

博士論文

動的利用者均衡配分理論に基づく 渋滞ネットワークの動的制御方策の構築

A dynamic traffic control method in congested networks
based on dynamic user equilibrium assignment theory

佐津川 功季

東京大学大学院 工学系研究科 社会基盤学専攻

主査：大口敬教授

2019年3月

論文要旨

都市圏での慢性的な交通渋滞は依然として大きな社会問題となっている。交通ネットワーク・システムでは、現在の交通状況に対応して道路利用者が行動選択をする一方、その選択に応じて道路交通性能（交通状況）が変化するという、需要・供給間に相互作用が生じている。その結果、交通施策によりシステム全体の性能がかえって低下することが起こりうる。相互作用を適切に考慮してシステムの挙動特性を理解することによって初めて、交通渋滞を解消した望ましい状態を達成するためのネットワーク交通流の制御方策を体系的かつ合理的に構築することができる。

ネットワーク交通流の制御方策に関する既往研究は、取り扱う交通状態/性能の詳細度に応じて微視的・巨視的なアプローチの2種類に大別できる。

微視的なアプローチに基づいた交通制御問題は、動的システム最適配分問題として定式化されている。この問題は、ネットワークを構成する各リンクの交通状態を記述する交通流モデルを用いた詳細予測に基づき、総旅行時間を最小化する時々刻々のフロー・パターンを求めている。しかし、一般構造ネットワークでのシステム最適配分は通常非凸計画問題として定式化されるため、大域的最適解を得ることは極めて困難である。また、混雑したネットワーク上のフロー・パターンは本質的な予測不可能性を有する。こうした混雑下における微視的な交通制御方策の脆弱性を考えると、信頼性のある制御方策の構築は困難であると考えられる。

一方巨視的なアプローチは、システム・モデルとして交通状態/性能関係を巨視的に表わす **Macroscopic Fundamental Diagram (MFD)** を活用するものである。MFD は各リンクの時々刻々の交通状態をネットワークレベルで集計した結果現れる、車両存在台数とネットワーク・スループット（ネットワークから流出またはトリップ終了する単位時間当たり交通量）との凸型の関数関係である。MFD を活用すれば、観測情報から車両存在台数を把握さえすれば、ネットワーク性能をリアルタイムに推定できる。そのため MFD からは、微視的なアプローチが持つ脆弱性を克服したロバストな制御方策を構築できると期待されている。しかし MFD を把握しただけでは各リンクの交通制御の方法論を導出できない。これは、何らかの交通制御方策を行った場合に、どのようなネットワーク・スループットが得られるかを予測する理論体系が確立されていないためである。

これに対して本研究は、幾つかの実証・理論研究からネットワーク・スループットを特

徴づける鍵として示唆されている，渋滞パターンに着目する．渋滞パターンとは，時々刻々の待ち行列が滞留している渋滞リンクのネットワークにおける空間的なパターンおよびそれらの捌け交通量として定義する．ネットワーク・スループットは，原理的にこの渋滞パターンによって変化するものと考えられる．従って，渋滞パターンとネットワーク・スループットとの関係を理論的に結びつけて，ネットワーク上のどの渋滞リンクがどのようにネットワーク・スループットに影響を与えているかを解明できれば，渋滞ネットワークの制御方策の構築に大きく寄与するものと考えられる．

以上より，本研究では，渋滞パターンに基づくネットワーク・スループットの解析理論を確立し，ネットワーク・スループットを改善する渋滞リンク制御方策を構築することを目的とする．渋滞パターンとネットワーク・スループットを結びつけるための基盤理論として，本研究は動的利用者均衡配分（DUE）理論を用いる．特にこれらの関係性を解析的に理解するため，DUEの時間分解法を適用可能なネットワーク構造である **unidirectional network** に着目する．本論文は大きく2つの研究内容からなる．

第一に，均衡解析の妥当性を保証するためのDUE配分の安定性に関する理論解析を行う．安定性は均衡状態が実際に起こりうることを保証する重要な性質であるが，既存の解析法が経路旅行時間の単調性という性質を要求するため，1経路に1ボトルネックが存在するネットワーク以外の構造を持つネットワークでは安定性は示されていない．これに対し本研究では単調性を必要としない方法として，ゲーム理論の枠組みから安定性を解析する新たな方法論を構築する．そしてゆらぎを含む動的システムの安定性概念である確率的に安定な均衡が存在することを示す．

第二に，渋滞パターンとネットワーク・スループットとの関係を理論的に定式化し，ネットワーク・スループットを改善するネットワーク制御方策を構築する．ここでは，観測される渋滞パターンを与件としてネットワーク・スループットを導出する問題を構築する．そして，この問題を解くことで得られる解析式の感度分析を行い，ネットワーク・スループットを改善するために容量を増強または抑制すべき渋滞リンクを明らかにする．

本論文は全7章から構成される．各章の内容の要約を以下に記す．

第1章では本研究の背景と目的を述べる．ここでは，動的な交通ネットワーク制御方策の必要性を論じ，それに対する既往研究の限界を指摘している．これらを踏まえた上で，本研究の着眼点を示した後，目的および内容をまとめる．

第2章では利用者均衡配分の定式化と均衡状態の数理特性の解析の基礎について説明した後，動的な交通ネットワーク制御方策に関する既往研究を整理する．ここでは微視的アプローチである動的システム最適配分と巨視的アプローチであるMFDアプローチの二つに研究を大別し，それらの特徴・問題点を整理する．それを踏まえ本研究の位置付けを明確化する．

第3章では，第4章においてDUEの安定性を解析するための準備として，流体モデルの時間分解特性が示唆されている **unidirectional network** での粒子モデルの時間分解特性を

明らかにする。

第4章では、ゲーム理論の枠組みを用いて DUE の確率的安定性を解析する。まず、時間分解できるネットワークの DUE 問題は、戦略型ゲームの weakly acyclic game のクラスに属することを示す。次に、このクラスに関してゲーム理論分野で蓄積されてきた知見を援用し、粒子モデルでの基本的な day-to-day ダイナミクスである better response ダイナミクスの収束性を示す。そして収束性に基づき、ゆらぎが含まれるダイナミクスの確率的安定性を示す。さらに、複数のゆらぎを含むダイナミクスの確率的安定性の解析結果を比較考察することで、ダイナミクスにおける利用者効用の厳密な改善性が、DUE 配分問題における収束性・確率的安定均衡の存在を保証するにあたり重要な役割を果たすことを示す。

次に第5章では、渋滞パターンに基づくネットワーク・スループットの解析理論を確立する。まず、DUE 配分問題を、渋滞パターンを与件として定常的に流れ得る OD 交通流率であるネットワーク・スループットを導出する問題へと変換する。この問題は逆問題の解を一意に定めるための基準として、ネットワークの車両存在台数が一定となる周期境界条件を仮定している。その結果、提案逆問題は線形方程式系で記述され、これを解くことにより渋滞パターンとネットワーク・スループットとを解析的に結びつけている。そして、ネットワーク・スループットが渋滞パターンおよび起終点の空間分布により特徴づけられることを明らかにしている。

第6章では導出した解析式の感度分析を行い、渋滞リンクの容量が変化することによるスループットの改善・低下の条件とそのメカニズムを明らかにする。ここでは、容量が変化する渋滞リンクの種類 (i.e., 上・下流ノードが起点, 通過, 終点のどれであるか) 別に網羅的に場合分けして感度を調べる。これにより、ネットワーク・スループットを改善するために容量を増強・抑制すべき渋滞リンクを、渋滞リンクの種類別に明らかにした。そして、感度分析の結果に基づき、具体的な交通制御形態として過飽和交差点での信号制御を想定し、渋滞リンク制御方策を構築する。ここではノードを信号交差点に見立てて、ノードに流入する2本のリンクに割り振られる青時間スプリットの総和が一定となる制約条件を考える。その下で、これらのリンクが両方とも渋滞状態である過飽和状態の信号交差点における交通制御として、青時間スプリット配分を調整する制御方策を提案する。さらに、提案方策は各制御主体が独立に制御可能な自律分散的な性質を持つことを示し、この方策の有効性を、数値計算を通して確認している。

第7章では本論文の結論をまとめ、今後の展望を示している。

目次

論文要旨		i
第 1 章	序論	1
1.1	研究の背景	1
1.2	本研究の目的	4
1.3	本論文の構成	6
第 2 章	既存研究の整理	8
2.1	整理の方針	8
2.2	交通ネットワーク配分理論：均衡配分問題	8
2.3	動的な交通流の制御研究の起源	12
2.4	交通制御の微視的アプローチ：動的システム最適配分	14
2.5	巨視的アプローチ：Macroscopic Fundamental Diagram	19
2.6	本章のまとめ	28
第 3 章	粒子モデルにおける動的利用者均衡配分問題の時間分解特性	30
3.1	はじめに	30
3.2	DUE ゲームの定義	31
3.3	順序配分アルゴリズム	32
3.4	Unidirectional network における順序配分アルゴリズムの適用可能性 の証明	34
3.5	本章のまとめ	40
Appendix 3.A	Proof of Lemma 1	40
Appendix 3.B	基準時刻を持たない未配分車両の取り扱いについて	43
Appendix 3.C	単一終点ネットワークでの順序配分アルゴリズムの適用 可能性の証明	44
第 4 章	動的利用者均衡の確率的安定性の解析	52
4.1	はじめに	52

4.2	DUE ゲームと Weakly acyclic games	54
4.3	動的利用者均衡状態の確率的安定性	61
4.4	数値実験	64
4.5	本章のまとめ	70
第 5 章	渋滞パターンを与件としたスループット解析方法の構築	72
5.1	はじめに	72
5.2	動的利用者均衡状態	73
5.3	ネットワーク・スループットの解析方法	76
5.4	動的な状況下におけるスループットの解析方法	82
5.5	Unidirectional network への提案方法の拡張	85
5.6	数値計算例	90
5.7	本章のまとめ	95
Appendix 5.A	一般構造ネットワークへの提案方法の拡張案	96
第 6 章	スループットを改善する渋滞リンク制御方策の構築	103
6.1	はじめに	103
6.2	解析式の感度分析	104
6.3	スループットの低下メカニズム解析	105
6.4	容量増強のパラドクス解析	109
6.5	解明したメカニズムに基づく動的制御方策の構築	112
6.6	数値計算	116
6.7	本章のまとめ	123
Appendix 6.A	命題 5 と命題 6 の証明	124
Appendix 6.B	逆行列 $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ の非負性の証明	126
第 7 章	結論	128
7.1	本研究の成果	128
7.2	今後の展望	131

目次

1.1	スループットと渋滞パターン	4
1.2	動的利用者均衡と本研究の構成との関係	6
2.1	MFD 理論の基本仮説	20
3.1	粒子モデルにおける車両軌跡図と, 対応するリンク旅行時間プロファイル	38
3.2	Zero-flow congested link が存在するときの交通状態とポテンシャルの決定 方法	42
3.3	終点到着時刻に基づく最早未配分車両決定の反例	46
3.4	2 台の未配分車両の走行パターン	47
3.5	補題 5 を満たす最短経路 $\bar{p}_j^*(\mathbf{r})$ (赤矢印)	50
3.6	狭義最短経路による割り込みの連鎖のイメージ	51
4.1	2 人・3 戦略ゲームの利得表	55
4.2	待ち行列が存在するリンクにおける車両軌跡図	60
4.3	左図: オリジナルの Dupuis ネットワーク. 右図: 本稿で取り扱うネット ワーク	65
4.4	Nash 均衡状態に達する前の収束日数の平均値.	66
4.5	均衡状態での, 終点 d_1 に向かう各経路の累積流入台数.	67
4.6	Perturbed better response dynamics における定常分布	68
4.7	Logit-response dynamics における定常分布	69
5.1	縮約ネットワークの構築例	76
5.2	1 起点 3 終点の縮約ネットワーク	81
5.3	単一起点ネットワーク	91
5.4	NEF の実現値と理論値	92
5.5	各終点ノードへの旅行時間変化率	93
5.6	渋滞パターンの進展 (実線: 渋滞リンク, 点線: 非渋滞リンク, 赤線: 待 ち行列の延伸で容量が変化したリンク)	94

5.7	NEF と MFD の比較	95
5.8	ループ構造部と複数起点の集約のイメージ	96
5.9	一般構造のネットワークの unidirectional network への変換 (点線: 非渋滞 リンク, 実線: 渋滞リンク)	98
5.10	変換後の渋滞パターンに対応する縮約ネットワーク	100
5.11	ループ構造部上流の感度が異なるネットワークイメージ	102
6.1	左列: 命題 5 を満たすリンク (赤線) を含む縮約ネットワークの最小構成 要素, 右列: 対応するオリジナル・ネットワークの例	107
6.2	左列: 命題 6 を満たすリンク (青線) を含む縮約ネットワークの最小構成 要素, 右列: 対応するオリジナル・ネットワークの例	110
6.3	信号制御の概念図	112
6.4	Hybrid 制御の概念図	115
6.5	幹線道路 (赤リンク) とバイパス (青リンク) から構成される単一起点 ネットワーク	116
6.6	NEF の実現値と理論値	117
6.7	渋滞パターン (縮約ネットワーク) の進展 (黒線: 渋滞リンク, 赤線: 待ち 行列の延伸で容量が変化したリンク). 縮約ネットワーク上の各ノードの 記号を左上の添字に示す (e.g., 渋滞パターン P1 においてノード $\{o, i, k, n\}$ が縮約された先のノードを o' とする).	118
6.8	ピーク時の交通流率が高いケース	120
6.9	ピーク時の交通流率が中程度のケース	120
6.10	中規模サイズのネットワーク	121
6.11	中規模サイズのネットワークにおける NEF	121
6.12	中規模サイズのネットワークにおけるスループットの累積図	123
6.13	仮想ネットワークの例	125

表目次

4.1	リンク・パラメータ (FFTT: 自由旅行時間, BN: ボトルネック容量, SF: 飽和交通流率)	65
4.2	各経路の利用者数	69
6.1	信号交差点ノード k が通過ノードであるときの, リンク (i, k) にスプリットを割り振ったときのスループットの感度	113
6.2	信号交差点ノード k が終点ノードであるときの, リンク (i, k) にスプリットを割り振ったときのスループットの感度	113
6.3	リンクの設定 (FFTT: 自由旅行時間, BC: ボトルネック容量, SF: 飽和交通流率)	116

第 1 章

序論

1.1 研究の背景

1.1.1 道路ネットワーク上の交通渋滞と動的な交通制御方策の必要性

都市圏での慢性的な交通渋滞は、現在においても依然として大きな社会問題となっている。国土交通省の発表(国土交通省, 2017)によれば、道路移動時間の約 4 割は渋滞に費やされている。これは年間約 280 万人の労働力に匹敵しており、日本経済にとっての大きな損失の原因となっている*¹。加えて渋滞は、旅行時間の増加以外にも多岐にわたる負の外部性を引き起こす、e.g., 大気汚染、温室効果ガスの増加、交通安全への悪影響。経済的利益の追求のみならず、環境保全や交通安全の確保といった観点からも、渋滞を解消し、交通流の円滑性の向上を目指すことは不可欠である。

交通渋滞の解消にあたり、現在でも導入されている施策は、道路インフラの整備 (e.g., 新規道路建設、道路容量拡大) である。しかし、インフラ整備には膨大な費用と時間を要するのに加え、施策意図とは異なり交通ネットワークの性能低下を引き起こしうるという問題がある。これは、交通ネットワーク・システムでは、交通混雑/渋滞による外部不経済効果が存在するためである。すなわち、道路利用者は他者に与える影響 (e.g., 旅行時間の増分) を考慮せずに行動選択 (e.g., 経路・出発時刻選択) を行う。そして、道路利用者の選択行動と道路ネットワークの交通条件 (e.g., 各道路区画 (リンク) での待ち行列の時間進展法則) との間の複雑な相互作用の結果、交通ネットワーク流のパラドクスなどで知られるように、道路インフラの整備による局所的な改善効果が、システム全体の性能をかえって低下させることが起こりうる (e.g., Braess, 1968; Smith, 1978)。そのため、交通状態の変化が性能に与える影響に対する適切な理解が不足したナイーブな整備は、交通渋滞を改善するにあたり有効であるとは限らない。

従って、道路インフラを十全に機能させつつ交通渋滞を解消するためには、上記の相互

*¹ 国土交通省の発表によると、日本全国の渋滞損失額を貨幣価値に換算すると年間 12 兆円にも上る。

作用を適切なレベルで再現するシステム・モデルに基づき、ネットワーク・システムの挙動特性を理解する必要がある。特に、動的現象である交通渋滞が引き起こす外部不経済効果の解析にあたっては、時々刻々と変化する交通状態を記述する動的な交通流モデルに基づく、システム解析の動学化が求められる。そして、動的なシステムの特理解に基づき、望ましい状態を達成するための、ネットワーク交通流の制御方策を構築する必要がある。

1.1.2 既存の動的交通制御方策の整理

動的なネットワーク交通流の制御方策に関する既往研究は、交通流モデルが取り扱う交通状態/性能の詳細度に応じて、微視的・巨視的なアプローチの2種類に大別できる。微視的なアプローチに基づきネットワーク・システムを最適化する問題は、動的システム最適配分問題として1960, 70年代に定式化が行われ、以降多くの研究が行われてきた。この問題は、ネットワークを構成する各リンクの状態変数 (e.g., 流入・流出交通流率, 待ち行列台数), およびそれらの推移を記述するリンクレベルの交通流モデルから構成される。そして、計画時間帯における状態推移の詳細予測に基づき、ネットワーク全体の総旅行時間を最小化する時々刻々のリンク・フロー・パターンを求めている。動的システム最適配分問題では、システムの微視的な構成要素の状態変化がシステム全体の性能に与える影響を精緻にモデリングしている。そのため、解である最適なフロー・パターンは、ネットワーク制御方策の具体的な方法論 (e.g., どのリンクの容量をどのように増強・制限すればよいのか) を考察する際の基礎となりうる。

しかし、動的システム最適配分には幾つかの限界が存在する。まず、渋滞現象の表現に伴う数学的複雑さの結果、一般構造ネットワークでのシステム最適配分は、通常非凸計画問題として定式化されるということである。そのため、並行接続された経路から構成されるような、比較的単純な構造を持つネットワークを除いて、その大域的最適解を得ることは極めて困難となる。結果として、現在に至るまで一般構造ネットワークでの制御方策は明らかになっていない。次に、動的なネットワーク交通流は、本質的な予測不可能性を有しているということである。制御の前提となる交通状態の正確な予測を行うためには、入力情報となるOD交通需要の時空間的に詳細な情報が必要となる。需要情報は道路利用者の私的情報であり、このような膨大な情報を制御に必要なだけの十分な精度で得ることは困難である。加えて、非常に混雑したネットワーク上でのフロー・パターンは複雑、かつカオス的な挙動をとることが既存研究から指摘されている：OD交通需要の僅かな変化に対して、予測結果となるフロー・パターンが大きく変化する。結果、詳細予測に基づく交通制御方策は脆弱性を抱えており、信頼性のある制御方策の構築は困難であることが予想される。

一方、巨視的なアプローチは、ネットワーク・システムのモデルとして交通状態と性能との関係を巨視的に表わす Macroscopic Fundamental Diagram (MFD) を活用するものであ

り、2000年代後半から盛んに研究が行われている。MFDは、各リンクの時々刻々の交通状態をネットワークレベルで（空間的に）集計した結果現れる、車両存在台数とネットワーク・スループット（ネットワークから流出またはトリップ終了する単位時間当たり交通量）との、凸型の関数関係である。この関数では、存在台数の増加とともに待ち行列延伸が発生し、ネットワーク全体の交通性能が低下するといった因果関係が表現されている。すなわち、システムを構成する個々の要素を集計することで、システムの状態と性能との大まかな関係性を陽に理解・表現しようとするものが、MFDである。その結果、MFDからは存在台数に基づきネットワークの交通性能を集計レベルで、かつリアルタイムに把握できるようになる。従って、MFDは観測情報（存在台数）ベースの、詳細予測を必要としないロバストな交通制御方策構築の基礎となりうる。例えば、ネットワークの存在台数を一定の値以下に保つ流入制御を行うことで、スループットの低下を避けることができると考えられている。

しかし、実際に交通制御を行う場合、MFDから得られる集計レベルのロジックは、（非集計の）リンクレベルで解釈され、実装される必要がある。それにもかかわらず、MFDからは各リンクの具体的な交通制御の方法論を把握することができない、という弱点が存在する。これは、現在のMFDは観測情報から導出される経験則的な関数関係に過ぎず、何らかの交通制御方策を行った場合に、どのようなスループットが得られるかを予測する理論体系が確立されていないためである。このような交通状態と性能との関係に対する理解の不足は、前節で指摘したように、交通制御によるネットワーク性能の低下を招きうる。結果として、巨視的なアプローチはロバストな交通制御方策の基礎として有望であると考えられるものの、制御を実装するにあたっては、未だ不十分であるといえる。

1.1.3 渋滞パターンに基づくネットワーク・スループットの解析

こうした背景を鑑みると、詳細予測に頼らないロバストな制御方策の構築に資する、巨視的なアプローチが今後求められているといえよう。そして同時に、具体的な交通制御方策の方法論を考察するために、ネットワーク・システムの巨視的な挙動特性を、より微視的な構成要素に基づき説明するための理論が必要となる。すなわち、スループットは各リンクの交通状態からどのように特徴づけられるのか、各リンクの交通状態変化がスループットをどのように変化させるのか、といった微視的な交通状態と巨視的な交通性能間の関係性を理解する必要がある。そして、その理解に基づいて、具体的な交通制御方策を導出することが求められる。

これに対し、スループットを説明するための交通状態変数として適切と考えられるのが、待ち行列が滞留している渋滞リンクの空間的なパターンである（本論文ではこれを“渋滞パターン”と呼ぶ）。ある時間帯での渋滞パターンは、渋滞リンクのネットワークにおける空間的なパターン（待ち行列が滞留しているリンクはどれか）、および各渋滞リンクの

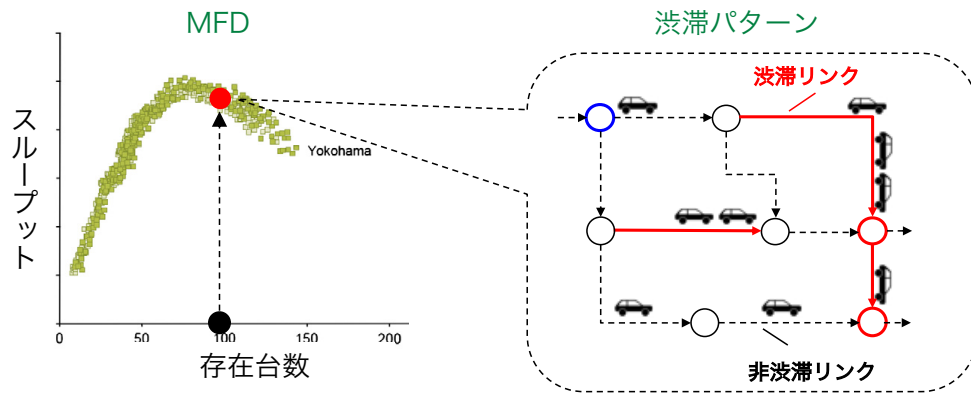


図 1.1: スループットと渋滞パターン

捌け交通量として定義する。こうした渋滞パターンは、存在台数と比較して混雑の空間的な接続関係を捨象しない、より微視的な状態変数であるといえる。また、そもそもスループットとはネットワークからの捌け交通量であるため、原理的にこうした渋滞パターンにより制約されるものと考えられる。実際幾つかの実証研究から、ある存在台数に対して実現するスループットのばらつきが小さいとき、実現している渋滞パターンにも再現性があることが示唆されている (Geroliminis and Sun, 2011b,a, 図 1.1 も参考)。このことより、空間的に詳細な混雑分布である渋滞パターンとスループットとを結びつける理論を構築できれば、個々の渋滞リンクの状態変化がスループットに影響を与えるメカニズムを把握できる；そして、そのメカニズムに基づいた、スループットを改善するための具体的な渋滞リンク制御方策を構築できると考えられる。

