2}\tilde{\psi}_{xx} + \psi\psi_x = 0. \quad (3.17)$$

ここで  $\psi = u_0 + u_1$ ,  $\tilde{\psi} = u_0 - u_1$  とする.

**命題 3.21.**  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式 (3.16) は bidirectional Benjamin-Ono 方程式 (3.17) と従属変数変換で移り合う.

**証明.** (3.16) において

$$u = w_x - w^2, \quad (3.18)$$

となる従属変数  $w$  を取る. そして

$$\psi = v + iw, \quad (3.19)$$

とおく. まず  $v, w$  を用いて方程式 (3.16) を書き換えると

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial x} - 2w)(w_t + \frac{1}{2}v_{xx} + w_x v + wv_x) = 0, \\ v_t + \frac{1}{2}(w_{xx} - 2ww_x) + H v_{xx} + vv_x = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

これは

$$\psi_t + \frac{i}{2}\psi_{xx}^* + \psi\psi_x + H(\operatorname{Re}\psi_{xx}) = 0, \quad (3.21)$$

の実部, 虚部に一致する. さらに次のように従属変数を変換する.

$$u_0 = \frac{1}{2}(\psi + \psi^* - iH(\psi + \psi^*)), \quad (3.22)$$

$$u_1 = \frac{1}{2}(\psi - \psi^* + iH(\psi + \psi^*)). \quad (3.23)$$

$\psi = u_0 + u_1$ ,  $\tilde{\psi} = u_0 - u_1$  とすると (3.21) は次のように書き換えられる.

$$\psi_t + \frac{i}{2}\tilde{\psi}_{xx} + \psi\psi_x = 0. \quad (3.24)$$

□

### 3.3 特異積分項を持った可積分非線形波動方程式の $N$ 成分系への一般化

Benjamin-Ono(BO) 方程式, 及び Intermediate long wave(ILW) 方程式の 2 成分への拡張で可積分系であるものは [36], [37], [38] で導入された  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式及び  $\mathfrak{gl}(2)$  Intermediate long wave 方程式である. これらの 3 成分以上の可積分な拡張については今まで知られていなかった. 本研究では丁-庵原-三木代数の  $N$  階テンソル表現とそれに付随する可換な IM 系を用いて Benjamin-Ono 方程式の多成分への拡張及び差分化を統一的に扱う. 本研究で得られた特異積分項を持った可積分非線形波動方程式の  $N$  成分化に関する主結果について述べる.

**定義 3.22.**  $E_1(z), E_2(z), \dots, E_N(z)$  を  $N$  個の従属変数とする.

**定義 3.23.**  $E_i(z)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) を Fourier 級数  $E_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (E_i)_{-n} z^n$  で表したときの正モード成分, 負モード成分を次のように定義する.

$$E_i^+(z) = \sum_{n>0} (E_i)_{-n} z^n, \quad (3.25)$$

$$E_i^-(z) = \sum_{n>0} (E_i)_n z^{-n}. \quad (3.26)$$

**定義 3.24.**  $N$  成分の閉じた方程式系を次で定義する.

$$\begin{aligned} \partial_t E_r(z) = & \left( E_1^+(z) - E_1^+(qz) - E_1^-(q^{1-r}z) + E_1^-(q^{-r}z) \right) E_r(z) \\ & + E_{r+1}(qz) - E_{r+1}(z), \quad (r = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (3.27)$$

ただし  $E_{N+1}(z) = 0$  である.

**定義 3.25.** 次のように従属変数  $F_r(z)$  を定義する.

$$F_r(z) := E_r(q^{\frac{r-1}{2}}z), \quad (r = 1, \dots, N). \quad (3.28)$$

**定義 3.26.**  $r$  依存型離散 Laplacian を次で定義する.

$$(\Delta_\gamma^{(r)} f) := f\left(x - \frac{r+1}{2}\gamma\right) - f\left(x - \frac{r-1}{2}\gamma\right) - f\left(x + \frac{r-1}{2}\gamma\right) + f\left(x + \frac{r+1}{2}\gamma\right). \quad (3.29)$$

**定義 3.27.** 積分作用素  $T^{(r)}$  を次で定義する.

$$(T^{(r)} f)(x) := \frac{i}{2} \cdot \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} (\Delta_\gamma^{(r)} \cot(\pi(y-x))) \cdot f(y) dy. \quad (3.30)$$

**定理 3.28.** 連立波動方程式 (3.27) は

$$\partial_t F_r(z) = \left( T^{(r)} F_1 \right)(z) F_r(z) + F_{r+1}(q^{1/2}z) - F_{r+1}(q^{-1/2}z), \quad (r = 1, \dots, N), \quad (3.31)$$

と積分作用素を用いて書くことができる. ただし  $F_{N+1}(z) = 0$  である.

**定義 3.29.** 互いに Poisson 可換な  $I_k$  たちを Integrals of Motion と呼ぶ. すなわち

$$\{I_j, I_k\} = 0, \quad (j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}). \quad (3.32)$$

互いに Poisson 可換な  $I_k$  たちが存在するとき包合系と呼び, 可積分系になる.

**定理 3.30.** 方程式系 (3.27),(3.31) の時間発展をハミルトニアン  $X_0 := I_1$  を用いて記述できる. すなわち

$$\partial_t * = \{X_0, *\}. \quad (3.33)$$

よって方程式系 (3.27),(3.31) は包合系である. 従って可積分である.

**定義 3.31.**  $E_i(z)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) から  $X_i(z)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) へ次の式によって従属変数変換をする.

$$E_r(z) := \sum_{\substack{I \subset \{1, 2, \dots, N\} \\ |I|=r}} \prod_{k=1}^r X_{i_k}(q^{k-r}z), \quad (r = 1, \dots, N). \quad (3.34)$$

$i_1, \dots, i_r$  は  $I$  の元を  $i_1 < i_2 < \dots < i_r$  となるように並べたものとする.

**定義 3.32.**  $X_i(z)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) から  $\tilde{\tau}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) へ次の式によって従属変数変換をする.

$$X_i(z) = \varepsilon_i \frac{\tilde{\tau}_{N-i}(qz)\tilde{\tau}_{N-i+1}(z/q)}{\tilde{\tau}_{N-i}(z)\tilde{\tau}_{N-i+1}(z)}, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.35)$$

**定理 3.33.**  $\tilde{\tau}_0(z), \tilde{\tau}_1(z), \dots, \tilde{\tau}_N(z)$  に関する次の連立の広田双線形方程式が成り立つ.

$$(\partial_t \tilde{\tau}_i(z))\tilde{\tau}_{i-1}(z) - \tilde{\tau}_i(z)(\partial_t \tilde{\tau}_{i-1}(z)) = \varepsilon_{N-i+1}\tilde{\tau}_{i-1}(qz)\tilde{\tau}_i(q^{-1}z), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.36)$$

また 2 成分のときは方程式系が  $\gamma \rightarrow 0$  ( $q \rightarrow 1$ ) の極限で  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式を含んでいることが示される.

**定理 3.34.**  $N = 2$  のとき連立方程式系

$$\begin{cases} \partial_t X(z) = \left( X^+(z) - X^+(qz) - X^-(z) + X^-(q^{-1}z) \right) X(z) + Y(qz) - Y(z), \\ \partial_t Y(z) = \left( X^+(z) - X^+(qz) - X^-(q^{-1}z) + X^-(q^{-2}z) \right) Y(z), \end{cases} \quad (3.37)$$

の  $\gamma \rightarrow 0$  の極限を取ると  $\gamma$  の低次の項に  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式が出てくる. すなわち, この方程式系は  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式の  $q$  差分化になっている.

次に 2 次元戸田場方程式について述べる.

**定義 3.35.**  $\tilde{\tau}_i(z)$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) を適当にゲージ変換したものを  $\tau_i(z)$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) とする.

**注釈 3.36.** このゲージ変換の詳細については第 6 章で述べる.

**定義 3.37.**  $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$  を戸田場に対応する従属変数とし, 次で定義する.

$$\Phi^+(z) := \log \tau_0(qz) - \log \tau_0(z), \quad (3.38)$$

$$\Phi^-(z) := \log \tau_N(z) - \log \tau_N(z/q). \quad (3.39)$$

**定理 3.38.**  $\Phi^\pm(z)$  は次の 2 次元戸田場方程式を満たす.

$$\partial_t \partial_{\bar{t}} \Phi^\pm(z) = e^{\Phi^\pm(z) - \Phi^\pm(z/q)} - e^{\Phi^\pm(qz) - \Phi^\pm(z)}. \quad (3.40)$$

以上より, [21] で述べられている 2 次元戸田場方程式の特殊解を用いて  $\tau_0(z), \tau_N(z)$  については記述できることがわかった.

**注釈 3.39.** 離散 Laplacian 付き Intermediate long wave 方程式の  $N$  成分化はまだ得られていない. しかし時間発展を記述する包含系は存在する. 技術的な都合により広田の双線形方程式の結果が先に得られた.

**定義 3.40.**  $\tau_0(z; p), \tau_1(z; p), \dots, \tau_N(z; p)$  を  $N+1$  成分の  $\tau$  関数とする.

**定義 3.41.**  $\tau_0(z; p), \tau_1(z; p), \dots, \tau_N(z; p)$  に関して次の連立の方程式系

$$\begin{aligned} & (\partial_t \tau_i(z; p)) \tau_{i-1}(z; p) - \tau_i(z; p) (\partial_t \tau_{i-1}(z; p)) \\ & = \varepsilon_{N-i+1} q^{u_{N-i+1}} \tau_{i-1}(qz; p) \tau_i(q^{-1}z; p) - q^{u_{N-i+1}} \Lambda_{N-i+1,0} \tau_{i-1}(z; p) \tau_i(z; p), \quad (i = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\tau_0(pq^{N-1}z; p) = \tau_N(z; p). \quad (3.42)$$

を  $N$  成分離散 Laplacian 付き Intermediate long wave 方程式の  $\tau$  関数に対する広田の双線形方程式系と定める.

**定理 3.42.** (3.41), (3.42) は包含系である. したがって可積分系である.

**注釈 3.43.** (3.41), (3.42) は  $q$ -PILW の双線形方程式 (2.57) の多成分系への拡張になっている.

## 第 4 章

# 丁-庵原-三木代数の Fock 表現と quasi-Hopf twist

まず丁-庵原-三木代数の由来について復習する. まず 1997 年に [23] において丁と庵原は量子アフィン代数  $U_q(\widehat{sl}_n)$  の Drinfeld realization のある一般化を提唱した. 彼らは Drinfeld generator で定義される代数の構造関数  $g_{i,j}(z)$  がどんな条件を満たすときに Drinfeld coproduct を持つかについて考察し, Drinfeld realization を一般化した. その後 2007 年に三木が [25] で  $W_{1+\infty}$  代数の  $q$  変形に研究において導入した代数における構造関数が [23] において導入された量子群の Drinfeld realization の条件を満たすことがわかった. よってここで三木が導入した代数を丁-庵原-三木代数 (Ding-Iohara-Miki 代数, DIM) と呼ぶ.

また丁-庵原-三木代数は Macdonald 対称多項式の研究の中においても出現することが 2009 年に [24] において示されている. これは無限変数の対称関数環, 及びそこに作用する Macdonald 作用素を自由ボゾンを用いて表示したときに, Macdonald 作用素を生成する頂点作用素同士の OPE を計算すると丁-庵原-三木代数が表れるというものである, このとき丁-庵原-三木代数の作用する空間はボゾン Fock 空間であり対称関数の空間と同一視される. また [24] とほぼ同時期の別の研究 [26],[27],[28],[29],[30] においてもこの代数は現れている.

本章では丁-庵原-三木代数の定義と Fock 表現, 丁-庵原-三木代数の楕円変形である quasi-Hopf twist について復習する.

### 4.1 丁-庵原-三木代数の定義と Fock 表現

本節では丁-庵原-三木代数の定義, 及び Fock 表現について復習する.

#### 4.1.1 丁-庵原-三木代数の定義

$q^{1/4}, t^{1/4}$  を不定元とし,  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q^{1/4}, t^{1/4})$  を基礎体とする.

**定義 4.1.** 構造関数  $g(z)$  を

$$g(z) := \frac{G^+(z)}{G^-(z)}, \quad G^\pm(z) := (1 - q^{\pm 1}z)(1 - t^{\mp 1}z)(1 - q^{\mp 1}t^{\pm 1}z), \quad (4.1)$$

と定める.

**定義 4.2.** 丁-庵原-三木代数  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(q, t)$  を次のように定義される結合代数と定める.

$$\text{生成元: } x^\pm(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n^\pm z^{-n}, \quad \psi^\pm(z) = \sum_{\pm n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}} \psi_n^\pm z^{-n}, \quad \gamma^{\pm 1/2} (\text{中心元}). \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{関係式: } \psi^\pm(z)\psi^\pm(w) &= \psi^\pm(w)\psi^\pm(z), \quad \psi^+(z)\psi^-(w) = \frac{g(\gamma^{+1}w/z)}{g(\gamma^{-1}w/z)}\psi^-(w)\psi^+(z) \\ \psi^+(z)x^\pm(w) &= g(\gamma^{\mp 1/2}w/z)^{\mp 1}x^\pm(w)\psi^+(z), \\ \psi^-(z)x^\pm(w) &= g(\gamma^{\mp 1/2}z/w)^{\pm 1}x^\pm(w)\psi^-(z), \\ [x^+(z), x^-(w)] &= \frac{(1-q)(1-t)}{1-qt} \left( \delta(\gamma^{-1}z/w)\psi^+(\gamma^{1/2}w) - \delta(\gamma z/w)\psi^-(\gamma^{-1/2}w) \right), \\ x^\pm(z)x^\pm(w) &= g(z/w)^{\pm 1}x^\pm(w)x^\pm(z). \end{aligned} \quad (4.3)$$

ただし,  $\delta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n$ .

**命題 4.3.** 丁-庵原-三木代数  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(q, t)$  には Hopf 代数の構造が入る.

$$\begin{aligned} \text{余積 } \Delta: \quad \Delta(\gamma^{\pm 1/2}) &= \gamma^{\pm 1/2} \otimes \gamma^{\pm 1/2}, \\ \Delta(x^+(z)) &= x^+(z) \otimes 1 + \psi^-(\gamma_{(1)}^{1/2}z) \otimes x^+(\gamma_{(1)}z), \\ \Delta(x^-(z)) &= x^-(\gamma_{(2)}z) \otimes \psi^+(\gamma_{(2)}^{1/2}z) + 1 \otimes x^-(z), \\ \Delta(\psi^\pm(z)) &= \psi^\pm(\gamma_{(2)}^{\pm 1/2}z) \otimes \psi^\pm(\gamma_{(1)}^{\mp 1/2}z). \end{aligned} \quad (4.4)$$

ただし,  $\gamma_{(1)}^{\pm 1/2} = \gamma^{\pm 1/2} \otimes 1, \gamma_{(2)}^{\pm 1/2} = 1 \otimes \gamma^{\pm 1/2}$ .

$$\text{余単位射 } \epsilon: \quad \epsilon(\gamma^{\pm 1/2}) = 1, \quad \epsilon(\psi^\pm(z)) = 0, \quad \epsilon(x^\pm(z)) = 0. \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \text{対合射 } a: \quad a(\gamma^{\pm 1/2}) &= \gamma^{\mp 1/2}, \\ a(x^+(z)) &= -\psi^-(\gamma^{-1/2}z)^{-1}x^+(\gamma^{-1}z), \\ a(x^-(z)) &= -x^-(\gamma^{-1}z)\psi^+(\gamma^{-1/2}z)^{-1}, \\ a(\psi^\pm(z)) &= \psi^\pm(z)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

**注釈 4.4.** ここでは余積  $\Delta$  は無限和を許すものとする.

**定義 4.5.** Heisenberg 生成子  $b_n (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$  を次のように定義する.

$$\psi^+(z) = \psi_0^+ \exp\left(+ \sum_{n>0} b_n \gamma^{n/2} z^{-n}\right), \quad \psi^-(z) = \psi_0^- \exp\left(- \sum_{n>0} b_{-n} \gamma^{n/2} z^n\right). \quad (4.7)$$

**命題 4.6.** 交換関係

$$[b_m, b_n] = \frac{1}{m}(1-q^{-m})(1-t^m)(1-q^m t^{-m})(\gamma^m - \gamma^{-m})\gamma^{-|m|}\delta_{m+n,0}, \quad (4.8)$$

が成り立つ, また余積について

$$\Delta(b_n) = b_n \otimes \gamma_{(2)}^{-|n|} + 1 \otimes b_n, \quad (4.9)$$

が成り立つ.



**証明.**  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(q, t)$  の生成元の関係式, 及び余積の式から従う. □

**注釈 4.7.** 元々 [23] において丁と庵原が導入した量子アフィン代数  $U_q(\widehat{sl_2})$  の一般化は構造関数  $g(z)$  が  $g(z) = g(z^{-1})^{-1}$  を満たすような任意の解析関数に対して定められているものである. (高ランク  $U_q(\widehat{sl_n})$  の場合も全く同様) 丁-庵原-三木代数  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(q, t)$  における構造関数は Macdonald 理論の頂点作用素の交換関係から出てくる構造関数に一致するもの (4.1) に選ばれている.

#### 4.1.2 丁-庵原-三木代数の Fock 表現

Macdonald 理論との関連性を述べるために丁-庵原-三木代数の Fock 表現を復習する. 次の関係式を満たす生成元  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$  で定義される Heisenberg 代数  $\mathfrak{h}$  を考える.

$$[a_m, a_n] = m \frac{1 - q^{|m|}}{1 - t^{|m|}} \delta_{m+n, 0}. \quad (4.10)$$

$\mathfrak{h}_{>0}$  を  $\{a_n\}_{n>0}$  で生成される部分代数とし, これらを消滅演算子と呼ぶ.  $\mathfrak{h}_{<0}$  を  $\{a_n\}_{n<0}$  で生成される部分代数とし, これらを生成演算子と呼ぶ. 次に Fock 表現について定義する. 真空ベクトル  $|0\rangle$  を  $a_n |0\rangle = 0$ , ( $n > 0$ ) を満たすベクトルとして Fock 表現  $\mathcal{F}$  を

$$\mathcal{F} = \mathbb{F}[a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots] |0\rangle, \quad (4.11)$$

と定義する.  $\mathbb{F}$  上の対称関数環を  $\Lambda_{\mathbb{F}}$  と書く.

**命題 4.8.**

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathbb{F}}, \quad a_{-\lambda_1} a_{-\lambda_2} \cdots a_{-\lambda_l} |0\rangle \mapsto p_{\lambda}(x). \quad (4.12)$$

ただし  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  は分割. また  $p_{\lambda}(x)$  の定義は付録 A を参照.

**証明.** 冪和対称関数  $p_{\lambda}(x)$  が  $\Lambda_{\mathbb{F}}$  の基底であることから従う. □

**定義 4.9.**  $E \in \text{End}(\Lambda_{\mathbb{F}})$  と  $\widehat{E} \in \widehat{U}(\mathfrak{h})$  が対応するとき,  $\widehat{E}$  を  $E$  の自由場表示という. ここで  $\widehat{U}(\mathfrak{h})$  は  $\mathfrak{h}$  の普遍包絡環  $U(\mathfrak{h})$  の無限和を許した完備化である.

**定義 4.10.** 正規順序積  $:$  を次で定義する.

$$: a_m a_n := \begin{cases} a_m a_n & (m < 0), \\ a_n a_m & (m \geq 0). \end{cases} \quad (4.13)$$

**定義 4.11.** 次の頂点作用素を定義する.

$$\eta(z) = \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\right), \quad (4.14)$$

$$\xi(z) = \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} (t/q)^{n/2} a_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} (t/q)^{n/2} a_n z^{-n}\right). \quad (4.15)$$

$$\varphi^+(z) := \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} (1 - (q/t)^{-n}) (q/t)^{n/4} a_n z^{-n}\right), \quad (4.16)$$

$$\varphi^-(z) := \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} (1 - (q/t)^{-n}) (q/t)^{n/4} a_{-n} z^n\right). \quad (4.17)$$

定理 A.21 の Macdonald 作用素の自由場表示について復習する.

**命題 4.12** ([31]). 1 階の Macdonald 作用素  $E_1 \in \text{End}(\Lambda_{\mathbb{F}})$  の自由場表示を与える頂点作用素を考える.

$$\eta(z) = \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\right), \quad (4.18)$$

を  $\eta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_{-n} z^n$  と Fourier モード展開したときの 0 モード  $\eta_0$  で  $E_1$  は自由場表示される.

$$\widehat{E}_1 = \frac{1}{t-1} \left( \oint_C \eta(z) \frac{dz}{2\pi iz} - 1 \right) = \frac{\eta_0 - 1}{t-1}. \quad (4.19)$$

ただし積分路  $C$  は 0 モードをとるため  $|z| = 1$  を満たす円周とする.

**命題 4.13** ([32]).  $r$  階の Macdonald 作用素  $E_r \in \text{End}(\Lambda_{\mathbb{F}})$  は次の自由場表示を持つ.

$$\widehat{E}_r = \frac{[r]_{t^{-1}}!}{r!} \oint_C \cdots \oint_C \frac{dz_1}{2\pi iz_1} \cdots \frac{dz_r}{2\pi iz_r} \prod_{1 \leq j < k \leq r} \varpi(z_j/z_k) : \eta(z_1) \eta(z_2) \cdots \eta(z_r) : \dots \quad (4.20)$$

ここで,

$$[r]_x = \frac{1-x^r}{1-x}, \quad [r]_x! = [r]_x \cdot [r-1]_x \cdots [1]_x, \quad \varpi(y) = \frac{(1-y)(1-y^{-1})}{(1-t^{-1}y)(1-t^{-1}y^{-1})}. \quad (4.21)$$

また  $: \dots :$  は  $\mathfrak{h}$  における正規積であり, 積分路  $C$  は  $|z_j| = 1, j = 1, \dots, r$  のトーラスとする.

**注釈 4.14.** 頂点作用素 (4.14) は  $E_r(q, t)$  型の Macdonald 作用素の自由場表示に出てくるものだったが  $E_r(q^{-1}, t^{-1})$  型の Macdonald 作用素の自由場表示には頂点作用素 (4.15) を用いる. つまり頂点作用素 (4.15) の 0 モードから  $E_1(q^{-1}, t^{-1})$  の自由場表示が出てくることが知られている. また  $\eta$  のときと同様に  $\xi$  の積の 0 モードを取ることによって高階の Macdonald 作用素  $E_r(q^{-1}, t^{-1})$  の自由場表示を得ることができることが知られている. [24]

**注釈 4.15.** Macdonald 関数の性質

$$P_\lambda(x; q, t) = P_\lambda(x; q^{-1}, t^{-1}), \quad (4.22)$$

から  $P_\lambda(x; q, t)$  は  $E_r(q, t), E_s(q^{-1}, t^{-1})$  たちの同時固有関数になっている. よって  $[E_r(q, t), E_s(q^{-1}, t^{-1})] = 0$  ( $r, s \geq 1$ ) が従う.

**命題 4.16.**  $\mathcal{F}$  を Heisenberg 代数  $\mathfrak{h}$  の Fock 表現とする.  $\varepsilon \in \mathbb{Q}(q^{1/2}, t^{1/2}) \setminus 0$  に対して  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(q, t)$  の  $\mathcal{F}$  上のレベル 1 表現  $\rho_\varepsilon$  が次で定まる.

$$\rho_\varepsilon(\gamma^{\pm 1/2}) = (t/q)^{\pm 1/4}, \quad \rho_\varepsilon(\psi^\pm(z)) = \varphi^\pm(z), \quad \rho_\varepsilon(x^+(z)) = \varepsilon \eta(z), \quad \rho_\varepsilon(x^-(z)) = \varepsilon^{-1} \xi(z). \quad (4.23)$$

**注釈 4.17.**  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(q, t)$  の表現は  $\gamma^{\pm 1/2}$  が  $(t/q)^{\pm k/4}$  で実現されるとき, レベル  $k$  表現と呼ばれる.

これを示すためにまず次の補題を示す.

**補題 4.18.** 次の式が成り立つ.

$$\eta(z)\eta(w) = \frac{(1-w/z)(1-qt^{-1}w/z)}{(1-qw/z)(1-t^{-1}w/z)} : \eta(z)\eta(w) :, \quad (4.24)$$

$$\xi(z)\xi(w) = \frac{(1-w/z)(1-q^{-1}tw/z)}{(1-q^{-1}w/z)(1-tw/z)} : \xi(z)\xi(w) :, \quad (4.25)$$

$$\eta(z)\xi(w) = \frac{(1-q^{-1/2}t^{-1/2}w/z)(1-q^{1/2}t^{1/2}w/z)}{(1-q^{-1/2}t^{1/2}w/z)(1-q^{1/2}t^{-1/2}w/z)} : \eta(z)\xi(w) :, \quad (4.26)$$

$$\xi(w)\eta(z) = \frac{(1-q^{-1/2}t^{-1/2}z/w)(1-q^{1/2}t^{1/2}z/w)}{(1-q^{-1/2}t^{1/2}z/w)(1-q^{1/2}t^{-1/2}z/w)} : \xi(w)\eta(z) :. \quad (4.27)$$

$$(4.28)$$

**証明.** これは作用素  $X, Y$  について交換子  $[X, Y]$  が定数の場合の公式 (Baker-Campbell-Hausdorff 公式の特別な場合)

$$\exp X \exp Y = \exp[X, Y] \exp Y \exp X. \quad (4.29)$$

を用いて計算することで示すことができる. (4.24) について

$$\begin{aligned} \eta(z)\eta(w) &= \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\right) \\ &\quad \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n} w^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_n w^{-n}\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{n>0} \sum_{m>0} \frac{1-t^n}{n} \frac{1-t^{-m}}{m} [a_n, a_{-m}] z^{-n} w^m\right) \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n} z^n\right) \\ &\quad \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n} w^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_n w^{-n}\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{(1-q^n)(1-t^{-n})}{n} (w/z)^n\right) : \eta(z)\eta(w) : \\ &= \frac{(1-w/z)(1-qw/tz)}{(1-qw/z)(1-w/tz)} : \eta(z)\eta(w) :. \end{aligned} \quad (4.30)$$

ここで  $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  を用いた. (4.25), (4.26), (4.27) の式は同様に消滅演算子を上の公式を用いて右に追い越していくことによって計算できる.  $\square$

**補題 4.19.** 次の式が成り立つ.

$$\varphi^{\pm}(z)\varphi^{\pm}(w) = \varphi^{\pm}(w)\varphi^{\pm}(z), \quad \varphi^{+}(z)\varphi^{-}(w) = \frac{g((t/q)^{1/2}w/z)}{g((t/q)^{-1/2}w/z)} \varphi^{-}(w)\varphi^{+}(z), \quad (4.31)$$

$$\varphi^{+}(z)\eta(w) = g((t/q)^{-1/4}w/z)^{-1} \eta(w)\varphi^{+}(z), \quad \varphi^{+}(z)\xi(w) = g((t/q)^{1/4}w/z) \xi(w)\varphi^{+}(z), \quad (4.32)$$

$$\varphi^{-}(z)\eta(w) = g((t/q)^{-1/4}z/w) \eta(w)\varphi^{-}(z), \quad \varphi^{-}(z)\xi(w) = g((t/q)^{1/4}z/w)^{-1} \xi(w)\varphi^{-}(z), \quad (4.33)$$

$$[\eta(z), \xi(w)] = \frac{(1-q)(1-t)}{1-q/t} \left( \delta((t/q)^{-1/2}z/w) \varphi^{+}((t/q)^{1/4}w) - \delta((t/q)^{1/2}z/w) \varphi^{-}((t/q)^{-1/4}w) \right), \quad (4.34)$$

$$\eta(z)\eta(w) = g(z/w)\eta(w)\eta(z), \quad \xi(z)\xi(w) = g(z/w)^{-1}\xi(w)\xi(z). \quad (4.35)$$

**証明.** (4.35) は (4.24), (4.25) より従う. (4.34) は (4.26), (4.27) の式を用いる.

$$\begin{aligned} [\eta(z), \xi(w)] &= \left( \frac{(1 - q^{-1/2}t^{-1/2}w/z)(1 - q^{1/2}t^{1/2}w/z)}{(1 - q^{-1/2}t^{1/2}w/z)(1 - q^{1/2}t^{-1/2}tw/z)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1 - q^{-1/2}t^{-1/2}z/w)(1 - q^{1/2}t^{1/2}z/w)}{(1 - q^{-1/2}t^{1/2}z/w)(1 - q^{1/2}t^{-1/2}tz/w)} \right) : \eta(z)\xi(w) : \\ &= \frac{(1 - q)(1 - t^{-1})}{1 - qt^{-1}} \left( \delta(q^{-1/2}t^{1/2}w/z) - \delta(q^{1/2}t^{-1/2}w/z) \right) : \eta(z)\xi(w) : . \end{aligned} \quad (4.36)$$

ここで,

$$\begin{aligned} &\frac{(1 - q^{-1/2}t^{-1/2}w/z)(1 - q^{1/2}t^{1/2}w/z)}{(1 - q^{-1/2}t^{1/2}w/z)(1 - q^{1/2}t^{-1/2}tw/z)} - \frac{(1 - q^{-1/2}t^{-1/2}z/w)(1 - q^{1/2}t^{1/2}z/w)}{(1 - q^{-1/2}t^{1/2}z/w)(1 - q^{1/2}t^{-1/2}tz/w)} \\ &= \frac{(1 - q)(1 - t^{-1})}{1 - qt^{-1}} \left( \delta(q^{-1/2}t^{1/2}w/z) - \delta(q^{1/2}t^{-1/2}w/z) \right), \end{aligned} \quad (4.37)$$

は分母を形式的巾級数で表して計算することによって示すことができる. 従って,

$$\begin{aligned} [\eta(z), \xi(w)] &= \frac{(1 - q)(1 - t^{-1})}{1 - qt^{-1}} \left( \delta(q^{-1/2}t^{1/2}w/z) - \delta(q^{1/2}t^{-1/2}w/z) \right) : \eta(z)\xi(w) : \\ &= \frac{(1 - q)(1 - t^{-1})}{1 - qt^{-1}} \left( \delta(q^{-1/2}t^{1/2}w/z) : \eta(q^{-1/2}t^{1/2}w)\xi(w) : \right. \\ &\quad \left. - \delta(q^{1/2}t^{-1/2}w/z) : \eta(q^{1/2}t^{-1/2}w)\xi(w) : \right) \\ &= \frac{(1 - q)(1 - t)}{1 - q/t} \left( \delta((t/q)^{-1/2}z/w)\varphi^+((t/q)^{1/4}w) - \delta((t/q)^{1/2}z/w)\varphi^-((t/q)^{-1/4}w) \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

ここで

$$: \eta(q^{-1/2}t^{1/2}w)\xi(w) : := \varphi^+((t/q)^{1/4}w), \quad (4.39)$$

$$: \eta(q^{1/2}t^{-1/2}w)\xi(w) : := \varphi^-((t/q)^{-1/4}w), \quad (4.40)$$

を用いた. (4.31), (4.32), (4.33) も Baker-Campbell-Hausdorff 公式を使って同様に示すことができる.  $\square$

**注釈 4.20.**  $[\eta_0, \xi_0] = 0$  もわかる. これは後に出てくる命題 5.13 と同様の構造をしているためである.

定義 4.2 と補題 4.19 を見比べると頂点作用素の交換関係が丁-庵原-三木代数の交換関係と同様の格好をしていることが分かる. よって命題 4.16 が示された.

