論文の内容の要旨

Steady State of Closed Integrable Systems
(閉じた可積分系の定常状態)

氏名　石井　隆志

熱平衡化は熱力学の原理の一つであり、その主張は (i) 孤立したマクロ系はやがてそれ以上マクロな性質が変化しない状態に緩和し、(ii) その性質はエネルギーや磁化などの少数の物理量のみで特徴付けられる、というものである。熱力学の強い普遍性は確立しているが、熱平衡化のミクロな力学による説明は未解決な問題である。統計力学では孤立系の定常状態はミクロカノニカル分布で与えられると仮定する。熱力学極限ではミクロカノニカル分布はギブス分布などの他の統計アンサンブルと等価である。統計力学の大きな成功をふまえると、上記の問題は孤立系における統計アンサンブルで記述される状態への緩和を基礎づける問題と考えることができる。

この問題は長い歴史を持ち、古典系においては主にエルゴード性が考察された。しかしエルゴード性で議論する、位相空間全体をくまなく経めぐるための時間スケールは、典型的に宇宙年齢よりもはるかに長く、そのためエルゴード性は現実の緩和を説明するものとしては妥当ではないと指摘されている。一方で量子力学によって熱平衡化を説明する試みも長い歴史を持つ。近年、典型性と呼ばれる概念が大きく注目されている。これはヒルベルト空間のうちダイナミクスが起こる部分空間において、大多数のミクロな状態はマクロに見ると区別することができない、という主張である。典型性に基づくと、緩和現象は、マクロに見て非典型的な初期状態から出発した状態が状態空間における典型的な領域へと時間発展していく現象と考えることができ、先に述べたエルゴード性の議論の時間スケールの問題を解決しうる。典型性はいくつかの設定において厳密な証明も与えられている。しかし、典型性はダイナミクスとは直接関係のない状態空間の性質であって、それ自体では緩和現象を証明することはできない。一方で近年、熱平衡化を厳密に証明することができる十分条件である、固有状態熱化仮説 (ETH) が注目を集めている。これは、系の全ての固有状態が局所的な性質を見る限り熱的な状態であるという主張である。ETH は多くの非可積分系において数値的に成立が確認されている。

ここまで述べてきたように、マクロ系の熱平衡化の基礎づけは未だ活発な研究の対象であるが、一方で

旧来の統計力学の枠組の外にある設定におけるマクロ系の長時間におけるふるまいも探求されている。そのような設定の一つとして近年、ハミルトニアンが時間周期的に変化する系の定常状態が活発に研究されている。このような系は時間周期系と呼ばれ、トポロジカル相などの新奇物質相を簡単な時間依存ハミルトニアンで実現しうることからも、理論・実験両面において注目を集めている。時間周期系は一周期の時間発展に対する有効ハミルトニアンを定義することで、静的な系の問題として解析することができる。その理論的な枠組みはフロケ理論と呼ばれる。時間周期系では、通常のエネルギー保存が存在しないため、時間周期的な駆動によるエネルギー上昇、すなわちヒーティングが起こりうる。ヒーティングは興味深い物質相を壊してしまう恐れがあるため、その条件と度合の解明は重要な問題である。ヒーティングはヒルベルト空間の最大エントロピー状態に向けての緩和と捉えることができるため、熱平衡化の問題でもある。

緩和現象においては、可積分性が重要な役割を果たすことが知られている。静的な非可積分系においては系はギブス分布へと緩和することが知られているが、一方で可積分系においては一般にギブス分布へと緩和しないことが数値的にも実験的にも確認されている。近年、可積分系の定常状態は系の多数の保存量を用いて構成される一般化ギブス分布 (GGE) で与えられるという予想が提案されている。GGE の妥当性はいくつかの数値実験によって確認されている他、非相互作用可積分系については初期状態のクラスター性を仮定した下で証明も与えられている。