1.2 本研究の目的

以上の背景の下、本研究では、渋滞パターンに基づくネットワーク・スループットの解析理論を構築する。そして、構築した理論に基づき、スループットを改善する渋滞リンク制御方策を構築する。渋滞パターンとスループットとを結びつけるための基盤理論として、本研究は、動的利用者均衡配分 (Dynamic User Equilibrium: DUE) 理論に着目する。DUE 理論は、利用者の選択行動と道路の交通条件との相互作用の結果生じる、均衡状態におけるネットワーク交通流を記述する理論である。こうした均衡状態は、交通ネットワーク・システム全体の状態を考える上での基本的な状態であり、システム挙動の本質的な特性を把握することができる。

特に、本研究では、渋滞パターンとスループットとの関係を解析的に把握するために、DUE 配分問題の時間分解法 (Kuwahara and Akamatsu, 1993) を適用できる構造を持つネットワークのクラスである unidirectional network (Iryo and Smith, 2017) に着目する。時間分解法とは、動的な交通流モデルの causality (因果律とも)、および First-In-First-Out (FIFO) 原

則を活用し、ある基準時刻となるノードでの時刻別に配分問題を分解して解く方法である。例えば、単一起点ネットワークにおける均衡状態を考えると、これらの性質を満たす交通流モデルの下では、ある時刻に唯一の起点を出発する車両が経験する旅行時間は、その時刻以降に出発する車両の影響を受けないことが保証される；従って、配分問題を起点出発時刻別に分解し、前向きに逐次計算していくことが可能である。時間分解法は、これまで均衡解の特性解析 (Akamatsu, 2000; Akamatsu et al., 2015; Iryo and Smith, 2017) や、効率的な解法 (Akamatsu, 2001; Waller and Ziliaskopoulos, 2006; Iryo, 2011b) を得るために用いられてきた。本研究では、この方法論をスループット解析、および解析に基づく交通制御方策の構築に応用することとなる。

本論文では、大きく分けて2つの研究を遂行する。第一に、均衡解析の妥当性を保証するための、DUE 配分理論の安定性解析である。均衡問題を解析する際には、均衡状態の数理的特性 (e.g., 存在性・一意性・安定性) を調べる必要がある。特に安定性は、均衡状態が実際に起こりうることを保証するための重要な性質であるにもかかわらず、時間分解法が適用できるクラスのネットワークでは保証されていない。これは、安定性を証明するにあたり用いられる既存のアプローチが経路旅行時間の単調性という性質を要求する一方、この性質は1経路に1ボトルネックが存在する限定されたクラスのネットワークでしか一般的に成立しないためである。

そのため、本研究では、単調性を要求しない方法として、進化ゲーム理論の枠組みから安定性を解析する新たな方法論を構築する。この方法論は、交通ネットワーク配分理論とゲーム理論のそれぞれの分野で発展してきた、次の3つの概念・方法論から構成されている：粒子モデルにおけるDUEの時間分解法、戦略型ゲームのクラスである *weakly acyclic game*、およびゆらぎを含む動的システムの定常分布解析。安定性の解析にあたり、本研究ではまず出発時刻を固定したDUE配分問題を、車両を連続体近似せず、各車両を個別に取り扱った戦略型ゲーム（これをDUEゲームと呼ぶ）として定式化する。また *unidirectional network* において、均衡解を導出するための、車両の適切な配分すべき順序付けを行えることを示す。次に、この順序付けの特性に基づき、DUEゲームと *weakly acyclic game* との結びつきを確立する。そしてその結びつきに基づき、ゲーム理論分野において蓄積されてきた知見を援用して、ゆらぎを含む動的システムの安定性概念である確率的安定性 (Foster and Young, 1990; Young, 1993) を解析する。

第二に、均衡解析の妥当性に立脚し、観測された渋滞パターンを与件としたスループットの解析理論、および制御方策を構築する。まず、OD交通需要を与件とし利用者の経路選択原理と整合的な渋滞パターンを求めるDUE配分問題を、渋滞パターンを与件として、スループット（定常的に流れうるOD交通需要）を導出する問題へと変換する。これは、DUE配分問題の逆問題として位置づけられる。この問題は、出力（逆問題の解）を一意に定めるための基準として、ネットワーク内に存在する車両台数が一定となる定常状態 (i.e., 周期境界条件) を想定している。その結果、提案逆問題は線形方程式系で記述される

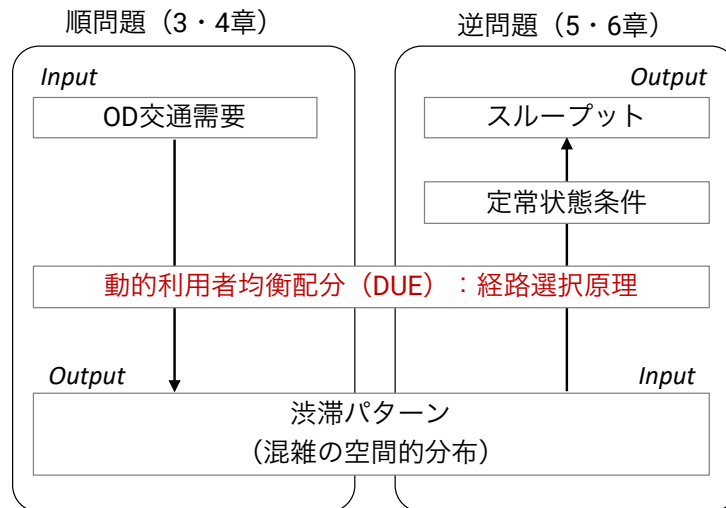


図 1.2: 動的利用者均衡と本研究の構成との関係

ため、これを解くことにより渋滞パターンとスループットとを解析的に結びつけることができる。

次に、構築した解析式の感度分析を行い、渋滞リンクの容量変化に対するスループットの改善・低下の条件と、そのメカニズムを明らかにする。ここでは、容量が変化する渋滞リンクの種類 (i.e., 上・下流ノードが起点, 通過, 終点のどれであるか) 別に網羅的に場合分けして感度を調べる。これにより、スループットを改善するために容量を増強 (制限) すべき渋滞リンクを、その種類別に明らかにする。そして解明した条件に基づき、過飽和状態における信号交差点での交通制御を想定して、渋滞リンク制御方策を構築する。

以上の流れをまとめたものを、図 1.2 に示す。このように、本研究は、交通ネットワーク配分理論分野で長年研究が発展してきた DUE 理論について、その順問題 (安定性解析) と逆問題 (制御方策構築) の両側面から分析するという、体系的な構成となっている。

1.3 本論文の構成

本論文は全 7 章で構成される。第 1 章では、背景と目的を述べた。続く第 2 章では、利用者均衡配分の定式化と数理的特性の解析の基礎について説明した後、本研究が対象とする動的なネットワーク交通流の制御方策に関する既存研究を整理し、本研究の位置付けを明確化する。第 3 章・4 章では動的利用者均衡の安定性を解析する。第 3 章では、安定性解析に先立ち、交通流の流体モデルで時間分解特性が示されている *unidirectional network* における粒子モデルの交通流の時間分解性を示す。第 4 章では、時間分解法を適用できるネットワーク構造での動的利用者均衡の確率的安定性を解析する。第 5 章・6 章は均衡解析を通じた渋滞パターンに基づくネットワーク制御方策を構築する。第 5 章では、動的利用者均衡の時間分解法を活用し、渋滞パターンを与件としたスループットの解析式を導出

する。第6章では、解析式の感度分析を行うことで、スループットを改善する渋滞リンクの容量変化の条件を導出する；そしてこれに基づき、渋滞リンクの制御方策を構築する。第7章では、本論文の結論をとりまとめ、今後の展望を示す。

第2章

既存研究の整理

2.1 整理の方針

本章では、本研究が対象とする DUE 配分問題の数学的特性の解析、および道路ネットワークの動的な交通制御方策に関連する既往の研究を整理し、本研究の位置付けを明らかにする。以下ではまず、利用者均衡状態とその数理特性について簡単な整理を行う。次に、ネットワークの交通状態/性能を微視的に捉えるアプローチに関する既存研究について整理を行う。そして、巨視的なアプローチである Macroscopic Fundamental Diagram (MFD) について、その理論と制御に関する研究を整理する。最後に、整理した既存研究の内容を踏まえて本研究の位置付けを述べる。

2.2 交通ネットワーク配分理論：均衡配分問題

本節では、利用者均衡状態とその数理特性について簡単に整理する。以下では、まず、Wardrop (1952) により提唱された配分原則を説明する。次に、定常的なフロー・パターンを仮定した静的利用者均衡配分問題の定式化および数理特性について整理を行う。その後、時々刻々のフロー・パターンを記述する動的利用者均衡配分問題についての整理を行う。なおここでは経路選択のみを考慮した配分理論について述べる。

2.2.1 Wardrop の配分原則

交通ネットワーク配分問題とは、現実の交通網を抽象化した交通ネットワークを対象に、OD 交通需要と交通配分原則を与件として、ネットワークの各リンクを流れる交通量を予測する問題である (土木学会, 1998)。交通配分原則について、Wardrop (1952) は次の2つの配分原則を提唱している：

- Wardrop の第1原則：利用される経路の旅行時間は皆等しく、利用されない経路の旅行時間よりも小さいか、せいぜい等しい。

- Wardrop の第2原則：交通ネットワーク上の総旅行時間が最小となる。

第1原則は最も簡潔な配分原則の一つであり、今日の多くの交通ネットワーク・モデルのベンチマークとなる概念である。この配分原則は、各利用者が自分の目的関数（e.g., 旅行時間）が最小となるように経路を選択した結果到達する次のような均衡状態（Wardrop 均衡）を表わすものである：誰も自分の選択を単独で変更するインセンティブを持たない状態。このことから、この原則に従って実現するフロー・パターンは“利用者均衡（UE: user equilibrium）”状態（あるいは記述的状态）と呼ばれる。Wardrop 均衡は、各利用者が自身の目的関数（旅行時間）を改善できないという意味において、ゲーム理論における Nash 均衡と等価な均衡概念である。

一方、Wardrop の第2原則は交通システム全体の最適化を目指すものであり、道路管理者が中央集権的にネットワーク交通流を管理することによって実現できるものである。このことから、システム最適（SO: system optimum）配分（あるいは規範的状态）と呼ばれる。

2.2.2 静的利用者均衡配分問題

静的な UE 配分問題では、ネットワーク交通流が定常状態にあることを仮定している。すなわち、各リンクに流入・流出する交通量などが時間的に変化しないことを仮定して、前述の Wardrop 均衡状態にあるフロー・パターンを求めている。この配分問題は、一般的には以下のように定式化される：

$$\begin{cases} C_r(\mathbf{f}) - C_{od}^* = 0 & \text{if } f_r > 0 \\ C_r(\mathbf{f}) - C_{od}^* \geq 0 & \text{if } f_r = 0 \end{cases} \quad \forall r \in \mathcal{R}_{od}, \forall od \in \mathcal{W}, \quad (2.1)$$

$$\sum_{r \in \mathcal{R}_{od}} f_r - Q_{od} = 0 \quad \forall od \in \mathcal{W}, \quad (2.2)$$

$$f_r \geq 0 \quad \forall r \in \mathcal{R}_{od}, \forall od \in \mathcal{W}. \quad (2.3)$$

ここで、 $C_r(\mathbf{f})$ は経路交通量パターンが \mathbf{f} であるときの経路 r の旅行時間、 C_{od}^* は OD ペア od 間の均衡（最小）経路旅行時間、 Q_{od} は OD ペア od 間の分布交通量である。また、 \mathcal{R}_{od} 、 \mathcal{W} はそれぞれ OD ペア od 間の経路集合、OD ペアの集合を表している。式 (2.1) は、利用される（i.e., $f_r > 0$ となる）経路の所要時間は均衡経路旅行時間に皆等しく、利用されない（i.e., $f_r = 0$ となる）経路の所要時間よりも小さいか、せいぜい等しいという利用者均衡の条件を表している。式 (2.2) はフロー保存則、式 (2.3) は非負制約を表している。

静的な交通ネットワーク配分モデルでは、各リンク旅行時間 \mathbf{c} はリンク交通量 \mathbf{x} の関数として与えられ、経路旅行時間 \mathbf{C} は経路が包含するリンクの旅行時間の和として与えられる：ネットワークの経路・リンク接続行列を Δ と表わすとき、 $\mathbf{C} = \Delta \mathbf{c}$ 。リンク旅行時間関数としては、操作性の高さ、また（後述する単調性などを満たす）数学的性質の良さか

ら，米国道路局（US Bureau of Public Road）で開発された，次の“BPR 関数”が用いられることが多い：

$$c_l(x_l) = c_l(0) \left\{ 1 + \alpha \left\{ \frac{x_l}{\gamma} \right\}^\beta \right\} \quad (2.4)$$

$c_l(x_l)$ はリンク l の交通量が x_l であるときのリンク旅行時間を表わす．また α, β, γ はパラメータである．

定式化された均衡問題は，数理最適化問題や変分不等式の形で等価な表現を行うことができる（赤松隆，和田健太郎，2014）．Smith (1979a) は，UE 配分問題を次の変分不等式問題として定式化している：

$$\text{Find } \mathbf{f}^* \in \Omega_f \text{ such that } \mathbf{C}(\mathbf{f}^*) \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{f}^*) \geq 0, \quad \forall \mathbf{f} \in \Omega_f \equiv \{\mathbf{f} : \text{satisfying (2.2) and (2.3)}\}. \quad (2.5)$$

またこの問題は，リンク交通量 \mathbf{x} に関する変分不等式問題としても表現できる：

$$\text{Find } \mathbf{x}^* \in \Omega \text{ such that } \mathbf{c}(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \equiv \{\mathbf{x} : \text{satisfying } \mathbf{x} = \Delta \mathbf{f}, \text{ (2.2), and (2.3)}\}. \quad (2.6)$$

さらに，リンク旅行時間関数の Jacobian が対称であるとき，利用者均衡状態でのリンク・パターン \mathbf{x} は，以下の凸計画問題の解として与えられる：

$$\min .z(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{c}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \text{s.t. } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.7)$$

これらの等価表現より，UE 状態の様々な数理特性が明らかにされている．具体的には，リンク旅行時間関数 $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ が連続かつ次の狭義単調性：

$$(\mathbf{c}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}(\mathbf{y})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) > 0, \quad (2.8)$$

を満たすならば，均衡解は必ず存在しかつ一意に定まる．また，その均衡解は大域的漸近安定であることが示されている．なお安定性解析の際には，不均衡状態から均衡状態に至るまでの利用者の行動調整過程を記述する，何らかの動学モデル（i.e., day-to-day ダイナミクス）を仮定する必要がある．ここでは，各利用者が前日より旅行時間が短くなる経路を選択する“assignment process”というダイナミクスを仮定している．

2.2.3 動的利用者均衡配分問題

静的配分問題に対し，動的配分問題では交通ネットワーク上の時々刻々のフロー・パターンの変化を記述する．その均衡概念の基本的な定義は静的利用者均衡の自然な拡張であり，“任意の時刻において”同一の起終点を持つ利用者間では，どの経路を走行する利用者也旅行時間が同意となるようなフロー・パターンを求めるものである．換言すると，全ての利用者が事後的に見ても各自の真の最短経路となっているようなフロー・パターンで

ある。こうした動的利用者均衡 (DUE) 配分問題は、UE 配分問題と同様に、次の変分不等式問題として表現できる (Zhu and Marcotte, 2000) :

$$\sum_{od \in \mathcal{W}} \sum_{r \in \mathcal{R}_{od}} \int_0^T C^*(t) \cdot (\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^*(t)) dt \geq 0 \quad (2.9)$$

ここで $C^*(t)$ は、経路フロー・パターン $\mathbf{f}^*(t)$ の下で、時刻 t に出発する車両の経路旅行時間を表わす。

経路旅行時間はリンク旅行時間関数に基づき求められる。リンク旅行時間関数としては、link delay function モデル (Friesz et al., 1993), ボトルネックモデル (Vickrey, 1969; Smith, 1993) などがある。各モデルはリンク上に滞留する車両の待ち時間 (あるいは流出交通量) の表現にそれぞれの特徴があるが、いずれも FIFO 原則や因果律といった、動的な交通流モデルとして自然な仮定を満たしている (Carey et al., 2003)。

FIFO 原則は、いかなるリンクにおいても各車両の流入順序と流出順序は同じである、という原則である*¹。一方因果律は、ある時刻にリンクに流入する利用者の旅行時間は、その時刻以前に流入した利用者のフロー・パターンのみに影響するという性質である。これらを満たさないモデルでは、待ち行列の延伸現象やそれに伴う各車両の旅行時間の変化が正確に表現されず、物理的に起こり得ない不可解な交通流が生じうる、e.g., リンクに入った瞬間に“ジャンプ”して流出してしまうような利用者の存在を許してしまう (Carey, 1992; Astarita, 1996; Nie and Zhang, 2005)。従って現在では、こうした原則を満たす動的な交通流モデルが妥当なものとして考えられている。

DUE 状態の数理特性の解析は、UE 状態のものと同様に、経路旅行時間関数の数理特性に基づき行われる。Smith and Wisten (1995) は均衡解の存在性について、経路旅行時間関数が連続であるという仮定に基づき、シャウダーの不動点定理を用いて証明を行った。これについて、Mounce and Smith (2007) はリンク旅行時間関数がボトルネック・モデルであるとき、経路旅行時間は経路フローに関して連続であることを示している。また Zhu and Marcotte (2000) は、時々刻々のリンク旅行時間がリンク流入時の存在台数に依存する“whole-link”モデルを仮定したときの存在性を証明している。ただし、これらのリンクモデルはいずれも、あるリンクの待ち行列が異なるリンクにまで延伸するような状況を考えない、“point-queue”モデルである。リンク間の待ち行列延伸を想定した“physical-queue”モデルに関しては、経路旅行時間関数は不連続になり、均衡状態が存在しない可能性があることが指摘されている (Szeto and Lo, 2006)。

次に、均衡解の一意性 (さらには安定性) の証明にあたっては、経路旅行時間関数の単調性が主要な役割を果たす。Smith and Ghali (1990); Mounce (2006) は経路旅行時間関数

*¹ 追越車線があるようなリンクでは厳密にはこの関係が成立するとは限らないが、待ち行列が生じているような状況では、これに近い関係が成立していると考えられる。

の（広義）単調性を次のように定義した：

$$\int_0^T (\mathbf{d}_x(t) - \mathbf{d}_y(t)) \cdot (\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)) dt \geq 0. \quad (2.10)$$

ここで、 $\mathbf{d}_x(t)$ は、ある時刻 t での流入リンク交通量が $\mathbf{x}(t)$ で与えられるときの、時刻 t に各リンクに流入する利用者が経験する遅れ時間をベクトル表示したものである。Smith and Ghali (1990) は、1 経路にボトルネックが 1 つのみ存在する“1 経路 1 ボトルネック・ネットワーク”において広義単調性が成立することを示している。また Mounce and Smith (2007) は、この構造を持つネットワークにおいて、唯一の凸集合が解集合となることを示している。さらに安定性と関連した性質としては Smith dynamics Smith (1984b) の均衡集合への収束性が示されている。

しかしながら、動的な交通流モデルにおいて経路旅行時間関数の単調性は一般的に成立するものではない。実際、1 つの経路に 2 つ以上のボトルネックが含まれるとき、単純なトポロジーのネットワークでも、経路旅行時間は非単調となることが示されている (Kuwahara, 1990b; Mounce and Smith, 2007)。これは、ボトルネックがタンデム構造を取るとき、下流側ボトルネックでの遅れ時間は上流側ボトルネックの遅れ時間に依存した、複雑な再帰的方程式の形で定式化されるためである（その詳細は、Iryo, 2013; 赤松隆, 和田健太郎, 2014, などを参考のこと）。結果として、より一般的な構造のネットワークにおいては、均衡解の一意性・安定性は成立しない、または証明することが非常に困難となっている。実際、DUE 状態は（経路旅行時間パターンの意味で）一意性を持たないことも、Iryo (2011a) により示されている。

2.3 動的な交通流の制御研究の起源

交通流の時空間ダイナミクス (i.e., 待ち行列の時空間的な進展) を明示的に取り扱った、動的な交通流モデルに基づく制御に関する研究は、1960 年代の Vickrey (1969) と Gazis (1964) の研究にまで遡る。これらの研究はいずれも、ある局所的なボトルネックに由来する混雑が時空間的に進展・波及することで、対象となるネットワーク・システム全体の性能が低下するといった、混雑のネットワーク的な側面に対する問題意識を持っている。そして、それぞれ別のアプローチにより、交通渋滞を解消あるいは緩和するための制御方策を導出することを試みている。

ボトルネックモデル

Vickrey (1969) は、交通流率の容量超過による待ち行列の発生とそれによる旅行時間の増加現象である交通渋滞を解析するために、ボトルネックモデルを提案した。このモデルでは、居住地から都市地域への通勤交通を営む利用者を考え、これらがある単一のリンク

を共通して利用するような状況を考える。リンクは単位時間あたりの通過可能交通量の上限（ボトルネック容量）を持ち、流入量が容量を超えたときリンク上には待ち行列が発生する。そしてこの設定において、勤務地到着時刻と旅行時間の長さに関心を持つ利用者が出発時刻を選択する状況において、どのように待ち行列が形成されるのかを分析している。このモデルは後に **Hendrickson and Kocur (1981)** により独立に提唱され、数学的に明確な形で再定式化が行われている。同時に、待ち行列での遅れ時間が渋滞による死荷重であることを指摘し、待ち行列を排除するように適切に課金を行うことにより、社会的に最適な状態を達成できることを示している。

ボトルネックモデルの最大の利点は、待ち行列現象を再現するために必要な本質的な要素からモデルを構築することで、現象を数理的に解析することを可能にしている点にある。すなわち、勤務開始時刻という時間的制約を持つ通勤交通がどのように交通渋滞を形成しているのかを表現する数理理論モデルから、一種のベンチマークとなる交通状態を導出できる点が、ボトルネックモデル、ひいては数理理論モデルの最大の利点である。これにより、混雑課金などの制御が実施されたときの交通状態の変化（i.e., 利用者の出発時刻選択行動）に対して理論的解析を行うことができている。また、最適な課金施策とそのロジックを明確に示すことに成功している。

ボトルネックモデルは交通工学・都市経済学の両分野でその数理的特性の解析、および拡張が続けられてきた（詳細なレビューについては桑原雅夫 (1998, 2002) などを参考）。**Smith (1984a)** は、利用者の出発時刻選択行動に均衡状態が存在することを示している。また **Daganzo (1985)** は、この均衡解が一意でもあることを示している。**Arnott et al. (1993a)** は、利用者のトリップ数が一般化費用に対して弾力的であるケースへと問題を拡張し、このときの最適な課金について数理的に解析を行った。より複雑なケースへの拡張としては、**Kuwahara (1990a)**; **Arnott et al. (1993b)** による、ボトルネックが2つ存在するネットワークや、**Arnott et al. (1990)** による並行接続された2つの経路を持つネットワークへの拡張が存在する。また、利用者の通勤時刻（i.e., 希望到着時刻）に異質性があるケースへと拡張したものもある。

その後、井料隆雅、吉井稔雄、朝倉康夫 (2005); **Iryo and Yoshii (2007)** は、1経路1ボトルネックネットワークへと拡張した上で、出発時刻・経路の同時選択均衡問題が線形計画問題として置き換えられることを示し、問題の数学的な位置付けを明確にした。静的均衡配分問題における **Beckmann et al. (1956)** の業績と同様、これは均衡状態を求めるための効率的な数値計算法の開発に有用であるのみならず、均衡解の数理的特性を分析する上で有用な性質を持つ。実際に、これらの研究では問題の **Karush-Kuhn-Tucker (KKT)** 条件を調べることにより、均衡解の特性に関する幾つかの定理を導出した。また、**Iryo 2007** ではこの定式化の数理解析より、待ち行列が存在しない出発時刻パターンが、システム最適状態と等価であることが示されている。