## 4.2 丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist

本節では丁-庵原-三木代数の楕円変形である quasi-Hopf-twist について復習する.

### 4.2.1 丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist

**定義 4.21.** Heisenberg 生成子  $b_n$  を用いて  $u^\pm(z; p) \in \mathcal{U}(q, t)$  を次で定義する.

$$u^+(z; p) = \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{p^n \gamma^{-n}}{1 - p^n \gamma^{-2n}} b_{-n} z^n\right), \quad u^-(z; p) = \exp\left(+\sum_{n>0} \frac{p^n}{1 - p^n} b_n z^{-n}\right). \quad (4.41)$$

さらに次のカレントを定義する.

$$x^+(z; p) := u^+(z; p)x^+(z), \quad (4.42)$$

$$x^-(z; p) := x^-(z)u^-(z; p), \quad (4.43)$$

$$\psi^\pm(z; p) := u^+(\gamma^{\pm 1/2}z; p)\psi^\pm(z)u^-(\gamma^{\mp 1/2}z; p). \quad (4.44)$$

ここで  $|q| < 1$  として  $(x; q)_\infty := \prod_{i \geq 0} (1 - xq^i)$  とする. テータ関数を次で定義する.

$$\Theta_p(x) := (p; p)_\infty (x; p)_\infty (p/x; p)_\infty. \quad (4.45)$$

ここで dressed Drinfeld current たち  $x^\pm(z; p), \psi^\pm(z; p) \in \mathcal{U}(q, t)$  は楕円交換関係, すなわち定義 4.2 の関係式を楕円関数で変形したものを満たす. 非常に複雑な式になるため 2 つだけ書くと

$$\begin{aligned} & \Theta_{p\gamma^{-2}}(q^{-1}z/w)\Theta_{p\gamma^{-2}}(tz/w)\Theta_{p\gamma^{-2}}(qt^{-1}z/w)x^+(z; p)x^+(w; p) \\ &= -\left(\frac{z}{w}\right)^3 \Theta_{p\gamma^{-2}}(q^{-1}w/z)\Theta_{p\gamma^{-2}}(tw/z)\Theta_{p\gamma^{-2}}(qt^{-1}w/z)x^+(w; p)x^+(z; p), \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \psi^+(z; p)\psi^+(w; p) &= \frac{\Theta_p(qz/tw)\Theta_p(tz/w)\Theta_p(z/qw)}{\Theta_p(qz/w)\Theta_p(z/tw)\Theta_p(tz/qw)} \\ &\times \frac{\Theta_{p\gamma^{-2}}(qz/w)\Theta_{p\gamma^{-2}}(z/tw)\Theta_{p\gamma^{-2}}(tz/qw)}{\Theta_{p\gamma^{-2}}(qz/tw)\Theta_{p\gamma^{-2}}(tz/w)\Theta_{p\gamma^{-2}}(z/qw)} \psi^+(w; p)\psi^+(z; p). \end{aligned} \quad (4.47)$$

さらに twistor を定義する.

**定義 4.22.** twistor  $F(p) \in \mathcal{U}(q, t) \otimes \mathcal{U}(q, t)$  を次で定義する.

$$F(p) := \exp\left(\sum_{n>0} \frac{np^n \gamma_{(2)}^{-n}}{(1 - q^{-n})(1 - t^n)(1 - q^n t^{-n})(1 - p^n \gamma_{(2)}^{-2n})} b_n \otimes b_{-n}\right). \quad (4.48)$$

**命題 4.23.** (1) twistor は可逆元であり, 次を満たす.

$$(\varepsilon \otimes \text{id})F(p) = (\text{id} \otimes \varepsilon)F(p) = 1. \quad (4.49)$$

よって次のように余積  $\Delta_p$ , Drinfeld associater  $\Phi$  を定義すると  $(\mathcal{U}(q, t), \Delta_p, \varepsilon, \Phi)$  は quasi-bialgebra になる.

$$\Delta_p(a) := F(p) \cdot \Delta(a) \cdot F(p)^{-1}, \quad (4.50)$$

$$\Phi := (F^{(23)}(p)(\text{id} \otimes \Delta)F(p)) \cdot (F^{(12)}(p)(\Delta \otimes \text{id})F(p))^{-1}. \quad (4.51)$$

(2)  $F(p)$  は次の shifted cocycle condition を満たす.

$$F^{(23)}(p)(\text{id} \otimes \Delta)F(p) = F^{(12)}(p\gamma_{(3)}^{-2})(\Delta \otimes \text{id})F(p). \quad (4.52)$$

これらのことから, dressed Drinfeld current に対する余積は次のようになる.

**命題 4.24.**

$$\begin{aligned}
\Delta_p(\gamma^{\pm 1/2}) &= \gamma^{\pm 1/2} \otimes \gamma^{\pm 1/2}, \\
\Delta_p(x^+(z; p)) &= x^+(z; p\gamma_{(2)}^{-2}) \otimes 1 + \psi^-(\gamma_{(1)}^{1/2}z; p\gamma_{(2)}^{-2}) \otimes x^+(\gamma_{(1)}z; p), \\
\Delta_p(x^-(z; p)) &= x^-(\gamma_{(2)}z; p\gamma_{(2)}^{-2}) \otimes \psi^+(\gamma_{(2)}^{1/2}z; p) + 1 \otimes x^-(z; p), \\
\Delta_p(\psi^\pm(z; p)) &= \psi^\pm(\gamma_{(2)}^{\pm 1/2}z; p\gamma_{(2)}^{-2}) \otimes \psi^\pm(\gamma_{(1)}^{\mp 1/2}z; p).
\end{aligned} \tag{4.53}$$

#### 4.2.2 丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の Fock 表現

次に自由ボゾン, 及び Fock 表現を節 4.1 と同様のものとする. 次の頂点作用素を定義する.

$$\eta(z; p) = \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} \frac{1-p^n}{1-p^n t^n q^{-n}} a_{-n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\right), \tag{4.54}$$

$$\xi(z; p) = \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} (t/q)^{n/2} a_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} \frac{1-p^n t^n q^{-n}}{1-p^n} (t/q)^{n/2} a_n z^{-n}\right), \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^+(z; p) &:= \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} (1-t^n q^{-n}) \frac{p^n}{1-p^n t^n q^{-n}} (t/q)^{-3n/4} a_{-n} z^n\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} (1-t^n q^{-n}) \frac{1}{1-p^n} (t/q)^{-n/4} a_n z^{-n}\right),
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^-(z; p) &:= \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} (1-t^n q^{-n}) \frac{1}{1-p^n t^n q^{-n}} (t/q)^{-n/4} a_{-n} z^n\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} (1-t^n q^{-n}) \frac{p^n}{1-p^n} (t/q)^{-3n/4} a_n z^{-n}\right).
\end{aligned} \tag{4.57}$$

ここで  $\varphi^-(z; p) = \varphi^+(zp^{-1}q^{-1/2}t^{1/2}; p)$  が成り立っている. 命題 4.16 における  $\rho_c$  について次が成り立つ.

**補題 4.25.**

$$\rho_c(x^+(z; p)) = c\eta(z; p), \quad \rho_c(x^-(z; p)) = c^{-1}\xi(z; p), \quad \rho_c(\psi^\pm(z; p)) = \varphi^\pm(z; p). \tag{4.58}$$

ここで  $c_n := \frac{1-p^n t^n q^{-n}}{1-p^n} a_n$ ,  $c_{-n} = \frac{1-p^n}{1-p^n t^n q^{-n}} a_{-n}$ , ( $n > 0$ ) とおくと  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$  は  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$  と全く同様の交換関係を満たすことがわかる. よって  $\{c_n\}_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}}$  で書いたものも全く同様に quasi-Hopf twist することができる. ここで  $pq/t$  を  $p$  と再定義してさらに  $c_n$  を改めて  $a_n$

と書き直したものは

$$\eta(z; p) = \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} \frac{1-p^n t^n q^{-n}}{1-p^n} a_n z^{-n}\right), \quad (4.59)$$

$$\xi(z; p) = \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} \frac{1-p^n}{1-p^n t^n q^{-n}} (t/q)^{n/2} a_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} (t/q)^{n/2} a_n z^{-n}\right), \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \varphi^+(z; p) &:= \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} (1-t^n q^{-n}) \frac{p^n t^n q^{-n}}{1-p^n t^n q^{-n}} (t/q)^{-3n/4} a_{-n} z^n\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} (1-t^n q^{-n}) \frac{1}{1-p^n} (t/q)^{-n/4} a_n z^{-n}\right), \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \varphi^-(z; p) &:= \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} (1-t^n q^{-n}) \frac{1}{1-p^n t^n q^{-n}} (t/q)^{-n/4} a_{-n} z^n\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} (1-t^n q^{-n}) \frac{p^n t^n q^{-n}}{1-p^n} (t/q)^{-3n/4} a_n z^{-n}\right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

以下、本論文では dressed Drinfeld current についてこの自由場表示を用いる。





## 第 5 章

# 丁-庵原-三木代数の Fock 表現の古典極限と特異積分項を持った可積分非線形波動方程式 (単独方程式の場合)

丁-庵原-三木代数の古典極限から離散 Laplacian 付き Periodic Benjamin-Ono( $q$ -PBO) 方程式という Periodic Benjamin-Ono(PBO) 方程式の差分化が得られることは [20],[21] において, 丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の古典極限から離散 Laplacian 付き Intermediate long wave( $q$ -PILW) 方程式という Periodic Intermediate long wave(PILW) 方程式の差分化が得られることは [19] において示された. 本章においては丁-庵原-三木代数の古典極限, 丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の古典極限について復習する.

### 5.1 丁-庵原-三木代数の古典極限と $q$ -PBO

ここでは丁-庵原-三木代数の自由ボゾン表示, 命題 4.16 における  $\rho_\varepsilon$  を用いる. つまり Fock 表現側において

$$\eta(z) = \varepsilon \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n}\right), \quad (5.1)$$

$$\xi(z) = \varepsilon^{-1} \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} (t/q)^{n/2} a_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} (t/q)^{n/2} a_n z^{-n}\right). \quad (5.2)$$

となる.

**定義 5.1.** 次の元を定義する.

$$\alpha_n := -\frac{(1-t^n)a_n}{n}. \quad (5.3)$$

**系 5.2.**  $\alpha_n$  を用いると  $\eta(z), \xi(z)$  は次のように書ける.

$$\eta(z) = \varepsilon \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_n z^{-n}\right), \quad (5.4)$$

$$\xi(z) = \varepsilon^{-1} \exp\left(-\sum_{n>0} \alpha_{-n} (t/q)^{n/2} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \alpha_n (t/q)^{n/2} z^{-n}\right). \quad (5.5)$$

$\eta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_{-n} z^n$ ,  $\xi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_{-n} z^n$  と各頂点作用素を Fourier 級数で書くこともできる. ここで古典極限を考える.  $t = e^{\hbar}$  において  $q$  を固定したまま  $\hbar \rightarrow 0$ , つまり  $t \rightarrow 1$  の極限を考える.

**命題 5.3.**  $\hbar \rightarrow 0$ , つまり  $t \rightarrow 1$  の極限において,  $\{\alpha_m\}$  ( $m \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ ),  $\{\eta_m\}$ ,  $\{\xi_m\}$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) たちの非可換代数は可換代数に移行する. すなわち

$$[\alpha_m, \alpha_n] = [\eta_m, \eta_n] = [\xi_m, \xi_n] = [\alpha_m, \eta_n] = [\alpha_m, \xi_n] = [\eta_m, \xi_n] = 0. \quad (5.6)$$

**証明.** 極限を取る前の元々の交換関係を計算したあと  $t \rightarrow 1$  の極限を考える. まず

$$[a_m, a_{-m}] = m \frac{1 - q^m}{1 - t^m}, \quad (m > 0),$$

より

$$[\alpha_m, \alpha_{-m}] = -\frac{(1 - q^m)(1 - t^{-m})}{m}.$$

よって  $t \rightarrow 1$  のとき  $[\alpha_m, \alpha_{-m}] = 0$  であり一般の  $m, n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$  についても  $[\alpha_m, \alpha_n] = 0$  となる. 次に命題 4.18 より

$$\begin{aligned} [\eta(z), \eta(w)] &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} [\eta_m, \eta_n] z^{-m} w^{-n} \\ &= \left( \frac{(1 - w/z)(1 - qt^{-1}w/z)}{(1 - qw/z)(1 - t^{-1}w/z)} - \frac{(1 - z/w)(1 - qt^{-1}z/w)}{(1 - qz/w)(1 - t^{-1}z/w)} \right) : \eta(z)\eta(w) : . \end{aligned} \quad (5.7)$$

$t \rightarrow 1$  のとき RHS  $\rightarrow 0$  であるから一般の  $m, n \in \mathbb{Z}$  について  $[\eta_m, \eta_n] = 0$  がなりたつ. 次に  $m > 0$  のとき

$$[a_m, \eta(z)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [a_m, \eta_n] z^{-n} = -t^m (1 - q^m) \eta(z). \quad (5.8)$$

よって

$$[\alpha_m, \eta(z)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\alpha_m, \eta_n] z^{-n} = t^m \frac{(1 - t^m)(1 - q^m)}{m} \eta(z), \quad (5.9)$$

よって  $t \rightarrow 1$  のとき  $m > 0, n \in \mathbb{Z}$  について  $[\alpha_m, \eta_n] = 0$ .  $m < 0$  のときも同様である. 他の交換関係も同様に示される.  $\square$

よって  $t \rightarrow 1$  の古典極限において  $\alpha_n$  たち,  $\eta_n$  たち, あるいは  $\xi_n$  たちの非可換代数は可換代数に移行するので Poisson 代数の構造を導入することができる.

**定義 5.4.** Poisson 括弧を次で定義する.

$$\{u, v\} := \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{[u, v]}{-\hbar}. \quad (5.10)$$

**命題 5.5.** 次の交換関係が成立する.

$$\{\alpha_m, \alpha_n\} = \text{sgn}(m)(1 - q^{|m|})\delta_{m+n, 0}, \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}). \quad (5.11)$$

**証明.** 極限を取る前の元々の交換関係において非可換な部分を見ると  $[a_m, a_{-m}] = m \frac{1 - q^m}{1 - t^m}$ , ( $m > 0$ ) より

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{1-t^m}{m} a_m, -\frac{1-t^{-m}}{-m} a_{-m} \right] = -\frac{(1-q^m)(1-t^{-m})}{m} \\ & = -\frac{(1-q^m)(1-e^{-m\hbar})}{m} = -\frac{(1-q^m)(m\hbar + O(\hbar^2))}{m} = -\hbar(1-q^m) + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (5.12)$$

よつて  $\{\alpha_m, \alpha_{-m}\} = 1 - q^m$  であり  $\{\alpha_m, \alpha_n\} = \text{sgn}(m)(1 - q^{|m|})\delta_{m+n,0}$  となる. □

**補題 5.6.** Poisson 代数の元  $a, b$  について  $\{\exp(a), \exp(b)\} = \{a, b\} \exp(a) \exp(b)$  が成り立つ.

**証明.** Poisson 括弧の満たす Leibniz 則により

$$\{a^n, b^m\} = nm\{a, b\}a^{n-1}b^{m-1}, \quad (5.13)$$

となるので,

$$\begin{aligned} \{\exp(a), \exp(b)\} &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b^m}{m!} \right\} \\ &= \{a, b\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b^{m-1}}{(m-1)!} \\ &= \{a, b\} \exp(a) \exp(b). \end{aligned} \quad (5.14)$$

□

**定義 5.7.** ここで時間  $t$  に対応するハミルトニアンを  $\eta_0$ , 別の時間  $\bar{t}$  に対応するハミルトニアンを  $-\xi_0$  として次のように時間微分を定義する.

$$\partial_t f = \{\eta_0, f\}, \quad \partial_{\bar{t}} g = -\{\xi_0, g\}. \quad (5.15)$$

**命題 5.8.**

$$\partial_{\bar{t}} \eta(z) = \{\eta_0, \eta(z)\} = \eta(z) \sum_{n \neq 0} \text{sgn}(n)(1 - q^{|n|})\eta_{-n}z^n. \quad (5.16)$$

**証明.** 補題 5.6 より

$$\begin{aligned} \{\eta(w), \eta(z)\} &= \varepsilon^2 \left\{ \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_{-n}w^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_n w^{-n}\right), \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_{-n}z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_n z^{-n}\right) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{n>0} \alpha_{-n}w^n + \sum_{n>0} \alpha_n w^{-n}, \sum_{n>0} \alpha_{-n}z^n + \sum_{n>0} \alpha_n z^{-n} \right\} \cdot \eta(z)\eta(w) \\ &= \left( \sum_{n>0} \{\alpha_{-n}, \alpha_n\} \left(\frac{w}{z}\right)^n + \sum_{n>0} \{\alpha_n, \alpha_{-n}\} \left(\frac{z}{w}\right)^n \right) \eta(z)\eta(w) \\ &= \left( -\sum_{n>0} (1 - q^n) \left(\frac{w}{z}\right)^n + \sum_{n>0} (1 - q^n) \left(\frac{z}{w}\right)^n \right) \eta(z)\eta(w) = \sum_{n \neq 0} \text{sgn}(n)(1 - q^{|n|}) \left(\frac{z}{w}\right)^n \eta(z)\eta(w). \end{aligned} \quad (5.17)$$

ここで両辺の  $w$  の 0 モードをとることによって

$$\{\eta_0, \eta(z)\} = \eta(z) \sum_{n \neq 0} \operatorname{sgn}(n)(1 - q^{|n|})\eta_{-n}z^n. \quad (5.18)$$

□

この式は  $q$ -PBO(2.75) にちょうど一致する. よって丁-庵原-三木代数の古典極限から離散 Laplacian 付き Periodic Benjamin-Ono 方程式 ( $q$ -PBO) が得られることが分かる.

**定義 5.9.** 次の頂点作用素を定義する.

$$\tau_+(z) = \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1}{1-q^n} \alpha_{-n} z^n\right), \quad \tau_-(z) = \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1}{1-q^n} \alpha_n z^{-n}\right). \quad (5.19)$$

**命題 5.10.**

$$\eta(z) = \varepsilon \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_n z^{-n}\right) = \varepsilon \frac{\tau_-(q^{-1}z)\tau_+(qz)}{\tau_-(z)\tau_+(z)}, \quad (5.20)$$

$$\xi(z) = \varepsilon^{-1} \exp\left(-\sum_{n>0} \alpha_{-n} q^{-n/2} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \alpha_n q^{-n/2} z^{-n}\right) = \varepsilon^{-1} \frac{\tau_-(q^{1/2}z)\tau_+(q^{-1/2}z)}{\tau_-(q^{-1/2}z)\tau_+(q^{1/2}z)}. \quad (5.21)$$

**注釈 5.11.** これは KdV 方程式における従属変数変換  $u = \partial_x^2 \log \tau$  と似た構造をしている.

**補題 5.12.** 次が成り立つ.

$$\{\xi(z), \xi(w)\} = \sum_{l \neq 0} \operatorname{sgn}(l)(q^{-|l|} - 1) \left(\frac{w}{z}\right)^l \xi(z)\xi(w), \quad (5.22)$$

$$\{\eta(z), \xi(w)\} = \delta(q^{1/2}w/z) \frac{\tau_+(q^{-1}z)\tau_+(qz)}{\tau_+(z)\tau_+(z)} - \delta(q^{-1/2}w/z) \frac{\tau_-(q^{-1}z)\tau_-(qz)}{\tau_-(z)\tau_-(z)}, \quad (5.23)$$

$$\{\eta(w), \tau_-(z)\} = \sum_{n>0} \left(\frac{w}{z}\right)^n \eta(w)\tau_-(z), \quad (5.24)$$

$$\{\eta(w), \tau_+(z)\} = -\sum_{n>0} \left(\frac{z}{w}\right)^n \eta(w)\tau_+(z), \quad (5.25)$$

$$\{\xi(w), \tau_-(z)\} = -\sum_{n>0} q^{-n/2} \left(\frac{w}{z}\right)^n \xi(w)\tau_-(z), \quad (5.26)$$

$$\{\xi(w), \tau_+(z)\} = \sum_{n>0} q^{-n/2} \left(\frac{z}{w}\right)^n \xi(w)\tau_+(z). \quad (5.27)$$

**証明.** まず (5.23) の式を示す.

$$\begin{aligned}
\{\eta(z), \xi(w)\} &= \left\{ \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_n z^{-n}\right), \exp\left(-\sum_{n>0} \alpha_{-n} q^{-n/2} w^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \alpha_n q^{-n/2} w^{-n}\right) \right\} \\
&= \left\{ \sum_{n>0} \alpha_{-n} z^n + \sum_{n>0} \alpha_n z^{-n}, -\sum_{m>0} \alpha_{-m} q^{-m/2} w^m - \sum_{m>0} \alpha_m q^{-m/2} w^{-m} \right\} \cdot \eta(z) \xi(w) \\
&= \left( -\sum_{n>0} \{\alpha_{-n}, \alpha_n\} q^{-n/2} \left(\frac{z}{w}\right)^n - \sum_{n>0} \{\alpha_n, \alpha_{-n}\} q^{-n/2} \left(\frac{w}{z}\right)^n \right) \eta(z) \xi(w) \\
&= \left( \sum_{n>0} (1 - q^n) q^{-n/2} \left(\frac{z}{w}\right)^n - \sum_{n>0} (1 - q^n) q^{-n/2} \left(\frac{w}{z}\right)^n \right) \eta(z) \xi(w) = \left( \delta(q^{1/2} w/z) - \delta(q^{-1/2} w/z) \right) \eta(z) \xi(w) \\
&= \delta(q^{1/2} w/z) \eta(z) \xi(q^{-1/2} z) - \delta(q^{-1/2} w/z) \eta(z) \xi(q^{1/2} z) \\
&= \delta(q^{1/2} w/z) \frac{\tau_+(q^{-1} z) \tau_+(qz)}{\tau_+(z) \tau_+(z)} - \delta(q^{-1/2} w/z) \frac{\tau_-(q^{-1} z) \tau_-(qz)}{\tau_-(z) \tau_-(z)}. \tag{5.28}
\end{aligned}$$

次に (5.24) の式について

$$\begin{aligned}
\{\eta(w), \tau_-(z)\} &= \varepsilon \left\{ \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_{-n} w^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_n w^{-n}\right), \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1}{1 - q^n} \alpha_n z^{-n}\right) \right\} \\
&= \left\{ \sum_{n>0} \alpha_{-n} w^n + \sum_{n>0} \alpha_n w^{-n}, -\sum_{n>0} \frac{1}{1 - q^n} \alpha_n z^{-n} \right\} \eta(w) \tau_-(z) \\
&= -\sum_{n>0} \{\alpha_{-n}, \alpha_n\} \frac{1}{1 - q^n} \left(\frac{w}{z}\right)^n \eta(w) \tau_-(z) = \sum_{n>0} \left(\frac{w}{z}\right)^n \eta(w) \tau_-(z). \tag{5.29}
\end{aligned}$$

他の式も同様に示すことができる.  $\square$

**命題 5.13.** 次が成り立つ.

$$\{\eta_0, \xi_0\} = 0. \tag{5.30}$$

**証明.** (5.23) より両辺の  $w$  の 0 モードをとると

$$\begin{aligned}
\{\eta(z), \xi_0\} &= \frac{\tau_+(q^{-1} z) \tau_+(qz)}{\tau_+(z) \tau_+(z)} - \frac{\tau_-(q^{-1} z) \tau_-(qz)}{\tau_-(z) \tau_-(z)} \\
&= \exp\left(\sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \alpha_{-n} z^n\right) - \exp\left(\sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \alpha_n z^{-n}\right). \tag{5.31}
\end{aligned}$$

よって両辺の  $z$  の 0 モードをとると  $\{\eta_0, \xi_0\} = 0$  がわかる.  $\square$

**補題 5.14.**  $\partial_{\bar{t}} \partial_{t^*} = \partial_t \partial_{\bar{t}^*}$  が成り立つ.

**証明.** Jacobi 恒等式より

$$\{\eta_0, \{\xi_0, *\}\} + \{\xi_0, \{*, \eta_0\}\} + \{*, \{\eta_0, \xi_0\}\} = 0.$$

$\{\eta_0, \xi_0\} = 0$  より

$$\{\eta_0, \{-\xi_0, *\}\} = \{-\xi_0, \{\eta_0, *\}\}.$$

$\square$

**定義 5.15.**  $\eta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_{-n} z^n$  と Fourier 級数展開するとき正モード成分, 負モード成分を次のように定義する.

$$\eta_+(z) = \sum_{n>0} \eta_{-n} z^n, \quad (5.32)$$

$$\eta_-(z) = \sum_{n>0} \eta_n z^{-n}. \quad (5.33)$$

よって  $\eta(z) = \eta_+(z) + \eta_0 + \eta_-(z)$  と書ける.

**命題 5.16.** 次が成り立つ.

$$\partial_t \tau_-(z) = \eta_-(z) \tau_-(z), \quad \partial_t \tau_+(z) = -\eta_+(z) \tau_+(z), \quad (5.34)$$

$$\partial_{\bar{t}} \tau_-(q^{-1/2} z) = \xi_-(z) \tau_-(q^{-1/2} z), \quad \partial_{\bar{t}} \tau_+(q^{1/2} z) = -\xi_+(z) \tau_+(q^{1/2} z). \quad (5.35)$$

**証明.** 補題 5.12 の下 4 つの式において  $w$  の 0 モードを取れば良い.  $\square$

**命題 5.17.** 次の広田の双線形方程式が成り立つ.

$$D_t \tau_-(z) \cdot \tau_+(z) = \varepsilon \tau_-(q^{-1} z) \tau_+(qz) - \eta_0 \tau_-(z) \tau_+(z), \quad (5.36)$$

$$D_{\bar{t}} \tau_-(q^{-1/2} z) \cdot \tau_+(q^{1/2} z) = \varepsilon^{-1} \tau_-(q^{1/2} z) \tau_+(q^{-1/2} z) - \xi_0 \tau_-(q^{-1/2} z) \tau_+(q^{1/2} z), \quad (5.37)$$

$$\frac{1}{2} D_t D_{\bar{t}} \tau_{\pm}(z) \cdot \tau_{\pm}(z) + \tau_{\pm}(qz) \cdot \tau_{\pm}(q^{-1} z) - \tau_{\pm}(z) \cdot \tau_{\pm}(z) = 0. \quad (5.38)$$

**証明.** 命題 5.16 より

$$\begin{aligned} D_t \tau_-(z) \cdot \tau_+(z) &= (\partial_t \tau_-(z)) \tau_+(z) - \tau_-(z) (\partial_t \tau_+(z)) \\ &= \eta_-(z) \tau_-(z) \tau_+(z) + \tau_-(z) \eta_+(z) \tau_+(z) = (\eta(z) - \eta_0) \tau_-(z) \tau_+(z) \\ &= \varepsilon \frac{\tau_-(q^{-1} z) \tau_+(qz)}{\tau_-(z) \tau_+(z)} \cdot \tau_-(z) \tau_+(z) - \eta_0 \tau_-(z) \tau_+(z) \\ &= \varepsilon \tau_-(q^{-1} z) \tau_+(qz) - \eta_0 \tau_-(z) \tau_+(z). \end{aligned} \quad (5.39)$$

他 2 つの双線形方程式も同様である.  $\square$

特に 1 つ目の双線形方程式は  $q$ -PBO の双線形方程式である.

