論文の内容の要旨

論文題目　丁-庵原-三木代数に付随する可積分波動方程式

(Integrable wave equations associated with Ding-Iohara-Miki algebra)

氏名　　　渡邉 聡

本論文では丁-庵原-三木代数という量子群の表現を用いて, 特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式の多成分への拡張及び差分化を統一的に扱った.
まず特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式で単独方程式のものは Intermediate long wave(ILW) 方程式がある. (以下 ILW 方程式と呼ぶ) ILW 方程式は 1977, 1978 年頃に Joseph, Egri, Kubota, Ko, Dobbs によって導入された. この ILW 方程式は特異積分作用素を含む非線形偏微分・積分方程式であり

$$u_t + (1/\delta)u_x + 2uu_x + T[u]_{xx} = 0, \tag{1}$$

$$T[f](x) := \frac{1}{2\delta}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \coth\frac{\pi(y-x)}{2\delta} f(y)dy, \tag{2}$$

で定義される. δ は流体の深さを表す媒介変数であり, $\delta \to 0$ の浅水波の極限において Korteweg-de Vries(KdV) 方程式, また $\delta \to \infty$ の深水波の極限において Benjamin-Ono(BO) 方程式に移行する.
丁-庵原-三木代数の表現の古典極限を取ることによって離散 Laplacian 付き Periodic Benjamin-Ono(q-PBO) 方程式という BO 方程式の q 差分類似であるような, 特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式を導くことができること, また同様に丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist(楕円変形) の古典極限を取ることによって離散 Laplacian 付き Periodic Intermediate long wave(q-PILW) 方程式という ILW 方程式の q 差分類似であるような, 特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式を導くことができるということが 2009, 2010 年頃に白石, 土谷によって明らかにされた.
次に特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式の 2 成分化について, ILW 方程式の 2 成分化である $\mathfrak{gl}(2)$ generalized Intermediate long wave 方程式は 1983 年に Lebedev, Radul によって導入された. これは Zhakharov, Shabat の dressing method を Intermediate long wave(ILW) 方程式に

用いることで構成されたもので次の形をしている．

$$\begin{cases} u_t + vu_x + 2uv_x + \frac{1}{2}v_{xxx} = 0, \\ v_t + \frac{1}{2}u_x + Tv_{xx} + vv_x = 0. \end{cases} \tag{3}$$

(ここで特異積分の項を Benjamin-Ono の特異積分に変えたものが $\mathfrak{gl}(2)$ generalized Benjamin-Ono 方程式である) この研究で方程式系 (3) において Poisson 可換な無限個の保存量が存在することも示され, この方程式系を含む可積分系の階層が存在することも示された．またこの 2 成分系のうちの $\mathfrak{gl}(2)$ generalized Benjamin-Ono 方程式は Virasoro 代数と Heisenberg 代数をテンソル積した代数 $\mathcal{A} = \mathrm{Vir} \otimes \mathcal{H}$ の古典極限を取ることによって得られることが 2011 年に Alba, Fateev, Litvinov, Tarnopolskiy によって示された．一方で特異積分項を持つ可積分非線形波動方程式の 3 成分以上への拡張は今まで知られていなかった．
本論文では丁-庵原-三木代数という量子群の N 階テンソル表現の古典極限を用いることによって, 古典極限においてハミルトン系を構成し, その系のハミルトニアンによる時間微分を考えることで, 次のような離散 Laplacian 付き Periodic Benjamin-Ono(q-PBO) 方程式の N 成分化を得た．

$$\begin{aligned} \partial_t E_r(z) = &\Big(E_1^+(z) - E_1^+(qz) - E_1^-(q^{1-r}z) + E_1^-(q^{-r}z)\Big)E_r(z) \\ &+ E_{r+1}(qz) - E_{r+1}(z), \quad (r = 1, \cdots, N), \end{aligned} \tag{4}$$

(ただし $E_{N+1}(z) = 0$) この結果によって q 差分化も統一的に扱うことによって, Benjamin-Ono 方程式を一般の N 成分系に拡張できた．また $N = 2$ のときにこの方程式系が (3) の q 差分化になっていることを証明した．また N 階テンソル表現において $N+1$ 個の τ 関数, $\widetilde{\tau}_0(z), \widetilde{\tau}_1(z), \cdots, \widetilde{\tau}_N(z)$ に関する次の閉じた連立の広田双線形方程式が成り立つことがわかった．

$$\big(\partial_t \widetilde{\tau}_i(z)\big)\widetilde{\tau}_{i-1}(z) - \widetilde{\tau}_i(z)\big(\partial_t \widetilde{\tau}_{i-1}(z)\big) = \varepsilon_{N-i+1}\widetilde{\tau}_{i-1}(qz)\widetilde{\tau}_i(q^{-1}z), \quad (i = 1, \cdots, N). \tag{5}$$

また $E_1(z), E_2(z), \cdots, E_N(z)$ と τ 関数, $\widetilde{\tau}_0(z), \widetilde{\tau}_1(z), \cdots, \widetilde{\tau}_N(z)$ が従属変数の変換で移り合うことを示した．これによって連立の広田双線形方程式の解を用いて (4) の解が記述できることがわかった．また N 階テンソル表現においてある元 $\Phi^{\pm}(z)$ が存在して次の 2 次元戸田場方程式を満たすことを示した．

$$\partial_t \partial_{\bar{t}} \Phi^{\pm}(z) = e^{\Phi^{\pm}(z) - \Phi^{\pm}(z/q)} - e^{\Phi^{\pm}(qz) - \Phi^{\pm}(z)}. \tag{6}$$

また $\Phi^{\pm}(z)$ と $\tau_0(z), \tau_N(z)$(これは $\widetilde{\tau}_0(z), \widetilde{\tau}_N(z)$ をゲージ変換したものである) が従属変数変換によって移り合うことを示した．2 次元戸田場方程式においては先行研究で特殊解が得られているので $\tau_0(z), \tau_N(z)$ の解を求めることができた．よって新しく構成した N 成分版 q-PBO 方程式の特殊解を構成するための足がかりを得た．
次に丁-庵原-三木代数の quasi-Hopf twist(楕円変形) の N 階テンソル表現の古典極限を用いることによって, 古典極限においてハミルトン系を構成し, その系のハミルトニアンによる時間微分を定義した．そして N 階テンソル表現において $N+1$ 個の τ 関数 $\tau_0(z;p), \tau_1(z;p), \cdots, \tau_N(z;p)$ に関して次の連立の広田の双線形方程式系

$$\begin{aligned} &\big(\partial_t \tau_i(z;p)\big)\tau_{i-1}(z;p) - \tau_i(z;p)\big(\partial_t \tau_{i-1}(z;p)\big) \\ &= \varepsilon_{N-i+1} q^{u_{N-i+1}} \tau_{i-1}(qz;p)\tau_i(q^{-1}z;p) - q^{u_{N-i+1}}\Lambda_{N-i+1,0}\tau_{i-1}(z;p)\tau_i(z;p), \quad (i = 1, \cdots, N), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\tau_0(pq^{N-1}z;p) = \tau_N(z;p), \tag{8}$$

が成り立つことを示した．これは q-PILW 方程式の双線形方程式の多成分拡張になっている．