隣接信号交差点制御

Gazis (1964) は、隣接する2つの信号交差点から構成されるネットワーク・システムを設定した。そして、過飽和状態における信号制御において、こうした複数の信号交差点を独立に制御することは全体の利用効率性の改善に繋がるとは限らないことを指摘している。また、累積曲線を用いた解析から、遅れ時間を最小化する戦略を解析的に導出している。

この研究では、信号制御されたネットワークにおける交通流の時空間ダイナミクスを簡明に取り扱う *store-and-forward* モデルを提案している。このモデルでは、信号交差点に接続したリンクの交通容量を飽和交通流率とスプリットの積で表している。これにより、本来信号の青時間のオン・オフパターンといった整数変数を扱うことなく、スプリットという連続変数を用いた信号制御パラメータの表現が可能となっている。なお、このネットワーク・システムにおける信号制御問題は後に D'Ans and Gazis (1976) により線形計画問題としての定式化が行われた。そして、数学的に厳密な形での最適な信号制御パラメータの導出方法や、より一般的な構造を持つネットワークへの拡張についての検討が行われている。

これらの研究は動的な交通流モデルを対象としたネットワークの利用効率性を最大化する問題の先駆けであり、それぞれ交通制御に関する有用な知見を残している。しかしその解析にあたっては、経路選択が存在しないネットワーク構造、あるいは利用者の経路選択行動が固定された状況を想定していた。そのため、ネットワーク制御において本質的な要素である、利用者の空間的な配分方法については有用な知見を得ることができないという限界が存在している*2。

こうした問題に対し、利用者の空間的な最適配分パターンを求める方法論として提案されたのが、動的システム最適配分である。

2.4 交通制御の微視的アプローチ：動的システム最適配分

動的システム最適 (Dynamic System Optimal: DSO) 配分問題は、ある計画時間帯におけるネットワーク・システム全体の総旅行時間を最小化する時々刻々のリンク・フロー・パターン（あるいは、それを実現するための制御パターン）を求める問題である。DSO 配分問題の定式化では、動的な交通流モデルに基づき、リンクレベルの交通状態の変化 (e.g., 待ち行列の時間進展) とシステム全体の交通性能との関係を精緻にモデリングしている。そのためこの問題の解は、動的ネットワーク交通流のベンチマークとしての意味を持つ

*2 交通制御が利用者の経路選択行動に与える影響を考慮する必要があることは、Allsop (1974); Dickson (1981) らにより指摘されていた。

みならず、各リンクの制御方策を理論的かつ具体的に考察する際の基礎となりうる。一方で、渋滞現象の表現に伴う数学的複雑さの結果、DSO 配分問題の特性解析や数値計算法の開発は、静的なシステム最適配分と比較して格段に難しくなっている。

本節では、DSO 配分問題に関する既存研究をレビューしながら、その定式化の特徴や解析の難しさについて説明する。

2.4.1 動的システム最適配分の一般的な枠組み

DSO 配分問題は、計画時間帯を $[0, T]$ とすると、一般的には次のような最適制御問題として定式化される：

$$\min. \sum_{ij \in \mathcal{L}} \sum_{t=0}^T c_{ij}(t) \lambda_{ij}^d(t), \quad (2.11)$$

subject to dynamic traffic flow modeling

such as $\left\{ \begin{array}{l} \text{Flow conservation at each node} \\ \text{Flow propagation conditions} \\ \text{Link travel time (or outflow) function} \\ \text{Other conditions (e.g., non-negative constraints)} \end{array} \right.$

ここで、 \mathcal{L} はリンク集合、 $c_{ij}(t)$ は時刻 t にリンク ij に流入した利用者のリンク旅行時間、 $\lambda_{ij}(t)$ は時刻 t におけるリンク ij への終点を d にもつ利用者に関する流入交通流率を表す。制約条件は動的なネットワーク交通流が満たすべき条件を示している。

制約条件の中のリンク旅行時間関数（または、リンク流出交通量関数）は、均衡状態の解説で言及したように、FIFO 原則および因果律に代表される動的な交通流モデルが有する自然な特性を満たしている。なお、DSO 配分問題に関する初期の研究では、FIFO 原則を満たさない“exit function”というモデルを用いた定式化や解析が行われていた (Merchant and Nemhauser, 1978a,b; Carey, 1987; Friesz et al., 1989)。しかし前述したように、こうしたモデルでは物理的に生じ得ない不可解な交通流が生じる。そのため、これらの解析結果はほとんど無意味なものであることには注意すべきであろう。

2.4.2 一般構造ネットワークを対象とした DSO 配分問題の困難さ

問題の非凸性と vehicle-holding 問題

DSO 配分問題は、概念的には静的なシステム最適配分問題の単純な拡張であるが、その特性の解明や計算法の開発は静的な場合と比較して格段に難しい。その大きな理由は、渋滞現象の表現にあたり、前述した FIFO 原則に代表される複雑な制約条件を満たすことが要求されるためである。これらの制約条件の結果、一般構造ネットワークでの DSO 配分問題は許容領域として非凸集合を持つことになる (赤松隆, 2007; Nie, 2011; Shen and Zhang, 2014; 赤松隆, 和田健太郎, 2014)。そのため、DSO 配分問題は通常非凸非線形の

計画問題となり，その大域的最適解を得ることが極めて困難な問題となっている (see for example, Lovell and Daganzo, 2000). これについて，Carey (1992) は，FIFO 原則が非凸性を招くことを指摘している．また，Erera et al. (2002) は，離散時間 DSO 配分問題が NP 困難性を持つことを指摘している．

こうした許容領域の非凸性を回避するためにしばしば行われる処置が，制約条件の緩和・線形化による問題の簡略化である．これは現在では主に，Cell Transmission Model (CTM) (Daganzo, 1994, 1995b,a) に基づく DSO 配分問題の定式化の文脈で行われている．具体的には，CTM では動的な交通流モデルの構成要素として，各セルのフロー保存則，およびセル $i-1$ から i への遷移フロー $y_i(t)$ を決定する Fundamental Diagram (FD) が与えられている（三角形型の FD を仮定．またこの詳細は，和田健太郎，瀬尾亨，中西航，佐津川功季，柳原正実 (2017) を参考）：

$$y_i(t) = \min \{uk_{i-1}(t), q_{max}, w[\kappa - k_i(t)]\} \Delta t. \quad (2.12)$$

ここで， u は自由流速度， k_i はセル i の密度， q_{max} は FD の容量， w は後進波速度， κ は飽和交通密度である．この式は非線形制約であり，問題の許容領域は一般に非凸集合となる．これに対し，Ziliaskopoulos (2000) は非線形の等式制約を次のような不等式制約に置き換えている：

$$y_i(t) \leq uk_{i-1}(t) \Delta t, \quad y_i(t) \leq q_{max} \Delta t, \quad y_{ij}(t) \leq w[\kappa - k_i(t)] \Delta t. \quad (2.13)$$

そしてこの緩和により，DSO 配分問題は線形計画問題に変換できることを主張している．

しかし，この問題では制約条件 (2.13) の 1 つは等式になることが保証されない．その結果，車両を任意の時点・位置で停止させることができるという，*vehicle-holding* 問題 (Doan and Ukkusuri, 2012; Zhu and Ukkusuri, 2013) が生じる（あるいは，道路管理者がそうした操作を任意に実行できることを仮定している）．こうしたフロー・パターンは，実行可能性の観点からは妥当であるとは言い難い．そのため，このような変換も動的な交通流モデルとしては不適切であり，DSO 配分の簡略化は依然難しい問題である．

なお *vehicle-holding* 問題に対してはいくつかの研究により解決の方法が提案されている．しかし，その多くは数値計算法レベルの提案であり，原問題の定式化レベルでの根本的な解決には至っていない．例えば，Nie (2011) は *holding* 問題に対して，Ho (1980) により提案された数値計算法が有効であることを主張している．Zhu and Ukkusuri (2013) は，経路選択がない単一終点ネットワークでは，目的関数にペナルティ関数を導入することにより *holding* 問題を解決できることを示している．しかし，一般的な構造を持つネットワーク上では FIFO 原則が満たされない場合が存在することを述べている．Shen and Zhang (2014) は単一終点ネットワークを対象とした解析から，*holding* 問題が生じているフロー・パターンは，総旅行時間を増加させることなく *holding-free* のフロー・パターンに変換できることを示した．そしてこの特性を利用し，*vehicle-holding* 問題が生じうる（し

かし数学的に良い性質を持った)問題を先に解き, その解から holding-free のフロー・パターンを求めるアルゴリズムを提案している.

経路フローを制御変数とする DSO 配分問題の定式化

交通流の解析にあたっての妥当性を担保しつつ, 許容領域の非凸性を回避するための方策としては, 制御変数として経路フローを用いた DSO 配分の定式化が存在する. この定式化では, システム最適配分の原則である, 利用されている経路の社会的限界費用を均衡させる, という配分原則に基づき, 時々刻々の各経路の流入交通流率を決定している (桑原雅夫, 2004; 赤松隆, 2007). すなわち, 前述した最適制御問題としての定式化の他に, 利用される各経路の時々刻々の社会的限界費用を等しくする均衡問題としての定式化が行われる.

この定式化の特徴は, 問題の許容領域が凸型の多面体 (polyhedral) に帰着することである (Qian et al., 2012; Shen and Zhang, 2014). これは, 制約条件が基本的なフロー保存則と状態変数の非負条件のみから構成されるようになるためである. 経路フローを用いた定式化では目的関数が非線形・非凸の経路旅行時間関数から構成されるため, 問題の数理構造は簡単になったわけではない. しかし, こうした許容領域を持つ均衡問題では, DUE 配分問題の解法でも用いられている近似的なアルゴリズムを適用できることや, 得られる近似解からは vehicle-holding 問題を排除できるという利点が存在している (Qian et al., 2012).

経路の社会的限界費用を求める問題としての定式化は, はじめに Ghali and Smith (1995); Peeta and Mahmassani (1995) などにより行われた. ここでは, まず各リンクの社会的限界費用を求め, それを足し合わせたものを経路の社会的限界費用と考える. そしてそれを各経路間で一致させるように配分することで最適パターンを近似的に得ることを提案している. しかし, この近似方法では限界費用が過大評価されることが既存研究から指摘されている (Shen et al., 2006, 2007). 一方 Shen et al. (2007) では, 分岐が存在せず, かつ動的な交通流モデルとして point queue モデルを適用したネットワークにおいて, 経路の社会的限界費用を正確に求める方法を提案している. この方法では, 経路に沿って各リンクの累積曲線を追っていくことにより限界費用を計算している. しかし, ネットワーク構造に強い仮定を置いていることが問題視されている. Qian et al. (2012) は Shen et al. (2007) の方法を多起点多終点に拡張する方法を提案した. しかし, この方法論では, 限界費用の導出は依然近似的なものとなっている.

Chow (2007, 2009a,b) では, 問題を数理計画問題として定式化した後, その KKT 条件を取ることで, 最適な経路フロー・パターンと社会的限界費用の関係性を数学的に示している. この中で, Chow (2007) では, 時々刻々の各経路への流入交通量の変化に対する総旅行時間の感度を計算する手順を構築している. そして, 経路フローの配分と感度分析を繰り返しながらシステム最適状態を実現するアルゴリズムを提案した. ただし, 単一ボトルネックを持つリンクが単一起終点ペアに平衡接続されたネットワーク (パラレルリ

ンク・ネットワーク)における出発時刻・経路の同時選択問題を対象としている。Chow (2009a)では、Chow (2007)の解析を一般構造のネットワークに拡張している。この中では、KKT条件からシステム最適の必要条件を導出し、その条件から、システム最適状態が時々刻々の各経路の社会的限界費用が均衡した状態と等価であることを数学的に示している。Chow (2009b)では、経路の社会的限界費用を導出することが難しいことを踏まえ、簡単なネットワークにおける現実的な課金施策がどれだけシステム最適に近いフロー・パターンを達成できているかを数値計算から考察している。

なお、動的システム最適配分問題の定式化の枠組みとしては上記にあげたもの以外にも、均衡制約付き最適化問題 (Mathematical Problem with Equilibrium Constraints: MPEC),あるいは二段階計画問題 (Bi-level programming)として定式化するものもある (e.g., Sun et al., 2006; Friesz et al., 2007; Lin et al., 2011; Ukkusuri et al., 2013; Yu et al., 2018)。具体的には、交通制御パラメータ (e.g., 信号制御パラメータ, 各リンクの混雑課金)を制御変数 (あるいは上位問題)とし、制約条件 (あるいは下位問題)として動的利用者均衡状態を採用した最適化問題として定式化を行なっている。しかし、これらの問題では非凸問題としての表現が避けられておらず、基本的に問題の難しさ (または、数理的性質の悪さ)はこれまでで提示した問題と同等以上となっている。そのためこうした問題からはネットワーク制御方策の構築や、それに向けた制御ロジックの導出はやはり困難なものとなっている。

2.4.3 ネットワーク構造を限定した DSO 配分問題の解析

以上のような DSO 配分問題の複雑さ・難しさを考慮すると、一般構造ネットワークでの特性を解決することは非常に困難であり、闇雲に定式化やその解法を探るのは、有益なアプローチであるとは言い難い。そのような考えに基づき、近年では、一般構造ネットワークからより限定された構造へと、解析条件を限定した上で、DSO 配分問題の解の特性を理論解析する研究がいくつか行われている。

こうした研究の代表例は、並行接続された複数のリンクから構成されるパラレル・リンク・ネットワークにおける解析である。こうしたネットワークは1経路にボトルネックが1つしか存在しないため、経路コスト、およびそのコストから導かれる最適フロー・パターンの解析は比較的容易となっている。桑原雅夫 (2002); Muñoz and Laval (2006)は、2本の並行接続されたリンク (経路) から構成されるネットワークでの DSO 配分パターンを、累積図を用いた図式解法 (*graphical solution* と呼ばれる) によって求めている。そしてその結果から、自由旅行時間の短い経路にその容量に等しい需要を配分し、残りを他方の経路に割り振るといった、DSO 配分の基本戦略を明らかにしている。Laval and Castrillón (2015)は同様の解析を行うとともに、システム最適配分を利用者均衡状態として達成するための、適切な混雑課金施策について考察を行っている。また Zhao and Leclercq (2018)

は3本の並行接続されたネットワークへと設定を拡張した上で同様の解析を行っている。そして、利用者に対し自由旅行時間が長いが容量が大きい経路へと迂回させるインセンティブ (e.g., 補助金) を適切に与えることにより、DSO 配分を均衡状態として達成させることができることを示している。

長江剛志, 赤松隆 (2007); Akamatsu and Nagae (2007) は, 桑原らの設定を動的不確実性を考慮した枠組みへと一般化し, リンク旅行時間が確率動的に変動する場合の最適ランプ制御ルールを考察している。この問題では DSO 配分問題を確率的制御問題として定式化したのち, この制御問題の解析から, 時々刻々の高速道路への最適流入フローを求めている。また, この問題の最適性条件を活用した数値計算方法を構築している。

Shen and Zhang (2009) は, ボトルネックを持つ複数のオン・オフランプ部から構成されるコリドー型のネットワークで, 出発時刻と経路の同時選択が可能な利用者の最適配分問題を解析している。この解析からは, DSO 配分におけるフロー・パターンの特性を, ネットワークのトポロジーと関係付けながら考察している。具体的には, DSO 配分パターンにおいては, 各時点において流出フローが存在するオフ・ランプは, 流入フローが存在するオン・ランプの必ず下流に位置していることを明らかにしている。そしてその結果から, DSO 配分の特性を解析するための構造を簡易化したネットワークへの変換方法を提案し, そのネットワーク上での解析から最適混雑課金戦略の導出を行なっている。

Zhang and Shen (2010) は経路選択構造がない単一終点ネットワーク構造を想定し, このネットワーク上における動的システム最適状態を調べている。ここでは動的な交通流モデルとして point queue モデルと CTM を適用した時の状態について比較し, 前者と後者では最小総旅行時間が同一となることを示している。特に point queue モデルでは, 制御を行わずとも最小総旅行時間が達成できることを示している。これは, point queue では待ち行列の延伸によるリンク性能の低下 (e.g., 捌け交通量の低下) が生じないため, ネットワークのどこで利用者を待たせても最終的な総旅行時間は変化しないためである。

2.5 巨視的アプローチ: Macroscopic Fundamental Diagram

ここまでで述べたように, 各リンク上の待ち行列の時間的な進展を詳細に表現するアプローチでは, 定式化される問題が非凸性を持つために, 一般構造ネットワークでの最適制御の方策を導出することは困難である。また, 前章でも述べたように, 動的なネットワーク交通流は本質的な予測不可能性を有している (Daganzo, 1996, 1998)。そのため, 詳細予測に基づく交通制御方策は脆弱性を抱えており, 信頼性のあるロバストな制御方策の構築もまた困難であることが既存研究より指摘されている。

これに対し, 都市レベルの複雑な道路ネットワークの運用・管理を可能とするために提案されたのが, 交通状態と性能との関係性を巨視的に捉える指標である Macroscopic Fundamental Diagram (MFD) である。MFD は, 各リンクの時々刻々の交通状態をネット

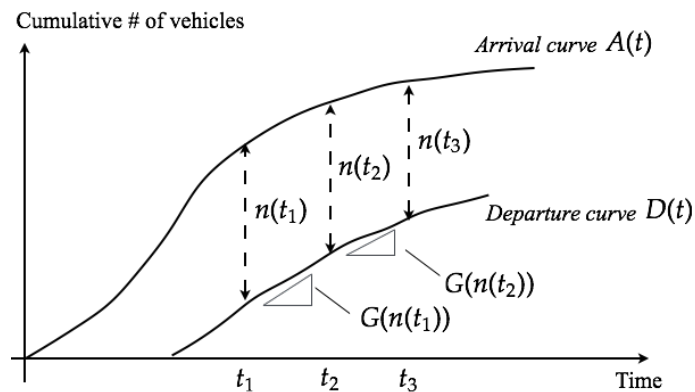


図 2.1: MFD 理論の基本仮説

ワークレベルで集計した結果現れる，両存在台数（または，空間平均交通密度）とネットワーク・スループット（または，空間平均交通流率）との，凸型の関数関係である．こうした関数関係からは，ネットワーク性能（スループット）が最大となる最適存在台数を把握できる．そのため MFD は，詳細予測に頼らない，観測情報（ネットワーク存在台数）ベースの信頼性のあるリアルタイム交通制御法構築の基礎となりうるものとして期待されており，近年盛んに研究が行われている．

本節では，MFD を取り扱った研究に関するレビューを行う．以下ではまず，巨視的に交通状態/性能関係を捉える考え方である MFD の背景にある理論について説明する．次に，MFD の特性（e.g., MFD の形状・容量の決定要因）解析に関して蓄積されてきた知見について概説する．最後に，MFD を活用したネットワーク交通制御に関する研究について簡単に説明する．

2.5.1 MFD の理論

MFD と NEF

Daganzo (2007) は，あるエリア内の交通ネットワーク・システムを 1 つの Input–Output システム（貯水槽）として捉えることにより，MFD の理論を展開している．具体的には，MFD の理論は，「システムへの交通需要（貯水槽への水の流入）の変化が緩やかであれば，そのスループット（貯水槽からの水の流出）は，システム内の車両存在台数（水位）の関数として近似的に表現することができる」という仮説に基づいている．

この仮説を図示したものが図 2.1 である．ここで， $A(t)$ はシステムへの累積流入台数， $D(t)$ は累積流出台数， $n(t)$ は車両存在台数を表す．システムの状態が変化するとき，流出率 $dD(t)/dt$ は，厳密には，流入率 $dA(t)/dt$ と存在台数 $n(t)$ の履歴に依存する．しかし，変化が緩やかなとき，その履歴依存性は弱まり定常状態に近い状態が実現するであろう．

そしてこのとき、流出率は、

$$\frac{dD(t)}{dt} \approx G(n(t)) \quad (2.14)$$

と書くことができる。 $G(n(t))$ は定常状態における存在台数と流出交通流率（スループット）との関係を表す関数であり、Network Exit Function (NEF) と呼ばれている。NEF の存在および式 (2.14) の関係が成立することが、MFD の理論の根本にある仮定である。

なお、NEF はスループットのデータを必要とするため、現実にはその把握は必ずしも容易ではない。そのため、NEF の代替としてエリア平均交通密度 \bar{k} と平均交通量 \bar{q} の関係である MFD, $\bar{q} = F(\bar{k})$, が実際には利用される^{*3}。これは、NEF と MFD は、エリア内の平均トリップ長が全 OD で等しいとみなせるとき、次のように関係づけられるためである： $G(n) = (l_{all}/\bar{l}) F(\bar{k})$ 。ここで、 l_{all} はエリア内の総リンク長、 \bar{l} は平均トリップ長である。このとき、MFD は単に NEF をスケール変換したものである。

NEF と MFD について注意が必要なのは、NEF はエリア内の車両の“処理量”というネットワーク性能を明確に表しているのに対して、MFD 単独では（何らかの交通流動性指標とはみなせるが）明確な性能指標とはならないということである。すなわち、MFD が制御上有用であるとされる理由は、上記で議論した NEF との関係が、適切に定義されたエリアでは成立すると考えられるためである。MFD のように、道路ネットワークの交通状態を巨視的な（集計的な）状態変数間の関係から把握しようとする発想自体は古くから存在する (e.g., Godfrey, 1969; Herman and Prigogine, 1979; Ardekani and Herman, 1987)。しかし、MFD では巨視的な存在台数と交通量との関係性とそのネットワークの交通性能（スループット）を関連付けているという点が、従来研究との相違点であり、またネットワークの動的な交通制御法を考える上で重要な点である。

スループットを交通性能指標とする既存研究について

交通性能指標として対象のネットワーク・システムのスループットに着目する研究は MFD 以前にも静的・動的な交通量配分の分野において幾つか行われてきている。静的なネットワーク交通流配分理論の分野では、Wong and Yang (1997) により、*reserve capacity* を最大化するという文脈で、スループットを最大化する問題が定式化されている^{*4}。Reserve capacity とは、各リンクに課せられた制約条件 (e.g., リンクへの最大流入交通流率) 等を満たすために、与件とする OD 交通需要のどれだけの割合を流入させて良いかを表す指標である。この研究では、信号交差点パラメータの制約 (e.g., 最小青時間) を満たしつつ、*reserve capacity* を最大化する二段階最適化問題を定式化している。なお、この定式化は後に Ziyou and Yifan (2002) により再定式化が行われている。また、Yang and Bell (1998) は

^{*3} 高速道路ネットワークのようにシステムへの流入が把握できる場合は、NEF を直接用いるべきであろう。

^{*4} なお、経路選択を考えない状況下での *reserve capacity* の最大化問題は、これ以前にも Allsop (1972); Yagar (1974) らにより定式化されている。

Braess ネットワークを対象にスループットを解析的に導出した後、スループットの観点から容量増強のパラドクスを考察している。近年では Wang et al. (2018) により、下位問題として確率的利用者均衡を設定した、信号最適制御の二段階最適化問題の定式化が行われている。ただしこれらは静的な枠組みであるため、交通渋滞の時間的な進展とその影響を捉えられる枠組みではない。