次に, 2 次元戸田場方程式を記述するため, 次の元を導入する.

**定義 5.18.**

$$\Phi^+(z) := \sum_{n>0} \alpha_{-n} z^n, \quad \Phi^-(z) := - \sum_{n>0} \alpha_n z^{-n}. \quad (5.40)$$

**命題 5.19** ([21]).  $\Phi^{\pm}(z)$  は次の 2 次元戸田場方程式を満たす.

$$\partial_t \partial_{\bar{t}} \Phi^{\pm}(z) = e^{\Phi^{\pm}(z) - \Phi^{\pm}(z/q)} - e^{\Phi^{\pm}(qz) - \Phi^{\pm}(z)}. \quad (5.41)$$

**証明.**

$$\begin{aligned} \{\xi(w_2), \Phi^+(z)\} &= - \sum_{n>0} q^{-n/2} \left(\frac{z}{w_2}\right)^n (1 - q^n) \xi(w_2) \\ &= - \sum_{n>0} \left( \left(\frac{z}{q^{1/2} w_2}\right)^n - \left(\frac{q^{1/2} z}{w_2}\right)^n \right) \xi(w_2). \end{aligned} \quad (5.42)$$

よって

$$\begin{aligned}
\{\eta(w_1), \{-\xi(w_2), \Phi^+(z)\}\} &= \sum_{n>0} \left( \left( \frac{z}{q^{\frac{1}{2}} w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{1}{2}} z}{w_2} \right)^n \right) \{\eta(w_1), \xi(w_2)\} \\
&= \sum_{n>0} \left( \left( \frac{z}{q^{\frac{1}{2}} w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{1}{2}} z}{w_2} \right)^n \right) \left( \delta(q^{1/2} w_2/w_1) \frac{\tau_+(q^{-1} w_1) \tau_+(q w_1)}{\tau_+(w_1) \tau_+(w_1)} - \delta(q^{-1/2} w_2/w_1) \frac{\tau_-(q^{-1} w_1) \tau_-(q w_1)}{\tau_-(w_1) \tau_-(w_1)} \right) \\
&= \sum_{n>0} \left( \left( \frac{z}{q^{\frac{1}{2}} w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{1}{2}} z}{w_2} \right)^n \right) \left( \delta(q^{1/2} w_2/w_1) \frac{\tau_+(q^{-1/2} w_2) \tau_+(q^{3/2} w_2)}{\tau_+(q^{1/2} w_2) \tau_+(q^{1/2} w_2)} \right. \\
&\quad \left. - \delta(q^{-1/2} w_2/w_1) \frac{\tau_-(q^{-3/2} w_2) \tau_-(q^{1/2} w_2)}{\tau_-(q^{-1/2} w_2) \tau_-(q^{-1/2} w_2)} \right). \tag{5.43}
\end{aligned}$$

ここで  $w_1$  の 0 モードをとると

$$\begin{aligned}
\{\eta_0, \{-\xi(w_2), \Phi^+(z)\}\} &= \sum_{n>0} \left( \left( \frac{z}{q^{\frac{1}{2}} w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{1}{2}} z}{w_2} \right)^n \right) \\
&\quad \left( \frac{\tau_+(q^{-1/2} w_2) \tau_+(q^{3/2} w_2)}{\tau_+(q^{1/2} w_2) \tau_+(q^{1/2} w_2)} - \frac{\tau_-(q^{-3/2} w_2) \tau_-(q^{1/2} w_2)}{\tau_-(q^{-1/2} w_2) \tau_-(q^{-1/2} w_2)} \right) \\
&= \sum_{n>0} \left( \left( \frac{z}{q^{\frac{1}{2}} w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{1}{2}} z}{w_2} \right)^n \right) \left( \exp\left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \alpha_{-n} (q^{1/2} w_2)^n \right) - \exp\left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \alpha_n (q^{-1/2} w_2)^{-n} \right) \right). \tag{5.44}
\end{aligned}$$

ここで  $w_2$  の 0 モードをとると

$$\begin{aligned}
\{\eta_0, \{-\xi_0, \Phi^+(z)\}\} &= \exp\left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \alpha_{-n} z^n \right) - \exp\left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \alpha_n (qz)^{-n} \right) \\
&= e^{\Phi^+(z) - \Phi^+(z/q)} - e^{\Phi^+(qz) - \Phi^+(z)}. \tag{5.45}
\end{aligned}$$

$\Phi^-(z)$  についても同様である.  $\square$

## 5.2 丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の古典極限と $q$ -PILW

ここでも節 5.1 と同様に丁-庵原-三木代数の自由ボゾン表示, 命題 4.16 における  $\rho_\varepsilon$  を用いる. つまり Fock 表現側において

$$\eta(z; p) = \varepsilon \exp\left( \sum_{n>0} \frac{1 - t^{-n}}{n} a_{-n} z^n \right) \exp\left( - \sum_{n>0} \frac{1 - t^n}{n} \frac{1 - p^n t^n q^{-n}}{1 - p^n} a_n z^{-n} \right), \tag{5.46}$$

$$\xi(z; p) = \varepsilon^{-1} \exp\left( - \sum_{n>0} \frac{1 - t^{-n}}{n} \frac{1 - p^n}{1 - p^n t^n q^{-n}} (t/q)^{n/2} a_{-n} z^n \right) \exp\left( \sum_{n>0} \frac{1 - t^n}{n} (t/q)^{n/2} a_n z^{-n} \right), \tag{5.47}$$

となる.

**定義 5.20.** 次の元を定義する.

$$\lambda_n := - \frac{1 - t^{-n}}{n} \frac{1 - p^n t^n q^{-n}}{1 - p^n} a_n, \quad (n > 0), \quad \lambda_{-n} := \frac{1 - t^{-n}}{n} a_{-n}, \quad (n > 0).$$

**系 5.21.**  $\lambda_n$  を用いると  $\eta(z; p), \xi(z; p)$  は次のように書ける.

$$\eta(z; p) = \varepsilon \exp\left(\sum_{n>0} \lambda_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \lambda_n z^{-n}\right), \quad (5.48)$$

$$\xi(z; p) = \varepsilon^{-1} \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-p^n}{1-p^n t^n q^{-n}} (t/q)^{n/2} \lambda_{-n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-p^n}{1-p^n t^n q^{-n}} (t/q)^{n/2} \lambda_n z^{-n}\right). \quad (5.49)$$

ここでも  $\eta(z; p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_{-n} z^n$ ,  $\xi(z; p) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_{-n} z^n$  と Fourier 級数で書く. twist しない場合と同じ文字を用いていることに注意する.

ここで古典極限を考える.  $t = e^{\hbar}$  において  $q$  を固定したまま  $\hbar \rightarrow 0$ , つまり  $t \rightarrow 1$  の極限を考える.

**命題 5.22.**  $\hbar \rightarrow 0$ , つまり  $t \rightarrow 1$  の極限において,  $\{\lambda_m\}$  ( $m \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ ),  $\{\eta_m\}$ ,  $\{\xi_m\}$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) たちの非可換代数は可換代数に移行する. すなわち

$$[\lambda_m, \lambda_n] = [\eta_m, \eta_n] = [\xi_m, \xi_n] = [\lambda_m, \eta_n] = [\lambda_m, \xi_n] = [\eta_m, \xi_n] = 0. \quad (5.50)$$

**証明.** 極限を取る前の元々の交換関係を計算したあと  $t \rightarrow 1$  の極限を考える.

$$[a_m, a_{-m}] = m \frac{1-q^m}{1-t^m}, \quad (m > 0),$$

より

$$[\lambda_m, \lambda_{-m}] = -\frac{(1-q^m)(1-t^{-m})}{m} \frac{1-p^n t^n q^{-n}}{1-p^n}.$$

よって  $t \rightarrow 1$  のとき  $[\lambda_m, \lambda_{-m}] = 0$  であり一般の  $m, n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$  についても  $[\lambda_m, \lambda_n] = 0$  となる. 他の交換関係も twist しない場合と同様に計算できる.  $\square$

よって  $t \rightarrow 1$  の古典極限において  $\lambda_n$  たち,  $\eta_n$  たち, あるいは  $\xi_n$  たちの非可換代数は可換代数に移行するので Poisson 代数の構造を導入することができる.

**定義 5.23.** Poisson 括弧を次で定義する.

$$\{u, v\} := \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{[u, v]}{-\hbar}. \quad (5.51)$$

**命題 5.24.** 次の交換関係が成立する.

$$\{\lambda_m, \lambda_n\} = \frac{(1-q^m)(1-p^m q^{-m})}{1-p^m} \delta_{m+n, 0}. \quad (5.52)$$

**証明.** このとき  $[a_m, a_{-m}] = m \frac{1-q^m}{1-t^m}$ , ( $m > 0$ ) より

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{1-t^m}{m} \frac{1-p^m t^m q^{-m}}{1-p^m} a_m, -\frac{1-t^{-m}}{-m} a_{-m} \right] = -\frac{(1-q^m)(1-t^{-m})}{m} \frac{1-p^m t^m q^{-m}}{1-p^m} \\ & = -\frac{(1-q^m)(1-e^{-m\hbar})}{m} \frac{1-p^m q^{-m} e^{m\hbar}}{1-p^m} = -\frac{(1-q^m)(m\hbar + O(\hbar^2))}{m} \frac{1-p^m q^{-m}(1+O(\hbar))}{1-p^m} \\ & = -\hbar \frac{(1-q^m)(1-p^m q^{-m})}{1-p^m} + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (5.53)$$

よって  $\{\lambda_m, \lambda_{-m}\} = \frac{(1-q^m)(1-p^m q^{-m})}{1-p^m}$  であり,  $\{\lambda_m, \lambda_n\} = \frac{(1-q^m)(1-p^m q^{-m})}{1-p^m} \delta_{m+n, 0}$  となる.  $\square$



**定義 5.25.** ここでも時間  $t$  に対応するハミルトニアンを  $\eta_0$ , 別の時間  $\bar{t}$  に対応するハミルトニアンを  $-\xi_0$  として次のように時間微分を定義する.

$$\partial_t f = \{\eta_0, f\}, \quad \partial_{\bar{t}} g = -\{\xi_0, g\}. \quad (5.54)$$

**命題 5.26.**

$$\partial_t \eta(z; p) = \{\eta_0, \eta(z; p)\} = \eta(z; p) \sum_{n \neq 0} \frac{(1-q^n)(1-p^n q^{-n})}{1-p^n} \eta_{-n} z^n. \quad (5.55)$$

**証明.** 補題 5.6 より

$$\begin{aligned} \{\eta(w; p), \eta(z; p)\} &= \varepsilon^2 \left\{ \exp\left(\sum_{n \neq 0} \lambda_n w^{-n}\right), \exp\left(\sum_{n \neq 0} \lambda_n z^{-n}\right) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{n \neq 0} \lambda_n w^{-n}, \sum_{m \neq 0} \lambda_m z^{-m} \right\} \cdot \eta(z; p) \eta(w; p) \\ &= \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} \{\lambda_n, \lambda_m\} w^{-n} z^{-m} \eta(z; p) \eta(w; p) \\ &= \sum_{n \neq 0} \frac{(1-q^n)(1-p^n q^{-n})}{1-p^n} \left(\frac{z}{w}\right)^n \eta(z; p) \eta(w; p). \end{aligned} \quad (5.56)$$

ここで両辺の  $w$  の 0 モードをとることによって

$$\{\eta_0, \eta(z; p)\} = \eta(z; p) \sum_{n \neq 0} \frac{(1-q^n)(1-p^n q^{-n})}{1-p^n} \eta_{-n} z^n. \quad (5.57)$$

□

この式を  $z = e^{2\pi i x}$  を用いて書き換えると

$$\{\eta_0, \eta(z; p)\} = \eta(z; p) \sum_{n \neq 0} \frac{(1-q^n)(1-p^n q^{-n})}{1-p^n} \eta_{-n} e^{2\pi i n x}. \quad (5.58)$$

ここで右辺は (2.48) より  $\dot{\eta} = \eta(\mathbb{T}\eta)$ , すなわち (2.47) にちょうど一致していることがわかる. つまり丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の古典極限から離散 Laplacian 付き Periodic Intermediate long wave 方程式 ( $q$ -PILW) が得られることがわかる.

**定義 5.27.** 次の頂点作用素を定義する.

$$\tau(z; p) = \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{p^n}{(1-q^n)(1-p^n q^{-n})} \lambda_n z^{-n}\right). \quad (5.59)$$

このとき (5.48) より次の式が成り立つ.

$$\eta(z; p) = \varepsilon \frac{\tau(pq^{-1}z; p)\tau(qz; p)}{\tau(pz; p)\tau(z; p)} = \varepsilon \frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\tau}}. \quad (5.60)$$

シフトの記号は定義 2.35 と同様である. ここで定義した  $\tau$  について次の定理が成り立つ.

**定理 5.28.** 次の双線形方程式が成り立つ.

$$(\partial_t \tau(pz; p))\tau(z; p) - \tau(pz; p)(\partial_t \tau(z; p)) = \varepsilon \tau(pq^{-1}z; p)\tau(qz; p) - \eta_0 \tau(pz; p)\tau(z; p). \quad (5.61)$$

証明.

$$\begin{aligned} \{\eta(w; p), \tau(z; p)\} &= \left\{ \sum_{n \neq 0} \lambda_n w^{-n}, - \sum_{m \neq 0} \frac{p^m}{(1-q^m)(1-p^m q^{-m})} \lambda_m z^{-m} \right\} \eta(w; p) \tau(z; p) \\ &= - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{1-p^n} \left(\frac{z}{w}\right)^n \eta(w; p) \tau(z; p). \end{aligned} \quad (5.62)$$

つまり,

$$\frac{\{\eta(w; p), \tau(z; p)\}}{\tau(z; p)} = - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{1-p^n} \left(\frac{z}{w}\right)^n \eta(w; p), \quad \frac{\{\eta(w; p), \tau(pz; p)\}}{\tau(pz; p)} = - \sum_{n \neq 0} \frac{p^n}{1-p^n} \left(\frac{z}{w}\right)^n \eta(w; p).$$

よって

$$\frac{\{\eta(w; p), \tau(pz; p)\}}{\tau(pz; p)} - \frac{\{\eta(w; p), \tau(z; p)\}}{\tau(z; p)} = (\delta(w/z) - 1) \eta(w; p).$$

ここで両辺の  $w$  の 0 モードをとると

$$\frac{\{\eta_0, \tau(pz; p)\}}{\tau(pz; p)} - \frac{\{\eta_0, \tau(z; p)\}}{\tau(z; p)} = \eta(z; p) - \eta_0 = \varepsilon \frac{\tau(pq^{-1}z; p) \tau(qz; p)}{\tau(pz; p) \tau(z; p)} - \eta_0.$$

両辺に  $\tau(z; p) \tau(pz; p)$  を掛けると (5.61) になる. □

この双線形方程式 (5.61) は (2.57) と同じである. つまり  $q$ -PILW の双線形方程式が得られる.

## 第 6 章

# 丁-庵原-三木代数の $N$ 階テンソル表現の古典極限と特異積分項を持った可積分非線形波動方程式 ( $N$ 成分系への拡張)

丁-庵原-三木代数は Hopf 代数の構造を持つため, 余積を用いて  $N$  階テンソル表現を作ることができる. 本章においては  $N$  階テンソル積 Fock 表現の古典極限に付随する連立波動方程式及び古典可積分系について研究する. 特に  $N$  階テンソルから導かれる多成分相互作用の波動方程式,  $\tau$  関数の組, 双線形方程式, 2 次元戸田場方程式の導出について述べる. ここでの双線形方程式に関する結果は [40] を参考にしている.

### 6.1 丁-庵原-三木代数の $N$ 階テンソルの古典極限の連立波動方程式

本節では  $N$  階テンソルの古典極限において, 閉じた形の  $N$  成分の連立波動方程式が得られることについて述べる. また  $N = 2$  の時にそれが  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式の  $q$  変形となることを証明する.

#### 6.1.1 丁-庵原-三木代数の $N$ 階テンソル積表現と古典極限

ここで丁-庵原-三木代数  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(q, t)$  のレベル 1 表現  $\rho_\varepsilon$  のテンソル表現について説明する.

**定義 6.1.**  $\mathcal{F}^{\otimes N}$  における  $N$  重テンソル表現  $\rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_N}$  を考える. ( $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ )  $N$  階余積  $\Delta^{(N)}$  を次のように帰納的に定義する.

$$\Delta^{(2)} = \Delta, \quad \Delta^{(N)} := (\text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta^{(N-1)}. \quad (6.1)$$

さらにこれとレベル 1 表現の  $N$  重テンソル表現  $\rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_N}$  の合成を  $\rho_y^{(N)}$  と書く.

$$\rho_y^{(N)} = (\rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_N}) \circ \Delta^{(N)} : \mathcal{U}(q, t) \rightarrow \mathcal{F}^{\otimes N}. \quad (6.2)$$

このとき  $(\rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_N}) \circ \Delta^{(N)}(\gamma) = (\rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_N})(\gamma_{(1)} \cdots \gamma_{(N)}) = (t/q)^{N/2}$  よりレベル  $N$  表現になっている.

$\mathcal{F}^{\otimes N}$  において、テンソルの第  $i$  成分のボゾンを書くとき

$$a_n^{(i)} = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \overset{i}{a_n} \otimes \cdots \otimes 1. \quad (6.3)$$

とする。成分が明らかなきときは右上の  $(i)$  を省くこともある。  $[a_m^{(i)}, a_n^{(j)}] = m \frac{1-q^{|m|}}{1-t^{|m|}} \delta_{m+n,0} \delta_{i,j}$  である。

**補題 6.2.**

$$\rho_y^{(N)}(x^+(z)) = \sum_{i=1}^N y_i \Lambda_i(z), \quad \rho_y^{(N)}(x^-(z)) = \sum_{i=1}^N y_i^{-1} \tilde{\Lambda}_i^*(z). \quad (6.4)$$

ここで  $\Lambda_i(z), \tilde{\Lambda}_i^*(z)$  は

$$\Lambda_i(z) := \varphi^-(p^{-1/4}z) \otimes \varphi^-(p^{-3/4}z) \otimes \cdots \otimes \varphi^-(p^{-(2i-3)/4}z) \otimes \eta(p^{-(i-1)/2}z) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1, \quad (6.5)$$

$$\tilde{\Lambda}_i^*(z) := 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \xi(p^{-(N-i)/2}z) \otimes \varphi^+(p^{-(2N-2i-1)/4}z) \otimes \cdots \otimes \varphi^+(p^{-1/4}z), \quad (6.6)$$

と定義される。  $\eta(p^{-(i-1)/2}z), \xi(p^{-(N-i)/2}z)$  は  $i$  番目のテンソル積成分である。

**証明.** 命題 4.3, 定義 6.1 より帰納的に従う。  $\square$

普通  $x^-(z)$  の  $N$  階テンソル積を扱う際、この後ろから  $N-i+1$  成分を持ったものを  $\rho_y^{(N)}(x^-(z))$  の構成成分の  $i$  番目として  $\tilde{\Lambda}_i^*(z)$  とする。しかし本論文では後の便利のために後ろから  $i$  成分を持ったものを  $\rho_y^{(N)}(x^-(z))$  の構成成分の  $i$  番目として  $\Lambda_i^*(z)$  として定義したい。よって次のように定義する。

$$\Lambda_i^*(z) := \tilde{\Lambda}_{N-i+1}^*(z) = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \xi(p^{-(i-1)/2}z) \otimes \varphi^+(p^{-(2i-3)/4}z) \otimes \cdots \otimes \varphi^+(p^{-1/4}z). \quad (6.7)$$

こうすると

$$\rho_y^{(N)}(x^+(z)) = \sum_{i=1}^N y_i \Lambda_i(z), \quad \rho_y^{(N)}(x^-(z)) = \sum_{i=1}^N y_i^{-1} \Lambda_{N-i+1}^*(z). \quad (6.8)$$

となる。

次に古典極限を取るために次の作用素を定義する。

$$\alpha_n := -\frac{1-t^n}{n} a_n, \quad (6.9)$$

$$\phi^+(z) := \exp\left(\sum_{n>0} (1-q^{-n}) \alpha_{-n} z^n\right), \quad (6.10)$$

$$\phi^-(z) := \exp\left(\sum_{n>0} (1-q^{-n}) \alpha_n z^{-n}\right). \quad (6.11)$$

$\mathcal{F}$  の古典極限である  $\alpha_n$  の可換代数を  $\mathcal{A}$  とする。  $\mathcal{A}^{\otimes N}$  において、同様に

$$\alpha_n^{(i)} := 1 \otimes \cdots \otimes \overset{i}{\alpha_n} \otimes \cdots \otimes 1. \quad (6.12)$$

でテンソルの第  $i$  成分の代数の元を表す.  $t = e^h, h \rightarrow 0$  とする古典極限のとり方は節 5.1 と同じである.  $\mathcal{F}^{\otimes 2}$  において,

$$[a^{(1)} \otimes a^{(2)}, b^{(1)} \otimes b^{(2)}] = [a^{(1)}, b^{(1)}] \otimes a^{(2)} b^{(2)} + b^{(1)} a^{(1)} \otimes [a^{(2)}, b^{(2)}], \quad (6.13)$$

であり, 古典極限をとって  $\mathcal{A}^{\otimes 2}$  に移行したとき, Poisson 括弧は次のように定まる.

$$\{a^{(1)} \otimes a^{(2)}, b^{(1)} \otimes b^{(2)}\} = \{a^{(1)}, b^{(1)}\} \otimes a^{(2)} b^{(2)} + a^{(1)} b^{(1)} \otimes \{a^{(2)}, b^{(2)}\}. \quad (6.14)$$

$\mathcal{A}^{\otimes N}$  においても同様である. また,  $\{\alpha_m^{(i)}, \alpha_n^{(i)}\} = \text{sgn}(m)(1 - q^{|m|})\delta_{m+n,0}$  である. この Poisson 括弧の定め方において同じテンソル積成分の Poisson 括弧のみ生じることには注意する.

**注釈 6.3.**  $a_n^{(i)}, (n \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, N)$  が全て 1 つの可換代数に移行するとして, テンソル積の構造をなくした定式化をすることもできる. この場合  $\{\alpha_m^{(i)}, \alpha_n^{(j)}\} = \text{sgn}(m)(1 - q^{|m|})\delta_{m+n,0}\delta_{i,j}$  であるので例えば 2 階テンソル積のとき, Leibniz 則を用いて計算すると,

$$\begin{aligned} \{a^{(1)} a^{(2)}, b^{(1)} b^{(2)}\} &= \{a^{(1)}, b^{(1)} b^{(2)}\} a^{(2)} + \{a^{(2)}, b^{(1)} b^{(2)}\} a^{(1)} \\ &= \{a^{(1)}, b^{(1)}\} b^{(2)} a^{(2)} + \{a^{(1)}, b^{(2)}\} a^{(2)} b^{(1)} + \{a^{(2)}, b^{(1)}\} b^{(2)} a^{(1)} + \{a^{(2)}, b^{(2)}\} b^{(1)} a^{(1)} \\ &= \{a^{(1)}, b^{(1)}\} b^{(2)} a^{(2)} + \{a^{(2)}, b^{(2)}\} b^{(1)} a^{(1)}, \end{aligned}$$

となりこのような古典極限の定式化をしたときも Poisson 代数の構造としては同じになる.

次に後の便利のため  $\mathcal{A}$  に新しい生成元  $u, Q$  を追加して  $\mathcal{B}$  という新しい代数を定義する.

**定義 6.4.**  $\alpha_n (n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}), u, Q$  で生成される可換代数  $\mathcal{B}$  があって, Poisson 括弧を次のように定める.

$$\{\alpha_m, \alpha_n\} = \text{sgn}(m)(1 - q^{|m|})\delta_{m+n,0}, \quad (6.15)$$

$$\{u, Q\} = -\frac{1}{\log q}, \quad (6.16)$$

$$\{\alpha_m, u\} = \{\alpha_m, Q\} = 0. \quad (6.17)$$

以下, 丁-庵原-三木代数の  $N$  階テンソル積の自由場表示の古典極限  $\mathcal{A}^{\otimes N}$  に生成元を付け加えた  $\mathcal{B}^{\otimes N}$  を考える.  $\mathcal{B}^{\otimes N}$  において次のような記法を用いる.

$$\alpha_n^{(i)} := 1 \otimes \cdots \otimes \overset{i}{\alpha_n} \otimes \cdots \otimes 1, \quad (6.18)$$

$$u_i := 1 \otimes \cdots \otimes \overset{i}{u} \otimes \cdots \otimes 1, \quad (6.19)$$

$$Q_i := 1 \otimes \cdots \otimes \overset{i}{Q} \otimes \cdots \otimes 1. \quad (6.20)$$

$t = e^{\hbar}$ ,  $\hbar \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 1$ ) で作用素は次のように移行する.

$$\eta(z) \rightarrow \eta(z) = \varepsilon \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_n z^{-n}\right), \quad (6.21)$$

$$\xi(z) \rightarrow \xi(z) = \varepsilon^{-1} \exp\left(-\sum_{n>0} \alpha_{-n} q^{-n/2} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \alpha_n q^{-n/2} z^{-n}\right), \quad (6.22)$$

$$\varphi^-(p^{-1/4}z) \rightarrow \phi^+(z) := \exp\left(\sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \alpha_{-n} z^n\right), \quad (6.23)$$

$$\varphi^+(p^{-1/4}z) \rightarrow \phi^-(q^{-1/2}z) := \exp\left(\sum_{n>0} (1 - q^{-n}) q^{n/2} \alpha_n z^{-n}\right), \quad (6.24)$$

$$\Lambda_i(z) \rightarrow \Lambda_i(z) := \phi^+(z) \otimes \phi^+(q^{-1/2}z) \otimes \cdots \otimes \phi^+(q^{-\frac{1}{2}((i-1)-1)}z) \otimes \eta(q^{-(i-1)/2}z) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1, \quad (6.25)$$

$$\Lambda_i^*(z) \rightarrow \Lambda_i^*(z) := \Lambda_i^*(z) := 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \xi(q^{-(i-1)/2}z) \otimes \phi^-(q^{-(i-1)/2}z) \otimes \cdots \otimes \phi^-(q^{-1/2}z). \quad (6.26)$$

本論文においては自由場表示の古典極限を取ったあと  $y_i = \varepsilon_i q^{u_i}$  とする.  $\varepsilon_i$  をテンソル積の第  $i$  成分の  $\eta$  に繰り込んで再定義するのは (5.1) と同様である. すなわち

$$1 \otimes \cdots \otimes \widehat{\eta(z)}^i \otimes \cdots \otimes 1 = \varepsilon_i \left( 1 \otimes \cdots \otimes \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_{-n}^{(i)} z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \alpha_n^{(i)} z^{-n}\right) \otimes \cdots \otimes 1 \right). \quad (6.27)$$

(6.8) における  $\rho_y^{(N)}(x^+(z))$  の古典極限を  $X(z)$ ,  $\rho_y^{(N)}(x^-(z))$  の古典極限を  $\bar{X}(z)$  とすると,

$$X(z) := \sum_{i=1}^N q^{u_i} \Lambda_i(z), \quad \bar{X}(z) := \sum_{i=1}^N q^{-u_{N-i+1}} \Lambda_i^*(z), \quad (6.28)$$

$$(X_n(z) := q^{u_n} \Lambda_n(z), \quad \bar{X}_n(z) := q^{-u_{N-n+1}} \Lambda_n^*(z)). \quad (6.29)$$

また  $X(z), \bar{X}(z), \Lambda_i(z), \Lambda_i^*(z)$  を  $z$  の Fourier 級数で表したときの係数, 及び正モード, 負モードによる展開を次のように定義する.

$$X(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (X)_{-n} z^n, \quad X^+(z) := \sum_{n>0} (X)_{-n} z^n, \quad X^-(z) := \sum_{n>0} (X)_n z^{-n}, \quad (6.30)$$

$$\bar{X}(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\bar{X})_{-n} z^n, \quad \bar{X}^+(z) := \sum_{n>0} (\bar{X})_{-n} z^n, \quad \bar{X}^-(z) := \sum_{n>0} (\bar{X})_n z^{-n}, \quad (6.31)$$

$$\Lambda_i(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\Lambda_i)_{-n} z^n, \quad \Lambda_i^+(z) := \sum_{n>0} (\Lambda_i)_{-n} z^n, \quad \Lambda_i^-(z) := \sum_{n>0} (\Lambda_i)_n z^{-n}, \quad (6.32)$$

$$\Lambda_i^*(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\Lambda_i^*)_{-n} z^n, \quad \Lambda_i^{*+}(z) := \sum_{n>0} (\Lambda_i^*)_{-n} z^n, \quad \Lambda_i^{*-}(z) := \sum_{n>0} (\Lambda_i^*)_n z^{-n}. \quad (6.33)$$

### 6.1.2 古典極限と $N$ 成分相互作用の連立波動方程式

**定義 6.5.** 時間  $t$  での微分を次で定義する.

$$\partial_t * = \{X_0, *\}. \quad (6.34)$$

**注釈 6.6.** ここでは  $I_1 = X_0$  で  $\{I_i, I_j\} = 0, (i, j \geq 1)$  であるような Poisson 可換な IM たちが存在する. よってハミルトニアン系になっていて可積分系になっている.

