論文の内容の要旨

量子情報処理のための量子ダイナミクスのロバスト制御

(Robust control of quantum dynamics for quantum information processing)

氏名　坂井 亮介

量子情報処理とは量子力学に従う物理系を想定した情報処理であり、情報は量子系の状態によって表現され、情報処理は状態に対する変換として量子力学に基づいて記述される。量子情報処理では古典情報処理を含んだより広い情報処理が可能であり、素因数分解や量子ハミルトニアンダイナミクスのシミュレーション、半正定値計画法、線形方程式系の解などを得る問題などに対して、現在知られている古典情報処理を使ったアルゴリズムよりも計算量的な優位性が期待される量子アルゴリズムが提案されている。一方で、量子系を扱う実験技術の進歩も目覚ましく、実際にこれらの量子アルゴリズムが実装できるような量子デバイスの開発が進んでいる。

量子情報処理の実現が期待されている背景を踏まえて、本論文では量子情報処理を物理系で実現する際、量子ゲートを実行するのために必要な量子ダイナミクスの制御理論について解析する。量子ゲートとは量子状態に対するユニタリ変換であり、物理系においては量子系のハミルトニアンダイナミクス（時間発展）によって生成される。通常の物理系は固有のハミルトニアンを持っており、そのハミルトニアンに従って時間発展していくが、一般に目的の量子ゲートを自由に実装することはできない。そこで、その物理系に対して外部から制御できる変数を持つ何らかのハミルトニアンを加えることで、目的の量子ゲートを実装できるかを明らかにするのが量子ダイナミクスの制御理論である。この理論は、系固有のハミルトニアンと制御できるハミルトニアンの組が与えられた場合に、Lie 代数的な方法によってこの量子系に対して原理的に実装できる量子

ゲートの集合を得ることができる。また、系にはノイズがなく完全に閉じていることが通常仮定される。

量子ダイナミクスの制御理論に関して、近年、アンサンブル (同時) 制御と呼ばれる新しいタイプの量子制御理論が提案され研究が進展している。アンサンブル制御とは複数の異なるハミルトニアン系の集団に対して、それぞれ目的の量子ゲートを同時に実行する制御である。このとき制御するために外部から加えるハミルトニアンは全ての系に対して同じものを用いるとする。例えば核磁気共鳴 (nuclear magnetic resonance: NMR) における原子核スピンの集団に対して、この集団全体に電磁場を付加することで各原子核スピンをそれぞれ制御する際などに有効であることから提案された。一方で異なるハミルトニアンを持つ量子系の集団に対して同じ量子ゲートを実行するタイプのアンサンブル制御も考えられている。一般に異なるハミルトニアンダイナミクスは異なる量子ゲートを生成するが，このタイプのアンサンブル制御によってこの違いを無効化して目的の量子ゲートを実行すると解釈できるため、このようなアンサンブル制御のことを量子ダイナミクスのロバスト制御と呼ぶことにする。

量子ダイナミクスのロバスト制御では，系のハミルトニアンの一部のパラメータに不定性（不定定数）がある場合に、その不定定数の値に依存せず目的の量子ゲートの実装を目指す。この意味で不定定数の取りうる値はその値域に関してはある程度わかっていたとしても，連続量の候補を持っており，これらの候補のいずれに対してもロバストに制御する必要がある。こうした連続不定定数に対するロバスト制御が可能となる系が存在することは 1 量子ビット系に関して、多項式近似法によって理論的に示されている。しかしロバスト制御によって一般的な量子情報処理を実装したい場合では，必ず 2 量子ビット以上に対する量子ゲートの実現が必要であることから，2 量子ビットゲートのロバスト制御が可能であることを明らかにすることが重要である．また，制御理論の発展のためにも 2 量子ビット以上のロバスト制御が可能であるかどうかを理論的に明らかにすることは重要である．

本論文では多項式近似法を 2 量子ビット系に使えるように定式化し、これらの系に対してロバスト制御が原理的に可能となる系の存在を解析的に証明する。さらに、特殊な条件下のもとで d 次元の量子系のロバスト制御の可能性を明らかにするための方法を求める。また、多項式近似法によるロバスト制御性の証明のみでは、その制御の実行方法や、実行するために要する操作時間が明らかにならない。そこで本研究では 2 量子ビット系に対して数値解析を用いて制御に要する時間とその方法も明らかにする．一方で、多項式近似法を用いてもロバスト制御が可能であるか（不可能であるか）解析的に明らかにならない系も存在する。このような系に対しても数値的なアプローチを用いて、ロバスト制御が可能であるか解析する。

まず、2 量子ビット系に関して

$$H_\omega^{(1)}(t) = [\omega X \otimes \mathbb{1} + X \otimes X + Y \otimes Y + Z \otimes Z] + u(t)\{Z \otimes \mathbb{1}\} \tag{1}$$