スループットを最大化する制御として最も有名なものの一つは、Smith による自律分散型の信号制御方策 *Policy P_0* であろう。Policy P_0 は、はじめ Smith (1979a,b) により静的配分の枠組みの下で定式化された。この信号制御では、信号交差点に流入する各リンクについて、飽和交通流率と遅れ時間の積である *pressure* を求める。そして、この *pressure* が各流入リンクで平等化するようにスプリットを割り振る方向を決定している。この方策は後に動的な交通流モデルを対象にも拡張されてきており (Smith, 1987; Smith and Mounce, 2011; Smith et al., 2013, 2015), 数値計算などを通して、ネットワーク容量を最大化する方向へとスプリットを割り振ることができることが確認されてきた。しかしこれらの研究では、主に非常に単純な単一終点ネットワークにおける解析が行われており、局所的な交差点容量の最大化を通して、ネットワーク容量の最大化を達成できることを述べている。一方で多終点ネットワークでは、ある交差点への流入フローの制御が、その交差点の上流側のリンクフローに影響を与えることが知られている (Akamatsu and Heydecker, 2003b)。そのため、より一般的な構造のネットワークにおいて制御方策が有効に働くかどうかは未解明なところが多い。

2.5.2 MFD の特性解析に関する研究

前節で述べた MFD の理論を踏まえると、後述する MFD を用いた交通制御が有効であるためには、次の2つの事項が要求される：(1) MFD が制御自体によって大きく変化しないこと、および(2) 平均トリップ長が一定であり空間平均交通流率がスループットの代替として適切であること（あるいはスループット自体が把握できること）。従って、「どのような条件下で空間平均交通流率（スループット）のばらつきの小さい *well-defined* MFD が成立するのか？ またその容量や形状が生じる背景にはどのようなメカニズムがあるのか？」といった MFD の形状決定要因やメカニズムを把握する必要があるだろう。加えて、「平均トリップ長が一定であるのはどういった交通状況のときなのか？」といった、空間平均交通流率のスループットに対する代替可能性についても把握が必要となる。

本節では、MFD のこうした特性に関する既存研究に関して概説する。

MFD の形状決定要因

前者の MFD 形状については、MFD の特性解析に関する研究の多くが関心を寄せている議題である。これについては、MFD の自由流領域（存在台数が最適存在台数より少な

い状況)では、交通需要が供給サイドの条件に制約されずに流れる状況であるため、その形状は道路ネットワークの平均自由流速度で決定される。一方で、MFDの臨界領域(最適存在台数付近の状態)や渋滞領域では状況がやや複雑である。しかし幾つかの研究の成果により、時々刻々のネットワーク内の“リンク交通密度分布(密度レベル別のリンク数の頻度分布)”がその形状を特徴づける1つの鍵となることが明らかになってきている。

Geroliminis and Sun (2011b)は横浜エリアのデータを用いて、同一のエリア平均密度に対して異なる日時で実現するリンク密度分布が(統計的に)同一であればwell-defined MFDが成立することを示した。これは同時に、ネットワーク上の“空間的な渋滞パターン”に一定の再現性があることを示唆している。実際、王鵬飛, 赤松隆, 和田健太郎 (2015)は、(well-defined) MFDの渋滞領域発生時にはおおよそ同じ空間的な渋滞パターンが発現していることを、那覇市中心部の実測データを使って確認している。Buisson and Ladier (2009); Geroliminis and Sun (2011a)は、同一エリア存在台数下の渋滞パターンが異なる(i.e., リンク交通密度分布も異なる)ことで、MFD上にヒステリシス・ループが発現すること(i.e., 同一のエリア平均密度に対して複数の平均交通量が存在すること)を実証的に示している。特にGeroliminis and Sun (2011a)は渋滞パターンに加え、各リンクの実際の捌け交通量の再現性もMFD形状に大きく影響しうることを示唆している。

また、Mazlounian et al. (2010); Daganzo et al. (2011)では、ネットワーク上の混雑の偏りを表すリンク密度分布の分散に着目し、その分散の増加とともに同一平均密度下の平均交通量が低下することを、それぞれ、シミュレーション、理論分析により明らかにしている。後者については、その後Gayah and Daganzo (2011)により理論解析モデルの拡張が行われており、ヒステリシス・ループの発現メカニズムを理論的に説明することに成功している。また、混雑の偏りを表す別の指標である、待ち行列の延伸数(i.e., 上流リンクの先詰まりを引き起こすリンク数)の増加と平均交通量の低下にも同様の関係があることもわかっている(Mazlounian et al., 2010)。さらに、これらの関係は現実の高速道路/一般道路ネットワークにおいても成立することが、長期間観測データを用いて実証的に確認されている(Knoop and Hoogendoorn, 2013; 王鵬飛 et al., 2016)。

以上のように、リンク交通密度分布、およびその分散とMFD形状との相関関係については、いくつかの重要な知見が蓄積されつつある。しかし、リンク交通密度分布はあくまで集計化された指標であり、混雑の空間的な接続関係(空間的な渋滞パターン)は捨象されている。そのため、マクロなMFDの形状に、よりミクロな状態である渋滞パターンやその変化が影響を与えるメカニズムは、十分に明らかになっていない。

これに対し、様々な交通流モデリングに基づくシミュレーション・理論分析を通して、ミクロな交通状態とマクロな交通性能との関係を詳細に分析することを試みている研究も存在する。例えば、Jong et al. (2013)はミクロ・シミュレーションによる分析からMFD形状を分析することを試みている。同様に、Leclercq et al. (2015)はシンプルなネットワーク上でOD交通需要パターンを系統的に変化させながら、MFD形状がどのように変化する

るのかを考察している。しかし、渋滞パターンはネットワークのトポロジー、OD分布、リンク容量パターンや経路選択など様々な要因に影響を受けており、こうしたシミュレーションを用いた分析は依然相関関係の議論に留まっている。

また、より理論的な研究として Leclercq and Geroliminis (2013) は、利用者の経路選択の違いやその結果としての渋滞パターンが MFD 形状に与える影響を、MFD の近似解析方法 (Daganzo and Geroliminis, 2008) と経路選択均衡モデルを組み合わせて分析している。しかし、その解析は並行経路を持つ 1 起点 1 終点のネットワークに限定されている。加えて、この解析で用いられている MFD の近似解析方法は極めて単純な単一道路区間の解析結果に基づいており、現象理解の鍵とされる混雑の空間的な分布を取り扱える枠組みではない。結果として、混雑の空間的な分布と MFD との関係においては、明確な結論を得るに至っていない、というのが現状である。

MFD と平均トリップ長

一方、もう一つの MFD の特性である「空間平均交通流率のスループットに対する代替可能性」については、注目している研究は多くはない。しかし既存研究のほとんどは、実証・シミュレーション分析を通して、空間平均交通流率とスループットの比例関係は一定であることを述べている。例えば、Geroliminis and Daganzo (2007); Mahmassani et al. (2013) は、それぞれサンフランシスコ・シカゴのネットワークデータを用いたシミュレーションから、空間平均交通量とスループットがほぼ定数比例していることを示している、i.e., 平均トリップ長は一定である。Geroliminis and Daganzo (2008) は、横浜エリアの実データを分析し、空間平均交通量とエリアの時々刻々のスループットの比が 1 日を通じて一定であることを述べている。

しかしながら、近年では、利用者の経路選択行動や OD 交通需要パターンが、平均トリップ長に大きく影響を与えうるということが、シミュレーション研究から指摘されている (Yildirimoglu and Geroliminis, 2014; Leclercq et al., 2015)。Yildirimoglu and Geroliminis (2014) は、利用者均衡状態を近似的に計算し、利用者が混雑を予見して経路選択をとっている場合、平均トリップ長が時々刻々で大きく変化していることを示している。また Leclercq et al. (2015) は、トリップ長が長い OD の比率が大きいほど、平均トリップ長も長くなることをシミュレーションから確認している。これらの結果からは、制御・施策などで OD 交通需要や利用者の経路選択行動が変化した場合、平均トリップ長もまた変化しうるということが確認できる。

従って、MFD を活用した制御にあたり重要な要素である平均トリップ長（あるいは、ネットワーク・スループットそのもの）は、制御・施策の導入によりその特性を大きく変じることが示唆される。しかし、そもそも平均トリップ長、あるいはスループットを取り扱った研究は少なく、やはりこれらの特性については明確な結論を得るには至っていない。そのため、空間平均交通量とスループット相関の実証的な研究は大いに望まれている。

といえるだろう。

以上をまとめると、MFDを活用した制御にあたって重要なMFDの形状、および平均交通流率のスループットに対する代替可能性は、それぞれ渋滞パターン、平均トリップ長の再現性が大きく関わっていることがわかる。しかし一方で、交通制御を行なったときにそれらが再現されているか、また仮に変化したとしてそれらがどのようにスループット制御に影響を与えるのか、といった知見については十分に明らかとなっていない。そうした現状の中、既存の制御研究の多くは、これらが制御に対して不変であると仮定してその解析を進めている。次節ではMFDの制御研究に対するレビューを行なっていくが、その根底にはこうした仮定が存在していることは注意すべきである。

2.5.3 MFDを活用した交通制御

本節のはじめに示した通り、MFDはネットワーク内の存在台数についての制御指標を提供する。そのため、MFDは主に、ネットワークに対してどれだけの交通量を入れて良いか、といった流入制御に用いられる。以下では、こうした流入制御に関する既存研究を整理していく。

なお、MFDに関係する既存研究としては、ネットワークレベルの密度-速度関係を応用して、出発時刻を選択する利用者のネットワーク流入時刻を混雑課金により制御する研究などが存在する (e.g., Geroliminis and Levinson, 2009; Arnott, 2013; Fosgerau and Small, 2013; Fosgerau, 2015; Lamotte and Geroliminis, 2017)。ネットワークレベルの密度-速度関係は trip-based MFD、または bathtub model とも呼ばれ、ネットワーク内の利用者の時々刻々の速度がその時点での密度に依存することを利用して、具体的には、ネットワーク内の存在台数を適切な存在台数に保つことで各利用者が持つトリップ長をより早く消化させる (i.e., トリップを終える) 制御を行なっている。ただしこれらの研究は、非定常状態が引き起こすネットワークの履歴依存性を明示的に取り扱っている。そのため、MFDの当初の目的であるリアルタイムな観測データに基づくスループット制御とはやや逸脱した別路線の研究とも考えられるため、本章ではここでの紹介に留めることにする。

論理制御・線形制御

MFDを用いた交通制御のうち最も簡潔なものの一つは、Daganzo (2007) が提唱したネットワーク内の存在台数に基づく論理制御システムである。この制御システムでは、制御対象とするネットワーク内の存在台数を、MFD上においてスループットを最大化する最適存在台数 (あるいはその近傍) に維持するための次のようなルール (*AB-rule*) に従い、流入交通量を制御することを提案している: 存在台数が最適存在台数より多い場合、流入をゼロにする。そうでない場合、最適存在台数を超過しない分だけネットワークに流入させる。ただし、この制御ルールに対し Keyvan-Ekbatani et al. (2012) は、制御対象ネット

ワーク内で需要が発生する場合を考慮すると、最適存在台数を超過しない流入交通量を求めるのは困難であることを指摘している。そして実装しやすい bang-bang 制御（オン・オフ制御）の形で制御ルールを再構築することを提案した：

$$q_{in}(t) = \begin{cases} q_{min} & \text{if } n(t) > \hat{n} \\ q_{max} & \text{else} \end{cases} \quad (2.15)$$

ここで、 $q_{in}(t)$ は時間帯 t の流入可能交通流率、 q_{min} , q_{max} はそれぞれ、制御値の下限・上限値である。 $n(t)$ は時間帯 t はじめのネットワーク内存在台数、 \hat{n} は最適存在台数である。なお bang-bang 制御は、制御値である存在台数が目標値である最適存在台数の上下において振動するのを回避できない。ただし、最適存在台数を範囲として取り、その範囲が十分広ければ、実装される制御の効率性には大きな影響は与えないとされている。

Bang-bang 制御は MFD を用いた最も直感的な制御であり、その有効性は実際に数値計算を通して確認されている (Wada et al., 2018)。しかし、流入交通量が最大値と最小値で頻繁に切り替わる制御は、道路利用者・管理者の双方にとって望ましくない制御であるのも事実である。これに対して Keyvan-Ekbatani et al. (2012) は、より滑らかな制御値を与えるフィードバック型の制御システムを提案している。この制御システムの構築にあたっては、まず、非線形の微分方程式で記述される、MFD に基づくダイナミクスを適用したネットワーク・システムを、最適存在台数近傍で線形近似する。次に線形近似されたシステムから、スループット最大化や混雑の一様分布など、交通性能指標の最適化を通すことで、フィードバック制御機を構築する。この研究では、ネットワークへの総流入交通量に関する次の PI 制御器を構築した：

$$q_{in}(t) = q(t-1) - K_P[n(t) - n(t-1)] + K_I[\hat{n} - n(t)]. \quad (2.16)$$

$q(t)$ は時間帯 t において実際に流入した交通流率、 K_P , K_I は制御パラメータ（ゲイン）である。

フィードバック制御では、システムの状態を保つ基準となる目標値や、目標値と現在の偏差に対してどれだけ制御するのかを決めるゲインの設定に簡易でない作業を必要とする*5。一方で、計算負荷の高い計算や将来予測を必要としないためリアルタイム制御としての実装が容易である、制御値が滑らかであるため現実での実装に耐えうる交通制御として実用的であるなどといった利点を保つ。

上記の研究の拡張として、Keyvan-Ekbatani et al. (2015a) は、流入制御を行う場所と制御対象とするエリアとの間に距離があり、制御に時間遅れが生じるケースを想定し、適切

*5 適切なゲインの決定基準としては、いかに早く目標値付近で定常状態に達するか、入力値が変動してから出力値が応答するまでの時間（無駄時間）・出力値が応答し始めてからの変化の速度（時定数）の最適化、または制御のオーバーシュート（目標値を行き過ぎる現象）やハンチング（目標値付近で振動する現象）を防ぐための値、制御値やシステムの安定化などである。一般的な制御対象に対して、最適なゲイン値を与える代数的な方法は存在せず、数値シミュレーションなどを通して試行錯誤的に行う必要が有ることに注意されたい。

なゲインを得るための方法について説明している。Haddad and Shraiber (2014) は、あらかじめ最適存在台数が分からないような、MFDの形状にゆらぎがある (i.e., 動的システムが不確実性を含む) ことを想定したときの、ロバストなフィードバック制御法を提案している。また Keyvan-Ekbatani et al. (2013) は、対象ネットワーク内の交通状態が完全にわからず、限られたリンクの交通情報しか得られないときのフィードバック制御の効果について考察している。

ここまでの制御は制御対象とするネットワークが単一のケースを取り扱っていたが、それぞれ独自のMFDを持つ、複数の隣接したネットワークを対象としたフィードバック制御も考察されている。ここでは、あるネットワークへの流入制御は、別のネットワークの流出を制限することになるため、それを考慮したフィードバック制御器を構築する必要がある。Aboudolas and Geroliminis (2013) は、複数ネットワークの混雑度合いを均質化するようにフィードバック制御器を構築している。より具体的には、あるネットワーク i の最適存在台数に対する現時点での存在台数比率 $n_i(t)/\hat{n}$ が、ネットワーク間で均質化するように制御問題を構築している。Keyvan-Ekbatani et al. (2015b) は、制御対象とするネットワークを階層的に制御するときのフィードバック制御法を構築している。この制御法では、制御対象とするネットワーク内に待ち行列の延伸元であるボトルネックを多く含むエリアが存在し、そのエリアに対する流入交通量をより細やかに制御することを想定している。加えて、待ち行列が延伸することで割り当てた容量に無駄が生じる場合の、個々のランプの容量割り当ての方法を考察している。Haddad (2015) は、Haddad and Shraiber (2014) の制御法を複数ネットワークの場合へと拡張した。また近年では Haddad and Zheng (2018) により、動的システムに不確実性、および動的システムの制御と出力に時間遅れが生じるときの制御方策が構築されている。

モデル予測制御

さて、ここまではいわゆる古典制御に属する制御理論に基づくMFD制御方策を説明した。一方で、制御対象とする動的システムの状態空間 (i.e., 動的システムの状態推移を表す状態方程式) を明示的に取り扱う現代制御に属する制御理論に基づくMFD制御方策も構築されている。より詳細には、モデル予測制御 (*Model Predictive Control: MPC*) に基づくMFD制御方策が構築されてきている。MPCは、各時刻において、有限区間時間の最適制御問題を解きながら、制御値を決定する制御手法である。ここでは制御値を求めることは、各時刻での状態を与件とした上で、制約付き最適化問題を解くことに帰着されている。そのため、最適制御問題でありながら、フィードバック制御としての性質を併せ持つという特徴を持っている。すなわち、最適化の計算結果と実際のフロー・パターンのずれを把握した上で、その情報を用いてリアルタイムに適切な交通制御を行えるよう、制御値を調整していくことができる、i.e., OD交通需要や交通状態の予測と実際とのずれに対してロバストに制御を行うことができる。

古典制御と比較すると、MPC は最適化の中に様々な制約条件 (e.g., 制御値の下限・上限) を組み込むことができる、制御パラメータのチューニングなどの手間を必要としない、といった点で利点がある。一方で、制御値を決定するために、各時刻で制約付き最適化問題を解く必要がある。そのため構築した制御方策を実際に活用することを考えると、リアルタイムな制御を可能にするだけの効率が良い計算方法が必要であることには注意されたい。

MPC と MFD を組み合わせた制御方策について、Geroliminis et al. (2013) は、2つのネットワークの流入出交通量を制御する問題を構築している。また Haddad et al. (2013) では、都市内街路を想定した2つのネットワークと1つの高速道路から構成されるエリアを制御する方策を構築している。この制御問題では、高速道路上のダイナミクスは単一路線のCTMにより表現されるものとしている。そして、MPCによりネットワーク間の流入出交通量(信号制御を想定)・各ネットワークから高速道路への流入交通量(ランプ制御を想定)の制御値をリアルタイムに求める制御を提案した。さらに Ramezani et al. (2015) は、制御対象となるエリア内の混雑やトリップ長が一様でないケースにおける制御方策を構築している。

2.6 本章のまとめ

以上のように、道路ネットワークの動的な交通制御方策について様々な方法が構築されてきているものの、信頼性のある交通制御法については未だ有用性のある知見が得られていないのが現状である。微視的なアプローチでは、一般構造ネットワークにおける最適制御は非凸非線形の計画問題に帰着し、大域的最適解を得ることが極めて困難である。加えて、たとえ最適解が得られたとしても、詳細予測に基づく交通制御は本質的に脆弱性を抱えるという欠点を持つ。

一方巨視的なアプローチでは、一度制御対象とするネットワークのMFDが得られたのであれば、そのMFDを通して観測情報である存在台数からリアルタイムに交通性能を把握できるという利点を持つ。しかし、MFDの形状がネットワーク上の各リンクの交通制御によりどのように変化するのかといった形状決定メカニズムや空間平均交通流率のスループットに対する代替可能性などの、MFDの理論については未だ発展途上であるところが多い。それにも関わらず、MFDを活用した交通制御法の多くは、MFDの形状が不変でありかつトリップ長も一定であるという仮定に基づいている。そのため現在の巨視的なアプローチは、各リンクをどのように制御すべきか？その制御はネットワーク性能にどのような影響を与えるのか？といった制御を実装する際に考慮すべき要素を無視し、MFD理論にとって理想的な状況のみを対象として制御法を構築している、という状況にあるといえるだろう。これは、MFDからは各リンクの具体的な交通制御法を把握できないという問題にもつながっている。

これらに対し、本研究では渋滞パターンに基づくスループットの理論解析法を構築する；そして渋滞リンクの捌け交通量の変化がスループットに与える影響とそのメカニズムを解明した上で、スループットを改善する交通制御法を構築している。本研究のモチベーション自体は、リアルタイムな交通情報に基づくスループットの改善・低下防止、といった、巨視的なアプローチのものを受け継いでいる。しかし、本研究では現象理解の鍵である渋滞パターンに着目し、それとスループットとを繋ぐ理論を構築している。すなわち、ネットワークの（微視的な）空間的要素（e.g., ネットワーク構造, 起終点分布, 混雑分布）と交通性能との関係（i.e., MFD 形状決定メカニズム）を解析的に明らかにするための理論的基盤を提供している。さらに、構築した渋滞パターンの理論解析法からは、混雑したネットワーク全体の交通性能を特徴づける渋滞リンクを特定することができる。各渋滞リンクの交通制御法に関して系統的な方針を提供できることは、本研究の大きな特徴であるといえる。加えて、本研究では交通性能指標であるスループットを直接推定し制御していることも、既存研究とは異なる点である。

ただし、本研究で提案する渋滞パターンの解析法は、前章でも述べたように DUE 配分問題の時間分解法に基づいている。そのため、解析対象となるネットワーク構造については依然限定的であり、現実のネットワーク上の交通混雑/渋滞に対して直接的な解決策を示すものではない。しかし、ネットワークの巨視的な特性であるスループットを微視的な交通状態から解析する理論の基礎的な枠組みを示すことは、今後より一般的なネットワークでの交通制御法を考察する際にも有効であるといえるだろう。

第3章

粒子モデルにおける動的利用者均衡配分問題の時間分解特性

3.1 はじめに

第1章でも述べたように、本論文では DUE の時間分解法 (Kuwahara and Akamatsu, 1993) を適用できる構造をもったネットワークを対象とした解析を行う。DUE の時間分解法とは、単一起点あるいは単一終点といった特殊な構造を持つネットワークにおいて、DUE 配分問題を基準となるノードからの出発時刻別に分解して解く方法である。例えば、単一起点ネットワークでの DUE 配分問題は、唯一の起点からの出発時刻に関して分解することができる；起点出発時刻に関して、前向きに逐次的に解いていくことができる。これは、DUE 状態における均衡ノード到着時刻の特性とリンクモデルの性質 (e.g., FIFO 原則・因果律) から、ある時刻に起点を出発する利用者が経験する旅行時間は、より遅く出発する利用者の影響を受けないことが保証されるためである。

時間分解法は主に、交通流を流体のような連続したフローとして捉える「流体モデル」を前提として定式化された動的配分問題の解析に用いられてきた。例えば均衡解の数理特性解析 (Akamatsu, 2000; Akamatsu et al., 2015) や効率的な数値計算法の構築 (Akamatsu, 2001; Waller and Ziliaskopoulos, 2006) などである。一方井料隆雅 (2011) と佐津川功季, 和田健太郎 (2017) は、車両一台一台を分割不可能な交通流の構成要素として取り扱う「粒子モデル」を前提として定式化された動的配分問題 (これを DUE ゲームと呼ぶ) に対しても、流体モデルと同様の DUE 配分問題の分解が可能であることを示している。これは「順序配分アルゴリズム」という均衡解への収束性が保証されたアルゴリズムとして整理されており、次章で行う均衡解の安定性解析にあたっての基盤となる方法論である。

ただし、順序配分アルゴリズムを用いた解析を行うためには、解析対象となるネットワークにおける適用可能性を示す必要がある。そして、本研究の対象である *unidirectional network* では、流体モデルでの時間分解法の適用可能性が示されている一方、順序配分ア

ルゴリズムの適用可能性は示されていない。そのため、unidirectional network における安定性解析を行うためには、その適用可能性を明示的に示す必要がある。

本章では、unidirectional network の定義と粒子モデルにおける DUE 配分問題の時間分解特性を示す。以下ではまず、3.2 で、出発時刻を固定した粒子モデルにおける動的利用者均衡配分問題 (DUE ゲーム) を定式化する。DUE ゲームは、「ネットワーク」、「プレイヤー (車両) 集合」、「各プレイヤーの戦略集合 (経路選択肢集合)」、および「戦略の利得 (経路旅行時間)」の要素から構成されている。また、このゲームは非協力ゲームであり、動的利用者均衡状態は Nash 均衡状態として定義される。次に 3.3 では、順序配分アルゴリズムについて説明する。そして 3.4 では、unidirectional network の定義と特性について概説した後、順序配分アルゴリズムの適用可能性を示す。3.5 では、本章のまとめを行う。