**定義 6.7.** 波の成分に相当する  $N$  個の従属変数を次のように定義する.

$$E_r(z) := \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,N\} \\ |I|=r}} \prod_{k=1}^r X_{i_k}(q^{k-r}z), \quad (r = 1, \dots, N). \quad (6.35)$$

$i_1, \dots, i_r$  は  $I$  の元を  $i_1 < i_2 < \dots < i_r$  となるように並べたものとする.

**定義 6.8.**  $E_r(z)$  を  $z$  の Fourier 級数で表したときの係数, 及び正モード, 負モードによる展開を次のように定義する.

$$E_r(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (E_r)_{-n} z^n, \quad E_r^+(z) := \sum_{n > 0} (E_r)_{-n} z^n, \quad E_r^-(z) := \sum_{n > 0} (E_r)_n z^{-n}. \quad (6.36)$$

ここで  $E_r(z)$  の時間発展が  $E_s(z)$  ( $s = 1, \dots, N$ ) 及びこれらの正モード, 負モードの閉じた形で書ける.

**定理 6.9.**

$$\begin{aligned} \partial_t E_r(z) = & \left( E_1^+(z) - E_1^+(qz) - E_1^-(q^{1-r}z) + E_1^-(q^{-r}z) \right) E_r(z) \\ & + E_{r+1}(qz) - E_{r+1}(z), \quad (r = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (6.37)$$

ただし  $E_{N+1}(z) = 0$  である.

**証明.** 証明は付録 C で述べる. □

この連立波動方程式は  $N = 1$  のとき離散 Laplacian 付き Periodic Benjamin-Ono 方程式 ( $q$ -PBO) であり, 丁-庵原-三木代数の  $N$  階テンソルの古典極限から  $q$ -PBO の  $N$  成分拡張である  $N$  体相互作用の連立波動方程式が得られることがわかる. またこの連立方程式が双線形方程式などの構造と従属変数の変換を通して関係していることについては次節 6.2 で述べる. ここで連立方程式を次のように  $q^{\frac{r-1}{2}}$  シフトする.

$$\begin{aligned} \partial_t E_r(q^{\frac{r-1}{2}}z) = & \left( E_1^+(q^{\frac{r-1}{2}}z) - E_1^+(q^{\frac{r+1}{2}}z) - E_1^-(q^{-\frac{r-1}{2}}z) + E_1^-(q^{-\frac{r+1}{2}}z) \right) E_r(q^{\frac{r-1}{2}}z) \\ & + E_{r+1}(q^{\frac{r+1}{2}}z) - E_{r+1}(q^{\frac{r-1}{2}}z), \quad (r = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (6.38)$$

**定義 6.10.** 次のように従属変数  $F_r(z)$  を定義する.

$$F_r(z) := E_r(q^{\frac{r-1}{2}}z) \quad (r = 1, \dots, N) \quad (6.39)$$

**系 6.11.**  $F_r(z)$  を用いて (6.38) の従属変数を変換すると次のような方程式系になる.

$$\begin{aligned} \partial_t F_r(z) = & \left( F_1^+(q^{\frac{r-1}{2}}z) - F_1^+(q^{\frac{r+1}{2}}z) - F_1^-(q^{-\frac{r-1}{2}}z) + F_1^-(q^{-\frac{r+1}{2}}z) \right) F_r(z) \\ & + F_{r+1}(q^{\frac{1}{2}}z) - F_{r+1}(q^{-\frac{1}{2}}z), \quad (r = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (6.40)$$

ただし  $F_{N+1}(z) = 0$  である.

このように従属変数変換するとシフトが対称な形になり,  $z = e^{2\pi i x}$  を考えると実軸に対して対称なシフトになるので特異積分からの変形の形で書くことができる.

**定義 6.12.**  $r$  依存型離散 Laplacian を次で定義する.

$$(\Delta_\gamma^{(r)} f) := f\left(x - \frac{r+1}{2}\gamma\right) - f\left(x - \frac{r-1}{2}\gamma\right) - f\left(x + \frac{r-1}{2}\gamma\right) + f\left(x + \frac{r+1}{2}\gamma\right). \quad (6.41)$$

**定義 6.13.** 積分作用素  $T^{(r)}$  を次で定義する.

$$\begin{aligned} (T^{(r)} f)(x) &:= \frac{i}{2} \cdot \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \cot \pi\left(y - x - \frac{r+1}{2}\gamma\right) - \cot \pi\left(y - x - \frac{r-1}{2}\gamma\right) \right. \\ &\quad \left. - \cot \pi\left(y - x + \frac{r-1}{2}\gamma\right) + \cot \pi\left(y - x + \frac{r+1}{2}\gamma\right) \right] \cdot f(y) dy \\ &= \frac{i}{2} \cdot \text{P} \int_{-1/2}^{1/2} (\Delta_\gamma^{(r)} \cot(\pi(y-x))) \cdot f(y) dy. \end{aligned} \quad (6.42)$$

**定理 6.14.** 連立波動方程式 (6.40) は

$$\partial_t F_r(z) = \left(T^{(r)} F_1\right)(z) F_r(z) + F_{r+1}(q^{\frac{1}{2}} z) - F_{r+1}(q^{-\frac{1}{2}} z), \quad (r = 1, \dots, N), \quad (6.43)$$

と積分作用素を用いて書くことができる.

これは次の補題から従う.

**補題 6.15.** このとき, 各 Fourier モードに対して

$$\begin{aligned} (T^{(r)})(e^{2\pi i n x}) &:= e^{2\pi i n(x + \frac{r-1}{2}\gamma)} - e^{2\pi i n(x + \frac{r+1}{2}\gamma)} = (q^{\frac{r-1}{2}n} - q^{\frac{r+1}{2}n}) e^{2\pi i n x}, \quad (n > 0), \\ (T^{(r)})(e^{2\pi i n x}) &:= -e^{2\pi i n(x - \frac{r-1}{2}\gamma)} + e^{2\pi i n(x - \frac{r+1}{2}\gamma)} = -(q^{-\frac{r-1}{2}n} - q^{-\frac{r+1}{2}n}) e^{2\pi i n x}, \quad (n < 0). \end{aligned} \quad (6.44)$$

つまり, (6.40) の右辺第 1 項の括弧の中は

$$(T^{(r)} F_1)(z) = F_1^+(q^{\frac{r-1}{2}} z) - F_1^+(q^{\frac{r+1}{2}} z) - F_1^-(q^{-\frac{r-1}{2}} z) + F_1^-(q^{-\frac{r+1}{2}} z),$$

と書くことができることがわかる. よって定理 6.14 が従う.

**定義 6.16.** 特異積分作用素  $\mathcal{J}$  を次で定義する.

$$(\mathcal{J} f)(x) := -i \int_{-1/2}^{1/2} \cot \pi(y-x) \cdot f(y) dy.$$

こうすると,

$$(\mathcal{J} f)(e^{2\pi i n x}) := \text{sgn}(n) e^{2\pi i n x}.$$

**補題 6.17.** 積分作用素  $T^{(r)}$  は次のように  $\gamma$  で展開できる.

$$T^{(r)} = -\gamma \partial_x - \gamma^2 \frac{r}{2} \cdot \mathcal{J} \partial_x^2 + O(\gamma^3).$$

**証明.** (6.44) を  $\gamma$  について展開すれば良い. 補題 2.42 における計算と同様である.  $\square$

**注釈 6.18.** この補題より  $N$  成分のときも PBO の特異積分変換の  $q$  変形版の積分変換によって時間発展方程式が書かれていることがわかる. だが  $q \rightarrow 1$  の極限で PBO の連立方程式系を得ることは今後の課題である.



### 6.1.3 $N = 2$ のときの連立波動方程式と $\mathfrak{gl}(2)$ generalized Benjamin-Ono 方程式について

定理 6.9 の特に  $N = 2$  の時の連立方程式系が  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式 [36] のさらなる一般化, すなわち  $q$ - $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式あるいは離散 Laplacian 付き  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式となっていることを示す.

**定理 6.19.**  $N = 2$  のときの連立方程式系

$$\begin{cases} \partial_t X(z) = \left( X^+(z) - X^+(qz) - X^-(z) + X^-(q^{-1}z) \right) X(z) + Y(qz) - Y(z), \\ \partial_t Y(z) = \left( X^+(z) - X^+(qz) - X^-(q^{-1}z) + X^-(q^{-2}z) \right) Y(z), \end{cases} \quad (6.45)$$

の  $\gamma \rightarrow 0$  の極限で  $\gamma$  の低次の項に  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式が出てくる. すなわち, この方程式系は  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式の一般化になっている.

**証明.** (6.38) のように従属変数を変換する. 2 本目の式を  $q^{\frac{1}{2}}$  だけシフトして  $y(z) := Y(q^{\frac{1}{2}}z)$  とすると,

$$\begin{cases} \partial_t X(z) = \left( X^+(z) - X^+(qz) - X^-(z) + X^-(q^{-1}z) \right) X(z) + y(q^{\frac{1}{2}}z) - y(q^{-\frac{1}{2}}z), \\ \partial_t y(z) = \left( X^+(q^{\frac{1}{2}}z) - X^+(q^{\frac{3}{2}}z) - X^-(q^{-\frac{1}{2}}z) + X^-(q^{-\frac{3}{2}}z) \right) y(z). \end{cases} \quad (6.46)$$

$z = e^{2\pi i x}$ ,  $q = e^{2\pi i \gamma}$  として  $|\gamma|$  が小さいものとして方程式を展開すると,

$$\begin{cases} \partial_t X(x) = \left( -X'(x)\gamma - \frac{1}{2}H[X'']\gamma^2 - \frac{1}{6}X'''(x)\gamma^3 \right) X(x) + y'(x)\gamma + \frac{1}{24}y'''(x)\gamma^3, \\ \partial_t y(x) = \left( -X'(x)\gamma - H[X'']\gamma^2 - \frac{13}{24}X'''(x)\gamma^3 \right) y(x). \end{cases} \quad (6.47)$$

ここで

$$X'(x) = \frac{\partial}{\partial x} X(x), \quad X''(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x), \quad X'''(x) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} X(x), \quad (6.48)$$

を表す. また  $\gamma$  の 4 次以降の項を無視した. ここで Hilbert 変換  $H$  は  $H(X) := X^+ - X^-$  と定めた.  $\gamma \rightarrow 0$  の極限をとるために次のような変数を導入する.

$$\begin{aligned} X(x) &= \left( 1 + u_+(x)\gamma + v_+(x)\gamma^2 + w_+(x)\gamma^3 \right) + \left( 1 + u_-(x)\gamma + v_-(x)\gamma^2 + w_-(x)\gamma^3 \right), \\ y(x) &= \left( 1 + u_+(x + \frac{1}{2}\gamma)\gamma + v_+(x + \frac{1}{2}\gamma)\gamma^2 + w_+(x + \frac{1}{2}\gamma)\gamma^3 \right) \\ &\quad \left( 1 + u_-(x - \frac{1}{2}\gamma)\gamma + v_-(x - \frac{1}{2}\gamma)\gamma^2 + w_-(x - \frac{1}{2}\gamma)\gamma^3 \right). \end{aligned} \quad (6.49)$$

ここでは簡単にために  $\gamma$  の 3 次で打ち切った. これをさらに  $\gamma$  の昇べきの順に整理すると,

$$\begin{aligned} X(x) &= 2 + (u_+ + u_-)\gamma + (v_+ + v_-)\gamma^2 + (w_+ + w_-)\gamma^3, \\ y(x) &= 1 + (u_+ + u_-)\gamma + \left\{ \frac{1}{2}(u_+ - u_-)' + u_+u_- + (v_+ + v_-) \right\} \gamma^2 \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{8}(u_+ + u_-)'' + \frac{1}{2}(u_+u_- - u_+u_-') + (u_+v_- + u_-v_+) + \frac{1}{2}(v_+ - v_-)' + (w_+ + w_-) \right\} \gamma^3. \end{aligned} \quad (6.50)$$

これらを (6.47) に代入する. すると左辺は

$$\begin{aligned}
X_t &= (u_+ + u_-)_t \gamma + (v_+ + v_-)_t \gamma^2 + (w_+ + w_-)_t \gamma^3, \\
y_t &= (u_+ + u_-)_t \gamma + \partial_t \left\{ \frac{1}{2}(u_+ - u_-)' + u_+ u_- + (v_+ + v_-) \right\} \gamma^2 \\
&\quad + \partial_t \left\{ \frac{1}{8}(u_+ + u_-)'' + \frac{1}{2}(u_+ u_- - u_+ u_-') + (u_+ v_- + u_- v_+) + \frac{1}{2}(v_+ - v_-)' + (w_+ + w_-) \right\} \gamma^3.
\end{aligned} \tag{6.51}$$

(6.47) の右辺は次のようになる.

$$\begin{aligned}
& \left( -X'(x)\gamma - \frac{1}{2}H[X'']\gamma^2 - \frac{1}{6}X'''(x)\gamma^3 \right) X(x) + y'(x)\gamma + \frac{1}{24}y'''(x)\gamma^3 \\
&= -(u_+ + u_-)' \gamma^2 + \left\{ -(v_+ + v_-)' - \frac{1}{2}(u_+^2 + u_-^2)' + \frac{1}{2}(u_+ - u_-)'' - H[u_+ + u_-]'' \right\} \gamma^3 \\
&\quad + \left\{ -(w_+ + w_-)' - (u_+ v_+ + u_- v_-)' - \frac{1}{2}(u_+ + u_-)H[u_+'' + u_-''] \right. \\
&\quad \left. - H[v_+'' + v_-''] + \frac{1}{2}(u_+ u_- - u_+ u_-') + \frac{1}{2}(v_+ - v_-)'' - \frac{1}{6}(u_+ + u_-)''' \right\} \gamma^4 + O(\gamma^5),
\end{aligned} \tag{6.52}$$

$$\begin{aligned}
& \left( -X'(x)\gamma - H[X'']\gamma^2 - \frac{13}{24}X'''(x)\gamma^3 \right) y(x) \\
&= -(u_+ + u_-)' \gamma^2 + \left\{ -(v_+ + v_-)' - \frac{1}{2}((u_+ + u_-)^2)' - H[u_+ + u_-]'' \right\} \gamma^3 \\
&\quad + \left\{ -(w_+ + w_-)' - u_+ u_- (u_+ + u_-)' - (u_+ + u_-)H[u_+'' + u_-''] - \frac{1}{2}((u_+^2)' - (u_-^2)') - \frac{13}{24}(u_+ + u_-)''' \right. \\
&\quad \left. - H[v_+'' + v_-''] - ((u_+ + u_-)(v_+ + v_-))' \right\} \gamma^4 + O(\gamma^5).
\end{aligned} \tag{6.53}$$

よって, 両辺を合わせると

$$\begin{aligned}
& (\gamma^{-2}\partial_t + \gamma^{-1}\partial_x) \left\{ (u_+ + u_-)\gamma^3 + (v_+ + v_-)\gamma^4 + (w_+ + w_-)\gamma^5 \right\} \\
&= \left\{ -\frac{1}{2}(u_+^2 + u_-^2)' + \frac{1}{2}(u_+ - u_-)'' - H[u_+ + u_-]'' \right\} \gamma^3 \\
&\quad + \left\{ -(u_+ v_+ + u_- v_-)' - \frac{1}{2}(u_+ + u_-)H[u_+'' + u_-''] - H[v_+'' + v_-''] + \frac{1}{2}(u_+ u_- - u_+ u_-)' \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(v_+ - v_-)'' - \frac{1}{6}(u_+ + u_-)''' \right\} \gamma^4 + O(\gamma^5),
\end{aligned} \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma^{-2}\partial_t + \gamma^{-1}\partial_x) \left\{ (u_+ + u_-)\gamma^3 + \left\{ \frac{1}{2}(u_+ - u_-)' + u_+ u_- + (v_+ + v_-) \right\} \gamma^4 \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{1}{8}(u_+ + u_-)'' + \frac{1}{2}(u_+ u_- - u_+ u_-') + (u_+ v_- + u_- v_+) + \frac{1}{2}(v_+ - v_-)' + (w_+ + w_-) \right\} \gamma^5 \right\} \\
&= \left\{ -\frac{1}{2}(u_+^2 + u_-^2)' + \frac{1}{2}(u_+ - u_-)'' - H[u_+ + u_-]'' \right\} \gamma^3 \\
&\quad + \left\{ -u_+ u_- (u_+ + u_-)' - (u_+ + u_-)H[u_+'' + u_-''] - \frac{1}{2}((u_+^2)' - (u_-^2)') - \frac{5}{12}(u_+ + u_-)''' \right. \\
&\quad \left. - (u_+ v_+ + u_- v_-)' + \frac{1}{2}(u_+ u_- - u_+ u_-') + \frac{1}{2}(v_+ - v_-)'' - H[v_+'' + v_-''] \right\} \gamma^4 + O(\gamma^5).
\end{aligned} \tag{6.55}$$

これらから次の2つの方程式が取り出せる.

$$(\gamma^{-2}\partial_t + \gamma^{-1}\partial_x)(u_+ + u_-) = -\frac{1}{2}(u_+^2 + u_-^2)' + \frac{1}{2}(u_+ - u_-)'' - H[u_+ + u_-]'', \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} & (\gamma^{-2}\partial_t + \gamma^{-1}\partial_x)\left\{\frac{1}{2}(u_+ - u_-)' + u_+u_-\right\} \\ &= -u_+u_-(u_+ + u_-)' - \frac{1}{2}(u_+ + u_-)H[u_+'' + u_-''] - \frac{1}{2}((u_+')^2 - (u_-')^2) - \frac{1}{4}(u_+ + u_-)'''. \end{aligned} \quad (6.57)$$

ここで  $V := u_+ + u_-$ ,  $U := \frac{1}{2}(u_+ - u_-)' - \frac{1}{4}(u_+ - u_-)^2$  とおくと, (6.56) より

$$(\gamma^{-2}\partial_t + \gamma^{-1}\partial_x)V = -\frac{1}{2}VV' + U' - H[V'']. \quad (6.58)$$

また (6.57) から  $\frac{1}{2}(u_+ + u_-) \times$  (6.56) を引くと

$$(\gamma^{-2}\partial_t + \gamma^{-1}\partial_x)U = -\frac{1}{2}VU' - V'U - \frac{1}{4}V'''. \quad (6.59)$$

ここで  $t = \gamma^{-2}T$ ,  $x = \gamma^{-1}T + X$  と Galilei 変換及びスケール変換をしてそのあと  $X \rightarrow x$ ,  $T \rightarrow t$  と変数を書き換えると,

$$\begin{cases} V_t + \frac{1}{2}VV' + H[V''] - U' = 0, \\ U_t + \frac{1}{2}VU' + V'U + \frac{1}{4}V''' = 0. \end{cases} \quad (6.60)$$

ここで  $V = -2i\tilde{V}$  と従属変数変換をして,  $\tilde{V} \rightarrow V$  と書き換えると

$$\begin{cases} iV_t + VV' + iH[V''] + \frac{1}{2}U' = 0, \\ U_t - iVU' - 2iV'U - \frac{i}{2}V''' = 0. \end{cases} \quad (6.61)$$

次に  $t = iT$  と独立変数を変換すると

$$\begin{cases} V_T + VV' + iH[V''] + \frac{1}{2}U' = 0, \\ U_T + VU' + 2V'U + \frac{1}{2}V''' = 0. \end{cases} \quad (6.62)$$

$H' := iH$  とするとこれは (3.16) に一致する. 以上より (6.45) の中には  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式が含まれていることがわかり, これはその  $q$  変形版であることがわかる.  $\square$

## 6.2 丁-庵原-三木代数の $N$ 階テンソルの古典極限と双線形方程式

本節においては丁-庵原-三木代数の  $N$  階テンソルの古典極限から閉じた形の連立の双線形方程式が得られることを証明する. さらにこれらがゲージ変換によって, より簡単な連立の双線形方程式に変換できることを示す. またこれらの双線形方程式の  $\tau$  関数と 2 次元戸田場方程式の関係について述べる.

### 6.2.1 $N$ 階テンソルの古典極限と $q$ -PBO の多成分拡張の双線形方程式

次に丁-庵原-三木代数の  $N$  階テンソルの古典極限から双線形方程式を導く. これは前節 6.1 と従属変数の変換を通して関係している.

**定義 6.20.**  $i = 1, 2, \dots, N$  について,  $\alpha_i^+(z), \alpha_i^-(z)$  を次のように定義する.

$$\alpha_i^+(z) := \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1}{1-q^n} \alpha_{-n}^{(i)} z^n\right), \quad (6.63)$$

$$\alpha_i^-(z) := \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1}{1-q^n} \alpha_n^{(i)} z^{-n}\right). \quad (6.64)$$

これは (5.19) の各テンソル積成分における対応物である.

**定義 6.21.**  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  について,  $\tau_i(z)$  を次のように定義する.

$$\tau_i(z) := \prod_{k=1}^{N-i} \alpha_k^+(q^{\frac{1-k}{2}} z) \prod_{k=N-i+1}^N \alpha_k^-(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}} z). \quad (6.65)$$

上のように  $\tau_i(z)$  をおくと, テンソル積においては  $X(z)$  (6.28) の各構成成分が (5.20) のような構造を持っていることがわかる.

**補題 6.22.**  $i = 1, 2, \dots, N$  について次の関係式が成立する.

$$\Lambda_{N-i+1}(z) = \varepsilon_{N-i+1} \frac{\tau_{i-1}(qz)\tau_i(q^{-1}z)}{\tau_{i-1}(z)\tau_i(z)}. \quad (6.66)$$

**証明.**

$$1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \widehat{\eta(z)} \otimes \dots \otimes 1 = \varepsilon_i \frac{\alpha_i^+(qz)\alpha_i^-(z/q)}{\alpha_i^+(z)\alpha_i^-(z)}, \quad (6.67)$$

$$1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \widehat{\phi^+(z)} \otimes \dots \otimes 1 = \frac{\alpha_i^+(qz)\alpha_i^+(z/q)}{\alpha_i^+(z)\alpha_i^+(z)}. \quad (6.68)$$

よって, (6.25) より,

$$\begin{aligned} \Lambda_{N-i+1}(z) &:= \phi^+(z) \otimes \phi^+(q^{-1/2}z) \otimes \dots \otimes \phi^+(q^{-\frac{1}{2}((N-i)-1)}z) \otimes \eta(q^{-(N-i)/2}z) \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \\ &= \prod_{k=1}^{N-i} \frac{\alpha_k^+(q^{\frac{3-k}{2}}z)\alpha_k^+(q^{\frac{-1-k}{2}}z)}{\alpha_k^+(q^{\frac{1-k}{2}}z)\alpha_k^+(q^{\frac{1-k}{2}}z)} \cdot \varepsilon_{N-i+1} \frac{\alpha_{N-i+1}^+(q^{1-\frac{N-i}{2}}z)\alpha_{N-i+1}^-(q^{-1-\frac{N-i}{2}}z)}{\alpha_{N-i+1}^+(q^{-\frac{N-i}{2}}z)\alpha_{N-i+1}^-(q^{-\frac{N-i}{2}}z)} \\ &= \varepsilon_{N-i+1} \left( \prod_{k=1}^{N-i+1} \frac{\alpha_k^+(q^{\frac{3-k}{2}}z)}{\alpha_k^+(q^{\frac{1-k}{2}}z)} \prod_{k=N-i+2}^N \frac{\alpha_k^-(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z)}{\alpha_k^-(q^{\frac{k-2N+2i-3}{2}}z)} \right) \left( \prod_{k=1}^{N-i} \frac{\alpha_k^+(q^{\frac{-1-k}{2}}z)}{\alpha_k^+(q^{\frac{1-k}{2}}z)} \prod_{k=N-i+1}^N \frac{\alpha_k^-(q^{\frac{k-2N+2i-3}{2}}z)}{\alpha_k^-(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z)} \right) \\ &= \varepsilon_{N-i+1} \frac{\tau_{i-1}(qz)\tau_i(q^{-1}z)}{\tau_{i-1}(z)\tau_i(z)}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

□

次に  $\tau(z)$  の時間発展を計算するために  $\alpha_i^+(z), \alpha_i^-(z)$  について次の公式を導く.