のハミルトニアンを扱う。ここで $\mathbb{1}$ は恒等行列、X, Y, Z は Pauli 行列であり、上式の $[\cdot]$ の中が

ドリフトハミルトニアンと呼ばれる系固有のハミルトニアンを記述しており、外部から制御できないとする。一方、$\{\cdot\}$ の中のハミルトニアンは制御ハミルトニアンと呼び、制御パルス $u(t)$ を外部から時間依存した形で人為的に操作することで制御できるとする。$u(t) = 0$ と選べば系はドリフトハミルトニアンのみによって時間変化し、$u(t) = \delta(t)$ のように Dirac のデルタ関数を選べば、制御ハミルトニアンのみによるダイナミクスもシミュレート（以下 "制御" と呼ぶ）もできる。式 (1) のドリフトハミルトニアンには不定定数 ω を含んでおり、この不定定数に対するロバスト制御が可能であることを解析的に示した。ただし、ω の取りうる値域 Ω は有界で既知であることを仮定しており、また $\pm\omega' \in \Omega$ となる ω' が存在しないという条件がある。この条件を満たしていない場合は Ω の全領域に対するロバスト制御は一般的に不可能である。

これらの例では不定定数 ω が局所的なハミルトニアン項 $X \otimes \mathbb{1}$ の係数となっている場合であるが、例えば相互作用項の係数である場合や、複数の不定定数が含まれる場合での原理的なロバスト制御可能性も示した。

以上の系については多項式近似法を用いてロバスト制御が可能であるいことを示したが、この方法ではロバスト制御可能性を示すことができない系

$$H_\omega^{(2)}(t) = [X \otimes \mathbb{1} + \omega(X \otimes X + Y \otimes Y + Z \otimes Z)] + u(t)\{Z \otimes \mathbb{1}\} \tag{2}$$

も存在する。多項式近似法によるロバスト制御可能性についての証明は不定定数を含んだハミルトニアン（今回の場合はドリフトハミルトニアン $H_d(\omega)$）の反転 $-H_d(\omega)$ の制御可能性に依存している。$H_\omega^{(1)}(t)$ などの例では、開放系の制御性を明らかにするために用いられる Lie wedge 法などを利用してドリフトハミルトニアンの反転が可能であることを示し、その上で多項式近似法を用いたが、$H_\omega^{(2)}(t)$ を持つ系ではこの反転可能性を解析的に示すことができず、ロバスト制御性を明らかにすることができない。そこで、本研究では目的の量子ゲートを実装するための制御パルス $u(t)$ を探索する GRAPE アルゴリズムをベースにした QuTiP のパッケージを用いた数値解析を行い、$H_\omega^{(1)}(t)$ と $H_\omega^{(2)}(t)$ の両方の系に対してロバスト制御を実装する制御パルスの探索を行なった。図 1, 2 はそれぞれ $H_\omega^{(1)}(t)$ と $H_\omega^{(2)}(t)$ の系に対する結果となっている。ここで不定定数の値域は $H_\omega^{(1)}(t)$ の系に対してロバスト制御可能であることが示されている領域である $[1, 2]$ を選び、目的の量子ゲートとしては CNOT ゲートを採用した。図の縦軸はあるエラー評価関数 $\varepsilon(\omega)$ を用いた、不定定数が $\omega \in [1, 2]$（横軸）である時のダイナミクスによって生成される量子ゲートと目的とした CNOT ゲートとの差異である。

図 1, 2 の結果から、$H_\omega^{(1)}(t)$ と $H_\omega^{(2)}(t)$ のどちらの系に対しても、すべての不定定数 $\omega \in [1, 2]$ に対してロバストな制御が十分高い精度で実現している結果が得られ、解析的にロバスト制御性が示せていない系 $H_\omega^{(2)}(t)$ に対してもこの制御が可能であることが示唆されている。

上記で述べたように、多項式近似法を用いたロバスト制御性の証明にはハミルトニアンの反転の制御可能性を示すことが重要である。そこで、反転可能性が保証された特別な d 次元系に対す

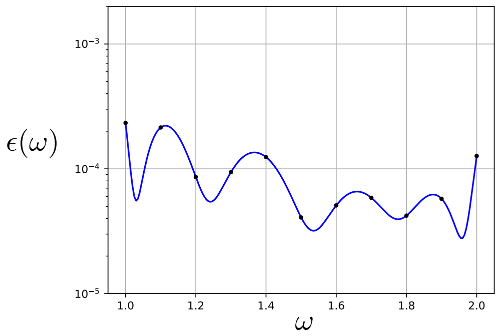

図 1　$H_\omega^{(1)}(t)$ の系に対する数値解析結果

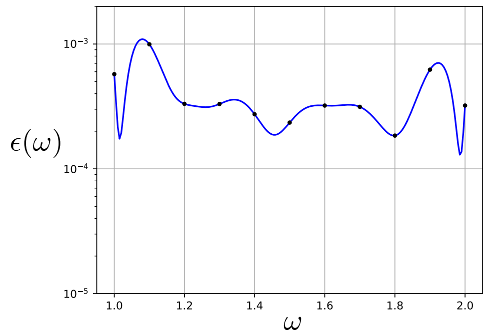

図 2　$H_\omega^{(2)}(t)$ の系に対する数値解析結果

図 3　不定定数 $\omega \in [1, 2]$ に対する CNOT ゲートのロバスト制御。GRAPE アルゴリズムを用いて制御パルス $u(t)$ を求めた。青線はエラーの評価関数 $\varepsilon(\omega)$ によって見積もれられる、不定定数 $\omega \in [1, 2]$（横軸）をもつ系によって実装される量子ゲートと目的とした CNOT ゲートとの差異（縦軸）を表す。

るロバスト制御も解析し、ロバスト制御可能性を証明するために必要な定理やその手順を求めた。