3.2 DUE ゲームの定義

3.2.1 ネットワーク

本稿で取り扱うネットワークは、ノードと有向リンクから構成される。ノードの集合を \mathcal{N} 、有向リンクの集合を \mathcal{L} とする。また、起点、終点ノードの集合をそれぞれ、 $\mathcal{N}_o, \mathcal{N}_d$ と表す。あるノード a からノード b への、全ての acyclic な経路集合を $\mathcal{R}(a, b)$ と表す。なお、ノード a からノード b への経路が存在しないとき、 $\mathcal{R}(a, b) = \emptyset$ である。また、ある経路 r に含まれるノード、リンクの集合をそれぞれ $\mathcal{N}(r), \mathcal{L}(r)$ と表す。

3.2.2 車両集合

車両は離散化されており、一台一台を分割不可能な交通流の構成要素として取り扱う。全車両の集合を \mathcal{P} 、総台数を $|\mathcal{P}|$ と表す。車両 $i \in \mathcal{P}$ の起終点ノード o_i, d_i 、及び出発時刻 s_i は外生的に与えられる。ただし、同一起点から同一時刻に出発する車両は存在しないものとする、i.e., $o_i = o_j$ ならば $s_i \neq s_j$ とする。

3.2.3 経路選択肢集合

ある車両 i は、起点 o_i と終点 d_i を結ぶ任意の acyclic な経路を選択できる。車両 i の経路選択肢集合を \mathcal{R}_i で表す (なお、 $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}(o_i, d_i)$)。この経路選択肢集合には、車両 i をまだ配分していない (i.e., 起点を出発していない) ことを示す選択肢 ϕ_i も含まれる。全車両が選択した経路を並べたベクトルは \mathbf{r} で、車両 i 以外の経路選択を並べたベクトルは \mathbf{r}_{-i} で記述する。この経路ベクトルは $\mathbf{r} = (r_i; \mathbf{r}_{-i})$ のように、 r_i と \mathbf{r}_{-i} を束ねた記述も行う。また、 \mathcal{R}_i の全車両に対する直積集合を $\mathcal{R} = \prod_{i \in \mathcal{P}} \mathcal{R}_i$ と定義する。

3.2.4 経路旅行時間

各車両の利得は、経路の一般化交通費用の符号を逆にしたものとする。本稿では各車両の出発時刻は固定されているため、一般化交通費用として目的地到着時刻を用いることは旅行時間を用いることと等しい。そのため本稿では、終点到着時刻を一般化費用として用いることとする。

車両 i 以外の経路選択が \mathbf{r}_{-i} であるとき、車両 i が経路 $r_i \in \mathcal{R}$ を利用することで自身の終点 d_i に到着できる時刻を $g_i(r_i; \mathbf{r}_{-i})$ と表す。車両 i の経路選択が ϕ_i である (i.e., 起点を出発していない) とき、終点到着時刻は無限大であるとする, i.e., $g_i(\phi_i; \mathbf{r}_{-i}) = \infty$ 。また、車両 i が経路 r_i を利用するときの、ノード $n \in \mathcal{N}(r_i)$ の通過時刻を $u_n(o_i, s_i, r_i; \mathbf{r}_{-i})$ と表す。

各車両の終点到着時刻、およびノード到着時刻は、各車両の経路選択ベクトル \mathbf{r} を与件として、動的な交通流モデルを適用することにより計算される。適用するモデルは、動的な交通流を表現するための適切な条件 (e.g., FIFO 原則, 因果律) を満たすものであれば任意のモデルを使用できる。また、待ち行列の延伸を考慮したモデルも適用することができる (e.g., the car-following model, Newell, 2002)。

3.2.5 Nash 均衡

上記の設定の下、動的利用者均衡状態は、(純粋戦略) Nash 均衡として定義される。Nash 均衡状態では、全ての利用者は、選択している経路を単独で変更するインセンティブを持たない状態となっている。すなわち、相手が選んでいる経路選択に対して、自身の終点到着時刻 (i.e., 経路旅行時間) を最小化する最適反応を取っている状態である。このとき、均衡状態 \mathbf{r}^* は次を満たす経路選択状態として表される：

$$g_i(r_i^*; \mathbf{r}_{-i}^*) \leq g_i(r_i; \mathbf{r}_{-i}^*), \quad \forall r_i \in \mathcal{R}_i, \forall i \in \mathcal{P}. \quad (3.1)$$

また、単に最適反応となっているだけでなく、他の経路選択よりも厳密に経路旅行時間が小さい (i.e., 式 (3.1) の不等号がイコールなしで成立する) とき、 \mathbf{r}^* は狭義ナッシュ均衡状態であるという。

3.3 順序配分アルゴリズム

交通流の粒子モデルにおける時間分解法は、井料隆雅 (2011) により「順序配分アルゴリズム」という均衡解の解法として提案されている。このアルゴリズムではまず、初期設定として全ての車両が経路を選択していない (i.e., ネットワークに配分されていない) 「未配分車両」である状態を考える。ある車両 i が未配分車両であることは、 i が経路 ϕ_i を選択している状態であることである。また、車両の経路選択ベクトルが \mathbf{r} のときの未配分車両

の集合を、 $\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r})$ で表わす。次に、均衡解を導出するための適切な配分順序付けを各車両に行い、その順序どおりに未配分車両を一台ずつネットワークへ順次配分する。そして全ての車両を配分し終わったときの経路選択ベクトルを Nash 均衡状態として導出する。

順序配分アルゴリズムでは、「最早未配分車両」という概念を活用して、配分順序づけを行う。最早未配分車両とは「最短経路上のどのリンクへも他の未配分車両よりも早く流入できる」未配分車両である。この定義をフォーマルに記述するために、まず「最早ノード到着時刻」、及びある車両の「最短経路」を次のように定義する：

定義 1. (最早ノード到着時刻) ある経路ベクトル $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ を考える。また、ある車両 i の経路選択枝集合 \mathcal{R}_i に含まれるいずれかの経路一本以上に含まれるノードの集合を \mathcal{N}_i と表す、i.e., $\mathcal{N}_i = \{n \mid n \in \mathcal{N}(r), r \in \mathcal{R}_i\}$ 。このとき、車両 i がノード $n \in \mathcal{N}_i$ に最も早く流入できる時刻：

$$u_n^*(o_i, s_i; \mathbf{r}_{-i}) = \min_{r \in \{r' \mid r' \in \mathcal{R}_i, n \in \mathcal{N}(r')\}} u_n(o_i, s_i, r; \mathbf{r}_{-i}). \quad (3.2)$$

を「最早ノード到着時刻」と呼ぶ。

定義 2. (最短経路) ある経路ベクトル $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ を考える。このとき、ある車両 $i \in \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r})$ の最短経路を、以下を満たす経路と定義する：

$$r_i^* \in \arg \min_{r \in \mathcal{R}_i} g_i(r; \mathbf{r}_{-i}), \quad (3.3)$$

$$\text{s.t. } u_n(o_i, s_i, r_i^*; \mathbf{r}_{-i}) = u_n^*(o_i, s_i; \mathbf{r}_{-i}), \quad \forall n \in \mathcal{N}(r_i^*). \quad (3.4)$$

これは、ある車両が最短経路を走行しているとき、経路に含まれる全てのノードへ最短旅行時間で到着することを意味している、i.e., 最短経路上で dynamic programming 原理が成立している。時刻 s に終点 d に向けて起点 o を出発する車両の最短経路集合を $\mathcal{R}^*(o, s, d; \mathbf{r})$ と表す。

これらの定義を用いて、最早未配分車両は下記のように定義される：

定義 3. (最早未配分車両) ある経路ベクトル $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ を考える。ある未配分車両 $i \in \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r})$ の最短経路のうち、次の条件を満たす最短経路 \bar{r}_i^* が存在するならば、車両 i は最早未配分車両である：

$$u_n(o_i, s_i, \bar{r}_i^*; \mathbf{r}_{-i}) \leq u_n^*(o_j, s_j; \mathbf{r}_{-i}), \quad \forall n \in \mathcal{N}(\bar{r}_i^*) \cap \mathcal{N}_j, \forall j \in \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{r}) \setminus \{i\}. \quad (3.5)$$

なお、 $|\bar{\mathcal{P}}| = 1$ ならば、その未配分車両は最早未配分車両であるとする。

最早未配分車両 i は、式 (3.5) を満たす最短経路 \bar{r}_i^* を利用することで、その経路上の全てのノードに、他の任意の未配分車両より遅くなく到着する。この性質と動的な交通流モデルの FIFO 原則および因果律を組み合わせると、最短経路 \bar{r}_i^* の旅行時間は、他の未配分車両の経路選択に影響されないことが保証される。そのため、全ての未配分車両のうち、

先に最早未配分車両を最短経路に配分すれば、後から配分される車両は先に配分される車両を追い越すことがないことが保証される, i.e., 最早未配分車両は未配分車両の中で, 均衡解を導出するための最も早い配分順番を保有している. 結果として, 最早未配分車両を順次最短経路に配分することにより, どの車両も事後的な最短経路を選択している状況が達成される (i.e., Nash 均衡状態 (3.1) が実現する). この考え方にに基づき, 順序配分アルゴリズムは以下のように構築される:

順序配分アルゴリズム

0. 初期設定: $n = 0$ とし, 経路ベクトル \mathbf{r}^n を $r_i^n = \phi_i$ ($\forall i \in \mathcal{P}$), 未配分車両の集合を $\overline{\mathcal{P}}(\mathbf{r}^0) = \mathcal{P}$ とする.
1. 配分車両の決定: 経路ベクトル \mathbf{r}^n を与件として, 定義 3 に基づき最早未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{P}}(\mathbf{r}^n)$ を求める. なお最早未配分車両が複数存在するときは, そのうち任意の一台を選ぶ.
2. 経路ベクトルおよび未配分車両集合の更新: 最早未配分車両 i を最短経路 $\bar{r}_i^*(\mathbf{r}^n)$ に配分し, 経路ベクトルと未配分車両を次のように更新する: $\mathbf{r}^{n+1} := (\bar{\rho}_i(\mathbf{r}^n), \mathbf{r}_{-i}^n)$, $\overline{\mathcal{P}}(\mathbf{r}^{n+1}) := \overline{\mathcal{P}}(\mathbf{r}^n) - \{i\}$.
3. 収束判定: $\overline{\mathcal{P}}(\mathbf{r}^{n+1}) = \emptyset$ ならば, \mathbf{r}^{n+1} を均衡解としてアルゴリズムを終了する. そうでなければ $n := n + 1$ としてステップ 1 に戻る.

順序配分アルゴリズムのロジックからわかるように, 順序配分アルゴリズムの適用可能性 (DUE ゲームの時間分解特性) は, そのネットワークの最早未配分車両の存在性と一対一対応している. 次節では, この最早未配分車両の存在性を, unidirectional network 上の DUE ゲームで証明する. そして, DUE ゲームの時間分解特性を示す.

3.4 Unidirectional network における順序配分アルゴリズムの適用可能性の証明

ここでは, Iryo and Smith (2017) により提案された unidirectional network における, 最早未配分車両の存在性を証明する, i.e., unidirectional network における DUE ゲームの時間分解特性を示す. 以下ではまず, unidirectional network の定義とその特性について説明する. 次に, Iryo and Smith (2017) での仮定を緩め, zero-flow congested link が存在する一般的な交通状態におけるノード・ポテンシャルの性質を示す. そして, この性質を活用し, 最早未配分車両の存在性を示す.

3.4.1 Unidirectional network の定義とその特性

Unidirectional network とは、時間分解法を適用できるトポロジーを持つネットワークの一般化概念である。時間分解法を適用できるネットワークとして、unidirectional network は次の2つの特性を持つ。第一に、ネットワーク上の各ノードへの均衡到着時刻を、ある基準とするノードからの出発時刻（これを基準時刻と呼ぶ）の関数として表すことができる、ということである。この関数をノード・ポテンシャルと呼ぶ。例えば、単一起点ネットワークでは、各ノードへの均衡到着時刻は、起点出発時刻の関数として表わすことができる。

第二に、ノード・ポテンシャルは基準時刻に対して（広義）単調増加の関数である、ということである。すなわち、基準時刻の増加に対し均衡到着時刻は早くなることはない。例えば単一起点ネットワークでの DUE 状態を考えると、起点における利用者の出発順序が終点到着するまでのあらゆるノードへの到着時に維持されていなければならない。そして、これらの特性に動的な交通流モデルの FIFO 原則および因果律（ある時刻でのリンク旅行時間はより早い時刻にリンクを流入した車両にのみ依存するという性質）を組み合わせると、ある時刻に起点を出発する利用者が経験する旅行時間は、その時刻以降に起点を出発する利用者の影響を受けないことが保証される。結果として、unidirectional network における DUE 状態は、基準時刻別に分解することができる。

Unidirectional network のフォーマルな定義に先立ち、本研究では動的な交通流モデル下での旅行時間が取りうる範囲を表わす、“possible dynamical link travel time profile”を Iryo and Smith (2017) に則り定義する。これは、前述したポテンシャル関数に関する2つの性質が、需要条件（e.g., OD 交通需要パターン）に関わらず成立することを保証するために用いられる。すなわち、unidirectional network では、リンクの静的条件（i.e., 自由旅行時間、容量、リンク同士の接続構造）を与件としたとき、あるリンク l において、次の条件を満たすいかなるリンク旅行時間プロファイルが実現しているときにおいても、単調増加なポテンシャル関数が存在していなければならない：

$$C_l^P = \left\{ c_l(t) \mid c_l(t) \in \left\{ \text{Any Lipschitz continuous function s.t. } c_l(t) \geq c_l^{FT} \right. \right. \\ \left. \left. \text{and } \frac{c_l(t') - c_l(t)}{t' - t} \geq -1 \right\} \right\}. \quad (3.6)$$

ここで、 $c_l(t)$ はある時刻 t にリンク l に流入した車両が経験する旅行時間を表しており、 c_l^{FT} はリンク l の自由旅行時間を表す。また、全てのリンク旅行時間プロファイルをベクトル表示したものを、 \mathbf{c} で表す。あるネットワーク上でのリンク旅行時間プロファイルが取りうる集合を、カルテシアン積を用いて $C^P = \prod_{l \in \mathcal{L}} C_l^P$ と表す。

以上の準備の下、unidirectional network、およびノード・ポテンシャルは次のように定義される：

定義 4. (Unidirectional network) あるネットワークにおいて、任意の起点を基準点として選び、それを $o_{REF} \in \mathcal{N}_o$ と表す。ネットワーク上の各リンクに対し、任意のリンク旅行時間関数ベクトル $\mathbf{c} \in \mathcal{C}^P$ を与える。このネットワークが unidirectional network であるとき、次を満たすように、基準時刻 t の関数としてあるノード n のポテンシャル関数 $p_n(t; \mathbf{c})$ を定義できる：

$$p_n(t; \mathbf{c}^P) = u_n^*(o, p_o(t; \mathbf{c}^P); \mathbf{c}^P), \quad (3.7)$$

$$\forall n \in \mathcal{N}(r^*), \exists r^* \in \mathcal{R}^*(o, p_o(t; \mathbf{c}^P), d; \mathbf{c}^P), \forall o \in \mathcal{N}_o, \forall d \in \mathcal{N}_d.$$

$$\text{where } p_{o_{REF}}(t; \mathbf{c}^P) = t. \quad (3.8)$$

この定義は、各リンク旅行時間関数が \mathbf{c} で与えられたとき、unidirectional network 上におけるあるノード n のポテンシャルは、任意の起点 o から終点 d に向けて時刻 $p_o(t; \mathbf{r})$ に出発する車両の、ノード n における最早ノード到着時刻として与えられることを示している。なお、利用者の経路ベクトルを与件としたときのポテンシャルを求めるにあたり、本研究では、それに対応するリンク旅行時間関数ベクトルを $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ と表すものとする。これにより、ある経路ベクトルを与件としたときの最早ノード到着時刻およびポテンシャルは、次のように定義することができる： $u_n^*(o, s; \mathbf{r}) \equiv u_n^*(o, s; \mathbf{c}(\mathbf{r}))$, $p_n(t; \mathbf{r}) \equiv p_n(t; \mathbf{c}(\mathbf{r}))$ 。以上のノード・ポテンシャルの定義は、本節の冒頭で述べた unidirectional network が満たす第一の性質を表している。

では、unidirectional network が満たす第二の性質である、ノード・ポテンシャル関数の基準時刻に対する単調性を示す定理を証明しよう。この定理は Iryo and Smith (2017) の Theorem 2 の拡張であり、ノード・ポテンシャル関数が基準時刻に対して広義単調性を持つことを表している：

定理 1. (ノード・ポテンシャルの基準時刻に対する広義単調性) Unidirectional network において、利用者の経路選択ベクトル \mathbf{r} が与えられているとする。このときノード・ポテンシャルは、基準時刻に対して広義単調性を持つ。すなわち、

$$t < t' \Rightarrow p_n(t; \mathbf{r}) \leq p_n(t'; \mathbf{r}), \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad (3.9)$$

が成立する。

証明 1. 定理の証明に先立ち、ノード・ポテンシャルに関わる二つの補題の証明を行う。なおここでは、変数 $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ は簡単のため省略する。

まず、起点ノードにおけるノード・ポテンシャルの広義単調性に関する次の補題を証明する：

補題 1. Unidirectional network において、利用者の経路選択ベクトル \mathbf{r} が与えられているとする。このとき異なる基準時刻 t, t' に対して、各起点ノードでのポテンシャルは次の広

義単調性を満たす：

$$t < t' \Rightarrow p_o(t) \leq p_o(t') \quad \forall o \in N_o. \quad (3.10)$$

証明 2. 証明の概要を以下に示す（詳細は Appendix 3.A を参考のこと）。まずある起点 o とその起点からポテンシャル時刻に出発する車両の最短経路上のノード n に着目し、これらのノードにおける異なる基準時刻のポテンシャルについて、どちらか片方のノードでの大小関係が定まっていれば、もう一方のノードの大小関係も定められることを示す。具体的には任意の起点 $o \in N_o$ から $p_o(t)$ および $p_o(t')$ に出発する車両を考え、これらの車両の最短経路上のノード n のポテンシャルについて、次の関係式を得る：

$$\begin{cases} p_o(t) \leq p_o(t') \Rightarrow p_n(t) \leq p_n(t'), \\ p_n(t) \leq p_n(t') \Rightarrow p_o(t) \leq p_o(t') \end{cases}. \quad (3.11)$$

従って、基準点（起点の一つ）におけるポテンシャルの大小関係が $t < t'$ として得られているため、式 3.11 を全ての起点と最短経路上のノード間で適用していくことにより、式 (3.10) を得ることができる。□

次に、最短経路に含まれないノードを含んだ、ポテンシャルの値に関する次の補題を証明する：

補題 2. Unidirectional network において、利用者の経路選択ベクトル \mathbf{r} が与えられているとする。このとき、あるノード n の基準時刻 t に対応するポテンシャル $p_n(t; \mathbf{r})$ は、各起点をポテンシャル時刻で出発する車両の最早ノード到着時刻のうち、最小値と一致する。すなわち、

$$p_n(t) = \min_{o \in N_o} u_n^*(o, p_o(t)), \quad \forall n \in N. \quad (3.12)$$

証明 3. まずノード n が、基準時刻 t に対応するポテンシャルの時刻で各起点を出発するいかなる車両の最短経路に含まれない場合を考える。定義 4 では最短経路に含まれないノードについてポテンシャルは定義されていないので、こうしたノードのポテンシャルについては式 (3.12) のように定義することができる。

次に、ノード n が少なくともある一台の車両の最短経路に含まれる場合を考える。まず、起点を次の二つの集合に区分する：ポテンシャル時刻で出発する車両の最短経路にノード n が含まれる起点の集合 N_o^A 、およびそれ以外の集合 N_o^B 。ここで、 N_o^A に属する起点から出発する車両の最早ノード到着時刻については次の関係式が成立する： $p_n(t) = u_n^*(o, p_o(t))$ 。従って証明にあたっては、 N_o^B に属する起点から出発する車両の最早ノード到着時刻が、ポテンシャルより早くないことを示せば十分である。すなわち、次が成立すれば良い：

$$p_n(t) \leq u_n^*(o, p_o(t)), \quad \forall o \in N_o^B. \quad (3.13)$$

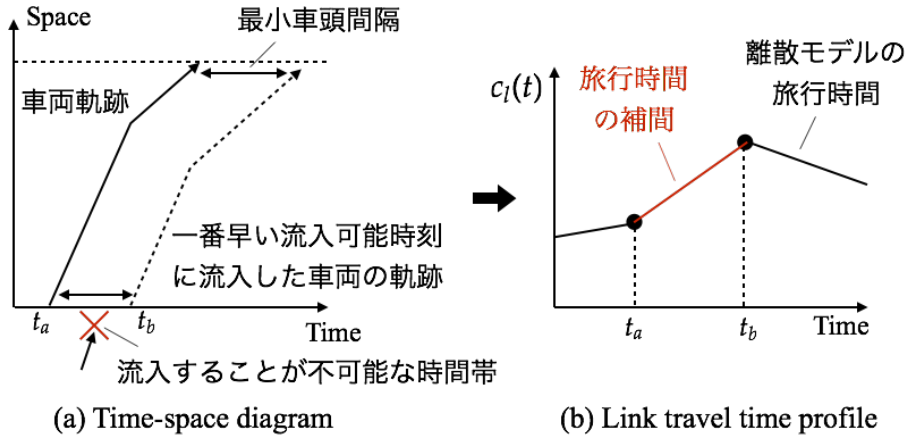


図 3.1: 粒子モデルにおける車両軌跡図と、対応するリンク旅行時間プロファイル

背理法により証明する．起点 $o \in \mathcal{N}_o^B$ から出発する車両のノード n の最早ノード到着時刻がポテンシャルより早いものと仮定する, i.e., $u_n^*(o, p_o(t)) < p_n(t)$. するとこの車両は, 次を満たす経路 r_B を持つことになる: \mathcal{N}_o^A に含まれる任意の起点から終点 d に向けて出発する車両の最短経路 r_A^* と, ノード n から終点 d まで同一ノードを通過し, かつそれらのノードにポテンシャルより遅くなく到着する, e.g., ノード n において $u_n(o, p_o(t), r_B) \leq p_n^*(t)$ が成立する. ここで r_B は最短経路ではないため, ノード n より経路に沿って下流に位置するノードのうち, 少なくとも一つのノード n' において DP 原理が成立してはならない. すなわち起点 o から出発する車両は, n' に r_B を利用するより早く到着できる経路 r_B^* を持つことになる, i.e., $u_{n'}(o, p_o(t), r_B^*) < u_{n'}(o, p_o(t), r_B)$. 従って, 次の関係式が成立する:

$$p_{n'}^*(t) = u_{n'}(o, p_o(t), r_B^*) < u_{n'}(o, p_o(t), r_B) \leq p_{n'}^*(t). \quad (3.14)$$

これは, 最短経路上においてノード・ポテンシャルの定義 (式 (3.7)) と矛盾する. よって, (3.13) が成立するため, 式 (3.12) が成立する. \square

最後に, これらの補題を組み合わせることにより次が成立する:

$$t < t' \Rightarrow p_o(t) \leq p_o(t'), \quad \forall o \in \mathcal{N}_o \quad (3.15)$$

$$\Rightarrow \min_o \{u_n^*(o, p_o(t))\} \leq \min_o \{u_n^*(o, p_o(t'))\} \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad (3.16)$$

$$\Rightarrow p_n(t) \leq p_n(t'). \quad (3.17)$$

式 (3.15) は補題 1 より成立する. 式 (3.16) は式 (3.15) より導かれる. 式 (3.17) は式 (3.16) と補題 2 を組み合わせることによって導かれる. よって, 式 (3.9) が成立する. \square