**補題 6.23.**  $i = 1, 2, \dots, N$  について, 以下の公式が成り立つ.

$$\{X_0, \alpha_i^+(z)\} = -q^{u_i} \Lambda_i^+(q^{\frac{i-1}{2}}z)\alpha_i^+(z), \quad (6.70)$$

$$\{X_0, \alpha_i^-(z)\} = \left( q^{u_i} \Lambda_i^-(q^{\frac{i-1}{2}}z) + \sum_{k=i+1}^N q^{u_k} (\Lambda_k^-(q^{\frac{i-1}{2}}z) - \Lambda_k^-(q^{\frac{i+1}{2}}z)) \right) \alpha_i^-(z). \quad (6.71)$$

証明. まず  $\alpha_i^+(z)$  について

$$\begin{aligned}
\{X(w), \alpha_i^+(z)\} &= q^{u_i} \left\{ \Lambda_i(w), \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1}{1-q^n} \alpha_{-n}^{(i)} z^n\right) \right\} \\
&= q^{u_i} \left\{ \sum_{n>0} \alpha_n^{(i)} q^{\frac{i-1}{2}n} w^{-n}, -\sum_{m>0} \frac{1}{1-q^m} \alpha_{-m}^{(i)} z^m \right\} \Lambda_i(w) \alpha_i^+(z) \\
&= -q^{u_i} \sum_{n>0} \left(\frac{q^{\frac{i-1}{2}} z}{w}\right)^n \Lambda_i(w) \alpha_i^+(z).
\end{aligned} \tag{6.72}$$

よって両辺の  $w$  の 0 モードを取って,

$$\{X_0, \alpha_i^+(z)\} = -q^{u_i} \Lambda_i^+(q^{\frac{i-1}{2}} z) \alpha_i^+(z),$$

となる. 次に  $\alpha_i^-(z)$  について

$$\begin{aligned}
\{X(w), \alpha_i^-(z)\} &= q^{u_i} \{ \Lambda_i(w), \alpha_i^-(z) \} + \sum_{k=i+1}^N q^{u_k} \{ \Lambda_k(w), \alpha_i^-(z) \} \\
&= q^{u_i} \left\{ \sum_{n>0} \alpha_{-n}^{(i)} q^{\frac{1-i}{2}n} w^n, -\sum_{m>0} \frac{1}{1-q^m} \alpha_m^{(i)} z^{-m} \right\} \Lambda_i(w) \alpha_i^-(z) \\
&\quad + \sum_{k=i+1}^N q^{u_k} \left\{ \sum_{n>0} (1-q^{-n}) \alpha_{-n}^{(i)} q^{\frac{1-i}{2}n} w^n, -\sum_{m>0} \frac{1}{1-q^m} \alpha_m^{(i)} z^{-m} \right\} \Lambda_k(w) \alpha_i^-(z) \\
&= q^{u_i} \sum_{n>0} \left(\frac{q^{\frac{1-i}{2}} w}{z}\right)^n \Lambda_i(w) \alpha_i^-(z) + \sum_{k=i+1}^N q^{u_k} \left( \sum_{n>0} (1-q^{-n}) \left(\frac{q^{\frac{1-i}{2}} w}{z}\right)^n \right) \Lambda_k(w) \alpha_i^-(z).
\end{aligned} \tag{6.73}$$

よって両辺の  $w$  の 0 モードを取って,

$$\{X_0, \alpha_i^-(z)\} = \left( q^{u_i} \Lambda_i^-(q^{\frac{i-1}{2}} z) + \sum_{k=i+1}^N q^{u_k} (\Lambda_k^-(q^{\frac{i-1}{2}} z) - \Lambda_k^-(q^{\frac{i+1}{2}} z)) \right) \alpha_i^-(z).$$

□

以上の補題と Liebniz 則を用いて  $X_0$  と  $\tau_i(z)$  の Poisson 括弧を計算すると

$$\begin{aligned}
\{X_0, \tau_i(z)\} &= \left\{ X_0, \prod_{k=1}^{N-i} \alpha_k^+(q^{\frac{1-k}{2}} z) \prod_{k=N-i+1}^N \alpha_k^-(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}} z) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{N-i} \left\{ X_0, \alpha_k^+(q^{\frac{1-k}{2}} z) \right\} \prod_{j=1, (j \neq k)}^{N-i} \alpha_j^+(q^{\frac{1-j}{2}} z) \prod_{k=N-i+1}^N \alpha_k^-(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}} z) \\
&\quad + \sum_{k=N-i+1}^N \left\{ X_0, \alpha_k^-(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}} z) \right\} \prod_{k=1}^{N-i} \alpha_k^+(q^{\frac{1-k}{2}} z) \prod_{j=N-i+1, (j \neq k)}^N \alpha_j^-(q^{\frac{j-2N+2i-1}{2}} z) \\
&= - \sum_{k=1}^{N-i} q^{u_k} \Lambda_k^+ \prod_{k=1}^{N-i} \alpha_k^+(q^{\frac{1-k}{2}} z) \prod_{k=N-i+1}^N \alpha_k^-(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}} z) \\
&\quad + \sum_{k=N-i+1}^N \left( q^{u_k} \Lambda_k^-(q^{k-N+i-1} z) + \sum_{l=k+1}^N q^{u_l} \left( \Lambda_l^-(q^{k-N+i-1} z) - \Lambda_l^-(q^{k-N+i} z) \right) \right) \\
&\quad \times \prod_{k=1}^{N-i} \alpha_k^+(q^{\frac{1-k}{2}} z) \prod_{k=N-i+1}^N \alpha_k^-(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}} z). \tag{6.74}
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\frac{\{X_0, \tau_i(z)\}}{\tau_i(z)} &= - \sum_{k=1}^{N-i} q^{u_k} \Lambda_k^+(z) \\
&\quad + \sum_{k=N-i+1}^N \left( q^{u_k} \Lambda_k^-(q^{k-N+i-1} z) + \sum_{l=k+1}^N q^{u_l} \left( \Lambda_l^-(q^{k-N+i-1} z) - \Lambda_l^-(q^{k-N+i} z) \right) \right) \\
&= - \sum_{k=1}^{N-i} q^{u_k} \Lambda_k^+(z) + \sum_{k=N-i+1}^N q^{u_k} \Lambda_k^-(z). \tag{6.75}
\end{aligned}$$

$$\frac{\{X_0, \tau_{i-1}(z)\}}{\tau_{i-1}(z)} = - \sum_{k=1}^{N-i+1} q^{u_k} \Lambda_k^+(z) + \sum_{k=N-i+2}^N q^{u_k} \Lambda_k^-(z). \tag{6.76}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
&\frac{\{X_0, \tau_i(z)\}}{\tau_i(z)} - \frac{\{X_0, \tau_{i-1}(z)\}}{\tau_{i-1}(z)} \\
&= q^{u_{N-i+1}} \left( \Lambda_{N-i+1}^+(z) + \Lambda_{N-i+1}^-(z) \right) = q^{u_{N-i+1}} \left( \Lambda_{N-i+1}(z) - \Lambda_{N-i+1,0} \right) \\
&= q^{u_{N-i+1}} \left( \varepsilon_{N-i+1} \frac{\tau_{i-1}(qz) \tau_i(q^{-1}z)}{\tau_{i-1}(z) \tau_i(z)} - \Lambda_{N-i+1,0} \right). \tag{6.77}
\end{aligned}$$

$\partial_t * = \{X_0, *\}$  の用いて時間微分に書き換えると次の定理が成り立つことがわかる。

**定理 6.24.**  $\tau_0(z), \tau_1(z), \dots, \tau_N(z)$  に関する次の連立の双線形方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&(\partial_t \tau_i(z)) \tau_{i-1}(z) - \tau_i(z) (\partial_t \tau_{i-1}(z)) \\
&= \varepsilon_{N-i+1} q^{u_{N-i+1}} \tau_{i-1}(qz) \tau_i(q^{-1}z) - q^{u_{N-i+1}} \Lambda_{N-i+1,0} \tau_{i-1}(z) \tau_i(z), \quad (i = 1, \dots, N). \tag{6.78}
\end{aligned}$$

これは  $q$ -PBO の広田の双線形方程式 (5.36) の多成分の拡張になっている. また  $N+1$  変数の  $N$  連立の方程式になっている.

次に  $\tau$  をゲージ変換した  $\tilde{\tau}$  を考える.

**定義 6.25.**  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  について  $\tilde{\tau}_i(z)$  を次のように定義する.

$$\tilde{\tau}_i(z) := e^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-i} Q_k - \frac{1}{2} \sum_{k=N-i+1}^N Q_k)} z^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-i} u_k - \frac{1}{2} \sum_{k=N-i+1}^N u_k)} \tau_i(z). \quad (6.79)$$

このとき

$$\varepsilon_{N-i+1} \frac{\tilde{\tau}_{i-1}(qz) \tilde{\tau}_i(q^{-1}z)}{\tilde{\tau}_{i-1}(z) \tilde{\tau}_i(z)} = q^{u_{N-i+1}} \varepsilon_{N-i+1} \frac{\tau_{i-1}(qz) \tau_i(q^{-1}z)}{\tau_{i-1}(z) \tau_i(z)} = q^{u_{N-i+1}} \Lambda_{N-i+1}(z). \quad (6.80)$$

よって  $X(z)$  を次のように書くことができる.

$$X(z) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_{N-i+1} \frac{\tilde{\tau}_{i-1}(qz) \tilde{\tau}_i(q^{-1}z)}{\tilde{\tau}_{i-1}(z) \tilde{\tau}_i(z)}. \quad (6.81)$$

$\tilde{\tau}$  の時間発展を計算と次の双線形方程式を満たすことがわかる.

**定理 6.26.**  $\tilde{\tau}_0(z), \tilde{\tau}_1(z), \dots, \tilde{\tau}_N(z)$  に関する次の連立の双線形方程式が成り立つ.

$$(\partial_t \tilde{\tau}_i(z)) \tilde{\tau}_{i-1}(z) - \tilde{\tau}_i(z) (\partial_t \tilde{\tau}_{i-1}(z)) = \varepsilon_{N-i+1} \tilde{\tau}_{i-1}(qz) \tilde{\tau}_i(q^{-1}z), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (6.82)$$

**証明.** Leibniz 則により,

$$\begin{aligned} & \{X_0, \tilde{\tau}_i(z)\} \\ &= \left\{ X_0, e^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-i} Q^{(k)} - \frac{1}{2} \sum_{k=N-i+1}^N Q^{(k)})} z^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-i} u^{(k)} - \frac{1}{2} \sum_{k=N-i+1}^N u^{(k)})} \right\} \tau_i(z) \\ & \quad + e^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-i} Q_k - \frac{1}{2} \sum_{k=N-i+1}^N Q_k)} z^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-i} u_k - \frac{1}{2} \sum_{k=N-i+1}^N u_k)} \{X_0, \tau_i(z)\} \\ &= \left( - \sum_{k=1}^{N-i} \frac{1}{2} q^{u_k} \Lambda_{k,0} + \sum_{k=N-i+1}^N \frac{1}{2} q^{u_k} \Lambda_{k,0} \right) e^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-i} Q_k - \frac{1}{2} \sum_{k=N-i+1}^N Q_k)} z^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-i} u_k - \frac{1}{2} \sum_{k=N-i+1}^N u_k)} \tau_i(z) \\ & \quad + \left( - \sum_{k=1}^{N-i} q^{u_k} \Lambda_k^+(z) + \sum_{k=N-i+1}^N q^{u_k} \Lambda_k^-(z) \right) e^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-i} Q_k - \frac{1}{2} \sum_{k=N-i+1}^N Q_k)} z^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-i} u_k - \frac{1}{2} \sum_{k=N-i+1}^N u_k)} \tau_i(z). \end{aligned} \quad (6.83)$$

これより,

$$\frac{\{X_0, \tilde{\tau}_i(z)\}}{\tilde{\tau}_i(z)} = - \sum_{k=1}^{N-i} q^{u_k} \left( \Lambda_k^+(z) + \frac{1}{2} \Lambda_{k,0} \right) + \sum_{k=N-i+1}^N q^{u_k} \left( \Lambda_k^-(z) + \frac{1}{2} \Lambda_{k,0} \right), \quad (6.84)$$

$$\frac{\{X_0, \tilde{\tau}_{i-1}(z)\}}{\tilde{\tau}_{i-1}(z)} = - \sum_{k=1}^{N-i+1} q^{u_k} \left( \Lambda_k^+(z) + \frac{1}{2} \Lambda_{k,0} \right) + \sum_{k=N-i+2}^N q^{u_k} \left( \Lambda_k^-(z) + \frac{1}{2} \Lambda_{k,0} \right). \quad (6.85)$$

したがって,

$$\begin{aligned} & \frac{\{X_0, \tilde{\tau}_i(z)\}}{\tilde{\tau}_i(z)} - \frac{\{X_0, \tilde{\tau}_{i-1}(z)\}}{\tilde{\tau}_{i-1}(z)} \\ &= q^{u_{N-i+1}} \left( \Lambda_{N-i+1}^+(z) + \Lambda_{N-i+1}^-(z) + \Lambda_{N-i+1,0} \right) = q^{u_{N-i+1}} \Lambda_{N-i+1}(z) \\ &= \varepsilon_{N-i+1} \frac{\tilde{\tau}_{i-1}(qz) \tilde{\tau}_i(q^{-1}z)}{\tilde{\tau}_{i-1}(z) \tilde{\tau}_i(z)}. \end{aligned}$$

よって双線形方程式が成り立つ。  $\square$

**注釈 6.27.** (6.29), (6.35), (6.80) より,

$$\begin{aligned} X_{i_k}(q^{k-r}z) &= \varepsilon_{i_k} \frac{\tilde{\tau}_{N-i_k}(q^{k-r+1}z) \tilde{\tau}_{N-i_k+1}(q^{k-r-1}z)}{\tilde{\tau}_{N-i_k}(q^{k-r}z) \tilde{\tau}_{N-i_k+1}(q^{k-r}z)}, \\ E_r(z) &:= \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,N\} \\ |I|=r}} \prod_{k=1}^r X_{i_k}(q^{k-r}z), \quad (r = 1, \dots, N). \end{aligned}$$

よって定理 6.9 の連立方程式と定理 6.26 の連立の双線形方程式は従属変数の変換でつながっているため、連立の双線形方程式の解を求めることで連立波動方程式の解を求めることができる。

## 6.2.2 もう一つの時間 $\bar{t}$ での微分と双線形方程式

丁庵原三木代数の  $N = 1$  のときと同様に、時間  $\bar{t}$  での微分を定義する。この微分についても (5.37) の多成分の拡張が可能であるような  $\tau$  関数の対応物が存在することを説明する。

**定義 6.28.** 時間  $\bar{t}$  での微分を次のように定義する。

$$\partial_{\bar{t}} * = -\{\bar{X}_0, *\}. \quad (6.86)$$

このとき次の定理が成り立つ。

**定理 6.29.**  $\partial_t$  と  $\partial_{\bar{t}}$  は可換である。すなわち

$$\partial_{\bar{t}} \partial_t * = \partial_t \partial_{\bar{t}} *. \quad (6.87)$$

**証明.** 証明は付録 D で述べる。  $\square$

次に  $\tau$  関数と双対的な対象として  $\kappa$  関数を導入する。

**定義 6.30.**  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  について、 $\kappa_i(z)$  を次のように定義する。

$$\kappa_i(z) := \prod_{j=1}^i \alpha_j^+(q^{-\frac{N-2i+j-1}{2}}z) \prod_{j=i+1}^N \alpha_j^-(q^{-\frac{N-j+1}{2}}z). \quad (6.88)$$

このように  $\kappa$  を定義すると、テンソル積における  $\bar{X}(z)$  の各構成成分も (6.66) と同様の構造を持っていることがわかる。



**補題 6.31.**  $i = 1, 2, \dots, N$  について次の関係式が成立する.

$$\Lambda_{N-i+1}^*(z) = \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\kappa_{i-1}(qz)\kappa_i(q^{-1}z)}{\kappa_{i-1}(z)\kappa_i(z)}. \quad (6.89)$$

このとき  $\bar{X}(z)$  は次のように書ける.

$$\bar{X}(z) := \sum_{i=1}^N q^{-u_i} \Lambda_{N-i+1}^*(z) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon_i} q^{-u_i} \frac{\kappa_{i-1}(qz)\kappa_i(q^{-1}z)}{\kappa_{i-1}(z)\kappa_i(z)}.$$

$\tilde{\kappa}$  を次のように定義する.

**定義 6.32.**  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  について,  $\tilde{\kappa}_i(z)$  を次のように定義する.

$$\tilde{\kappa}_i(z) := e^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^i Q_k - \frac{1}{2} \sum_{k=i+1}^N Q_k)} z^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^i u_k - \frac{1}{2} \sum_{k=i+1}^N u_k)} \kappa_i(z).$$

すると  $\bar{X}(z)$  について,

$$\bar{X}(z) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\tilde{\kappa}_{i-1}(qz)\tilde{\kappa}_i(q^{-1}z)}{\tilde{\kappa}_{i-1}(z)\tilde{\kappa}_i(z)}.$$

このとき  $\tau$  のときと同様に次の関係式が成り立つ

$$\left\{ \bar{X}_0, \kappa_i(z) \right\} \kappa_{i-1}(z) - \kappa_i(z) \left\{ \bar{X}_0, \kappa_{i-1}(z) \right\} = \frac{1}{\varepsilon_i} q^{-u_i} \kappa_{i-1}(qz)\kappa_i(q^{-1}z) - q^{-u_i} \Lambda_{N-i+1,0}^* \kappa_{i-1}(z)\kappa_i(z), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (6.90)$$

$$\left\{ \bar{X}_0, \tilde{\kappa}_i(z) \right\} \tilde{\kappa}_{i-1}(z) - \tilde{\kappa}_i(z) \left\{ \bar{X}_0, \tilde{\kappa}_{i-1}(z) \right\} = \frac{1}{\varepsilon_i} q^{-u_i} \tilde{\kappa}_{i-1}(qz)\tilde{\kappa}_i(q^{-1}z), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (6.91)$$

よって次の定理が成立する.

**定理 6.33.** 次の  $\kappa_0(z), \kappa_1(z), \dots, \kappa_N(z)$  及び,  $\tilde{\kappa}_0(z), \tilde{\kappa}_1(z), \dots, \tilde{\kappa}_N(z)$  に関する次の連立の双線形方程式が成り立つ.

$$(\partial_{\bar{t}} \kappa_{i-1}(z)) \kappa_i(z) - \kappa_{i-1}(z) (\partial_{\bar{t}} \kappa_i(z)) = \frac{1}{\varepsilon_i} q^{-u_i} \kappa_{i-1}(qz)\kappa_i(q^{-1}z) - q^{-u_i} \Lambda_{N-i+1,0}^* \kappa_{i-1}(z)\kappa_i(z), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (6.92)$$

$$(\partial_{\bar{t}} \tilde{\kappa}_{i-1}(z)) \tilde{\kappa}_i(z) - \tilde{\kappa}_{i-1}(z) (\partial_{\bar{t}} \tilde{\kappa}_i(z)) = \frac{1}{\varepsilon_i} q^{-u_i} \tilde{\kappa}_{i-1}(qz)\tilde{\kappa}_i(q^{-1}z), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (6.93)$$

$\kappa$  についての定理は  $\tau$  と計算は同じであるので証明は省略する. これらは (5.37) の多成分の拡張である.

## 6.3 2次元戸田場方程式

丁-庵原-三木代数の  $N$  階テンソルの古典極限  $\mathcal{B}^{\otimes N}$  においても 2次元戸田場方程式を満たす元が存在する. ここでは, この元を定義して 2次元戸田場方程式を満たすことを証明する.

**定義 6.34.**  $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$  を以下のように定める.

$$\Phi^+(z) := \sum_{n>0} \sum_{i=1}^N \alpha_{-n}^{(i)} (q^{\frac{1-i}{2}} z)^n, \quad \Phi^-(z) := - \sum_{n>0} \sum_{i=1}^N \alpha_n^{(i)} (q^{\frac{i-1}{2}} z)^{-n}. \quad (6.94)$$

**命題 6.35.**  $\Phi^\pm(z)$  は次の 2 次元戸田場方程式を満たす.

$$\partial_t \partial_{\bar{t}} \Phi^\pm(z) = e^{\Phi^\pm(z) - \Phi^\pm(z/q)} - e^{\Phi^\pm(qz) - \Phi^\pm(z)}. \quad (6.95)$$

**証明.** 証明は付録 E で述べる. □

**注釈 6.36.** (6.63), (6.64), (6.65) より

$$\tau_0(z) := \prod_{k=1}^N \alpha_k^+ (q^{\frac{1-k}{2}} z), \quad \tau_N(z) := \prod_{k=1}^N \alpha_k^- (q^{\frac{k-1}{2}} z),$$

であるので

$$\Phi^+(z) = \log \tau_0(qz) - \log \tau_0(z), \quad (6.96)$$

$$\Phi^-(z) = \log \tau_N(z) - \log \tau_N(z/q). \quad (6.97)$$

つまり定理 6.24 における連立の双線形方程式 (6.78) の  $\tau_0(z), \tau_N(z)$  は [21] の 2 次元戸田方程式の解を用いて記述できることがわかる.

## 第 7 章

# 丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の $N$ 階テンソル表現の古典極限と可積分非線形波動方程式 ( $N$ 成分系への拡張)

丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist もまた余積を用いて  $N$  階テンソル表現を作ることができる. 本章においてはこの  $N$  階テンソルの場合においてどのように古典極限を取れば良いかについて考察した. またこの場合においても閉じた連立の双線形方程式が存在することを示した. さらにこの連立の双線形方程式が媒介変数の極限において前章 6 の双線形方程式に移行することを説明した.

### 7.1 丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の $N$ 階テンソルの古典極限と双線形方程式

#### 7.1.1 丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の $N$ 階テンソルの古典極限

ここで丁-庵原-三木代数  $U = \mathcal{U}(q, t)$  の quasi-Hopf twist の表現  $\rho_\varepsilon$  のテンソル表現について説明する.

**定義 7.1.**  $\mathcal{F}^{\otimes N}$  における  $N$  重テンソル表現  $\rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_N}$  を考える. ( $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ )  $N$  階余積  $\Delta_p^{(N)}$  を次のように帰納的に定義する.

$$\Delta_p^{(2)} = \Delta_p, \quad \Delta_p^{(N)} := (\text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id} \otimes \Delta_p) \circ \Delta_p^{(N-1)}. \quad (7.1)$$

さらにこれとレベル 1 表現の  $N$  重テンソル表現  $\rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_N}$  の合成によって quasi-Hopf twist の  $N$  階テンソル表現を定義する.

$$(\rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_N}) \circ \Delta_p^{(N)} : \mathcal{U}(q, t) \rightarrow \mathcal{F}^{\otimes N}. \quad (7.2)$$

このとき  $(\rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_N}) \circ \Delta_p^{(N)}(\gamma) = (\rho_{y_1} \otimes \cdots \otimes \rho_{y_N})(\gamma_{(1)} \cdots \gamma_{(N)}) = (t/q)^{N/2}$  よりレベル  $N$  表現になっている.

## 補題 7.2.

$$\rho_y^{(N)}(x^+(z;p)) = \sum_{i=1}^N y_i \Lambda_i(z). \quad (7.3)$$

ここで  $\Lambda_i(z)$  は

$$\begin{aligned} \Lambda_i(z) := & \varphi^-(\gamma^{1/2}z; p\gamma^{-2N+2}) \otimes \varphi^-(\gamma^{3/2}z; p\gamma^{-2N+4}) \\ & \otimes \cdots \otimes \varphi^-(\gamma^{(2(i-1)-1)/2}z; p\gamma^{-2N+2(i-1)}) \otimes \eta(\gamma^{i-1}z; p\gamma^{-2N+2i}) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1, \end{aligned} \quad (7.4)$$

と定義される.  $\eta(p^{-(i-1)/2}z), \xi(p^{-(N-i)/2}z)$  は  $i$  番目のテンソル積成分である.

**証明.** 命題 4.24, 定義 7.1 より帰納的に従う.  $\square$

ここで  $\Lambda_i(z)$  は twist しない場合と同じ記号を用いていることに注意する. またテンソル積の第  $i$  成分における  $\eta$  は

$$\eta(\gamma^{i-1}z; p\gamma^{-2N+2i}) = \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n}^{(i)} \gamma^{(i-1)n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} \frac{1-p^n(t/q)^{(i-N+1)n}}{1-p^n(t/q)^{(i-N)n}} a_n^{(i)} z^{-n}\right),$$

である.

次に古典極限を取るためにまず次の作用素を定義する.

$$\lambda_{-n}^{(i)} = \frac{1-t^{-n}}{n} a_{-n}^{(i)}, \quad (n > 0), \quad \lambda_n^{(i)} = -\frac{1-t^n}{n} \frac{1-p^n(t/q)^{(i-N+1)n}}{1-p^n(t/q)^{(i-N)n}} a_n^{(i)}, \quad (n > 0), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (7.5)$$

これは  $t = e^{\hbar}, \hbar \rightarrow 0$  のとき  $i$  成分ごとに  $p$  の  $\gamma^{-2N+2i}$  シフトが入ってくるのでボゾンのスケールリングを変える必要があるためである.  $\mathcal{F}$  の古典極限である  $\lambda_n$  の可換代数を  $\mathcal{A}'$  とする. この場合テンソル積の各成分において可換代数の生成元が異なるので  $\mathcal{A}'_{(i)}$  の生成元を  $\lambda_n^{(i)}$  として,  $\mathcal{A}'_{(1)} \otimes \mathcal{A}'_{(2)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}'_{(N)}$  において

$$1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n^{(i)} \otimes \cdots \otimes 1, \quad (7.6)$$

でテンソルの第  $i$  成分の代数の元を表す. twist しない (6.12) の場合は全ての成分でスケールリングが同じなのに対して, 全ての成分でスケールリングが異なることに注意する.  $t = e^{\hbar}, \hbar \rightarrow 0$  とする古典極限のとり方は節 5.2 と同じである. すなわち  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{\hbar} [ , ] = \{ , \}$  と Poisson 代数の構造を induce する.  $\mathcal{F}^{\otimes 2}$  において,

$$[a^{(1)} \otimes a^{(2)}, b^{(1)} \otimes b^{(2)}] = [a^{(1)}, b^{(1)}] \otimes a^{(2)} b^{(2)} + b^{(1)} a^{(1)} \otimes [a^{(2)}, b^{(2)}], \quad (7.7)$$

であり, 古典極限をとって  $\mathcal{A}'_{(1)} \otimes \mathcal{A}'_{(2)}$  に移行したとき, Poisson 括弧は次のように定まる.

$$\{a^{(1)} \otimes a^{(2)}, b^{(1)} \otimes b^{(2)}\} = \{a^{(1)}, b^{(1)}\} \otimes a^{(2)} b^{(2)} + a^{(1)} b^{(1)} \otimes \{a^{(2)}, b^{(2)}\}. \quad (7.8)$$

$\mathcal{A}'_{(1)} \otimes \mathcal{A}'_{(2)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}'_{(N)}$  においても同じである. つまりテンソル積における Poisson 括弧の定め方は twist しない場合と同様であり, 同じテンソル積成分の Poisson 括弧のみ生じることに注意する.

$$\{\lambda_n^{(i)}, \lambda_m^{(i)}\} = \frac{(1-q^n)(1-p^n q^{(N-i-1)n})}{1-p^n q^{(N-i)n}} \delta_{n+m,0}, \quad (i=1, \dots, N).$$

次に  $\mathcal{A}'_{(i)}$  に新しい生成元  $u_i, Q_i$  を追加して  $\mathcal{B}'_{(i)}$  という新しい代数を定義する.

**定義 7.3.**  $\lambda_n^{(i)} (n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}), u_i, Q_i$  で生成される可換代数  $\mathcal{B}'_{(i)}$  があって, Poisson 括弧は次のように定まっている.

$$\{\lambda_n^{(i)}, \lambda_m^{(i)}\} = \frac{(1-q^n)(1-p^n q^{(N-i-1)n})}{1-p^n q^{(N-i)n}} \delta_{n+m,0}, \quad (7.9)$$

$$\{u_i, Q_i\} = -\frac{1}{\log q}, \quad (7.10)$$

$$\{\lambda_n, u_i\} = \{\lambda_n, Q_i\} = 0. \quad (7.11)$$

以下, 丁庵原-三木代数 quasi-Hopf twist の  $N$  階テンソル積の自由場表示の古典極限  $\mathcal{A}'_{(1)} \otimes \mathcal{A}'_{(2)} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}'_{(N)}$  に生成元を付け加えた  $\mathcal{B}'_{(1)} \otimes \mathcal{B}'_{(2)} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}'_{(N)}$  を考える.  $\mathcal{B}'_{(1)} \otimes \mathcal{B}'_{(2)} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}'_{(N)}$  において次のような記法を用いる.

$$1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \hat{\lambda}_n^{(i)} \otimes \dots \otimes 1, \quad (7.12)$$

$$u_i := 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \hat{u} \otimes \dots \otimes 1, \quad (7.13)$$

$$Q_i := 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \hat{Q} \otimes \dots \otimes 1. \quad (7.14)$$

ここで次の作用素を定義する.

$$\begin{aligned} \phi_{(i)}^+(z) &:= \exp\left(\sum_{n>0} (1-q^{-n}) \frac{1}{1-p^n q^{(N-i-1)n}} q^{\frac{1}{2}(1-i)n} \lambda_{-n}^{(i)} z^n\right) \\ &\exp\left(\sum_{n>0} (1-q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-i-1)n}}{1-p^n q^{(N-i-1)n}} q^{\frac{1}{2}(1+i)n} \lambda_n^{(i)} z^{-n}\right), \quad (i=1, \dots, N). \end{aligned} \quad (7.15)$$

$t = e^{\hbar}, \hbar \rightarrow 0 (t \rightarrow 1)$  で作用素は次のように移行する. ただし以下の式で  $\eta$  はテンソル積の第  $i$  成分,  $\varphi^-$  はテンソル積の第  $k$  成分のものを考えていることに注意する.

$$\eta(\gamma^{i-1} z; p\gamma^{-2N+2i}) \rightarrow \eta(q^{-\frac{1}{2}(i-1)} z; pq^{N-i}) = \exp\left(\sum_{n>0} \lambda_{-n}^{(i)} q^{-\frac{1}{2}(i-1)n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n>0} \lambda_n^{(i)} q^{\frac{1}{2}(i-1)n} z^{-n}\right), \quad (i=1, \dots, N), \quad (7.16)$$

$$\varphi^-(\gamma^{(2k-1)/2} z; p\gamma^{-2N+2k})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \phi_{(k)}^+(q^{-\frac{k-1}{2}} z; pq^{N-k}) &:= \exp\left(\sum_{n>0} (1-q^{-n}) \frac{1}{1-p^n q^{(N-k-1)n}} q^{\frac{1}{2}(1-k)n} \lambda_{-n}^{(k)} z^n\right) \\ &\exp\left(\sum_{n>0} (1-q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k-1)n}}{1-p^n q^{(N-k-1)n}} q^{\frac{1}{2}(1+k)n} \lambda_n^{(k)} z^{-n}\right), \quad (k=1, \dots, N), \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_i(z) \rightarrow \Lambda_i(z) &:= \phi_{(1)}^+(z; pq^{N-1}) \otimes \phi_{(2)}^+(q^{-\frac{1}{2}} z; pq^{N-2}) \otimes \dots \otimes \phi_{(i-1)}^+(q^{-\frac{1}{2}((i-1)-1)} z; pq^{N-i+1}) \\ &\otimes \eta(q^{-(i-1)/2} z; pq^{N-i}) \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$X(z) \rightarrow X(z) := \sum_{i=1}^N q^{u_i} \Lambda_i(z). \quad (7.19)$$

ここでも自由場表示の古典極限を取ったあと  $y_i = \varepsilon_i q^{u_i}$  としている. (7.3) における  $\rho_y^{(N)}(x^+(z; p))$  の古典極限を  $X(z)$  とすると

$$X(z) := \sum_{i=1}^N q^{u_i} \Lambda_i(z), \quad (X_n(z) := q^{u_n} \Lambda_n(z)). \quad (7.20)$$

また  $\Lambda_i(z)$  を  $z$  の Fourier 級数で表したときの係数, 及び正モード, 負モードによる展開を次のように定義する.

$$\Lambda_i(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\Lambda_i)_{-n} z^n, \quad \Lambda_i^+(z) := \sum_{n > 0} (\Lambda_i)_{-n} z^n, \quad \Lambda_i^-(z) := \sum_{n > 0} (\Lambda_i)_n z^{-n}. \quad (7.21)$$

### 7.1.2 quasi-Hopf twist の $N$ 階テンソルの古典極限と $q$ -PILW の多成分拡張の双線形方程式

ここでさらに次の作用素を定義する.

