別紙2

審査の結果の要旨

論文提出者氏名　　渡邉　聡

本論文の主題は，丁ー庵原ー三木代数と呼ばれる量子群の表現論を用い，特異積分項を持つ可積分な非線形波動方程式を系統的に一般化することにある．非線形波動方程式で可積分な最初の例は 浅水波に関する Korteweg-de Vries (KdV) 方程式 (1895) にさかのぼる．1960 年代に計算機により多体散乱で安定な粒子 (ソリトン) のように振る舞う解 (ソリトン解) が発見されたのを契機に，逆散乱法，双線形形式による直接法，代数幾何学的手法，佐藤理論，頂点作用素による変換群の理論等が登場し，ソリトン方程式と総称される一群の方程式系へと拡張され，1980 年代までに無限次元古典可積分系としての豊かな構造が認識されるに至った．これと並行して 80 年代から発展したもう一つの潮流が２次元共形場理論であり，連続時空上の量子可積分系である．Bazhanov-Lukyanov-Zamolodchikov (1996) はこれら二つを結びつけ，共形場理論を古典的な KdV 理論の量子化として捉える枠組みを提唱した．無限次元対称性を司る代数の言葉で要約するならば，KdV の Poisson 構造を Virasoro 代数の古典極限に，前者の保存量を後者の包絡環の可換部分代数に帰する事に相当する．

本論文は，このような意味での量子・古典対応を丁ー庵原ー三木代数 (DIM 代数，以下 DIM と略) に適用し，新しい可積分波動方程式を提出している．その最大の特徴は，特異積分項を含むことであり，従来のソリトン理論の主潮流からは外れていた範疇の方程式に新しい知見を与えている．一般に流体の波動における分散効果は弱い非線形性の仮定のもとに位相速度のフーリエ成分を核とする空間微分の畳み込み積分として表される (Whitham 1967)．二層流体の境界面においてそれは特異積分 (Hilbert 変換の一種) として立ち現れる．その代表的な例が Intermediate long wave(ILW) 方程式 (1977) であり，その深水波極限は Benjamin-Ono (BO) 方程式 (1967) として知られる．KdV 方程式は ILW 方程式の浅水波極限に相当する．DIM はその自由場表示の 2 階テンソル積の適当なパラメーターの極限として Virasoro 代数を含む事から様々な非線形波動方程式を系統的に生成する装置として機能する．その様にして ILW，BO 方程式を新たに拡張した周期系版，q-差分化，多成分版等の方程式が本論文の主結果である．以下，各章ごとにその内容を概説する．

第 1 章は導入として，背景となる先行研究を紹介し，本論文の主結果を提示し，論文の構成を述べている．特に章末に，関連する多くの波動方程式が本論文の代数的な枠組みにより如何に統一的に理解できるかを示す相関図が与えられており，本研究の位置づけが把握出来るように配慮されている．

第 2 章では特異積分を持つ可積分非線形波動方程式で 1 成分系の場合に知られている結果を解説している．KdV 方程式と BO 方程式をそれぞれ浅水波極限，深水波極限として含む ILW 方程式を基点とし，特異積分の積分核を双曲線関数 coth から Weierstrass ゼータ関数に適宜置き換える事により，空間的な周期性を取り入れた Periodic ILW (PILW) 方程式，更に空間微分を q-差分に拡張した q-PILW 方程式が得られる様子を見通し良く記述している．q-PILW 方程式は 1 成分系の場合の最も一般的な状況に相当し，その深水波極限は q-差分 Periodic Benjamin-Ono (q-PBO) 方程式と呼ばれる．PILW の浅水波極限及び深水波極限は周期的な KdV 方程式，BO 方程式に自然に移行する．

第 3 章ではまず多成分系の最初の例として gl(2) BO 方程式 (Lebedev-Radul, 1983) を紹介し，それを Virasoro 代数と Heisenberg 代数のテンソル積の古典極限と同定した Alba-Fateev-Litvinov-Tarnopolsky の結果 (2010) を解説している．これを踏まえ，3.3 節で本論文の主結果を提示している．それは以下の (i)–(v) であり，第 4,5 章での準備の後，第 6,7 章において詳述される．

(i) q-PBO 方程式の N 成分系への拡張，
(ii) (i) で $N=2$ の場合の $q\to 1$ 極限が gl(2) BO 方程式と一致すること，
(iii) (i) の双線形形式，
(iv) (i) における従属変数で 2 次元戸田場方程式を満たすもの (タウ関数) の構成，
(v) q-PILW の N 成分版の双線形形式．

第 4 章では DIM の定義を与え，自由 Boson による Fock 表現，頂点作用素，quasi-Hopf twist について既知の結果を要約している．DIM は量子アフィン代数 $U_q(\widehat{sl}_2)$ の Drinfeld 実現の拡張に起源をもつ Hopf 代数で，パラメータ q,t を含み，Macdonald 理論と関係する．DIM に quasi-Hopf twist を施したものは更なるパラメータ p を持ち，構造関数は楕円テータ関数により記述される．

第 5 章では DIM の quasi-Hopf twist の古典極限 $t \to 1$ から q-PILW が得られるという 1 成分系の先行結果 (Shiraishi-Tutiya 2009) を復習している．以上の内容は本研究の背景の説明であると同時に以後の章の記述に必要な準備を兼ねたものである．

第 6,7 章は先に述べた主結果 (i)–(v) の詳細な記述，導出 (一部は付録) にあてられており，本論文で最も独自性のある部分となっている．その核心は，Macdonald 理論の可換差分作用素に相当する N 種のカレントを DIM の Fock 表現の N 階テンソル積において実現するところにあり，自由 Boson の頂点作用素の巧妙なスケール極限を取ることにより Poisson 代数へと移行し，非自明な古典極限を抽出している．第一保存量との Poisson 括弧により時間発展を導入し，閉じた方程式系を満たす事，$N=2$ では非自明な従属変数変換により gl(2) BO 方程式を含むこと，双線形方程式を満たすタウ関数や戸田場変数を構成している．

第 8 章には結論と今後の課題，展望が記されている．

以上の成果の物理的な応用は今後の課題である．一方で数学的には可積分な波動方程式と量子群の表現論の双方に新たな知見をもたらすものであり，解の構成にも重要な手がかりを与えている．また特異積分を含む可積分波動方程式で 3 成分以上のものは初めてであることも意義深い．着想と手法は本質的に先行研究に負う部分が少なくないが，それを実践するには多くの非自明な理論的考察，推論，試行，代数的計算が必要であり，それを貫徹した論文提出者の力量は高く評価される．また，証明や計算の詳細は具体的かつ明確に記載されており，内容，記述ともに学位論文としての水準に達している．なお本論文 6,7 章の一部は白石潤一氏，土屋洋平氏との未発表の共同研究に基づくものであるが，論文提出者が主体となって解析を行ったもので，その寄与が十分であると判断する．したがって，本審査委員会は博士（学術）の学位を授与するにふさわしいものと認定する．