なおここまでの議論では, 各ノードのポテンシャルが全ての基準時刻において定義できることを暗に仮定しているが, 粒子モデルにおいては必ずしもこの仮定が成立するとは限らない, i.e., ある基準時刻に対して, 各ノード・ポテンシャルを定義できないことが起こりうる. これはノード・ポテンシャルが車両の最早ノード到着時刻により定義される

一方、次の二つの理由により、車両がノードに到達できない時間帯が存在しうるためである。第一に、ある車両がリンク上を走行しているとき、後から流入する車両は最小車頭間隔未満の車頭間隔で流入できないため、あるリンクにおいて流入不可能な時間帯存在するためである（図 3.1 左）。言い換えれば、リンク旅行時間関数が定義されない時間帯が存在しうる。第二に、ある基準時刻に対応するポテンシャル時刻で起点を出発する車両が存在しなければ、定義上ポテンシャルを定義することはできない（i.e., 式 3.7 を適用することができない）。

しかしながら、この問題は適切な補間を行うことにより解決することができる。具体的には、第一の問題に対しては、式 (3.6) を満たすように（i.e., FIFO 原則を満足するように）リンク旅行時間関数に適切な線形補間を行えば良い（図 3.1 右）。第二の問題に対しては、ポテンシャル時刻で起点を出発する仮想的な車両を導入し、最早ノード到着時刻を求めるために配分すれば良い。結果として、これらの補間により DUE ゲームに参加するプレイヤーの旅行時間に影響を与えることなく、ポテンシャルを定義できるようになる。そのため、異なる基準時刻に対応する複数のポテンシャルを比較する際に、前述した定義域の不連続性による複雑さを取り扱うことなく議論を行うことができる。

3.4.2 最早未配分車両の存在証明

最後にこれらの関係式を用いて、最早未配分車両の存在性を示そう：

定理 2.（Unidirectional network における最早未配分車両の存在）Unidirectional network において、 $\overline{\mathcal{P}}(\mathbf{r}) \neq \emptyset$ となる（i.e., 未配分車両が存在する）経路選択ベクトル $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ を考える。このとき、未配分車両のうち少なくとも一台は最早未配分車両となる。

証明 4. まず、各未配分車両の出発時刻とポテンシャルを関係づけよう。未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{P}}(\mathbf{r})$ の起点を o_i 、出発時刻を s_i と表す^{*1}。

基準時刻を取れる未配分車両のうち、未配分車両 i が最小の基準時刻を持っているものとしよう。すると、式 (??) から、より大きい基準時刻 t_j を持つ未配分車両 j に対して、次を満たす最短経路 \bar{r}_i^* を持つことが示される：

$$\begin{aligned} t_i < t_j &\Leftrightarrow p_{o_{REF}}(t_i) < p_{o_{REF}}(t_j) \\ &\Rightarrow p_n(t_i) \leq p_n(t_j), \quad \forall n \in \mathcal{N} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow u_{n'}^*(o_i, s_i) \leq u_{n'}^*(o_j, s_j), \quad \forall n' \in \mathcal{N}(\bar{r}_i^*) \cap \mathcal{N}_j. \quad (3.19)$$

ここで、式 (3.18) の不等式は $t_i < t_j$ に式 (??) を適用したものである；また、式 (3.18) から

^{*1} なお、ポテンシャル関数は連続関数であるとは限らないため、出発時刻とポテンシャルが一致しない未配分車両が存在しうる、i.e., 基準時刻を持たない未配分車両が存在しうる。しかし、適切にポテンシャル関数の値を定めることにより、こうした未配分車両は最早未配分車両の候補とはならず、また基準時刻を持つ車両同士で比較したときに採択される最早未配分車両の最短経路上のノードにより早く到着することはなくなる。そのため、こうした車両を考える必要はない（その詳細は Appendix 3.B を参照）。

式 (3.19) への変換は、最短経路上のノードでは到着時刻がポテンシャルと一致する性質を用いている。式 (3.19) からは、ある基準時刻を持つ未配分車両は、その最短経路上で、より大きな基準時刻を持つ未配分車両に追い抜かれないことを意味している、i.e., 最早未配分車両が取りうるべき最短経路の条件を満たす。よって、基準時刻が最小となる未配分車両が最早未配分車両となる。□

3.5 本章のまとめ

本章では、*unidirectional network* 上での粒子モデルにおける DUE 配分問題の時間分解特性を示した。具体的には、まず粒子モデルを仮定した DUE 配分問題である DUE ゲームの定式化を行なった。また同時に、DUE ゲームの時間分解法である順序配分アルゴリズムについて説明した。そして、*unidirectional network* 上の DUE ゲームでは、最早未配分車両が存在することを証明し、順序配分アルゴリズムの適用可能性を示した*2。次章では、この最早未配分車両の存在性を用いて、動的交通ネットワーク配分理論とゲーム理論との結びつきを確立する。そして、その結びつきに基づき均衡解の安定性を解析することとなる。

Appendix 3.A Proof of Lemma 1

任意の起点ノード $o \in N_o$ を考え、異なる基準時刻 t, t' に対応する起点 o のポテンシャルを $p_o(t), p_o(t')$ と表す。また、各ポテンシャル時刻に出発する車両の最短経路を、それぞれ $r^*(t), r^*(t')$ と表す。以下では、これらの最短経路両方に含まれる任意のノード $n \in N(r_a^*(t)) \cap N(r_a^*(t'))$ に着目する。そして、起点 o とノード n のポテンシャルについて考え、これらの中で成立する関係性を明らかにする。

まず、起点 o におけるポテンシャルの大小関係が定まっているときのノード n のポテンシャルの大小関係を求めよう。このときは明らかに、動的な交通流モデルが満たす FIFO 原則 (i.e., 旅行時間の伸び率が -1 以上) から、次の関係式が成立する：

$$\begin{cases} p_o(t) < p_o(t') \Rightarrow p_n(t) \leq p_n(t') \\ p_o(t) = p_o(t') \Rightarrow p_n(t) = p_n(t') \end{cases} \quad (3.20)$$

このことは、起点 o のポテンシャルの大小関係が定まるとき、起点下流側のノード n のポテンシャルは最短経路上の交通流の流れに沿って *forward* に決められることを意味する。これは、(3.11) の第一式を示している。

*2 なおここでは最早未配分車両の存在証明にあたり、ノード・ポテンシャルの基準時刻に関する単調性を用いたが、佐津川功季, 和田健太郎 (2017) は単一終点ネットワークにおいて、「割り込み」という概念を用いた異なるアプローチによる証明を行なっている。その詳細は Appendix 3.C を参照。

次に、これとは逆に、ノード n でのポテンシャルの関係性が与えられたときの、起点 o でのポテンシャルの関係性を求めよう、i.e., 起点でのポテンシャルの大小関係を *backward* に求める。まず、ノード n において厳密な大小関係が成立する (i.e., 等号付き不等号が成立しない) とき、FIFO 原則から、起点 o のポテンシャルについても厳密な大小関係が成立することは自明である。すなわち、

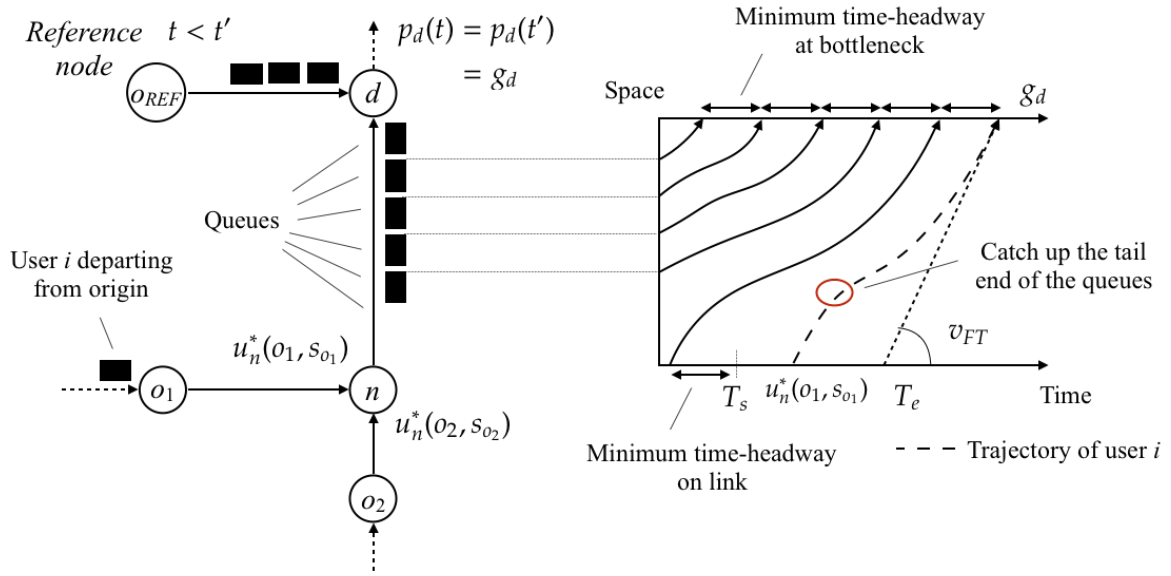
$$p_n(t) < p_n(t') \Rightarrow p_o(t) < p_o(t'). \quad (3.21)$$

が成立する。この式は、最短経路上において、ある下流側のノード n により早く到着できる車両は、同一起点をより早く出発していることを示している。そしてこれは同時に、ある起点から出発する車両の最短経路に含まれる少なくとも一つのノードにおいて、異なる基準時刻におけるポテンシャルの厳密な大小関係が定まっているのであれば、そのノードから起点のポテンシャルの大小関係が分かることを示している。

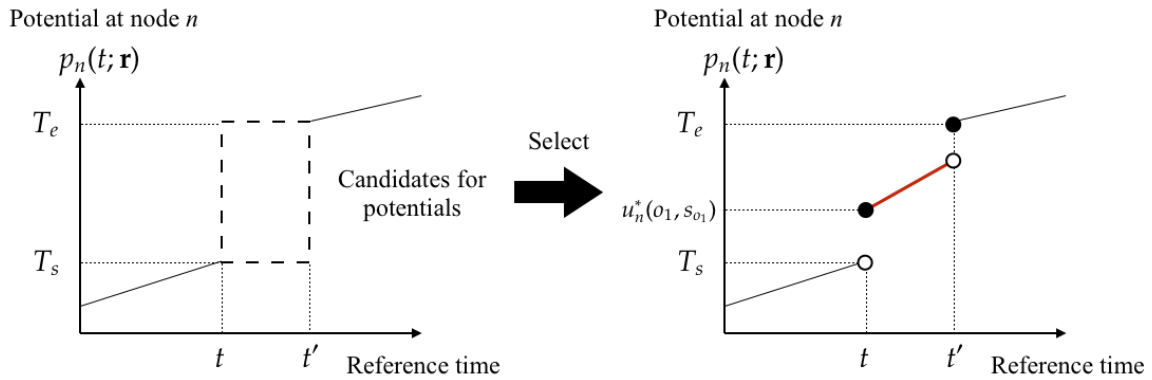
一方で、厳密な大小関係が定まっていない場合 (i.e., $p_n(t) = p_n(t')$ が成立している場合)、起点のポテンシャルの大小関係は一意に定まらない場合がある、i.e., ある最短経路上での下流側ノードにおけるポテンシャルが同一であったとしても、上流側ノードにおけるポテンシャルが同一であるとは限らない。これは、待ち行列が存在しているが流入交通量が存在しない時間帯を持つリンクである、*zero-flow congested link* が存在するとき生じうる。こうしたリンクでは、特定の時間帯における、流入時刻に対するリンク旅行時間の変化率は -1 となる。これは、特定の時間帯に流入した車両は待ち行列末尾の車両に追従することにより、その捌け時刻にリンク流出時刻を制約されるようになることを意味している、i.e., 流入時刻が異なっても流出時刻は同一となりうる。そのためこのようなリンクが存在する場合、下流側のポテンシャルが異なり時間帯において一致していても、上流側のポテンシャルは異なる値を持つ可能性がある。

具体例からこの事実を確認しよう。図 3.2a に、*zero-flow congested link* が存在することで、ポテンシャルが多価関数となった交通状態にあるネットワークを示す。この図では、リンク (o_{REF}, d) , (n, d) が *zero-flow congested link* である。また、図中の v_{FT} は自由走行速度、 T_s は前方を走行する車両との最小車頭間隔の関係上、リンクに流入することが可能となる時刻、 T_e は追従挙動を取らなくなる最小の時刻を示している。ここで、基準時刻 t に対する終点 d のポテンシャルが、 $p_d(t) = g_d$ であったとしよう。このときノード n におけるポテンシャルは、 $T_s \sim T_e$ の範囲内においてどのような値を取っても良くなるようになる、i.e., ポテンシャルに任意性が存在する^{*3}。これは、異なる起点出発時刻であっても、*zero-flow congested link* を通過することにより、到着時刻が一つの値に集約されるためである。そのためこの状況下では、ノード n , およびそのまた上流のノード o におけるポテ

^{*3} 同様の議論は Akamatsu et al. (2015) でも見られる。ここでは、コリドー型の単一終点ネットワークを考えたとき、終点到着時刻からは、最上流に位置する起点での、均衡出発時刻を求めることができないという問題として発現していた。



(a) Zero-flow congested link とポテンシャルの任意性



(b) ポテンシャルの決定例

図 3.2: Zero-flow congested link が存在するときの交通状態とポテンシャルの決定方法

ンシャルは基準時刻に対する多価関数となり、一意に定めることができない。

そして特に、基準点からあるノードまでの最短経路上に zero-flow congested link があるとき、異なる基準時刻に対して同一のポテンシャルが対応することになる。図 3.2a では、基準時刻 t, t' のそれぞれに対して、同一のポテンシャルが対応することが見て取れる。このような状況下では、ある基準時刻に対するポテンシャルが定まらないばかりか、異なる基準時刻におけるポテンシャルの大小関係も定まらなくなる。何故ならば、ポテンシャルは同一の範囲内で任意性を持っているため、ポテンシャルの設定次第（どの基準時刻に対してどのポテンシャルの値を割り当てるか）でその大小関係は変化するためである。これが、ポテンシャルが同一であるときに、その上流側の起点ノードでのポテンシャルの大小関係が定まらなくなる理由である。

しかし、こうした基準時刻に対するポテンシャルの多価性は、任意性の範囲内であれば

どのように値をとっても良いことを示唆する．そのため，本稿では上記の多価性の問題に対して，次のように基準時刻の大小関係と整合するようポテンシャルの値を定めることとする：

$$t < t' \wedge p_n(t) = p_n(t') \Rightarrow p_o(t) \leq p_o(t'). \quad (3.22)$$

図 3.2b にその例を示す．

よって以上をまとめると，あるノード n におけるポテンシャルの大小関係と起点 o におけるポテンシャルの大小関係には， $t < t'$ が成立しているとき，次が成立することがわかる：

$$p_n(t) \leq p_n(t') \Rightarrow p_o(t) \leq p_o(t'), \quad \forall o \in N_o, \forall n \in N(r^*(t)) \cap N(r^*(t')). \quad (3.23)$$

これは，式 (3.11) の第二式である．よって，式 (3.11) が成立することが示された．

最後に，式 (3.11) を用いて式 (3.10) を導出しよう．まず， $t < t'$ が成立していることから，基準点を出発する車両の最短経路に含まれるノード n におけるポテンシャルについて，次が成立することがわかる： $t < t' \Rightarrow p_n(t) \leq p_n(t')$ ．次に，ノード n を最短経路に含む車両が出発する起点ノード o におけるポテンシャルについて，次が成立することがわかる： $p_n(t) \leq p_n(t') \Rightarrow p_o(t) \leq p_o(t')$ ．よって，この関係性を連鎖させていくことにより，全ての起点について次の関係式が成立することがわかる：

$$t < t' \Rightarrow p_o(t) \leq p_o(t'). \quad (3.24)$$

これは，式 (3.10) である． □

Appendix 3.B 基準時刻を持たない未配分車両の取り扱いについて

Appendix 3.A で説明しているように，ネットワークに zero-flow congested link が存在するとき，ポテンシャルに任意性が存在しうる．このとき，ある基準時刻に対してポテンシャルを割り当てることにより，ポテンシャルと同一の最早ノード到着時刻を持たず，結果として基準時刻を持たない車両が存在しうることになる．例えば図 3.2b の場合， $[T_s, u_n^*(o_1, s_{o_1}))$ にノード n に到着する車両は基準時刻を持たないことになる．

しかし，ポテンシャルを適切な値に対応させた場合，最早未配分車両の決定にあたり，このような基準時刻を持たない車両については考えなくても良くなる．具体的には，あるノードのポテンシャルを決めるにあたり，そのノードに一番早く到着する未配分車両の最早ノード到着時刻を用いれば良い（一番早く到着する未配分車両に対し reference time を与える）．これにより reference time を持たない未配分車両は，必ずこの未配分車両に最短経路上のノードにおいて割り込まれるようになる，i.e., これらの車両は最早未配分車両の

候補ではない。加えて、reference time を持たない未配分車両は、reference time を持つ車両の最短経路上のノードにより早く到着することはない。従って、reference time を持つ未配分車両同士を比較することで得られた最早未配分車両は、reference time を持たない車両によって割り込まれることはない、i.e., reference time を持つ車両同士のみで比較をすることで、最早未配分車両を決定することができる。

Appendix 3.C 単一終点ネットワークでの順序配分アルゴリズムの適用可能性の証明

本節では、単一終点ネットワークでの順序配分アルゴリズムの適用可能性について、ポテンシャルを用いない別アプローチに基づく証明を示す。具体的には、ある車両が最早未配分車両ではないときに満たさなければならない、「割り込み」という概念を用いた証明を行う。

以下では証明に先立ち、本付録で用いる変数や定義について説明する。また Iryo (2011b) にて行われた単一終点ネットワークにおける最早未配分車両の証明に対する反例を示す。次に、割り込みの概念を説明し、それを用いた最早未配分車両の存在証明を行う。

3.C.1 DUE ゲームの定式化

本稿で取り扱うネットワークは、ノードと有向リンクから構成される。ノードの集合を \mathcal{V} 、有向リンクの集合を \mathcal{E} とし、リンク $l \in \mathcal{E}$ の上流端ノードを $v_u(l)$ 、下流端ノードを $v_d(l)$ と記す。

このネットワーク上で定式化される DUE ゲームは、「プレイヤー（車両）」、「プレイヤーの戦略集合（経路選択肢集合）」、「戦略（経路）の利得」から構成されている。車両は離散化されており、全車両の集合を \mathcal{N} とする。車両 $i \in \mathcal{N}$ の起終点ノード o_i, d_i と出発時刻 τ_i は外生的に与えられるとし、 $o_i = o_j$ ならば $\tau_i \neq \tau_j$ とする。

ある車両 i は全ての acyclic な経路 r_i を選択でき、その経路選択肢集合を \mathcal{R}_i で示す。経路 r_i に含まれるリンクの集合を $\mathcal{E}(r_i)$ で表す。経路選択肢集合には、ある車両 i をまだ配分していない (i.e., 起点を出発していない) ことを示す選択肢 ϕ_i も含まれる。全車両が選択した経路を並べたベクトルは \mathbf{r} で、車両 i 以外の経路選択はベクトル \mathbf{r}_{-i} で記述する。この経路ベクトルは、 $\mathbf{r} = (r_i, \mathbf{r}_{-i})$ のように r_i と \mathbf{r}_{-i} を束ねた記述も行う。また、 \mathcal{R}_i の全車両に対する直積集合を $\mathcal{R}_{ALL} = \prod_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{R}_i$ と定義する。

配分計算過程では、一部の車両のみが配分されている状況を考える。このとき、配分した車両を「既配分車両」、まだ配分されていない車両を「未配分車両」と呼び、後者の集合を $\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ で表す。未配分車両 i は、 $\phi_i \in \mathcal{R}_i$ を選択している車両として表す。また、未配分車両をネットワークに配分することを「追加配分」と呼ぶ。

車両 i 以外の経路選択が \mathbf{r}_{-i} であるとき、経路 r_i を利用することによる車両 $i \in \mathcal{N}$ の終点到着時刻を $g_i(r_i, \mathbf{r}_{-i})$ と書く。また、未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ が、仮に経路 $\rho_i \in \mathcal{R}_i - \{\phi_i\}$ を利用した場合に、リンク $l \in r_i$ に流入する時刻を $t_i(l; (\rho_i, \mathbf{r}_{-i}))$ と書く*4。

利得は経路の一般化交通費用の符号を逆にしたものとし、一般化交通費用は終点到着時刻と等しいとする。各車両の出発時刻は固定されており、一般化交通費用を終点到着時刻とすることは旅行時間を用いることと等価である。このとき、Nash 均衡状態 \mathbf{r} は、

$$g_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}) \leq g_i(s_i, \mathbf{r}_{-i}) \quad \forall s_i \in \mathcal{R}_i - \{\phi_i\}, \forall i \in \mathcal{N} \quad (3.25)$$

を満たす状態であると定義する。また、ここでは純粋戦略のみを考慮している。

3.C.2 順序配分アルゴリズム

本付録では、最早未配分車両、およびその最短経路を、リンク流入時刻を用いて定義していく。まず、「最早リンク流入時刻」と、ある未配分車両が配分されるとき「最短経路」を次のように定義する。

定義 5. (最早リンク流入時刻, 井料 Iryo (2011b)) $\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) \neq \emptyset$ となる $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{ALL}$ を考える。未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ の経路選択肢集合 \mathcal{R}_i に含まれるいずれかの経路 1 本以上に含まれるリンクの集合 \mathcal{E}_i を、

$$\mathcal{E}_i \equiv \{l \mid l \in \mathcal{E}(\rho_i), \rho_i \in \mathcal{R}_i\} \quad (3.26)$$

と定義する。このとき、車両 i がリンク $l \in \mathcal{E}_i$ に最も早く流入できる時刻：

$$\bar{t}_i(l; \mathbf{r}) = \min_{\rho_i \in \{s_i \mid s_i \in \mathcal{R}_i, l \in \mathcal{E}(s_i)\}} t_i(l; (\rho_i, \mathbf{r}_{-i})) \quad (3.27)$$

を「最早リンク流入時刻」と呼ぶ。

定義 6. (未配分車両の最短経路, 井料 Iryo (2011b)) $\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) \neq \emptyset$ となる $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{ALL}$ を考える。そのときの未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ が追加配分されるとき最短経路 $\bar{\rho}_i(\mathbf{r})$ を以下を満たす経路と定義する：

$$\bar{\rho}_i(\mathbf{r}) \in \arg \min_{\rho_i \in \mathcal{R}_i - \{\phi_i\}} g_i(\rho_i, \mathbf{r}_{-i}). \quad (3.28)$$

すなわち、この最短経路を用いる未配分車両は、他のいずれの経路を用いた場合よりも終点到着遅くなく到着できる。ただし、この最短経路上では DP 原理が満たされるとは限らない。

これらの定義を用いて「最早未配分車両」は下記のように定義される。

*4 時刻を計算するための交通流モデルは、井料 Iryo (2011b) で示された「交通流モデルが満たすべき条件」を満たしているものとする。

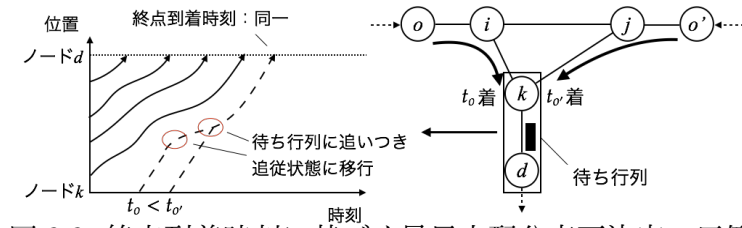


図 3.3: 終点到着時刻に基づく最早未配分車両決定の反例

定義 7. (最早未配分車両) 未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) (\neq \emptyset)$ の最短経路のうち次の条件:

$$\begin{aligned} \bar{t}_j(l; \mathbf{r}) &\geq t_i(l; (\bar{\rho}_i(\mathbf{r}), \mathbf{r}_{-i})) \\ \forall l \in \mathcal{E}_j \cap \mathcal{E}(\bar{\rho}_i(\mathbf{r})), \forall j \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) - \{i\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

を満たす経路 $\bar{\rho}_i(\mathbf{r})$ が存在するならば, i は最早未配分車両であると定義する. また, $|\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})| = 1$ ならば, その未配分車両は最早未配分車両とする.