**定義 7.4.**  $k = 1, 2, \dots, N$  について  $\mathcal{B}'_{(1)} \otimes \mathcal{B}'_{(2)} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}'_{(N)}$  の元を次のように定義する.

$$\alpha_k(z; p) := \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{p^n}{(1-q^n)(1-p^n q^{-n})} \lambda_n^{(k)} z^{-n}\right), \quad (7.22)$$

$$\bar{\alpha}_k(z; p) := \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{1}{(1-q^n)(1-p^n q^{-n})} \lambda_n^{(k)} z^{-n}\right). \quad (7.23)$$

**注釈 7.5.** 以下

$$\alpha_k(z; pq^{N-k}) := \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{p^n q^{(N-k)n}}{(1-q^n)(1-p^n q^{(N-k-1)n})} \lambda_n^{(k)} z^{-n}\right), \quad (7.24)$$

$$\bar{\alpha}_k(z; pq^{N-k}) := \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{1}{(1-q^n)(1-p^n q^{(N-k-1)n})} \lambda_n^{(k)} z^{-n}\right), \quad (7.25)$$

の形で用いる.

次にこの場合の  $\tau$  関数を定義する.

**定義 7.6.**  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  について  $\tau_i(z; p)$  を次のように定義する.

$$\tau_i(z; p) := \prod_{k=1}^{N-i} \alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}} z; pq^{N-k}) \prod_{k=N-i+1}^N \bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}} z; pq^{N-k}). \quad (7.26)$$

**命題 7.7.**  $i = 1, 2, \dots, N$  について次の関係式が成立する.

$$\Lambda_{N-i+1}(z) = \varepsilon_{N-i+1} \frac{\tau_{i-1}(qz; p) \tau_i(q^{-1}z; p)}{\tau_{i-1}(z; p) \tau_i(z; p)}. \quad (7.27)$$

**証明.**

$$1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \eta(q^{-\frac{1}{2}(k-1)} z; pq^{N-k}) \otimes \dots \otimes 1 = \varepsilon_k \frac{\alpha_k(q^{\frac{3-k}{2}} z; pq^{N-k}) \bar{\alpha}_k(q^{\frac{-1-k}{2}} z; pq^{N-k})}{\alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}} z; pq^{N-k}) \bar{\alpha}_k(q^{\frac{1-k}{2}} z; pq^{N-k})}, \quad (7.28)$$

$$1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \phi_{(k)}^+(q^{-\frac{k-1}{2}} z; pq^{N-k}) \otimes \dots \otimes 1 = \frac{\alpha_k(q^{\frac{3-k}{2}} z; pq^{N-k}) \alpha_k(q^{\frac{-1-k}{2}} z; pq^{N-k})}{\alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}} z; pq^{N-k}) \alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}} z; pq^{N-k})}. \quad (7.29)$$

よって, (7.18) より,

$$\begin{aligned}
\Lambda_{N-i+1}(z) &:= \phi_{(1)}^+(z; pq^{N-1}) \otimes \phi_{(2)}^+(q^{-\frac{1}{2}}z; pq^{N-2}) \otimes \cdots \otimes \phi_{(N-i)}^+(q^{-\frac{1}{2}((N-i)-1)}z; pq^i) \\
&\quad \otimes \eta(q^{-(N-i)/2}z; pq^{i-1}) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \\
&= \prod_{k=1}^{N-i} \frac{\alpha_k(q^{\frac{3-k}{2}}z; pq^{N-k})\alpha_k(q^{-\frac{1-k}{2}}z; pq^{N-k})}{\alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}}z; pq^{N-k})\alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}}z; pq^{N-k})} \cdot \varepsilon_{N-i+1} \frac{\alpha_{N-i+1}(q^{1-\frac{N-i}{2}}z; pq^{i-1})\bar{\alpha}_{N-i+1}(q^{-1-\frac{N-i}{2}}z; pq^{i-1})}{\alpha_{N-i+1}(q^{-\frac{N-i}{2}}z; pq^{i-1})\bar{\alpha}_{N-i+1}(q^{-\frac{N-i}{2}}z; pq^{i-1})} \\
&= \varepsilon_{N-i+1} \left( \prod_{k=1}^{N-i+1} \frac{\alpha_k(q^{\frac{3-k}{2}}z; pq^{N-k})}{\alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}}z; pq^{N-k})} \prod_{k=N-i+2}^N \frac{\bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z; pq^{N-k})}{\bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-3}{2}}z; pq^{N-k})} \right) \\
&\quad \times \left( \prod_{k=1}^{N-i} \frac{\alpha_k(q^{-\frac{1-k}{2}}z; pq^{N-k})}{\alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}}z; pq^{N-k})} \prod_{k=N-i+1}^N \frac{\bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-3}{2}}z; pq^{N-k})}{\bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z; pq^{N-k})} \right) \\
&= \varepsilon_{N-i+1} \frac{\tau_{i-1}(qz)\tau_i(q^{-1}z)}{\tau_{i-1}(z)\tau_i(z)}. \tag{7.30}
\end{aligned}$$

□

**定理 7.8.**  $\tau_0(z; p), \tau_1(z; p), \dots, \tau_N(z; p)$  に関して次の連立の方程式系が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&(\partial_t \tau_i(z; p))\tau_{i-1}(z; p) - \tau_i(z; p)(\partial_t \tau_{i-1}(z; p)) \\
&= \varepsilon_{N-i+1} q^{u_{N-i+1}} \tau_{i-1}(qz; p)\tau_i(q^{-1}z; p) - q^{u_{N-i+1}} \Lambda_{N-i+1,0} \tau_{i-1}(z; p)\tau_i(z; p), \quad (i = 1, \dots, N), \tag{7.31}
\end{aligned}$$

$$\tau_0(pq^{N-1}z; p) = \tau_N(z; p). \tag{7.32}$$

**証明.** これは次の 2 つの命題から従う. □

これは  $q$ -PILW の広田の双線形方程式 (2.57) (テンソル積をしないとき Poisson 代数から導いた同じ式が (5.61) である) の多成分の拡張になっている. また  $N+1$  変数の  $N+1$  連立の方程式になっている.

**命題 7.9.** 次の双線形方程式系が成立する.

$$\begin{aligned}
&\{X_0, \tau_i(z; p)\}\tau_{i-1}(z; p) - \tau_i(z; p)\{X_0, \tau_{i-1}(z; p)\} \\
&= \varepsilon_{N-i+1} q^{u_{N-i+1}} \tau_{i-1}(qz; p)\tau_i(q^{-1}z; p) - q^{u_{N-i+1}} \Lambda_{N-i+1,0} \tau_{i-1}(z; p)\tau_i(z; p), \quad (i = 1, \dots, N). \tag{7.33}
\end{aligned}$$

**証明.** 証明は付録 F で述べる. □

**命題 7.10.** 次の方程式が成立する.

$$\tau_0(pq^{N-1}z; p) = \tau_N(z; p). \tag{7.34}$$

**証明.**  $\tau_0(z; p), \tau_N(z; p)$  の定義より

$$\begin{aligned}\tau_0(z; p) &:= \prod_{k=1}^N \alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}} z; pq^{N-k}) = \prod_{k=1}^N \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{p^n q^{(N-\frac{k}{2}-\frac{1}{2})n}}{(1-q^n)(1-p^n q^{(N-k-1)n})} \lambda_n^{(k)} z^{-n}\right), \\ \tau_0(pq^{N-1} z; p) &:= \prod_{k=1}^N \alpha_k(pq^{N-\frac{1+k}{2}} z; pq^{N-k}) = \prod_{k=1}^N \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{q^{-(\frac{k-1}{2})n}}{(1-q^n)(1-p^n q^{(N-k-1)n})} \lambda_n^{(k)} z^{-n}\right), \\ \tau_N(z; p) &:= \prod_{k=1}^N \bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-1}{2}} z; pq^{N-k}) = \prod_{k=1}^N \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{q^{-(\frac{k-1}{2})n}}{(1-q^n)(1-p^n q^{(N-k-1)n})} \lambda_n^{(k)} z^{-n}\right).\end{aligned}$$

よって成り立つ. □

**注釈 7.11.** これは  $p = e^{2\pi i \delta}, q = e^{2\pi i \gamma}, z = e^{2\pi i x}$  を用いて書くと次のようになる.

$$\tau_0(x + (N-1)\gamma + \delta; p) = \tau_N(x; p). \quad (7.35)$$

次に  $\tau$  のゲージ変換  $\tilde{\tau}$  を次のように定義する. これは前章と同様である.

**定義 7.12.**  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  について  $\tilde{\tau}_i(z; p)$  を次のように定義する.

$$\tilde{\tau}_i(z; p) := e^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-i} Q^{(k)} - \frac{1}{2} \sum_{k=N-i+1}^N Q^{(k)})} z^{(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-i} u^{(k)} - \frac{1}{2} \sum_{k=N-i+1}^N u^{(k)})} \tau_i(z; p).$$

**命題 7.13.** このとき

$$\varepsilon_{N-i+1} \frac{\tilde{\tau}_{i-1}(qz; p) \tilde{\tau}_i(q^{-1}z; p)}{\tilde{\tau}_{i-1}(z; p) \tilde{\tau}_i(z; p)} = q^{u_{N-i+1}} \varepsilon_{N-i+1} \frac{\tau_{i-1}(qz; p) \tau_i(q^{-1}z; p)}{\tau_{i-1}(z; p) \tau_i(z; p)} = q^{u_{N-i+1}} \Lambda_{N-i+i}(z)$$

**定理 7.14.**  $q$ -PBO の多成分版ときと同様に次の双線形方程式が成立する.

$$(\partial_t \tilde{\tau}_i(z; p)) \tilde{\tau}_{i-1}(z; p) - \tilde{\tau}_i(z; p) (\partial_t \tilde{\tau}_{i-1}(z; p)) = \varepsilon_{N-i+1} \tilde{\tau}_{i-1}(qz; p) \tilde{\tau}_i(q^{-1}z; p), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (7.36)$$

$$\tilde{\tau}_0(pq^{N-1} z; p) = e^{\sum_{k=1}^N Q^{(k)}} z^{\sum_{k=1}^N u^{(k)}} (pq^{N-1})^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N u^{(k)}} \tilde{\tau}_N(z; p). \quad (7.37)$$

### 7.1.3 $q$ -PILW の多成分拡張の双線形方程式の極限

**命題 7.15.**  $p \rightarrow 0$  の極限で  $q$ -PILW の多成分双線形方程式 (7.31) は  $q$ -PBO の多成分双線形方程式 (6.78) に移行する. (7.32) の条件は  $p \rightarrow 0$  のときになくなる.

**証明.** (6.9), (6.12), (7.5) より  $p \rightarrow 0$  のとき

$$\lambda_{-n}^{(i)} \rightarrow \alpha_{-n}^{(i)} \quad (n > 0), \quad \lambda_n^{(i)} \rightarrow \alpha_n^{(i)} \quad (n > 0). \quad (7.38)$$



よって,  $p \rightarrow 0$  のとき

$$\begin{aligned}\alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}}z; pq^{N-k}) &= \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{p^n q^{(N-k)n}}{(1-q^n)(1-p^n q^{(N-k-1)n})} \lambda_n^{(k)}(q^{\frac{1-k}{2}}z)^{-n}\right) \\ &\rightarrow \exp\left(-\sum_{n > 0} \frac{1}{1-q^n} \alpha_{-n}^{(k)}(q^{\frac{1-k}{2}}z)^{-n}\right) = \alpha_k^+(q^{\frac{1-k}{2}}z),\end{aligned}\quad (7.39)$$

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z; pq^{N-k}) &= \exp\left(-\sum_{n \neq 0} \frac{1}{(1-q^n)(1-p^n q^{(N-k-1)n})} \lambda_n^{(k)}(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z)^{-n}\right) \\ &\rightarrow \exp\left(-\sum_{n > 0} \frac{1}{1-q^n} \alpha_n^{(k)}(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z)^{-n}\right) = \alpha_k^-(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z).\end{aligned}\quad (7.40)$$

よって  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  について  $p \rightarrow 0$  のとき

$$\begin{aligned}\tau_i(z; p) &:= \prod_{k=1}^{N-i} \alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}}z; pq^{N-k}) \prod_{k=N-i+1}^N \bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z; pq^{N-k}) \\ &\rightarrow \tau_i(z) := \prod_{k=1}^{N-i} \alpha_k^+(q^{\frac{1-k}{2}}z) \prod_{k=N-i+1}^N \alpha_k^-(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z).\end{aligned}\quad (7.41)$$

また

$$\begin{aligned}\tau_0(z) &:= \prod_{k=1}^N \alpha_k^+(q^{\frac{1-k}{2}}z) \\ \tau_N(z) &:= \prod_{k=1}^N \alpha_k^-(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z).\end{aligned}$$

であるので  $\tau_0$  のシフトと  $\tau_N$  に関する条件式 (7.32) は満たされなくなる。  $\square$



## 第 8 章

# 結論と今後の展望

本論文では丁-庵原-三木代数の  $N$  階テンソル表現から特異積分項を持った可積分非線形波動方程式の多成分への拡張及び差分化を議論してきた。

まず丁-庵原-三木代数の  $N$  階テンソルの Fock 表現の古典極限を用いて次の  $q$ -PBO 方程式の  $N$  成分への拡張を導出した。

$$\begin{aligned} \partial_t E_r(z) = & \left( E_1^+(z) - E_1^+(qz) - E_1^-(q^{1-r}z) + E_1^-(q^{-r}z) \right) E_r(z) \\ & + E_{r+1}(qz) - E_{r+1}(z), \quad (r = 1, \dots, N), \\ & (\text{ただし } E_{N+1}(z) = 0). \end{aligned} \quad (8.1)$$

あるいは従属変数変換をした

$$\begin{aligned} \partial_t F_r(z) = & \left( T^{(r)} F_1 \right)(z) F_r(z) + F_{r+1}(q^{1/2}z) - F_{r+1}(q^{-1/2}z), \quad (r = 1, \dots, N), \\ & (\text{ただし } F_{N+1}(z) = 0). \end{aligned} \quad (8.2)$$

これは  $N = 1$  のときに Benjamin-Ono 方程式の  $q$  差分類似であることが示されており [20], [21], さらに  $N = 2$  のときに  $\mathfrak{gl}(2)$  generalized Benjamin-Ono 方程式の  $q$  差分類似になっていることを本研究で示したが, 3 成分以上での  $q \rightarrow 1$  極限を取ることが課題として残っている. もしこれがうまくできると  $q$  差分化されていない, Benjamin-Ono 方程式の 3 成分以上への拡張が初めて構成できたことになる. これは命題 2.43 のような Galilei 変換を  $N$  成分同時に考えることによる技術的困難があり, 今後の課題の一つとなっている.

丁-庵原-三木代数の  $N$  階テンソルの Fock 表現の古典極限を用いて次の  $q$ -PBO 方程式の  $N$  成分系における  $\tau_0(z), \tau_1(z), \dots, \tau_N(z)$  の広田の双線形方程式系を導出した。

$$\begin{aligned} & (\partial_t \tau_i(z)) \tau_{i-1}(z) - \tau_i(z) (\partial_t \tau_{i-1}(z)) \\ & = \varepsilon_{N-i+1} q^{u_{N-i+1}} \tau_{i-1}(qz) \tau_i(q^{-1}z) - q^{u_{N-i+1}} \Lambda_{N-i+1,0} \tau_{i-1}(z) \tau_i(z), \quad (i = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (8.3)$$

また  $\tau$  を適切にゲージ変換したとき  $\tilde{\tau}_0(z), \tilde{\tau}_1(z), \dots, \tilde{\tau}_N(z)$  に関する次の連立の双線形方程式が成り立つことを示した。

$$(\partial_t \tilde{\tau}_i(z)) \tilde{\tau}_{i-1}(z) - \tilde{\tau}_i(z) (\partial_t \tilde{\tau}_{i-1}(z)) = \varepsilon_{N-i+1} \tilde{\tau}_{i-1}(qz) \tilde{\tau}_i(q^{-1}z), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (8.4)$$

また  $\tilde{\tau}_0(z), \tilde{\tau}_1(z), \dots, \tilde{\tau}_N(z)$  と  $E_1(z), \dots, E_N(z)$  は従属変数変換でつながっていることがわかった. これによって広田の双線形方程式系を解くことによって  $q$ -PBO 方程式の  $N$  成分系も解くことができることがわかった. この課題は 2 次元戸田場方程式に関する結果とも関連している. 本研究の結果により戸田場方程式の解と  $\tau_0(z), \tau_N(z)$  は従属変数の変換でつながっていることがわかっており, また [21] より戸田場方程式のソリトン解は求めることができるため, ソリトン解を用いて  $\tau_0(z), \tau_N(z)$  を記述することができる. よって連立方程式において  $\tau_1(z), \dots, \tau_{N-1}(z)$  のソリトン解を記述することが課題である. またスクリーニング作用素の古典極限と  $\tau$  関数の関係を明らかにすることも課題として残されている.

丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の  $N$  階テンソルの Fock 表現の古典極限を用いて次の  $q$ -PILW 方程式の  $N$  成分系における  $\tau_0(z; p), \tau_1(z; p), \dots, \tau_N(z; p)$  の広田の双線形方程式系を導出した.

$$\begin{aligned} & (\partial_t \tau_i(z; p)) \tau_{i-1}(z; p) - \tau_i(z; p) (\partial_t \tau_{i-1}(z; p)) \\ &= \varepsilon_{N-i+1} q^{u_{N-i+1}} \tau_{i-1}(qz; p) \tau_i(q^{-1}z; p) - q^{u_{N-i+1}} \Lambda_{N-i+1, 0} \tau_{i-1}(z; p) \tau_i(z; p), \quad (i = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\tau_0(pq^{N-1}z; p) = \tau_N(z; p). \quad (8.6)$$

また, この広田の双線形方程式系の解を導出することは課題の 1 つである. また丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の  $N$  階テンソルの Fock 表現の古典極限に関しては  $q$ -PILW 方程式の  $N$  成分系を導出すること, すなわちの  $q$ -PBO 方程式の  $N$  成分系における  $N$  個の従属変数  $E_1(z), E_2(z), \dots, E_N(z)$  に相当するものを構成することが課題である.  $q$ -PBO 方程式の  $N$  成分系における従属変数は丁-庵原-三木代数の  $N$  階テンソル表現から  $q$ - $W_N$  代数の生成子を構成し, その古典極限を取ることで得られている. よって丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist の  $N$  階テンソルにおいても同様の構成で  $q$ - $W_N$  代数の生成子を構成し, 古典極限を取ることで  $q$ -PILW 方程式の  $N$  成分系の従属変数が得られるのではないかと考えられる.

また  $q$ -PILW 方程式の 2 成分系を導出することができると, twist していない丁-庵原-三木代数のときと同様に [42] において議論されている量子代数の古典極限と古典可積分系の対応関係の  $q$  差分による一般化と関係するのではないかと考えられる. [42] では IM の明示式は得られていないが,  $q$  差分の一般化によって IM の明示式も得ることができるのではないかと考えられる.

## 謝辞

指導教員の国場敦夫先生には度々議論して頂き、またこの博士論文になった研究の間もいつも励まして頂きました。深く感謝申し上げます。

共同研究をしてくださった白石潤一先生、土谷洋平さんにはいつも議論に付き合ってもらって頂き、また励まして頂きました。厚く御礼申し上げます。

研究室のメンバーの丸山翔也君、米山瑛仁君にはいつも雑談に付き合ってもらったり、議論して頂きました。この場で感謝の意を表明したいと思います。

数学科同期の佐藤僚君、数学科の先輩の間瀬崇史さんにはいつも議論して頂き、また励まして頂きました。この場で感謝の意を表明したいと思います。

最後に、様々な面で研究生活を支援してくれた家族に感謝します。



## 付録 A

# Macdonald 対称関数

以下では有限変数の Macdonald 対称多項式, 及び無限変数の Macdonald 対称関数について述べる.

### A.1 対称多項式と対称関数

ここでは有限変数の対称多項式について復習する.

**定義 A.1.**  $S_n$  を  $n$  次対称群として,  $n$  変数の対称多項式の空間を

$$\Lambda_n := \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}, \quad (\text{A.1})$$

と定義する. その  $d$  次斉次成分を  $\Lambda_n^d$  とする.

**定義 A.2.** 係数拡大の次のように定義する.

$$\Lambda_{n,K} := \Lambda_n \otimes_{\mathbb{Z}} K = K[x_1, \dots, x_n]^{S_n}. \quad (\text{A.2})$$

**定義 A.3.** 非負整数  $N$  の分割  $\lambda$  を

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = N, \quad (\text{A.3})$$

となるものと定義する.

**定義 A.4.**  $\lambda_i \neq 0$  となる最大の  $i$  を  $l(\lambda)$  と書き,  $\lambda$  の長さと呼ぶ.

**定理 A.5.** 分割  $\lambda$  に対して定まるモノミアル対称多項式

$$m_\lambda(x) := \sum_{\alpha: \lambda \text{ の異なる置換}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad (\text{A.4})$$

は  $\Lambda_n$  の  $\mathbb{Z}$  基底を成す.

**定理 A.6.** 分割  $\lambda$  に対して定まる基本対称多項式

$$e_\lambda(x) := e_{\lambda_1(x)} e_{\lambda_2(x)} \cdots e_{\lambda_k(x)}, \quad e_r(x) := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}. \quad (\text{A.5})$$

は  $\Lambda_n$  の  $\mathbb{Z}$  基底を成す.

**定理 A.7.** 分割  $\lambda$  に対して定まる冪和対称多項式

$$p_\lambda(x) := p_{\lambda_1}(x)p_{\lambda_2}(x)\cdots p_{\lambda_k}(x), \quad p_r(x) := \sum_{i=1}^n x_i^r, \quad (\text{A.6})$$

は  $\Lambda_{n,\mathbb{Q}}$  の  $\mathbb{Q}$  基底を成す.

次に無限変数の対称関数について復習する.

**定義 A.8.** 対称多項式のなす加群上の制限写像  $\rho_{m,n}$  を  $m \geq n$  のとき

$$\rho_{m,n} : \Lambda_m \rightarrow \Lambda_n, \quad (\text{A.7})$$

$$\rho_{m,n}(f(x_1, \dots, x_m)) = f(x_1, \dots, x_m) \Big|_{x_{n+1}=\dots=x_m=0} \quad (\text{A.8})$$

と定義する.

**定義 A.9.**  $(\{\Lambda_n\}_n, \{\rho_{m,n}\}_{m,n})$  は加群の射影系になる. その射影極限を

$$\Lambda := \varprojlim \Lambda_n, \quad (\text{A.9})$$

と書き, 対称関数環と呼ぶ. 誘導される自然な射影写像を

$$\rho_n : \Lambda \rightarrow \Lambda_n. \quad (\text{A.10})$$

と書く.

**注釈 A.10.** 制限写像は  $\Lambda_n$  の次数構造  $\Lambda_n = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Lambda_n^d$  を保つので, 射影極限  $\Lambda$  も次数構造  $\Lambda = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Lambda^d$  を保つ.

**注釈 A.11.**  $m_\lambda(x), e_\lambda(x)$  は  $\Lambda$  の  $\mathbb{Z}$  基底を成す.  $p_\lambda(x)$  は  $\Lambda_{\mathbb{Q}}$  の  $\mathbb{Q}$  基底を成す.

**定義 A.12.** 分割  $\lambda, \mu$  に対してドミナンス半順序を次で定義する.

$$\lambda \geq \mu \iff |\lambda| = |\mu| \text{ かつ } \sum_{k=1}^i \lambda_k \geq \sum_{k=1}^i \mu_k, \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Macdonald 対称関数

有限変数の Macdonald 対称多項式について定義する.  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q, t)$  とし,  $q, t$  は不定元とする.

**定義 A.13.** (1)  $q$  差分作用素  $T_{q,x_i}$  を次のように定義する.

$$T_{q,x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n). \quad (\text{A.12})$$

(2)  $r$  階の Macdonald 差分作用素  $D_r^{(n)}$  ( $1 \leq r \leq n$ ) を次で定義する.

$$D_r^{(n)} := \sum_{\substack{I \subset \{1, 2, \dots, n\} \\ |I|=r}} \left[ t^{r(r-1)/2} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i \in I} T_{q,x_i} \right]. \quad (\text{A.13})$$



**注釈 A.14.**  $D_r^{(n)}$  の右上の  $(n)$  は変数の個数, 右下の  $r$  は次数を表す.

**注釈 A.15.**  $r$  階の Macdonald 差分作用素  $D_r^{(n)}$  は  $\Lambda_{n, \mathbb{F}}$  に閉じて作用する. すなわち

$$D_r^{(n)} : \Lambda_{n, \mathbb{F}} \rightarrow \Lambda_{n, \mathbb{F}}. \quad (\text{A.14})$$

以下は Macdonald 多項式の存在定理である.

**定理 A.16.**  $\lambda$  について Macdonald 対称多項式  $P_\lambda(x; q, t) \in \Lambda_{n, \mathbb{F}}$  は次の 2 条件によって一意に定まる.

$$\begin{aligned} P_\lambda &= m_\lambda + \sum_{\lambda > \mu} c_{\lambda, \mu} m_\mu, \quad (c_{\lambda, \mu} \in \mathbb{F}), \\ D_1^{(n)} P_\lambda &= e_1(t^n s_\lambda^{(n)}) \cdot P_\lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

ここで  $s_\lambda^{(n)} := (q^{\lambda_1} t^{-1}, q^{\lambda_2} t^{-2}, \dots, q^{\lambda_k} t^{-k}, t^{-k-1}, \dots, t^{-n}) \in \mathbb{F}^n$  を用いた. これはスペクトルを定めているためスペクトルパラメータと呼ぶ.

**定理 A.17.** (1)  $D_r^{(n)}$  ( $r = 1, \dots, n$ ) は互いに可換である:

$$[D_r^{(n)}, D_s^{(n)}] = 0, \quad (1 \leq r, s \leq n). \quad (\text{A.16})$$

(2) Macdonald 対称多項式  $P_\lambda$  は差分作用素族  $D_r^{(n)}$  ( $r = 1, \dots, n$ ) の同時固有関数である:

$$D_r^{(n)} P_\lambda = e_r(t^n s_\lambda^{(n)}) \cdot P_\lambda. \quad (\text{A.17})$$

次に無限変数の Macdonald 対称関数を定義する. また無限個の可換な作用素の族があり, Macdonald 対称関数によって同時対角化されていることが重要である.

**定義 A.18.**  $\Lambda_{n, \mathbb{F}}$  上の差分作用素  $E_r^{(n)}$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) を次で定義する.

$$E_r^{(n)} := \sum_{j=0}^r \frac{t^{-nr - \binom{r-j+1}{2}}}{(t^{-1}; t^{-1})_{r-j}} D_j^{(n)}, \quad (x; q)_k := \prod_{i=0}^{k-1} (1 - xq^i). \quad (\text{A.18})$$

**補題 A.19.**  $E_r^{(n)}$  は制限写像と整合的である. すなわち次が成り立つ.

$$\rho_{n, n-1} \circ E_r^{(n)} = E_r^{(n-1)} \circ \rho_{n, n-1}. \quad (\text{A.19})$$

したがって射影極限

$$E_r := \varprojlim E_r^{(n)} : \Lambda_{\mathbb{F}} \rightarrow \Lambda_{\mathbb{F}}, \quad (\text{A.20})$$

が well-defined になる.

以下は Macdonald 関数の存在定理である.

**定理 A.20.**  $\lambda$  について Macdonald 対称関数  $P_\lambda(x; q, t) \in \Lambda_{\mathbb{F}}$  は次の 2 条件によって一意に定まる.

$$\begin{aligned} P_\lambda &= m_\lambda + \sum_{\lambda > \mu} c_{\lambda, \mu} m_\mu, \quad (c_{\lambda, \mu} \in \mathbb{F}), \\ E_1 P_\lambda &= e_1(t^n s_\lambda) \cdot P_\lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

ここで  $s_\lambda := (q^{\lambda_1} t^{-1}, q^{\lambda_2} t^{-2}, \dots, q^{\lambda_k} t^{-k}, t^{-k-1}, t^{-k-2}, \dots)$  を用いた. これはスペクトルを定めているため無限変数版スペクトルパラメータと呼ぶ.