時間周期系についても、その有効ハミルトニアンの可積分性に基づいて、可積分なクラスを定義することができる。非可積分時間周期系においては、比較的小さいサイズの系についての数値計算の結果、周期が十分に小さい領域ではヒーティングはほとんど起こらず、一方で周期が十分に大きい領域では無限温度近くへのヒーティングが起こることが見出されている。このヒーティングの度合の周期による違いは、有効ハミルトニアンの周期による展開であるフロケマグナス展開の収束・発散が深く関係していると予想されている。周期が十分に小さい場合は有効ハミルトニアンはフロケマグナス展開の初項 H_0 で近似でき、H_0 は時間依存ハミルトニアン $H(t)$ の時間平均そのものであるため、大きなヒーティングは起こらない。一方で周期が大きい場合はフロケマグナス展開は発散すると予想されており、数値的にも発散が確認されている。このとき有効ハミルトニアンのスペクトルがランダム行列の持つ性質を示すことが見出されている。このとき、固有状態がヒルベルト空間内のランダムな状態になり、無限温度状態へのヒーティングが起こると予想されている。フロケマグナス展開の発散点は非可積分時間周期系では熱力学極限でゼロへと収束すると予想されており、そのためマクロな非可積分時間周期系では長時間極限における無限温度状態へのヒーティングが普遍的であると予想されている。一方で可積分時間周期系においては、系の多数の保存量が時間発展に対し制限を与え大きなヒーティングは起こらない可能性が議論されてきたが、詳細な解析はこれまで存在していなかった。また可積分時間周期系についても、その定常状態が GGE の形で与えられる (フロケ GGE と呼ばれる。) ことが予想されているが、その妥当性については静的な系の GGE と比べて不明瞭である。

本論文の主要部分は、大きく二部に分かれる。第一部では、静的な可積分系における GGE への緩和の基礎づけの問題を扱った。まず系の局所的な保存量から構成される「一般化シェル」を定義した。これは通常のエネルギーシェルの一般化と考えることができる。この一般化シェルを用いて、ETH の一般化であ

る「一般化 ETH」を定義した。この一般化 ETH の成立を、並進対称な非相互作用可積分系について証明した。この結果から、系の初期状態が一般化シェル内にある時、系が GGE へと緩和することが導かれる。我々の結果は、クラスター性を要請した先行研究の証明よりも広いクラスの初期状態について GGE への緩和を証明している。特に、非相互作用フェルミオン系に変換できるスピン系においては物理的な初期状態はスピン演算子についてクラスター性を満たすはずだが、そのような初期状態がフェルミオン演算子についてクラスター性を満たしているかどうかは非自明であり、我々の結果が特に重要である。今回の結果は、局所性は満たさないものの局所的な保存量に似た性質を持つ「quasilocal」な保存量が重要であると予想されている相互作用可積分系の場合へも拡張可能だと期待する。

本論文の第二部では、閉じた可積分時間周期系の定常状態を扱った。第二部ではフロケ GGE の妥当性はテーマではなく、具体的なモデルについて数値的にヒーティングの条件と度合を調べた。有効ハミルトニアンが自由フェルミオン系に変換できる可積分時間周期系を解析した結果、フロケマグナス展開が発散する点の近くでヒーティングの度合が急激に上昇することを見出した。また複数のモデルについて、無限温度近くへのヒーティングが起こることを見出し、その低周波数領域については周期 T と系のサイズ L についてのスケーリング則が成立することを明らかにした。定常状態の無限温度状態とのエネルギー密度差が T^{-2}, L^{-1} でスケールすることを見出し、$T \to \infty$, $L \to \infty$ の極限では定常状態のエネルギーが無限温度状態のエネルギーに一致することを明らかにした。またフロケ GGE の有効温度を計算した結果、無限温度近くへのヒーティングが起こる際はフロケ GGE が無限温度状態に近くなることを明らかにした。一方で無限温度近くへのヒーティングが起こらないモデルも示し、ヒーティングの性質の違いを波数空間における混合の程度の違いから議論した。