3.C.3 単一終点ネットワークの最早未配分車両の存在定理 (Iryo, 2011b) に対する反例

本章では, 単一終点ネットワークの最早未配分車両の存在定理 (定理 3b, Iryo (2011b)) に対する反例を挙げ, その存在定理の証明過程における不備を具体的に示す.

まず Iryo (2011b) が示した存在定理を以下に引用する:

(定理 3b, Iryo (2011b)) 単一終点ネットワークでは到着時刻 $g_i(\bar{\rho}_i(\mathbf{r}), \mathbf{r}_{-i})$ が最小の未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ が最早未配分車両である.

これは, 一見自然な主張のように思われるが, 最早未配分車両の定義と矛盾することになる. 図 3.3 に, その反例となるネットワークの状態と車両軌跡図を示す. ここでは, 終点が d , 起点が $\{o, o'\}$ であり, 起点 o から追加配分される未配分車両がより早くノード k に到着できるものとする (i.e., 起点 o' の未配分車両は最早未配分車両ではない). また, リンク (k, d) 上に十分な長さの待ち行列が存在しており, どちらの起点から追加配分される未配分車両もその待ち行列の最後尾に追いつけるとしよう. このとき, リンク (k, d) に流入した未配分車両の走行パターンは, 図 3.3 の点線で示される^{*5}. この軌跡図からわかるように, いずれの未配分車両を追加配分しても, 終点到着時刻は同一 (i.e., 待ち行列の捌け時刻) となる. つまり, 定義上は起点 o' の未配分車両は最早未配分車両でないにも関わらず, 定理 3b 上は最早未配分車両となるという矛盾が発生する.

この誤りはどこで生じたのであろうか. それは, 定理 3b の証明中の次の主張である:

^{*5} 軌跡図では, ある未配分車両を追加配分したときの走行パターンと, その未配分車両を追加配分せず, もう一台の未配分車両を追加配分したときの走行パターンを重ねて示している.

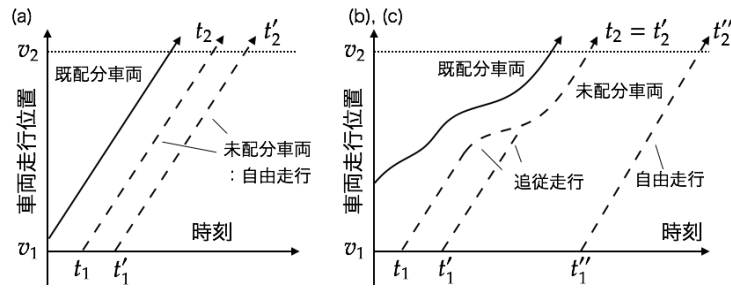


図 3.4: 2 台の未配分車両の走行パターン

(補題 3.1, Iryo (2011b)) 未配分車両 $i \in \overline{N}(\mathbf{r})$ をノード $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ を通る最短経路 (v_1 が上流側) に追加配分したときの v_1, v_2 の通過時刻を t_1, t_2 とする. 一方, $i \in \overline{N}(\mathbf{r})$ を配分せず, 別の未配分車両 $j \in \overline{N}(\mathbf{r})$ をノード $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ を通る経路 (ノード v_1 が上流側) に追加配分したときの v_1, v_2 の通過時刻を t_1^*, t_2^* とする. このとき以下が成立:

$$t_1^* > t_1 \Rightarrow t_2^* > t_2. \tag{3.30}$$

この主張の証明において Iryo (2011b) は, 式 (3.30) が成立しないと仮定して, 「First In First Out (FIFO) 原則」より矛盾を導いている. しかし, FIFO 原則はネットワークに実際に配分された車両が受ける制約であり, 未配分車両同士の到着順序の比較に利用することはできない. 実際, 式 (3.30) が成立しないことは図 3.3 の例で見た通りである.

一般に, あるリンクに異なる時刻に流入した 2 台の未配分車両の走行パターンは図 3.4 に示す 3 つである*⁶; (a) 両車両が自由走行; (b) 両車両が追従走行; (c) 先に流入する車両が追従走行, 後に流入する車両が自由走行. (a) では, いずれの未配分車両も自由走行速度で走行するため, リンク流入時刻の差はちょうどリンク流出時刻の差となる: $t_1^* - t_1 = t_2^* - t_2$. (b) では, いずれの未配分車両も既配分車両に制約されるため, 両者のリンク流出時刻は同一となる: $t_1^* > t_1 \Rightarrow t_2 = t_2^*$. (c) では, 後にリンクに流入する車両のリンク流出時刻は, 先に流入する車両のリンク流入時刻より遅くなる: $t_1^* > t_1 \Rightarrow t_2^* > t_2$. 従って, 式 (3.30) は以下のように修正されるべきであろう.

$$t_1^* > t_1 \Rightarrow t_2^* \geq t_2. \tag{3.31}$$

しかし残念ながら, 式 (3.30) を修正するだけでは不十分である. なぜなら, 式 (3.28) で定義した「最短経路」は, その経路に含まれる全てのノードへ最短旅行時間で着くことを保証していないためである (i.e., 最短経路上で Dynamic Programming (DP) 原理が成立しない). すなわち, この「最短経路」を用いる限り, 終点を除く全てのノードへの到着が他の経路を利用した時よりも遅くなる可能性があり, 上記主張の未配分車両 i が v_1, v_2 間における最短経路を通る保証はない. そのため, 式 (3.31) が成立することを証明することは

*⁶ 「同一経路」を通る 2 台の未配分車両を考えても成立する.

できない。例えば、図 3.3 上で起点 o から出発する未配分車両はノード j を通る経路と通らない経路を持つが、リンク (k, d) 上の待ち行列の最後尾に追いつくことができるならば、ノード k への到着時刻によらずどちらの経路も「最短経路」となる。

そこで、次の「狭義最短経路」を新たに定義する：

定義 8. (未配分車両の狭義最短経路) $\bar{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) \neq \emptyset$ となる $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{ALL}$ を考える。このとき、未配分車両 $i \in \bar{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ の狭義最短経路 $\bar{\rho}_i(\mathbf{r})$ を以下を満たす経路と定義する：

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_i(\mathbf{r}) &\in \arg \min_{\rho_i \in \mathcal{R}_i - \{\phi_i\}} g_i(\rho_i, \mathbf{r}_{-i}) \\ \text{s.t. } t_i(l; (\rho_i, \mathbf{r}_{-i})) &= \bar{t}_i(l; \mathbf{r}) \quad \forall l \in \mathcal{E}(\rho_i). \end{aligned} \quad (3.32)$$

これは、狭義最短経路上で DP 原理が成立していることを意味する。DP 原理は、通常の最短経路問題であれば必ず成立するが、待ち行列が存在するネットワークでは、この制約なしに自動的に成立することはない。

以上を用いると、下記の補題が成立する。

補題 3. (補題 3.1(Iryo, 2011b) の修正版) 未配分車両 $i \in \bar{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ をノード $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ を通る狭義最短経路 (v_1 が上流側) に追加配分したときの v_1, v_2 の通過時刻を t_1, t_2 とする。一方、 $i \in \bar{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ を配分せず、別の未配分車両 $j \in \bar{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ をノード $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ を通る経路 (v_1 が上流側) に追加配分したときの v_1, v_2 の通過時刻を t_1^*, t_2^* とする。このとき、以下 (i.e., 式 (3.31)) が成立する：

$$t_1^* > t_1 \Rightarrow t_2^* \geq t_2 \quad (3.33)$$

証明 5. 式 (3.33) が成立しないと仮定する。このとき、 $t_1^* > t_1$ かつ $t_2 > t_2^*$ が成立する。これは、車両 i が v_1, v_2 間で車両 j が用いる経路を用いれば、現在の到着時刻 t_2 よりも早くノード v_2 に到着できることになり、現在の経路が狭義最短経路であることに矛盾する。よって背理法により式 (3.33) が成立する。(証明終)

式 (3.30) は、単一起点ネットワークの最早未配分車両の存在定理 (定理 3a, Iryo (2011b)) の証明にも用いられているが、補題 3 を用いればその存在を証明することができる。さらに、Iryo (2011b) の「5. テストネットワークでの計算例」では単一終点ネットワークが用いられているが、ここでは最早未配分車両の定義を用いて計算されているため (i.e., 定理 3b を用いていないため)、Nash 均衡解が導出されている。これは、単一終点ネットワークにおける最早未配分車両の存在を示唆しているが、次章ではその存在を保証する定理を示そう。

3.C.4 単一終点ネットワークにおける最早未配分車両の存在証明

本節では、単一終点ネットワークに対して全ての未配分車両が最早未配分車両ではないことを仮定し、矛盾を導くことにより最早未配分車両の存在を証明する。そ

の際、未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ が唯一の終点に最も早く到着することができる時刻を u_i ($= \min_{\rho_i \in \mathcal{R}_i - \{\phi_i\}} g_i(\rho_i, \mathbf{r}_i)$) と表す。さらに、「割り込み」という概念を導入する。

定義 9. (割り込み) $\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) \neq \emptyset$ となる $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{ALL}$ を考える。未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ のある狭義最短経路 $\overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ に未配分車両 $j \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) - \{i\}$ が「割り込み」できるとは、経路 $\overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ 上のリンク $l \in \mathcal{E}(\overline{\rho}_i(\mathbf{r}))$ および車両 j の経路 $\rho_j \in \mathcal{R}_j$ のうち次の条件：

$$t_j(l; (\rho_j, \mathbf{r}_j)) < \bar{t}_i(l; \mathbf{r}) \quad l \in \mathcal{E}(\rho_j) \cap \mathcal{E}(\overline{\rho}_i(\mathbf{r})) \quad (3.34)$$

を満たすリンク l 、経路 ρ_j が存在することをいう。

ある未配分車両の狭義最短経路が割り込まれるとき、その経路上のリンクに他の未配分車両がより早く流入できる状態となっている。従って、ある未配分車両の全ての狭義最短経路が割り込まれるとき、その未配分車両は最早未配分車両ではないと言える。なお、割り込む経路 ρ_j は、リンク l まで車両 i より早く流入できれば最短経路でなくてもよいが、以下では一般性を失うことなく、 $v_u(l)$ から終点 d までの間は車両 i の狭義最短経路 $\overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ に沿って走行する経路のみを考える。

以下では最早未配分車両の存在定理の証明に先立ち、この「割り込み」に関わる一連の補題を示す。ただし、以下では最短経路は基本的に「狭義最短経路」を指す。

補題 4. 単一終点ネットワークの2台の未配分車両 $i, j \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ について、車両 j が車両 i のある最短経路 $\overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ に割り込みできるならば、以下が成立する：

$$u_j \leq u_i. \quad (3.35)$$

証明 6. 車両 j が割り込むリンクを l 、そのときの経路を ρ_j と書く。いま、経路 ρ_j が最短経路のとき、補題 3 の $v_1 = v_u(l)$ 、 $v_2 = d$ とすれば、式 (3.34) より式 (3.35) が成立。一方、経路 ρ_j が最短経路でないとき、式 (3.31) より ρ_j の終点到着時刻 $g_j(\rho_j, \mathbf{r}_j)$ は u_i より遅くなく ($g_j(\rho_j, \mathbf{r}_j) \leq u_i$)、かつ、経路 ρ_j とは別に最短経路が存在するため ($u_j \leq g_j(\rho_j, \mathbf{r}_j)$)、式 (3.35) が成立。(証明終)

補題 5. 単一終点ネットワークにおいて、未配分車両 $j \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ が、未配分車両 $i \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ のある最短経路 $\overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ に割り込みできるとする。このとき、車両 j は次のうち少なくとも一つの条件を満たす最短経路 $\overline{\rho}_j(\mathbf{r})$ を持つ：

- (i) 車両 i の最短経路 $\overline{\rho}_i(\mathbf{r})$ に対して割り込める、
- (ii) 車両 i より早く終点に到着することができる。

証明 7. 車両 j が割り込むリンクを l 、そのときの経路を ρ_j と書き、その経路が最短経路であるか否かで場合分けを行う。経路 ρ_j が狭義最短経路の場合、条件 (i) が成立することは明らか。経路 ρ_j が狭義でない最短経路の場合、その経路上のいずれかのリンクにより

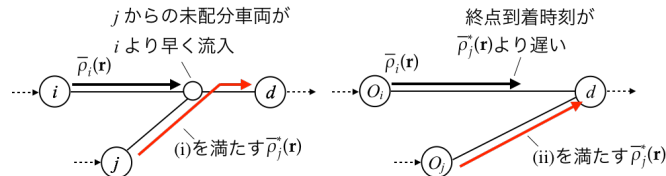


図 3.5: 補題 5 を満たす最短経路 $\bar{\rho}_j^*(\mathbf{r})$ (赤矢印)

早く到着できる狭義最短経路が存在するため条件 (i) は成立. 経路 ρ_j が最短経路でない場合, その経路より早く終点に到着できる狭義最短経路が存在するため条件 (ii) が成立. (証明終)

ここで, 補題 5 を満たす未配分車両 $j \in \bar{\mathcal{N}}(\mathbf{r})$ の最短経路を $\bar{\rho}_j^*(\mathbf{r})$ と表す (イメージは図 3.5 赤矢印を参照).

補題 6. 単一終点ネットワークにおいて, 2 台以上の未配分車両が存在している状況 (i.e., $2 \leq |\bar{\mathcal{N}}(\mathbf{r})|$) を考え, 次のような「割り込みの連鎖」が可能であるとする: 未配分車両 i の最短経路 $\bar{\rho}_i^*(\mathbf{r})$ は未配分車両 j に割り込まれ, その車両 j の最短経路 $\bar{\rho}_j^*(\mathbf{r})$ は未配分車両 k に割り込まれ, ... そして, この連鎖に含まれる未配分車両をその順序通りに $i = 1, 2, \dots, k$ と番号付けする ($k \leq |\bar{\mathcal{N}}(\mathbf{r})|$). このとき, 未配分車両 k の最短経路 $\bar{\rho}_k^*(\mathbf{r})$ は, 未配分車両 $i = 1, 2, \dots, k - 1$ に割り込まれることはない.

証明 8. ある未配分車両 $j (< k)$ が, 最短経路 $\bar{\rho}_k^*(\mathbf{r})$ に割り込めると仮定する. このとき, 補題 4 から $u_j \leq u_k$ であり, かつ, 割り込みの連鎖に含まれる車両についても同様の関係が成り立つため,

$$\underbrace{u_j \leq u_k}_{\text{仮定}} \leq \underbrace{u_{k-1} \leq \dots \leq u_{j+1} \leq u_j}_{\text{「割り込みの連鎖」}} \leq \dots \tag{3.36}$$

である. これは, 以下が成立することを意味する:

$$u_k = u_{k-1} = \dots = u_{j+1} = u_j. \tag{3.37}$$

さらにこれは, 車両 j から車両 k までの割り込みの連鎖において, 補題 5 で示した条件 (i) (のみ) が常に満たされることを意味している. つまり, 割り込みに用いられる経路は最短経路 $\bar{\rho}_i^*(\mathbf{r})$ であり^{*7}, その最短経路が次の車両に割り込まれる. そのため, 車両 k は最短経路 $\bar{\rho}_k^*(\mathbf{r})$ を用いて車両 $i = k - 1, \dots, j + 1$ が割り込みに用いたすべての最短経路 $\bar{\rho}_i^*(\mathbf{r})$, および, 車両 j の割り込まれる最短経路 $\bar{\rho}_j^*(\mathbf{r})$ に割り込むことができる (図 3.6).

ここで仮定より, 車両 j はある経路 ρ_j を用いて経路 $\bar{\rho}_k^*(\mathbf{r})$ に割り込むことができるが, これは経路 $\bar{\rho}_j^*(\mathbf{r})$ 上のいずれかのノードにより早く到着できることになり, (狭義) 最短経路であることに矛盾. よって背理法により補題は成立する. (証明終)

^{*7} 割り込みの連鎖の最初の車両の最短経路は単に $\bar{\rho}_1(\mathbf{r})$ であるが, ここでは $\bar{\rho}_1^*(\mathbf{r})$ と表している.

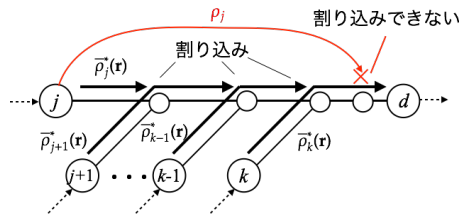


図 3.6: 狭義最短経路による割り込みの連鎖のイメージ

この補題は、 k 台の車両の全ての最短経路が割り込まれるためには、少なくとも $k+1$ 台の車両が必要であることを示している。そして、この補題を用いることにより次の定理が得られる。

定理 3. (単一終点ネットワークにおける最早未配分車両の存在) 単一終点ネットワークにおいて、 $\bar{N}(\mathbf{r}) \neq \emptyset$ となる $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{ALL}$ を考える。このとき、未配分車両のうち少なくとも一台は最早未配分車両である。

証明 9. 全ての未配分車両は最早未配分車両ではないと仮定する。このとき、全ての未配分車両の全ての最短経路に割り込みが可能でなければならない。しかし、補題 6 によれば、 $|\bar{N}(\mathbf{r})|$ 台の未配分車両の全ての最短経路が割り込まれるには、少なくとも $|\bar{N}(\mathbf{r})| + 1$ 台の未配分車両が必要となる。これは $|\bar{N}(\mathbf{r})|$ 台の未配分車両が存在する状況と明らかに矛盾。よって、未配分車両のうち少なくとも一台は最早未配分車両である。(証明終)

第4章

動的利用者均衡の確率的安定性の解析

4.1 はじめに

DUE 配分問題は、渋滞現象の記述に伴う解析上の困難から、その数理特性を明確に把握するには未だ至っていない、e.g., 存在性, 一意性, 安定性 (Iryo, 2013). 特に均衡解の安定性は、その状態が実際に起こりうることを保証するために重要となる性質である. 安定性が保証されなければ、何らかの理由により交通状態が均衡状態から外れたら、利用者はその状態から離れる方向へと行動 (e.g., 利用経路, 出発時刻) を変化させてしまい、二度とその均衡状態は実現しないかもしれない. このような場合均衡状態はごく稀にしか起こり得ず、結果として実際に起こりうる交通状態を反映するものとはいえなくなる (Beckmann et al., 1956).

均衡解の安定性解析では、不均衡状態から均衡へと至る、交通ネットワーク流の調整過程を動的システムとして表現し、その特性を解析することになる. この調整過程は、個々の利用者が過去の経験に基づき日々の経路選択行動を変更した結果として生じる、交通流の *day-to-day dynamics* として表現されている (e.g., *Smith dynamics* (Smith, 1984b), *projection dynamics* (Zhang and Nagurney, 1996)^{*1}). 動的システムの解析にあたり、交通ネットワーク配分理論の分野における既存研究の多くは、経路旅行時間関数の単調性を用いて、リアプノフ関数の存在を証明するといったアプローチをとっている. 例えば静的利用者均衡配分の枠組みでは、Smith (1984b) により、任意の初期値に対する *Smith dynamics* の均衡集合への収束性 (大域的収束性) が示されている. 加えて、経路旅行時間関数が狭義単調であるときは、唯一の均衡解は安定でもあることが示されている^{*2}. また出発

^{*1} その他の *evolutionary dynamics* については Sandholm (2010) を参考.

^{*2} 本研究では均衡解の安定性と収束性を既存研究の定義 (e.g., Watling, 1998; Watling and Cantarella, 2013) に則り、次のように区別している: 均衡状態の近傍に留まり続ける性質を安定性, 時間経過とともに均衡状態に交通状態が収束することを収束性と呼ぶ.

時刻が固定された DUE では、1 経路に 1 つしかボトルネックが含まれないネットワーク (*single-bottleneck-per-route network*) における経路旅行時間関数の広義単調性が Smith and Ghali (1990) により示されている。そして Mounce (2006) はこの単調性を活用することで、Smith dynamics に対するリアプノフ関数の存在性を示し、均衡集合への大域的収束性を示している。

しかし、経路旅行時間関数の単調性は、DUE では普遍的に成立する性質ではない。実際、1 つの経路に 2 つ以上のボトルネックが含まれるとき、単純なトポロジーのネットワークでも、経路旅行時間は非単調となることが示されている (Kuwahara, 1990b; Mounce and Smith, 2007)。結果として、リアプノフ・アプローチは適用できるネットワーク構造が限定されている。加えてこの方法論では均衡集合への収束性は示されるものの、均衡解の安定性は示すことはできてはいない。なぜならば、集合に含まれるある均衡解がゆらぎを受けたとき、その均衡状態へと戻ることが保証されないためである、i.e., 別の均衡解へと状態が遷移する可能性がある。そのため、より一般的な構造のネットワークでの均衡解の収束性や安定性を明らかにするためには、旅行時間関数の単調性を必要とせず、かつ収束先の均衡にゆらぎが生じたときの挙動を解析できる、別の方法論が必要となるだろう。

これに対して本章では、出発時刻が固定された DUE の安定性をゲーム理論の枠組みから解析する新たな方法論を構築する。この方法論は、前章で説明した (A) 粒子モデルにおける DUE の時間分解法に、ゲーム理論の分野で発展してきた次の 2 つの概念・方法論を組み合わせたものである：(B) 戦略型ゲームのクラスである *weakly acyclic game*、(C) ゆらぎを含む動的システムの定常分布解析。具体的にはまず、(A) の方法論が適用できる *unidirectional network* での DUE が (B) の *weakly acyclic game* であることを示す。次に、*weakly acyclic game* において蓄積されてきた知見を援用し、(C) の方法論を通して、ゆらぎを含むシステムの安定性概念である確率的安定性 (Foster and Young, 1990; Young, 1993) の解析を行う。以下では、(B) および (C) の概念・方法論を概説しながら、本研究の方法論について説明していく。

(B) *Weakly acyclic game* (Young, 1993; Marden et al., 2009) とは、任意の初期状態（経路選択）から、いずれかの Nash 均衡に到達できる *better response path*（ある時間の流れに沿って利用者が効用を改善するように行動を変化していったときの戦略ベクトルの列）が存在するゲームのクラスである。*Weakly acyclic game* では、*day-to-day dynamics* は、緩い条件の下で均衡集合への大域的収束性を持つようになる、i.e., 均衡状態が *day-to-day dynamics* の停留点となる。この停留点の存在性が、次で説明する定常分布解析を通じた均衡状態の確率的安定性を証明するにあたり、重要な役割を果たすことになる。

(C) 定常分布の解析は、ゆらぎを含むシステムの挙動を解析するにあたって有用な方法である。この解析では、まず利用者の選択行動にゆらぎ (e.g., ミスや利得の一時的なゆらぎ、個々人の認知誤差) が含まれる、確率的な *day-to-day dynamics* を考える。このダイナミクスはマルコフ連鎖でモデル化され、さらにその定常分布は初期値によらず一

意に定まる (Young, 1993; Sandholm, 2010). そのためこの一意な定常分布から, 動的システムの長期的な振る舞いについて, その(初期値によらない)大域的な特性を解析することができる. この方法論は, 交通ネットワーク配分理論でも, 定常状態における各リンク/経路交通量の分布 (e.g., 期待値, 分散) 解析という形で用いられてきた (Cascetta, 1989; Cantarella and Cascetta, 1995; Watling, 1998; Balijepalli and Watling, 2005; Cantarella and Watling, 2016).