**定理 A.21.** (1) 無限個の Macdonald 作用素  $E_r (r = 1, 2, 3, \dots)$  は互いに可換である:

$$[E_r, E_s] = 0, \quad (1 \leq r, s). \quad (\text{A.22})$$

(2) Macdonald 対称関数  $P_\lambda$  は差分作用素族  $E_r (r = 1, 2, 3, \dots)$  の同時固有関数である:

$$E_r P_\lambda = e_r(t^n s_\lambda) \cdot P_\lambda. \quad (\text{A.23})$$

## 付録 B

# Nekrasov 分配関数

以下では Nekrasov 分配関数と AFLT 基底について述べる.

### B.1 Nekrasov 分配関数の定義

Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数がでてきた動機を説明するため, Nekrasov 分配関数は定義として導入する. ここでは  $\prod_{i=1}^n U(2)_i$  筋ゲージ理論に対する公式を与える. Nekrasov 分配関数は, 各ゲージ群因子  $U(2)_i$  に付随する 2 個のヤング図形の集まり  $\vec{\lambda}^{(i)} = (\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)})$  に対する和として書き下される. (ここで  $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}$  ともにヤング図形であることに注意する)  $\vec{P}^{(i)} = (P^{(i)}, -P^{(i)})$  は  $U(2)_i$  の対称性のパラメーターである. ベクトルの第 1, 2 成分をそれぞれ  $P_1^{(i)} = P^{(i)}, P_2^{(i)} = -P^{(i)}$  と書く.

$$Z_{\text{Nek}} := \sum_{\vec{\lambda}^{(1)}, \vec{\lambda}^{(2)}, \dots, \vec{\lambda}^{(n)}} \prod_{i=1}^n q_i^{|\vec{\lambda}^{(i)}|} z(\vec{\lambda}; \vec{P}, \vec{a}). \quad (\text{B.1})$$

ここでインスタント因子は  $q^{|\vec{\lambda}|} = q^{\sum_{i=1}^2 |\lambda_i|}$  で定義し,  $q_i$  は  $i$  番目のゲージ群因子のインスタント因子  $q_i = e^{2\pi i \tau_i}$  とする. 重み因子  $z$  は, 各多重項からの寄与の積で与えられる.

$$z(\vec{\lambda}; \vec{P}, \vec{a}) = \prod_{i=1}^n z_{\text{vect}}(P^{(i)}, \vec{\lambda}^{(i)}) \prod_{\text{表現: } \mathcal{R}} z_{\text{hyper}\mathcal{R}}(\vec{\lambda}^{(1)}, \dots; P, \dots, a). \quad (\text{B.2})$$

ベクトル多重項の形は

$$z_{\text{vect}}(P, \vec{\lambda}) = \prod_{i,j=1}^2 \prod_{s \in \lambda_i} \left( P_j - P_i + b(l_{\lambda_j}(s) + 1) - b^{-1} a_{\lambda_i}(s) \right)^{-1} \prod_{t \in \lambda_j} \left( P_j - P_i - b l_{\lambda_i}(t) + b^{-1} (a_{\lambda_j}(t) + 1) \right)^{-1} \quad (\text{B.3})$$

ハイパー多重項は物質場の数だけ重み因子がかけられる．ハイパー多重項の重み因子は表現に応じて変わる．

$$z_{\text{bifund}}(P', \vec{\mu}, P, \vec{\lambda}; \alpha) = \prod_{i,j=1}^2 \prod_{s \in \lambda_i} \left( P'_j - P_i + b(l_{\mu_j}(s) + 1) - b^{-1}a_{\lambda_i}(s) - \alpha \right) \prod_{t \in \mu_j} \left( P'_j - P_i - b l_{\lambda_i}(t) + b^{-1}(a_{\mu_j}(t) + 1) - \alpha \right), \quad (\text{B.4})$$

$$z_{\text{adj}}(P, \vec{\mu}; \alpha) = z_{\text{bifund}}(P, \vec{\mu}, P, \vec{\mu}; \alpha), \quad (\text{B.5})$$

$$z_{\text{fund}}(P, \vec{\lambda}; \alpha) = \prod_{i=1}^2 \prod_{s \in \lambda_i} \left( P_i + b(l'_{\lambda_i}(s) + 1) + b^{-1}(a'_{\lambda_i}(s) + 1) - \alpha \right), \quad (\text{B.6})$$

$$z_{\text{antifund}}(P, \vec{\lambda}; \alpha) = z_{\text{fund}}(P, \vec{\lambda}; b + b^{-1} - \alpha). \quad (\text{B.7})$$

ここでハイパー多重項として、双基本表現、随伴表現、基本表現、反基本表現のもののみを考えた．ここでヤング図形の箱  $s = (i, j) \in \lambda$  に対してアーム長  $a_{\lambda}(s)$ 、レッグ長  $l_{\lambda}(s)$ 、余アーム長  $a'_{\lambda}(s)$ 、余レッグ長  $l'_{\lambda}(s)$  という概念を用いている．これらの定義は

$$a_{\lambda}(s) = \lambda_i - j, \quad l_{\lambda}(s) = \lambda'_j - i, \quad a'_{\lambda}(s) = j - 1, \quad l'_{\lambda}(s) = i - 1. \quad (\text{B.8})$$

また  $\alpha$  は質量である．(B.4) の式のみ用いる．

## B.2 $\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$ の primary 場と AFLT 基底の一意性定理

**定義 B.1.**  $\mathcal{A} = \text{Vir} \otimes \mathcal{H}$  の primary 場  $V_{\alpha}$  を次で定義する．

$$V_{\alpha} := \mathcal{V}_{\alpha} \cdot V_{\alpha}^L, \quad (\text{B.9})$$

ただし  $V_{\alpha}^L$  は Virasoro 代数の primary 場で共形次元は  $\Delta(\alpha) = \alpha(Q - \alpha)$ ．また  $\mathcal{V}_{\alpha}$  は次で与えられる．

$$\mathcal{V}_{\alpha} := e^{2(\alpha-Q)\varphi_-} e^{2\alpha\varphi_+}, \quad (\text{B.10})$$

$$\varphi_+(z) = i \sum_{n>0} \frac{a_n}{n} z^{-n}, \quad \varphi_-(z) = i \sum_{n<0} \frac{a_n}{n} z^{-n}. \quad (\text{B.11})$$

上の定義を用いると primary 場  $V_{\alpha}$  と代数の生成子の交換関係は次のようになる．

**補題 B.2.**

$$\begin{aligned} [L_m, V_{\alpha}^L(z)] &= (z^{m+1}\partial_z + (m-1)\Delta(\alpha)z^m)V_{\alpha}^L(z), \\ [a_n, \mathcal{V}_{\alpha}(z)] &= -i\alpha z^n \mathcal{V}_{\alpha}(z), \quad (n < 0), \\ [a_n, \mathcal{V}_{\alpha}(z)] &= i(Q - \alpha)z^n \mathcal{V}_{\alpha}(z), \quad (n > 0), \\ [L_m, \mathcal{V}_{\alpha}(z)] &= [a_n, V_{\alpha}^L(z)] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

**注釈 B.3.** 2つの状態の間の行列要素

$$\frac{\langle P' | L_{k'_1} \cdots L_{k'_n} a_{l'_1} \cdots a_{l'_m} V_{\alpha}(1) a_{-l_m} \cdots a_{-l_1} L_{-k_n} \cdots L_{-k_1} | P \rangle}{\langle P' | V_{\alpha}(1) | P \rangle}, \quad (\text{B.13})$$

は  $\alpha, P, P'$  の多項式であり 4 つの交換関係 (B.12) と次の行列要素の座標依存性の具体形を用いて計算することができる.

$$\langle P'|V_\alpha(z)|P\rangle \sim z^{P^2 - P'^2 - \Delta(\alpha)}. \quad (\text{B.14})$$

AFLT 基底 (3.8) における全ての係数  $C_\lambda^{\mu_1, \mu_2}(P)$  は, 2 つの AFLT 基底で表される状態の間の, primary 場の行列要素が Nekrasov 分配関数のハイパー多重項における双基本表現の重み因子 (B.4) に一致するという次の要請から一意的に定まる.

**命題 B.4.** 次の条件を満たす直交基底の組  $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$  がただ一つ存在する.

$$\frac{\vec{\mu} \langle P'|V_\alpha|P\rangle_{\vec{\lambda}}}{\langle P'|V_\alpha|P\rangle} = z_{\text{bifund}}(P', \vec{\mu}, P, \vec{\lambda}; \alpha). \quad (\text{B.15})$$

**注釈 B.5.** (B.15) の右辺は (B.4) で与えられているので, これは係数  $C_\lambda^{\mu_1, \mu_2}(P)$  たちに関する過剰決定系 (未知数に対して方程式の数の方が多い) の連立方程式系になっている. それにも関わらず係数たちが唯一の解を持ち基底の組  $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$  が一意的に定まることが [33] において示された.

### B.3 IM の固有値の縮退

副節 3.2.1 における積分  $\mathbf{I}_3$  から次の情報がわかる.  $\mathbf{I}_3$  の固有状態は  $|P\rangle_{\vec{\lambda}}$  であり,

$$\mathbf{I}_3 |P\rangle_{\vec{\lambda}} = h_\lambda^{(3)}(P) |P\rangle_{\vec{\lambda}}, \quad (\text{B.16})$$

で  $h_\lambda^{(3)}$  は運動量  $P$  の線形関数で

$$h_{\lambda_1, \lambda_2}^{(3)}(P) = h_{\lambda_1}^{(3)}(P) + h_{\lambda_2}^{(3)}(-P). \quad (\text{B.17})$$

また,  $h_\lambda^{(3)}(P)$  は次で与えられる.

$$h_\lambda^{(3)}(P) := i \left( |\lambda| \left( P - \frac{b}{2} \right) + \frac{1}{2b} \sum_k \lambda_k (\lambda_k + 2kb^2) \right). \quad (\text{B.18})$$

(B.17) より  $\mathbf{I}_3$  はレベル 1, 2, 3 で非退化であることがわかる. またレベル 4 で同じ固有値に固有状態を 2 つもつこと, すなわち縮退していることがわかる. レベル 5 でまた非退化になっている. より高いオーダーの IM,  $\mathbf{I}_k$  で縮退が解けることが [33] で予想されている.



## 付録 C

# $N$ 成分相互作用の連立波動方程式が閉じた形で書けることの証明

以下では定理 6.9 の証明を述べる.

**証明.** 次の Poisson 括弧式を計算する.

$$\{X(w), E_r(z)\} = \sum_{\substack{I \subset \{1, 2, \dots, N\} \\ |I|=r}} \left\{ X(w), \prod_{k=1}^r X_{i_k}(q^{k-r}z) \right\}. \quad (\text{C.1})$$

$\prod_{k=1}^r X_{i_k}(q^{k-r}z)$  において, テンソル積の第  $j_l$  成分 ( $i_{l-1} \leq j_l < i_l$ ,  $l = 1, \dots, r$ ) は  $\prod_{k=1}^{r-l+1} \phi^+(q^{k+l-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j_l-r}z)$ .

$\prod_{k=1}^r X_{i_k}(q^{k-r}z)$  において, テンソル積の第  $i_l$  成分 ( $l = 1, \dots, r$ ) は  $\prod_{k=1}^{r-l} \phi^+(q^{k+l+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i_l-r}z)\eta(q^{\frac{1}{2}+l-\frac{1}{2}i_l-r}z)$ . テンソル積のちょうど  $i_l$  成分に  $\eta$  も加わることに注意する. よって

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^r X_{i_k}(q^{k-r}z) \\ &= q^{u_{i_1} + \dots + u_{i_r}} \\ & \bigotimes_{l=1}^r \left\{ \bigotimes_{j_l=i_{l-1}+1}^{i_l-1} \left( \prod_{k=1}^{r-l+1} \phi^+(q^{k+l-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j_l-r}z) \right) \otimes \left( \prod_{k=1}^{r-l} \phi^+(q^{k+l+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i_l-r}z)\eta(q^{\frac{1}{2}+l-\frac{1}{2}i_l-r}z) \right) \right\} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

よって,

$$\begin{aligned}
& \{X(w), E_r(z)\} \\
&= \sum_{\substack{I \subset \{1, 2, \dots, N\} \\ |I|=r}} \sum_{i=1}^N q^{u_i} \cdot q^{u_{i_1} + \dots + u_{i_r}} \left\{ \Lambda_i(w), \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \right\} \\
&= \sum_{\substack{I \subset \{1, 2, \dots, N\} \\ |I|=r}} \sum_{i=1}^N q^{u_i} \cdot q^{u_{i_1} + \dots + u_{i_r}} \\
& \left\{ \Lambda_i(w), \bigotimes_{l=1}^r \left\{ \bigotimes_{j_l=i_{l-1}+1}^{i_l-1} \left( \prod_{k=1}^{r-l+1} \phi^+(q^{k+l-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j_l-r}z) \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \otimes \left( \prod_{k=1}^{r-l} \phi^+(q^{k+l+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i_l-r}z) \eta(q^{\frac{1}{2}+l-\frac{1}{2}i_l-r}z) \right) \right\} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \right\}. \quad (\text{C.3})
\end{aligned}$$

$$\Lambda_i(w) := \phi^+(w) \otimes \phi^+(q^{-1/2}w) \otimes \cdots \otimes \phi^+(q^{-\frac{1}{2}((i-1)-1)}w) \otimes \eta(q^{-(i-1)/2}w) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1. \quad (\text{C.4})$$

ここで  $i$  について場合分けが生じることに注意する.

まず  $i = j_l$  ( $i_{l-1} + 1 \leq i = j_l < i_l, l = 1, \dots, r$ ) のとき,  $\Lambda_i(w)$  の一番右の第  $i$  成分について

$$\begin{aligned}
& \left\{ \eta(q^{-(i-1)/2}w), \prod_{k=1}^{r-l+1} \phi^+(q^{k+l-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j_l-r}z) \right\} \\
&= \sum_{n>0} \sum_{k=1}^{r-l+1} (1-q^n)(1-q^{-n})(q^{l-r-1})^n q^{kn} (z/w)^n \left( \eta(q^{-(i-1)/2}w) \prod_{k=1}^{r-l+1} \phi^+(q^{k+l-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j_l-r}z) \right) \\
&= \sum_{n>0} (1-q^n)(1-(q^{l-r-1})^n)(z/w)^n \left( \eta(q^{-(i-1)/2}w) \prod_{k=1}^{r-l+1} \phi^+(q^{k+l-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j_l-r}z) \right). \quad (\text{C.5})
\end{aligned}$$

$\Lambda_i(w)$  の第  $j$  成分 ( $j = 1, \dots, i-1$ ) について  $j = i_k, (k = 1, \dots, l-1)$  のとき Poisson 括弧の右側の  $\eta$  に作用する.

$$\begin{aligned}
& \left\{ \phi^+(q^{-\frac{1}{2}(i_k-1)}w), \eta(q^{\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}i_k-r}z) \right\} \\
&= - \sum_{n>0} (1-q^n)(1-q^{-n}) \left( \frac{q^{-\frac{1}{2}(i_k-1)}}{q^{\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}i_k-r}z} \right)^n \phi^+(q^{-\frac{1}{2}(i_k-1)}w) \eta(q^{\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}i_k-r}z). \quad (\text{C.6})
\end{aligned}$$



以上より,  $i = j_l$  ( $i_{l-1} + 1 \leq i = j_l < i_l, l = 1, \dots, r+1$ ) のとき

$$\begin{aligned}
& \left\{ \Lambda_i(w), \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \right\} \\
&= \left( \sum_{n>0} (1-q^n)(1-(q^{l-r-1})^n)(z/w)^n - \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{n>0} (1-q^n)(1-q^{-n}) \left( \frac{q^{-\frac{1}{2}(i_k-1)}}{q^{\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}i_k-r}z} \right)^n \right) \\
& \hspace{20em} \Lambda_i(w) \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \\
&= \left( \sum_{n>0} (1-q^n)(1-(q^{l-r-1})^n)(z/w)^n + \sum_{n>0} (1-q^{-n})(q^{rn} - q^{(r-l+1)n})(w/z)^n \right) \\
& \hspace{20em} \Lambda_i(w) \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \\
&= \left( \sum_{n>0} (1-q^n)(z/w)^n - \sum_{n>0} q^{(r-1)n} (1-q^n)(w/z)^n + \delta(q^{l-r}z/w) - \delta(q^{l-r-1}z/w) \right) \\
& \hspace{20em} \Lambda_i(w) \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z). \tag{C.7}
\end{aligned}$$

次に  $i = i_l$ , ( $l = 1, \dots, r$ ) のとき

$$\begin{aligned}
& \left\{ \eta(q^{-\frac{1}{2}(i_l-1)}), \prod_{k=1}^{r-l} \phi^+(q^{k+l+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i_l-r}z) \eta(q^{\frac{1}{2}+l-\frac{1}{2}i_l-r}z) \right\} \\
&= \sum_{n>0} (1-q^n)(z/w)^n - \sum_{n>0} (1-q^n)(q^{r-l})^n (w/z)^n. \tag{C.8}
\end{aligned}$$

$\Lambda_i(w)$  の第  $j$  成分 ( $j = 1, \dots, i-1$ ) について  $j = i_k$ , ( $k = 1, \dots, l-1$ ) のとき Poisson 括弧の右側の  $\eta$  に作用することも同様なので,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \Lambda_{i_l}(w), \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \right\} \\
&= \left( \sum_{n>0} (1-q^n)(z/w)^n - \sum_{n>0} (1-q^n)(q^{r-l})^n (w/z)^n - \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{n>0} (1-q^n)(1-q^{-n}) \left( \frac{q^{-\frac{1}{2}(i_k-1)}}{q^{\frac{1}{2}+k-\frac{1}{2}i_k-r}z} \right)^n \right) \\
& \hspace{20em} \Lambda_{i_l}(w) \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \\
&= \left( \sum_{n>0} (1-q^n)(z/w)^n - \sum_{n>0} q^{(r-1)n} (1-q^n)(w/z)^n \right) \Lambda_{i_l}(w) \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z). \tag{C.9}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
& \{X(w), E_r(z)\} \\
&= \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,N\} \\ |I|=r}} \sum_{i=1}^N q^{u_i} \cdot q^{u_{i_1} + \dots + u_{i_r}} \left\{ \Lambda_i(w), \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \right\} \\
&= \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,N\} \\ |I|=r}} \left( \sum_{l=1}^{r+1} \sum_{i=i_{l-1}+1}^{i_l-1} q^{u_i} \cdot q^{u_{i_1} + \dots + u_{i_r}} \left\{ \Lambda_i(w), \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \right\} \right. \\
&+ \left. \sum_{l=1}^r q^{u_{i_l}} \cdot q^{u_{i_1} + \dots + u_{i_r}} \left\{ \Lambda_{i_l}(w), \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \right\} \right) \\
&= \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,N\} \\ |I|=r}} \sum_{l=1}^{r+1} \sum_{i=i_{l-1}+1}^{i_l-1} q^{u_i} \cdot q^{u_{i_1} + \dots + u_{i_r}} \\
&\left( \sum_{n>0} (1-q^n)(z/w)^n - \sum_{n>0} q^{(r-1)n} (1-q^n)(w/z)^n + \delta(q^{l-r}z/w) - \delta(q^{l-r-1}z/w) \right) \\
&\hspace{15em} \Lambda_i(w) \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \\
&+ \sum_{l=1}^r q^{u_{i_l}} \cdot q^{u_{i_1} + \dots + u_{i_r}} \left( \sum_{n>0} (1-q^n)(z/w)^n - \sum_{n>0} q^{(r-1)n} (1-q^n)(w/z)^n \right) \Lambda_{i_l}(w) \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \\
&= \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,N\} \\ |I|=r}} \sum_{i=1}^N q^{u_i} \cdot q^{u_{i_1} + \dots + u_{i_r}} \left( \sum_{n>0} (1-q^n)(z/w)^n - \sum_{n>0} q^{(r-1)n} (1-q^n)(w/z)^n \right) \\
&\hspace{15em} \Lambda_i(w) \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \\
&+ \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,N\} \\ |I|=r}} \sum_{l=1}^{r+1} \sum_{i=i_{l-1}+1}^{i_l-1} q^{u_i} \cdot q^{u_{i_1} + \dots + u_{i_r}} \left( \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_{l-1}}(q^{l-r-1}z) \Lambda_i(q^{l-r}z) \Lambda_{i_l}(q^{l-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \right. \\
&- \left. \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_{l-1}}(q^{l-r-1}z) \Lambda_i(q^{l-r-1}z) \Lambda_{i_l}(q^{l-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \right) \\
&= \left( \sum_{n>0} (1-q^n)(z/w)^n - \sum_{n>0} q^{(r-1)n} (1-q^n)(w/z)^n \right) E_1(w) E_r(z) \\
&+ \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,N\} \\ |I|=r+1}} q^{u_{i_1} + \dots + u_{i_{r+1}}} \left( \Lambda_{i_1}(q^{1-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(z) \Lambda_{i_{r+1}}(qz) - \Lambda_{i_1}(q^{-r}z) \cdots \Lambda_{i_r}(q^{-1}z) \Lambda_{i_{r+1}}(z) \right) \\
&= \left( \sum_{n>0} (1-q^n)(z/w)^n - \sum_{n>0} q^{(r-1)n} (1-q^n)(w/z)^n \right) E_1(w) E_r(z) + E_{r+1}(qz) - E_{r+1}(z).
\end{aligned} \tag{C.10}$$

ここで両辺の  $w$  の 0 モードを取ると求める方程式が得られる。  $\square$

## 付録 D

# 丁-庵原-三木代数の $N$ 階テンソルの古典極限での $\partial_t$ と $\partial_{\bar{t}}$ が可換性の証明

以下では定理 6.29 の証明を述べる.

**証明.**

$$\{X(w), \bar{X}(z)\} = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N q^{u_k - u_{N-i+1}} \{\Lambda_k(w), \Lambda_i^*(z)\}. \quad (\text{D.1})$$

この  $w, z$  の 0 モードをとることを考える. 以下  $\{\Lambda_k(w), \Lambda_i^*(z)\}$  を場合分けして計算していく. ここで

$$\begin{aligned} \Lambda_k(w) &:= \phi^+(w) \otimes \phi^+(q^{-1/2}z) \otimes \cdots \otimes \phi^+(q^{-\frac{1}{2}((k-1)-1)}w) \otimes \eta(q^{-(k-1)/2}w) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1, \\ \Lambda_i^*(z) &:= 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \xi(q^{-(i-1)/2}z) \otimes \phi^-(q^{-(i-1)/2}z) \otimes \cdots \otimes \phi^-(q^{-1/2}z). \end{aligned}$$

$i + k \leq N$  のときは  $\phi^+, \eta, \xi, \phi^-$  は必ず 1 と Poisson 括弧を取ることになる. よって  $\{\Lambda_k(w), \Lambda_i^*(z)\} = 0$  である.

$i + k \geq N + 2$  のとき,  $i + k = N + j \geq N + 2$  ( $j \geq 2$ ) とおく. このとき,

$$\Lambda_i^*(z) = \Lambda_{N+j-k}^*(z) = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \xi(q^{-(N+j-k-1)/2}z) \otimes \phi^-(q^{-(N+j-k-1)/2}z) \otimes \cdots \otimes \phi^-(q^{-1/2}z).$$

ここで Poisson 括弧の計算について, テンソル積の  $k - j + 1$  成分においては

$$\{\phi^+(q^{-(k-j)/2}w), \xi(q^{-(N+j-k-1)/2}z)\},$$

テンソル積の  $l$  成分 ( $k - j + 2 \leq l \leq k - 1$ ) においては

$$\{\phi^+(q^{-(l-1)/2}w), \phi^-(q^{-(N-l+1)/2}z)\},$$

テンソル積の  $k$  成分においては

$$\{\eta(q^{-(k-1)/2}w), \phi^-(q^{-(N-k+1)/2}z)\},$$

をとることになるので,

$$\begin{aligned}
& \left\{ \Lambda_k(w), \Lambda_i^*(z) \right\} = \left\{ \Lambda_k(w), \Lambda_{N+j-k}^*(z) \right\} \\
& = \left[ \sum_{n>0} (1-q^n)(1-q^{-n}) \left( (q^{j-k-1+\frac{N}{2}})^n - (q^{1-k+\frac{N}{2}})^n \right) (w/z)^n \right. \\
& \quad \left. - \sum_{l=k-j+2}^{k-1} \left( \sum_{n>0} (1-q^n)(1-q^{-n})^2 (q^{\frac{N+2}{2}})^n q^{-nl} (w/z)^n \right) \right] \Lambda_k(w) \Lambda_{N+j-k}^*(z) = 0. \quad (\text{D.2})
\end{aligned}$$

したがって,  $i+k=N+1$  の項だけ残るので

$$\left\{ X(w), \bar{X}(z) \right\} = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N q^{u_k - u_{N-i+1}} \left\{ \Lambda_k(w), \Lambda_i^*(z) \right\} = \sum_{k=1}^N \left\{ \Lambda_k(w), \Lambda_{N+1-k}^*(z) \right\}, \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_k(w) & := \phi^+(w) \otimes \phi^+(q^{-1/2}z) \otimes \cdots \otimes \phi^+(q^{-\frac{1}{2}((k-1)-1)}w) \otimes \eta(q^{-(k-1)/2}w) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1, \\
\Lambda_{N+1-k}^*(z) & = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \xi(q^{-(N-k)/2}z) \otimes \phi^-(q^{-(N-k)/2}z) \otimes \cdots \otimes \phi^-(q^{-1/2}z).
\end{aligned}$$

ここで  $\left\{ \Lambda_k(w), \Lambda_{N+1-k}^*(z) \right\}$  においてテンソル積の  $k$  成分だけ計算することになり

$$\left\{ \eta(q^{-(k-1)/2}w), \xi(q^{-(N-k)/2}z) \right\} = \delta(q^{k-\frac{N}{2}}z/w) \phi^+(q^{\frac{k-N+1}{2}}z) - \delta(q^{k-\frac{N}{2}-1}z/w) \phi^-(q^{\frac{k-N-1}{2}}z) \quad (\text{D.4})$$

となる. よって各項の Poisson 括弧について

$$\begin{aligned}
& \left\{ \Lambda_k(w), \Lambda_{N+1-k}^*(z) \right\} \\
& = \phi^+(w) \otimes \cdots \otimes \phi^+(q^{-\frac{1}{2}((k-1)-1)}w) \otimes \\
& \quad \left( \delta(q^{k-\frac{N}{2}}z/w) \phi^+(q^{\frac{k-N+1}{2}}z) - \delta(q^{k-\frac{N}{2}-1}z/w) \phi^-(q^{\frac{k-N-1}{2}}z) \right) \otimes \phi^-(q^{-(N-k)/2}z) \otimes \cdots \otimes \phi^-(q^{-1/2}z) \\
& = \delta(q^{k-\frac{N}{2}}z/w) \bigotimes_{l=1}^k \phi^+(q^{k+\frac{1-N-l}{2}}z) \bigotimes_{l=k+1}^N \phi^-(q^{\frac{l-N-1}{2}}z) \\
& \quad - \delta(q^{k-\frac{N}{2}-1}z/w) \bigotimes_{l=1}^{k-1} \phi^+(q^{k-1+\frac{1-N-l}{2}}z) \bigotimes_{l=k}^N \phi^-(q^{\frac{l-N-1}{2}}z). \quad (\text{D.5})
\end{aligned}$$

したがって, 各項において  $w$  の 0 モードをとると

$$\begin{aligned}
& \left\{ \Lambda_{k,0}, \Lambda_{N+1-k}^*(z) \right\} \\
& = \bigotimes_{l=1}^k \phi^+(q^{k+\frac{1-N-l}{2}}z) \bigotimes_{l=k+1}^N \phi^-(q^{\frac{l-N-1}{2}}z) - \bigotimes_{l=1}^{k-1} \phi^+(q^{k-1+\frac{1-N-l}{2}}z) \bigotimes_{l=k}^N \phi^-(q^{\frac{l-N-1}{2}}z). \quad (\text{D.6})
\end{aligned}$$

したがって和全体において  $w$  の 0 モードをとって

$$\begin{aligned}
\{X_0, \bar{X}(z)\} &= \sum_{k=1}^N \{\Lambda_{k,0}, \Lambda_{N+1-k}^*(z)\} \\
&= \sum_{k=1}^N \left( \bigotimes_{l=1}^k \phi^+(q^{k+\frac{1-N-l}{2}} z) \bigotimes_{l=k+1}^N \phi^-(q^{\frac{l-N-1}{2}} z) - \bigotimes_{l=1}^{k-1} \phi^+(q^{k-1+\frac{1-N-l}{2}} z) \bigotimes_{l=k}^N \phi^-(q^{\frac{l-N-1}{2}} z) \right) \\
&= \bigotimes_{l=1}^N \phi^+(q^{k+\frac{1-N-l}{2}} z) - \bigotimes_{l=1}^N \phi^-(q^{\frac{l-N-1}{2}} z). \tag{D.7}
\end{aligned}$$

よって両辺の  $z$  の 0 モードをとって

$$\{X_0, \bar{X}_0\} = 0. \tag{D.8}$$

ここで時間微分は

$$\begin{aligned}
\partial_t * &:= \{X_0, *\}, \\
\partial_{\bar{t}} * &:= -\{\bar{X}_0, *\}.
\end{aligned}$$

よって Jacobi 恒等式を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{t}} \partial_t * - \partial_t \partial_{\bar{t}} * &= -\{\bar{X}_0, \{X_0, *\}\} + \{X_0, \{\bar{X}_0, *\}\} \\
&= -\left( \{\bar{X}_0, \{X_0, *\}\} + \{X_0, \{*, \bar{X}_0\}\} \right) \\
&= -\left( \{*, \{\bar{X}_0, X_0\}\} \right) = 0. \tag{D.9}
\end{aligned}$$

□



## 付録 E

# $\Phi^\pm(z)$ が 2 次元戸田場方程式を満たす ことの証明

以下では命題 6.35 の証明を述べる.

**証明.**  $\{\bar{X}(w_2), \Phi^+(z)\}$  を計算するためにまず  $\{q^{-u_i} \Lambda_{N-i+1}^*(w_2), \Phi^+(z)\}$  を計算する.

$$\begin{aligned}
& \{q^{-u_i} \Lambda_{N-i+1}^*(w_2), \Phi^+(z)\} \\
&= q^{-u_i} \left( - \sum_{n>0} (1-q^n) \left( \frac{q^{\frac{N}{2}-i} z}{w_2} \right)^n + \sum_{n>0} \sum_{l=i+1}^N (1-q^n)(1-q^{-n}) \left( \frac{q^{\frac{N}{2}-l+1} z}{w_2} \right)^n \right) \Lambda_{N-i+1}^*(w_2) \\
&= q^{-u_i} \left( \sum_{n>0} \left( \left( \frac{q^{\frac{N}{2}-i+1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2}-i} z}{w_2} \right)^n \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n>0} \sum_{l=i+1}^N \left( 2 \left( \frac{q^{\frac{N}{2}-l+1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2}-l+2} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2}-l} z}{w_2} \right)^n \right) \right) \Lambda_{N-i+1}^*(w_2).
\end{aligned} \tag{E.1}$$

よって

$$\begin{aligned}
\{\bar{X}(w_2), \Phi^+(z)\} &= \sum_{i=1}^N q^{-u_i} \left[ \sum_{n>0} \left( \left( \frac{q^{\frac{N}{2}-i+1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2}-i} z}{w_2} \right)^n \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n>0} \sum_{l=i+1}^N \left( 2 \left( \frac{q^{\frac{N}{2}-l+1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2}-l+2} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2}-l} z}{w_2} \right)^n \right) \right] \Lambda_{N-i+1}^*(w_2).
\end{aligned} \tag{E.2}$$

したがって (D.5) で導出した公式を用いると

$$\begin{aligned} \left\{ X(w_1), \left\{ \bar{X}(w_2), \Phi^+(z) \right\} \right\} &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N q^{u_j - u_i} \left[ \sum_{n>0} \left( \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - i + 1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - i} z}{w_2} \right)^n \right) \right. \\ &+ \left. \sum_{n>0} \sum_{l=i+1}^N \left( 2 \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l + 1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l + 2} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l} z}{w_2} \right)^n \right) \right] \left\{ \Lambda_j(w_1), \Lambda_{N-i+1}^*(w_2) \right\} \quad (\text{E.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{n>0} \left( \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - i + 1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - i} z}{w_2} \right)^n \right) + \sum_{n>0} \sum_{l=i+1}^N \left( 2 \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l + 1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l + 2} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l} z}{w_2} \right)^n \right) \right] \\ &\quad \left\{ \Lambda_i(w_1), \Lambda_{N-i+1}^*(w_2) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{n>0} \left( \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - i + 1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - i} z}{w_2} \right)^n \right) + \sum_{n>0} \sum_{l=i+1}^N \left( 2 \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l + 1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l + 2} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l} z}{w_2} \right)^n \right) \right] \\ &\quad \left[ \delta \left( q^{i - \frac{N}{2}} w_2 / w_1 \right) \bigotimes_{l=1}^i \phi^+ \left( q^{i + \frac{1-N-l}{2}} w_2 \right) \bigotimes_{l=i+1}^N \phi^- \left( q^{\frac{l-N-1}{2}} w_2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \delta \left( q^{i - \frac{N}{2} - 1} w_2 / w_1 \right) \bigotimes_{l=1}^{i-1} \phi^+ \left( q^{i-1 + \frac{1-N-l}{2}} w_2 \right) \bigotimes_{l=i}^N \phi^- \left( q^{\frac{l-N-1}{2}} w_2 \right) \right]. \quad (\text{E.4}) \end{aligned}$$

ここで各項において  $w_1$  の 0 モードをとると

$$\begin{aligned} &\left\{ X_0, \left\{ \bar{X}(w_2), \Phi^+(z) \right\} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{n>0} \left( \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - i + 1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - i} z}{w_2} \right)^n \right) + \sum_{n>0} \sum_{l=i+1}^N \left( 2 \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l + 1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l + 2} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l} z}{w_2} \right)^n \right) \right] \\ &\quad \left[ \bigotimes_{l=1}^i \phi^+ \left( q^{i + \frac{1-N-l}{2}} w_2 \right) \bigotimes_{l=i+1}^N \phi^- \left( q^{\frac{l-N-1}{2}} w_2 \right) - \bigotimes_{l=1}^{i-1} \phi^+ \left( q^{i-1 + \frac{1-N-l}{2}} w_2 \right) \bigotimes_{l=i}^N \phi^- \left( q^{\frac{l-N-1}{2}} w_2 \right) \right]. \quad (\text{E.5}) \end{aligned}$$

ここで  $\bigotimes_{l=1}^k \phi^+ \left( q^{k + \frac{1-N-l}{2}} w_2 \right) \bigotimes_{l=k+1}^N \phi^- \left( q^{\frac{l-N-1}{2}} w_2 \right)$ ,  $(1 \leq k \leq N-1)$  の係数が 0 になることが各項を整理することでわかるので

$$\begin{aligned} &\left\{ X_0, \left\{ \bar{X}(w_2), \Phi^+(z) \right\} \right\} \\ &= - \left[ \sum_{n>0} \left( \left( \frac{q^{\frac{N}{2}} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - 1} z}{w_2} \right)^n \right) \right. \\ &\quad + \sum_{n>0} \sum_{l=2}^N \left( 2 \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l + 1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l + 2} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{\frac{N}{2} - l} z}{w_2} \right)^n \right) \bigotimes_{l=1}^N \phi^- \left( q^{\frac{l-N-1}{2}} w_2 \right) \\ &\quad \left. + \left[ \sum_{n>0} \left( \left( \frac{q^{-\frac{N}{2} + 1} z}{w_2} \right)^n - \left( \frac{q^{-\frac{N}{2}} z}{w_2} \right)^n \right) \right] \bigotimes_{l=1}^N \phi^+ \left( q^{\frac{-l+N+1}{2}} w_2 \right) \right]. \quad (\text{E.6}) \end{aligned}$$

$\bigotimes_{l=1}^N \phi^- \left( q^{\frac{l-N-1}{2}} w_2 \right)$  は  $w_2$  の負モードのみを持っている。よって各項において  $w_2$  の 0 モードをと



ると

$$\begin{aligned}
\left\{ X_0, \left\{ \bar{X}_0, \Phi^+(z) \right\} \right\} &= \bigotimes_{l=1}^N \phi^+(q^{\frac{3-l}{2}} z) - \bigotimes_{l=1}^N \phi^+(q^{\frac{1-l}{2}} z) \\
&= \bigotimes_{l=1}^N \exp\left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \alpha_{-n}^{(l)} (q^{\frac{3-l}{2}} z)^n \right) - \bigotimes_{l=1}^N \exp\left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \alpha_{-n}^{(l)} (q^{\frac{1-l}{2}} z)^n \right) \\
&= \exp\left( \sum_{l=1}^N \sum_{n>0} (q^n - 1) \alpha_{-n}^{(l)} (q^{\frac{1-l}{2}} z)^n \right) - \exp\left( \sum_{l=1}^N \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \alpha_{-n}^{(l)} (q^{\frac{1-l}{2}} z)^n \right) \\
&= e^{\Phi^+(qz) - \Phi^+(z)} - e^{\Phi^+(z) - \Phi^+(z/q)}. \tag{E.7}
\end{aligned}$$

つまり  $\left\{ X_0, \left\{ -\bar{X}_0, \Phi^+(z) \right\} \right\} = e^{\Phi^+(z) - \Phi^+(z/q)} - e^{\Phi^+(qz) - \Phi^+(z)}$  であるので 2次元戸田場方程式を満たすことが示された.  $\Phi^-(z)$  についても同様である.  $\square$



## 付録 F

# $q$ -PILW の多成分版の双線形方程式系が成立することの証明

ここでは命題 7.9 の証明を述べる.

### F.1 $\alpha_k, \bar{\alpha}_k$ の時間発展

まず  $\tau(z; q)$  の時間発展を計算するために  $\alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}}z; pq^{N-k}), \bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z; pq^{N-k})$  について次の公式を導く.

**補題 F.1.**  $k = 1, 2, \dots, N$  について, 以下の公式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ X_0, \alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}}z; pq^{N-k}) \right\} \\
 &= q^{u_k} \left( - \sum_{n>0} \frac{1}{1 - p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_{-n} z^n + \sum_{n>0} \frac{p^n q^{(N-k)n}}{1 - q^n p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_n z^{-n} \right) \alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}}z; pq^{N-k}) \\
 &+ \sum_{l=k+1}^N q^{u_l} \left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_n z^{-n} \right. \\
 &\left. - \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_{-n} z^n \right) \alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}}z; pq^{N-k}), \quad (\text{F.1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ X_0, \bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z; pq^{N-k}) \right\} \\
 &= q^{u_k} \left( - \sum_{n>0} \frac{p^n q^{(N-k)n}}{1 - p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_{-n} (q^{k-N+i-1}z)^n \right. \\
 &+ \sum_{n>0} \frac{1}{1 - q^n p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_n (q^{k-N+i-1}z)^{-n} \left. \right) \bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z; pq^{N-k}) \\
 &+ \sum_{l=k+1}^N q^{u_l} \left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{1}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_n (q^{k-N+i-1}z)^{-n} \right. \\
 &\left. - \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k-1)n} p^n q^{(N-k)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_{-n} (q^{k-N+i}z)^n \right) \bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}}z; pq^{N-k}). \quad (\text{F.2})
 \end{aligned}$$

証明. まず,  $\alpha_k(z; pq^{N-k})$  について,

$$\begin{aligned}
\{X(w), \alpha_k(z; pq^{N-k})\} &= \{q^{u_k} \Lambda_k(w), \alpha_k(z; pq^{N-k})\} + \sum_{l=k+1}^N \{q^{u_l} \Lambda_l(w), \alpha_k(z; pq^{N-k})\} \\
&= q^{u_k} \left( - \sum_{n>0} \left( \frac{q^{\frac{1}{2}(k-1)} z}{w} \right)^n \frac{1}{1 - p^n q^{(N-k)n}} + \sum_{n>0} \left( \frac{w}{q^{\frac{1}{2}(k-1)} z} \right)^n \frac{p^n q^{(N-k)n}}{1 - q^n p^n q^{(N-k)n}} \right) \Lambda_k(w) \alpha_k(z; pq^{N-k}) \\
&\quad + \sum_{l=k+1}^N q^{u_l} \left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} q^{\frac{1}{2}(1-k)n} (w/z)^n \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k-1)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} q^{\frac{1}{2}(1+k)n} (z/w)^n \right) \Lambda_l(w) \alpha_k(z; pq^{N-k}).
\end{aligned} \tag{F.3}$$

したがって, 両辺の  $w$  の 0 モードを取って,

$$\begin{aligned}
\{X_0, \alpha_k(z; pq^{N-k})\} &= q^{u_k} \left( - \sum_{n>0} \frac{1}{1 - p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_{-n} (q^{\frac{1}{2}(k-1)} z)^n + \sum_{n>0} \frac{p^n q^{(N-k)n}}{1 - q^n p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_n (q^{\frac{1}{2}(k-1)} z)^{-n} \right) \alpha_k(z; pq^{N-k}) \\
&\quad + \sum_{l=k+1}^N q^{u_l} \left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} q^{\frac{1}{2}(1-k)n} (\Lambda_l)_n z^{-n} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k-1)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} q^{\frac{1}{2}(1+k)n} (\Lambda_l)_{-n} z^n \right) \alpha_k(z; pq^{N-k}).
\end{aligned} \tag{F.4}$$

ここで  $z$  を  $q^{\frac{1-k}{2}}$  シフトすると示すべき等式が出てくる. 次に  $\bar{\alpha}_k(z; pq^{N-k})$  について

$$\begin{aligned}
\{X(w), \bar{\alpha}_k(z; pq^{N-k})\} &= \{q^{u_k} \Lambda_k(w), \bar{\alpha}_k(z; pq^{N-k})\} + \sum_{l=k+1}^N \{q^{u_l} \Lambda_l(w), \bar{\alpha}_k(z; pq^{N-k})\} \\
&= q^{u_k} \left( - \sum_{n>0} \left( \frac{q^{\frac{1}{2}(k-1)} z}{w} \right)^n \frac{p^n q^{(N-k)n}}{1 - p^n q^{(N-k)n}} + \sum_{n>0} \left( \frac{w}{q^{\frac{1}{2}(k-1)} z} \right)^n \frac{1}{1 - p^n q^{(N-k)n}} \right) \Lambda_k(w) \bar{\alpha}_k(z; pq^{N-k}) \\
&\quad + \sum_{l=k+1}^N q^{u_l} \left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{1}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} q^{\frac{1}{2}(1-k)n} (w/z)^n \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k-1)n} p^n q^{(N-k)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} q^{\frac{1}{2}(1+k)n} (z/w)^n \right) \Lambda_l(w) \bar{\alpha}_k(z; pq^{N-k}).
\end{aligned} \tag{F.5}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
& \left\{ X(w), \bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}} z; pq^{N-k}) \right\} \\
&= q^{u_k} \left( - \sum_{n>0} \left( \frac{q^{k-N+i-1} z}{w} \right)^n \frac{p^n q^{(N-k)n}}{1-p^n q^{(N-k)n}} + \sum_{n>0} \left( \frac{w}{q^{k-N+i-1} z} \right)^n \frac{1}{1-p^n q^{(N-k)n}} \right) \\
& \quad \Lambda_k(w) \bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}} z; pq^{N-k}) \\
&+ \sum_{l=k+1}^N q^{u_k} \left( \sum_{n>0} (1-q^{-n}) \frac{1}{(1-p^n q^{(N-k-1)n})(1-p^n q^{(N-k)n})} \left( \frac{w}{q^{k-N+i-1} z} \right)^n \right. \\
& \quad \left. - \sum_{n>0} (1-q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k-1)n} p^n q^{(N-k)n}}{(1-p^n q^{(N-k-1)n})(1-p^n q^{(N-k)n})} \left( \frac{q^{k-N+i} z}{w} \right)^n \right) \Lambda_l(w) \bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}} z; pq^{N-k}).
\end{aligned}$$

ここで両辺の  $w$  の 0 モードを取ると示すべき等式が出てくる。  $\square$

## F.2 命題の証明

**証明.** 以上の補題と Leibniz 則を用いて  $X_0$  と  $\tau_i(z; p)$  の Poisson 括弧を計算すると

$$\begin{aligned}
\left\{ X_0, \tau_i(z; p) \right\} &= \left\{ X_0, \prod_{k=1}^{N-i} \alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}} z; pq^{N-k}) \prod_{k=N-i+1}^N \bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}} z; pq^{N-k}) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{N-i} \left\{ X_0, \alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}} z; pq^{N-k}) \right\} \prod_{j=1, (j \neq k)}^{N-i} \alpha_j(q^{\frac{1-j}{2}} z; pq^{N-j}) \prod_{k=N-i+1}^N \bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}} z; pq^{N-k}) \\
&+ \sum_{k=N-i+1}^N \left\{ X_0, \bar{\alpha}_k(q^{\frac{k-2N+2i-1}{2}} z; pq^{N-k}) \right\} \prod_{k=1}^{N-i} \alpha_k(q^{\frac{1-k}{2}} z; pq^{N-k}) \prod_{j=N-i+1, (j \neq k)}^N \bar{\alpha}_j(q^{\frac{j-2N+2i-1}{2}} z; pq^{N-j}) \\
&= \sum_{k=1}^{N-i} q^{u_k} \left( - \sum_{n>0} \frac{1}{1-p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_{-n} z^n + \sum_{n>0} \frac{p^n q^{(N-k)n}}{1-q^n p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_n z^{-n} \right) \tau_i(z; p) \\
&+ \sum_{k=1}^{N-i} \sum_{l=k+1}^N q^{u_l} \left( \sum_{n>0} (1-q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k)n}}{(1-p^n q^{(N-k-1)n})(1-p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_n z^{-n} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{n>0} (1-q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k)n}}{(1-p^n q^{(N-k-1)n})(1-p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_{-n} z^n \right) \tau_i(z; p) \\
&+ \sum_{k=N-i+1}^N q^{u_k} \left( - \sum_{n>0} \frac{p^n q^{(N-k)n}}{1-p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_{-n} (q^{k-N+i-1} z)^n \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n>0} \frac{1}{1-q^n p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_n (q^{k-N+i-1} z)^{-n} \right) \tau_i(z; p) \\
&+ \sum_{k=N-i+1}^N \sum_{l=k+1}^N q^{u_l} \left( \sum_{n>0} (1-q^{-n}) \frac{1}{(1-p^n q^{(N-k-1)n})(1-p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_n (q^{k-N+i-1} z)^{-n} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{n>0} (1-q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k-1)n} p^n q^{(N-k)n}}{(1-p^n q^{(N-k-1)n})(1-p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_{-n} (q^{k-N+i} z)^n \right) \tau_i(z; p). \tag{F.6}
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
& \frac{\{X_0, \tau_i(z; p)\}}{\tau_i(z; p)} - \frac{\{X_0, \tau_{i-1}(z; p)\}}{\tau_{i-1}(z; p)} \\
&= \left[ \sum_{k=1}^{N-i} q^{u_k} \left( - \sum_{n>0} \frac{1}{1 - p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_{-n} z^n + \sum_{n>0} \frac{p^n q^{(N-k)n}}{1 - q^n p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_n z^{-n} \right) \right. \\
&+ \sum_{k=1}^{N-i} \sum_{l=k+1}^N q^{u_l} \left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_n z^{-n} \right. \\
&- \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_{-n} z^n \Big) \\
&+ \sum_{k=N-i+1}^N q^{u_k} \left( - \sum_{n>0} \frac{p^n q^{(N-k)n}}{1 - p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_{-n} (q^{k-N+i-1} z)^n \right. \\
&+ \sum_{n>0} \frac{1}{1 - q^n p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_n (q^{k-N+i-1} z)^{-n} \Big) \\
&+ \sum_{k=N-i+1}^N \sum_{l=k+1}^N q^{u_l} \left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{1}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_n (q^{k-N+i-1} z)^{-n} \right. \\
&- \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k-1)n} p^n q^{(N-k)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_{-n} (q^{k-N+i} z)^n \Big) \Big] \\
&- \left[ \sum_{k=1}^{N-i+1} q^{u_k} \left( - \sum_{n>0} \frac{1}{1 - p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_{-n} z^n + \sum_{n>0} \frac{p^n q^{(N-k)n}}{1 - q^n p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_n z^{-n} \right) \right. \\
&+ \sum_{k=1}^{N-i+1} \sum_{l=k+1}^N q^{u_l} \left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_n z^{-n} \right. \\
&- \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_{-n} z^n \Big) \\
&+ \sum_{k=N-i+2}^N q^{u_k} \left( - \sum_{n>0} \frac{p^n q^{(N-k)n}}{1 - p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_{-n} (q^{k-N+i-2} z)^n \right. \\
&+ \sum_{n>0} \frac{1}{1 - q^n p^n q^{(N-k)n}} (\Lambda_k)_n (q^{k-N+i-2} z)^{-n} \Big) \\
&+ \sum_{k=N-i+2}^N \sum_{l=k+1}^N q^{u_l} \left( \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{1}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_n (q^{k-N+i-2} z)^{-n} \right. \\
&- \sum_{n>0} (1 - q^{-n}) \frac{p^n q^{(N-k-1)n} p^n q^{(N-k)n}}{(1 - p^n q^{(N-k-1)n})(1 - p^n q^{(N-k)n})} (\Lambda_l)_{-n} (q^{k-N+i-1} z)^n \Big) \Big] \\
&= q^{u_{N-i+1}} \left( \Lambda_{N-i+1}^+(z) + \Lambda_{N-i+1}^-(z) \right) = q^{u_{N-i+1}} \left( \Lambda_{N-i+1}(z) - \Lambda_{N-i+1,0} \right) \\
&= q^{u_{N-i+1}} \left( \varepsilon_{N-i+1} \frac{\tau_{i-1}(qz; p) \tau_i(q^{-1}z; p)}{\tau_{i-1}(z; p) \tau_i(z; p)} - \Lambda_{N-i+1,0} \right). \tag{F.7}
\end{aligned}$$

□

## 参考文献

- [1] J. Scott-Russel, *Report on Waves*, Proc. Roy. Soc. Edimb. (1844) 311–390.
- [2] D. J. Korteweg and G. de Vries, *XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Phil. Mag. **39** (1895) 422–443.
- [3] T. B. Benjamin, *Internal waves of permanent form in fluids of great depth*, J. Fluid. Mech. **29** (1967) 559–592.
- [4] H. Ono, *Algebraic solitary waves in stratified fluids*, J. Phys. Soc. Japan. **30** (1975) 1082–1091.
- [5] G. B. Whitham, *Variational Methods and Applications to Water Waves*, Proc. R. Soc. Lond. A **299** No.1456 (1967) 6–25.
- [6] O. M. Phillips, *The Dynamics of the Upper Ocean*, Cambridge University Press, (1966).
- [7] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, (1995).
- [8] R. I. Joseph, *Solitary waves in a finite depth fluids*, J. Phys. A: Math. Gen **10** (1977) L225–L227.
- [9] R. I. Joseph and R. Egri, *Multi-soliton solutions in a finite depth fluid*, J. Phys. A: Math. Gen **11** (1978) L97–L102.
- [10] T. Kubota, D. R. S. Ko and L. D. Dobbs, *Weakly-Nonlinear, Long Internal Gravity Waves in Stratified Fluids of Finite Depth*, J. Hydronautics. **12** (1978) 157–165.
- [11] H. H. Chen and Y. C. Lee, *Internal-Wave Solitons of Fluids with finite Depth*, Phys. Rev. Lett **43** (1979) 264–266.
- [12] Y. Matsuno, *Exact multi-soliton solution for nonlinear waves in a stratified fluid of finite depth*, Phys. Lett. A **74** (1979) 233–235.
- [13] J. Satsuma, M. J. Ablowitz and Y. Kodama, *On an internal wave equation describing a stratified fluid with finite depth*, Phys. Lett A **73** 4 (1979) 283–286.
- [14] Y. Kodama, J. Satsuma and M. J. Ablowitz, *Nonlinear Intermediate Long-Wave Equation: Analysis and Method of Solution*, Phys. Rev. Lett **46** (1981) 687–690.
- [15] Y. Kodama, M. J. Ablowitz and J. Satsuma, *Direct and inverse scattering problems of the nonlinear intermediate long wave equation*, J. Math. Phys **23** (1982) 564–576.
- [16] M. J. Ablowitz, A. S. Fokas, J. Satsuma and H. Segur, *On the periodic intermediate long wave equation*, J. Phys. A: Math. Gen **15** (1982) 781–786.

- [17] P. M. Santini, M. J. Ablowitz and A. S. Fokas, *On the limit from the intermediate long wave equation to the Benjamin-Ono equation*, J. Math. Phys **25** (1984) 892–899.
- [18] Y. Tutiya, and J. Satsuma, *The ILW hierarchy*, Phys. Lett. A **313** 45 (2003) 45–54.
- [19] J. Shiraishi and Y. Tutiya, *Periodic ILW equation with discrete Laplacian*, J. Phys. A: Math. Theor **42** (2009) 404018 (15pp).
- [20] Y. Tutiya and J. Shiraishi, *On some special solutions to the periodic Benjamin-Ono equation with discrete Laplacian*, Math and Computers in Simulation **82** (2012) 1341–1347.
- [21] J. Shiraishi and Y. Tutiya, *Periodic Benjamin-Ono equation with discrete Laplacian and 2D-Toda Hierarchy*, New Trends in Quantum Integrable Systems (2010) 357–371.
- [22] Y. Tutiya, *On genus-two solutions for the ILW equation*, J. Math. Phys **59** (2018) 023511.
- [23] J. Ding and K. Iohara, *Generalization of Drinfeld Quantum Affine Algebras*, Lett. Math. Phys **41** (1997) 183–193.
- [24] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi and S. Yanagida, *A commutative algebra on degenerate  $\mathbb{CP}^1$  and Macdonald polynomials*, J. Math. Phys **50**(9) (2009) 095215.
- [25] K. Miki, *A  $(q, \gamma)$  analog of the  $W_{1+\infty}$  algebra*, J. Math. Phys **48**(12) (2007) 123520.
- [26] B. Feigin and A. Tsybaliuk, *Heisenberg action in the equivariant K-theory of Hilbert schemes via Shuffle Algebra*, Kyoto J. Math. **51**(4) (2011) 831–854.
- [27] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, *Quantum cotinuous  $\mathfrak{gl}_\infty$ :Semiinfinite construction of representations*, Kyoto J. Math. **51**(2) (2011) 337–364.
- [28] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, *Quantum cotinuous  $\mathfrak{gl}_\infty$ :Tensor products of Fock modules and  $W_n$  characters*, Kyoto J. Math. **51**(2) (2011) 365–392.
- [29] O. Schiffmann, *Drinfeld realization of the elliptic Hall algebra*, J. Algebraic Combin. **35**(2) (2012) 237–262.
- [30] O. Schiffmann and E. Vasserot. *The elliptic Hall algebra and the equivariant K-theory of the Hilbert scheme of  $\mathbb{A}^2$* , Compos. Math. **147**(1) (2011) 188–234.
- [31] H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake and J. Shiraishi, *Collective field theory, Calogero-Sutherland model and generalized matrix model*, Phys. Lett. B **347** (1995) 49–55.
- [32] J. Shiraishi, *A Family of Integral Transformations and Basic Hypergeometric Series*, Comm. Math. Phys **263** (2006) 439–460.
- [33] A. V. Alba, V. A. Fateev, A. V. Litvinov and G. M. Tarnopolsky, *On combinatorial expansion of the conformal blocks arising from AGT conjecture*, Lett. Math. Phys **98** (2011) 33–64.
- [34] V. A. Fateev and A. V. Litvinov, *Integrable structure, W-symmetry and AGT relation*, JHEP **01** (2012) 051.
- [35] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov, *integrable structure of conformal field theory, quantum KdV theory and thermodynamic Bethe ansatz*, Comm. Math. Phys **177** (1996) 381–398.
- [36] D. Lebedev and A. Radul, *Generalized internal long waves equations: construction, Hamiltonian structure, and conservation laws*, Comm. Math. Phys **91** (1983) 543–555.



- [37] A. Degasperis, D. Lebedev, M. Olshanetsky, S. Pakuliak, A. Perelomov and P. M. Santini, *Nonlocal integrable partners to generalaized MKdV and two-dimensional Todalattice equation in the formalism of a dressing method with quantized spectral parameter*, Comm. Math. Phys **141** (1991) 133–151.
- [38] A. Degasperis, D. Lebedev, M. Olshanetsky, S. Pakuliak, A. Perelomov and P. M. Santini, *Generalized internal long waves hierarchy in zero-curvature representation with noncommutative spectral parameter*, J. Math. Phys **33** (1992) 3783–3793.
- [39] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *A scheme for integrating the non-linear equation of mathematical physics by the inverse scattering method*, I. Funct. Anal **8:3** (1974) 45–53.
- [40] 駒井健太郎, Ding-Iohara 代数の古典極限と 2D 戸田方程式, 東大数理平成 22 年度修士論文 (2012)
- [41] A. G. Abanov, E. Bettelheim and P. Wiegmann, *Integrable hydrodynamics of Calogero-Sutherland model: bidirectional Benjamin-Ono equation*, J. Phys. A: Math. Theor **42** (2009) 135201 (24pp).
- [42] A. V. Litvinov, *On spectrum of ILW hierarchy in conformal field theory*, JHEP **11** (2013) 155.