一方ゲーム理論の分野では, この定常分布の漸近的な挙動から, ある均衡点の大域的な安定性を解析する研究が行われてきている. 具体的には, ゆらぎの生起確率を十分小さくすることで, 定常分布は特定の状態へと収束することが示されている (Young, 1993). このゆらぎに対して頑強な状態は確率的安定状態と呼ばれており, ゆらぎが含まれる現実的な交通状態を考えたときにも尤もらしく実現する状態として解釈される. さらにシステムが停留点を持つとき, いずれかの停留点が確率的安定状態となることが示されている. そのため, *weakly acyclic game* において *day-to-day dynamics* の収束性が示された (i.e., 均衡解が停留点となる) のであれば, 確率的安定な均衡状態の存在を証明することができるようになる.

以下ではまず, 4.2 において, *unidirectional network* における DUE ゲームが *weakly acyclic game* であることを示す. 次に, この節および 4.3 において, *unidirectional network* での DUE ゲームにおける *day-to-day dynamics* の収束性と確率的安定性を調べる. そして 4.4 において, 数値計算を通して均衡解への収束速度や定常分布の性質についての考察を行う. 最後に 4.5 で, 本章のまとめを行う.

4.2 DUE ゲームと Weakly acyclic games

本節では, DUE ゲームと *weakly acyclic game* (Young, 1993; Marden et al., 2009) との結びつきを証明する. 具体的にはまず, *weakly acyclic game* の定義とその特徴について説明する. 次に, 前章で示した最早未配分車両の存在性に基づき, *unidirectional network* での DUE ゲームが *weakly acyclic game* であることを示す. そして, 次節で行う均衡状態の確率的安定性解析に先立ち, DUE ゲームの収束性について調べる.

なお以降では, DUE ゲームを進化ゲームとして動学化する; DUE ゲームが繰り返し行われ, 各利用者が過去の経験に基づき日々の経路選択行動を変更する状況を考える. 経路選択の調整過程は離散的に行われるものとする. このときの時間の流れ (i.e., day) を示す離散的な変数を, $\tau = 1, 2, \dots$ で表す. Day t における利用者 $i \in \mathcal{P}$ の選択経路と利得 (i.e., 終点到着時刻) を, それぞれ $r_i^\tau, g_i(r_i^\tau; \mathbf{r}_{-i}^\tau)$ と表す (その他の変数, ベクトルも同様に表す). そして day ごとに, ランダムに選ばれた 1 人の利用者に経路変更の機会が与えられ, その利用者は全利用者に共通した行動ルール (i.e., *day-to-day dynamics*) に従い, 近視眼的に経路選択を変更する. なお, この段階では特定の *day-to-day dynamics* は考えない (後で特

		Player 2		
		A	B	C
Player 1	A	(2,1)	(1,2)	(0,0)
	B	(-1,2)	(2,1)	(0,0)
	C	(0,0)	(0,0)	(1,1)

図 4.1: 2 人・3 戦略ゲームの利得表

定化する).

4.2.1 Definition of weakly acyclic games

Weakly acyclic game は非協力ゲームのクラスの一つであり、次のように定義される：

定義 10. (Weakly acyclic game, Young, 1993; Marden et al., 2009) 有限の戦略空間 \mathcal{R} を持つゲーム (有限ゲーム) を考える. ある有限ゲームが weakly acyclic game であるとき, Nash 均衡状態ではない任意の戦略ベクトル $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ から, Nash 均衡であるいずれかの戦略ベクトルへの *better response path* が存在する.

ここで, *better response path* は次のように定義される: ある時間の流れに沿った戦略ベクトルの列 (path) $\mathbf{r}^0, \mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^k$ を考える. 各 day $\tau \in [1, k]$ では, 前の day とは異なる経路を選択する利用者 $i \in \mathcal{P}$ が存在しているものとし (i.e., $r_i^{\tau-1} \neq r_i^\tau$), これを day τ における逸脱者と呼ぶ. ここで, 各 day τ の逸脱者が 1 人であり, かつ逸脱者 i の効用が常に増加している (i.e., *better response* している) とき, すなわち,

$$\begin{cases} r_i^\tau \neq r_i^{\tau+1}, & \text{s.t. } g_i(r_i^{\tau+1}; \mathbf{r}_{-i}^{\tau+1}) < g_i(r_i^\tau; \mathbf{r}_{-i}^\tau), \\ r_j^\tau = r_j^{\tau+1}, & \forall j \in \mathcal{P} \setminus \{i\}. \end{cases} \quad (4.1)$$

が成立するとき, この path を *better response path* と呼ぶ. なお定義から分かるように, あるゲームが weakly acyclic game であるかどうかは, ゲームに適用されるダイナミクスとは無関係に定まる.

Weakly acyclic game の具体例を, 図 4.1 に示す. これは, 2 人・3 戦略ゲームの利得表を表したものである. 各状態の数字はプレイヤーの利得を表しており, 矢印は各状態から *better response* できる方向を表している. 図から分かるように, このゲームではいかなる状態からも Nash 均衡 (C,C) に到達できる *better response path* が存在する. 例えば, 利

ユーザーが (B, B) の戦略を取っていたとき, $(B, B) \rightarrow (B, A) \rightarrow (C, A) \rightarrow (C, C)$ という better response path が存在する.

なお, weakly acyclic game では, 全ての better response path が Nash 均衡に到達するとは限らない. これは, 利得表を見れば分かるように, better response path に cycle が含まれるためである. 例えばこの利得表では, $(B, B) \rightarrow (B, A) \rightarrow (A, A) \rightarrow (A, B) \rightarrow (B, B)$ という cycle が存在する. ただし, 適切な better response を行うことにより cycle から逸脱し, Nash 均衡へと到達することが可能である.

Weakly acyclic game は, 静的均衡配分理論との関係性で知られている, ポテンシャルゲーム (Monderer and Shapley, 1996) の一般化概念に相当する, i.e., weakly acyclic game の特殊なクラスが, ポテンシャルゲームである. 具体的には, cycle を含まない better response path のみを持つ weakly acyclic game が, ポテンシャルゲームとして位置付けられる.

4.2.2 A DUE game in a unidirectional network is a weakly acyclic game

では, unidirectional network 上の DUE ゲームが WAG であることを証明しよう:

定理 4. Unidirectional network 上の DUE ゲームは, weakly acyclic game である.

証明 10. 任意の初期経路選択ベクトル $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ から, 適切な順番で車両の経路選択を改善することにより Nash 均衡を導出するアルゴリズムを構築する: すなわち, 全ての初期経路ベクトルにおいて, Nash 均衡へと到達する better response path の存在を示すことで構造的に証明する.

まず, 車両を次の二つの集合に区分する: (1) 事後的な最短経路を選択していることが確定している車両集合 A , および (2) 事後的な最短経路を選択しているかどうか分からない車両集合 B . 集合 A, B を, それぞれ $\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B$ と表す. また, 各集合に属する車両の経路ベクトルを, それぞれ $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$ と表す. なお, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$ である. この集合 B に含まれる車両を, better response により一台ずつ集合 A に移すことが, アルゴリズムの目的である.

以上の準備の下, Nash 均衡を導出する次のアルゴリズムを考える:

0. 初期設定: $m = 0$ とし, 車両集合, 経路ベクトルについて次のように初期設定を行う: $(\mathcal{P}_A^m, \mathcal{P}_B^m) = (\emptyset, \mathcal{P})$, $\mathbf{r}^m = (\mathbf{r}_A^m, \mathbf{r}_B^m) = (\emptyset, \mathbf{r})$. ここで, \mathbf{r} は初期経路選択ベクトルである.
1. 最早未配分車両の探索: 車両集合 \mathcal{P}_A^m の経路ベクトル \mathbf{r}_A^m を与件とし, 車両集合 \mathcal{P}_B^m に属する車両を未配分車両とみなして, 定義に基づき最早未配分車両 i を求める. 車両 i の最早未配分車両としての最短経路を \bar{r}_i , 最短経路を利用することによる終点到着時刻を g_i^* と表す.

2. 経路ベクトルの更新：車両 i の現在の選択経路による終点到着時刻 $g_i(r_i^m; \mathbf{r}_{-i}^m)$ と g_i^* を比較し、次の場合分けに基づき経路を変更させる：
- (a) $g_i^* < g_i(r_i^m; \mathbf{r}_{-i}^m)$ の場合：車両 i の利用経路を \bar{r}_i^* へと変更させる，i.e., $r_i^{m+1} := \bar{r}_i^*$.
 なお，他の車両の選択経路は変更しない： $r_j^{m+1} := r_j^m, \forall j \in \mathcal{P}_B^m \setminus \{i\}$.
- (b) $g_i^* = g_i(r_i^m; \mathbf{r}_{-i}^m)$ の場合：まず，次の二つの条件を満たす経路選択ベクトル \mathbf{r}'_B が存在するかどうかを確認する：(1) \mathbf{r}'_B から \mathbf{r}'_B への better response path が存在し，
 (2) \mathbf{r}'_B において車両 i の終点到着時刻は遅くなる，i.e., $g_i(r_i^m; \mathbf{r}_{-i}^m) < g_i(r'_i; \mathbf{r}'_{-i})$
 where $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}'_A, \mathbf{r}'_B)$.
 \mathbf{r}'_B が存在するとき (Case (b)-(i))， \mathcal{P}_B^m に属する車両の選択経路を次のように更新する： $r_i^{m+1} := \bar{r}_i^*, r_j^{m+1} := r'_j, \forall j \in \mathcal{P}_B^m \setminus \{i\}$. 一方， \mathbf{r}'_B が存在しないとき (Case (b)-(ii))，車両の経路は変更しない： $r_j^{m+1} := r_j^m, \forall j \in \mathcal{P}_B^m$.
3. 車両集合の更新，及び収束判定： $\mathcal{P}_A^{m+1} := \mathcal{P}_A^m \cup \{i\}, \mathcal{P}_B^{m+1} := \mathcal{P}_B^m \setminus \{i\}$ とする． $\mathcal{P}_B^{m+1} \neq \emptyset$ ならば， $m := m + 1$ としてステップ 1 に戻る．そうでない場合， $\mathbf{r}^{m+1} = \mathbf{r}_A^{m+1}$ を均衡解としてアルゴリズムを終了する．

このアルゴリズムは，最早未配分車両が存在する (i.e., 各車両に対し配分すべき適切な順序づけができる) ゲームならば，その順番に従い各車両を最短経路に better response させることで，事後的な最短経路を達成している状態にすることができることを示している．以下では，各ステップの役割について説明する．

ステップ 1 では，車両集合 B から最早未配分車両を探索している．最早未配分車両の最短経路 \bar{r}_i^* は未配分車両 (i.e., 集合 B に属する車両) に追い越されない経路である．そのため，車両 i を \bar{r}_i^* に better response させることができれば，事後的な最短経路を選択している状態が達成される．

ステップ 2 では，まず，車両 i の現在利用している経路が事後的な最短経路であるかどうかを確認する；そして，事後的な最短経路ではない場合，better response を通して車両 i の利用経路を事後的な最短経路 \bar{r}_i^* へと変更する．まず case-(a) では，現在の利用経路 r_i^m より，最短経路 \bar{r}_i^* を利用することで終点により早く到着できる状態であり，事後的な最短経路を選択していないことが明らかなケースである．そのため，車両 i は better response により \bar{r}_i^* を選択することができる．

一方 case-(b) は，現在の選択経路を利用することによる終点到着時刻が事後的な最短経路のものと同じ状況であるが，現在の利用経路が事後的な最短経路かどうかは自明ではない．何故ならば，車両集合 B に属する車両の better response により，車両 i が最短経路上で割り込まれ，終点到着時刻が増加する可能性があるからである．従ってこのケースでは，そのような集合 B に属する車両の経路選択状況 \mathbf{r}'_B が存在するかどうかを確認する．そして存在する場合 (case (b)-(i))，まず集合 B に属する車両の経路ベクトルを \mathbf{r}'_B へと better response により変更する；これにより車両 i の終点到着時刻は増加するため，better

response により選択経路を \bar{r}_i^* へと変更する。存在しない場合 (case (b)-(ii)), 車両 i の選択経路は事後的な最短経路であることが確定する; そのため, 集合 B に属する車両の選択経路を変更する必要はない。

最後にステップ3において, 車両 i を集合 A に加える。ステップ2を通して車両 i の選択経路は事後的な最短経路となる。そのため, 集合 A に属する車両の終点到着時刻は, 集合 B に属する車両の経路変更によって変化しないことが保証される。

結果として, これらのステップを車両台数 $|\mathcal{P}|$ だけ繰り返すことにより, 全ての車両を better response により事後的な最短経路を選択している状態にすることができる。すなわち, 最早未配分車両の存在が保証されているとき, 任意の初期戦略ベクトル \mathbf{r} から Nash 均衡に到達する better response path の存在が示される。そして, unidirectional network 上の DUE ゲームでは, 最早未配分車両の存在は保証されている。よって, unidirectional network 上の DUE ゲームは, WAG である。□

なお, 証明で示したアルゴリズムは, Iryo (2011b) の順序配分アルゴリズムを拡張したものとして位置付けられる。具体的には, 順序配分アルゴリズムでは, 各車両は初期経路として, 何も選択していない状態を想定していた; そして, その初期値から最早未配分車両を最短経路へと better response させることにより, Nash 均衡状態を導いている。一方で, 今回構築したアルゴリズムは, 任意の初期経路から, better response が Nash 均衡へと収束することを示している。すなわち, 時間分解特性を持つネットワークにおける DUE ゲームでの, better response dynamics の大域的収束性という, より望ましい性質を示している。

なお, 証明で示したアルゴリズムは, 最早未配分車両が存在する DUE ゲームに対して適用することができる。そのため, 次の系が成立する:

系 1. 最早未配分車両が存在する DUE ゲームを考える。この DUE ゲームは weakly acyclic game である。

4.2.3 Unidirectional network における動的利用者均衡への収束性

本節では, 次節の確率的安定性の解析に先立ち, DUE ゲームでの day-to-day dynamics の収束性を調べる。ゆらぎを含まない確定的な day-to-day dynamics の収束性は, 均衡解の安定性を示す十分条件とはならない。これは, ゆらぎが加わることで均衡状態からの逸脱が生じたとき, 元の均衡状態へ戻る方向に各利用者の行動選択が行われるとは限らないためである。しかしその収束性は, ダイナミクスにゆらぎが加わったときの安定性 (i.e., 確率的安定性) を示すにあたり, 重要な役割を担うことになる。以下では, 粒子モデルにおける一般的な確定的ダイナミクスとして, better response dynamics (Hart and Mas-Colell, 2000) と best response dynamics (Blume, 1993) の収束性を解析する。

Better response dynamics

Better response dynamics による経路選択の調整過程は、次のように行われる：各 day $\tau (> 0)$ において、1 台の車両 $i \in \mathcal{P}$ がランダムに選ばれ、経路を変更する機会が与えられる。 i 以外の車両は現在の経路をそのまま選択する。車両 i は、現在の経路 r_i^τ より早く終点に到着する経路 $r_i^{\tau+1}$ が存在する場合 (i.e., $g_i(r_i^{\tau+1}; \mathbf{r}_{-i}^\tau) < g_i(r_i^\tau; \mathbf{r}_{-i}^\tau)$)、その経路を新たに選択する。ただし、該当経路が複数存在するときは、その経路集合からランダムに一つの経路を選択するものとする。一方で、より早く終点に到着する経路が存在しない場合、経路は変更しない。すなわち、車両 i は次に示される経路選択枝集合 $D_i(\mathbf{r}_{-i})$ からランダムに経路を選択する：

$$D_i(\mathbf{r}_{-i}) := \{r_i^* \in \mathcal{R}_i \text{ s.t. } g_i(r_i^*, \mathbf{r}_{-i}) < g_i(r_i^\tau, \mathbf{r}_{-i})\}. \quad (4.2)$$

Better response dynamics では、各利用者は自身の効用が厳密に改善されるように経路を変更する (i.e., 同じ効用の経路に変更することはない)。また、Nash 均衡がこのダイナミクスの停留点であることは自明である。すなわちこのダイナミクスは、連続モデルにおける *positive correlation* と *Nash stationarity* を満たす、粒子モデルにおける自然なダイナミクスとして位置付けることができる。

では、unidirectional network における DUE ゲームでの、better response dynamics の収束性を示そう。これは、DUE ゲームが weakly acyclic game であるという事実から、次のように直接導くことができる：まず、weakly acyclic game であるため、全ての戦略ベクトルから Nash 均衡への better response path が存在する。そして、better response dynamics を無限回繰り返す (i.e., $\tau \rightarrow \infty$) ことで、こうした better response path が選ばれなくなる確率はゼロになる。よって、better response dynamics は大域的に almost surely (i.e., ほとんど確実な) 収束性を持つことが分かる。従って次の命題が成立する：

命題 1. Unidirectional network における DUE ゲームを考える。車両の経路選択の day-to-day ダイナミクスとして better response dynamics を考えたとき、このダイナミクスにより実現する経路ベクトル \mathbf{r} は、初期値に関わらず Nash 均衡へとほとんど確実に収束する。

証明 11. WAG での better response dynamics の収束性は、Young (2004) により示されている。Unidirectional network における DUE ゲームは WAG であるため、この DUE ゲームでの better response dynamics は大域的収束性を持つ。□

Best response dynamics

続いて、best response dynamics の収束性について考察する。Best response dynamics の経路選択の調整過程では、経路変更の機会が与えられた車両 i は、自身の利得を最大化する (i.e., 終点到着時刻が一番早い) 経路を選択する。すなわち、車両 i は次の式で示され

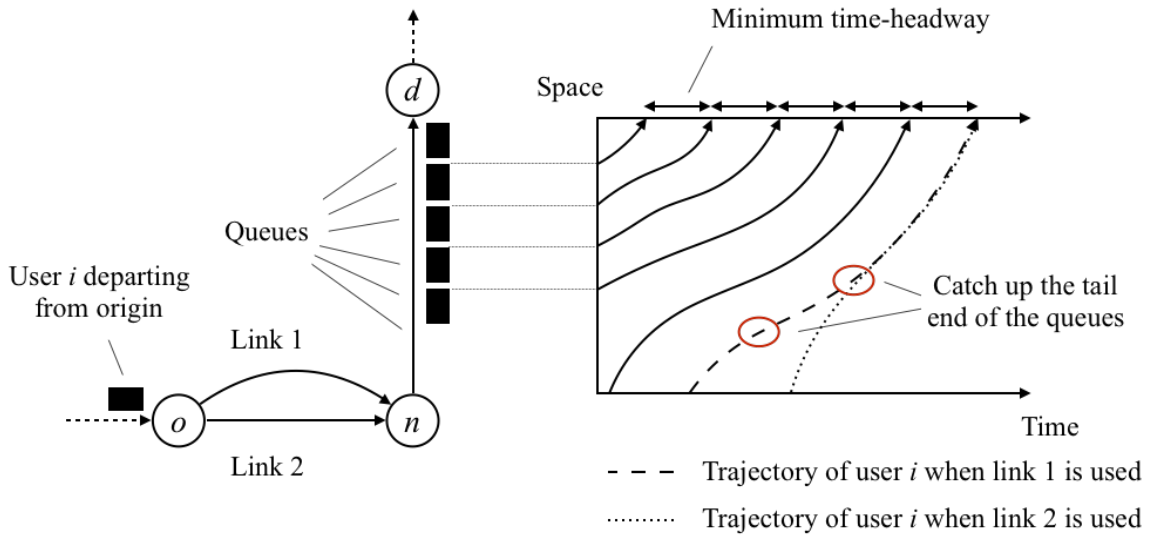


図 4.2: 待ち行列が存在するリンクにおける車両軌跡図

る経路選択枝集合 $B_i(\mathbf{r}_{-i}^\tau)$ からランダムに経路を選択する :

$$B_i(\mathbf{r}_{-i}^\tau) := \left\{ r_i^* \in \mathcal{R}_i \text{ s.t. } g_i(r_i^*, \mathbf{r}_{-i}^\tau) = \min_{r_i \in \mathcal{R}_i} g_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}^\tau) \right\}. \quad (4.3)$$

Best response dynamics が better response dynamics と本質的に異なるのは、狭義 Nash 均衡がダイナミクスの停留点となることであるこれは、このダイナミクスでは、同一の終点到着時刻を持つ経路に変更できるためである。すなわち、ある Nash 均衡状態 \mathbf{r}^* において、少なくとも 1 人の利用者が 2 つ以上の最短経路を持つ (i.e., 複数の最適反応を持つ) とき、その利用者は best response により経路を変更しうる。結果として、通常の Nash 均衡は停留点とならない。そのため、best response dynamics の収束性を示すためには、DUE ゲームが狭義 Nash 均衡を持つことが必要条件となる。

しかし DUE ゲームでは、狭義 Nash 均衡の存在は一般に保証されない。これは、ネットワーク上に待ち行列が存在する (i.e., zero-flow congested link が存在する) とき、車両の事後的な最短経路は複数存在しうるためである。例えば、図 4.2 に示すネットワークを考えてみよう。このネットワークは 1 起点 1 終点ネットワークであり、2 つの経路が存在する。ここで、均衡状態においてリンク 3 に待ち行列が存在しており、ある車両 i はどちらの経路を利用して待ち行列の末尾に追いつけるものとしよう ; 加えて、車両 i より後の時刻に起点を出発する車両は、車両 i を追い越す (i.e., リンク 3 により早く流入する) ことができないものとする。このとき図中の軌跡図に示すように、車両 i のリンク 3 の流出時刻 (i.e., 終点到着時刻) は、どちらの経路を利用して同じになる。すなわち、事後的な最短経路が複数存在する (i.e., 式 (3.1) において複数の最適反応が存在する) ため、均衡解の狭義性は失われることがわかる。

以上をまとめると、あるダイナミクスの収束性には、均衡解の狭義性、または適用され

るダイナミクスでのプレイヤーの利得の厳密な改善性が重要な役割を果たすことが分かる。そして DUE ゲームでは均衡解は一般には狭義性を持つことが保証されないため、利得の厳密な改善性を持つ *better response dynamics* が *best response dynamics* より、収束性という観点では望ましいことが分かる。こうした、待ち行列の存在が均衡解の狭義性を損なうことで、ある種のダイナミクスでは収束性が保証されなくなりうるといった事実は、動的な交通流特有の現象として興味深い性質であるといえよう。そして、この収束性の性質が、次節で示す確率的安定性にも強く影響を及ぼすのである。

4.3 動的利用者均衡状態の確率的安定性

本節では、動的利用者均衡状態の確率的安定性を解析する。まず、確率的安定性の定義について説明する。次に、前節で収束性について調べた確定的なダイナミクスにゆらぎが含まれるダイナミクスを考え、それらの確率的安定性を調べる。

4.3.1 確率的安定性の定義

均衡解の漸近的な挙動を調べるにあたり、Young (1993) は“確率的安定性”の概念を導入した。確率的安定性の分析では、ゆらぎを含むダイナミクスの下での状態推移の長期的な振る舞いを、確率過程の定常分布として捉える。そして、ゆらぎが生じる確率を十分小さくしたときの定常分布の漸近的な挙動から、どの状態が実現しやすいか (i.e., 十分長期にわたり観測したときに、どの状態の観測頻度が高くなるか) を分析する。このゆらぎに対して長期的に頑強な状態が確率的安定な状態である。

ゆらぎの生起確率が十分小さくなったときの長期的な振る舞いを見ると、確率的安定である状態は、そうでない状態と比較して頻繁に観測される状態となる。すなわち、確率的安定である均衡解が存在することを証明できれば、その均衡は摂動を含むダイナミクスの下での状態遷移においても頻繁に観測される、実現しうる尤もらしい均衡解として解釈することができる。

確率的安定性は、フォーマルには次のように定義される：まず、あるゆらぎを含まないダイナミクスによる各車両の日々の経路変更を有限マルコフ連鎖としてモデル化する (これを *unperturbed Markov chain* と呼ぶ)。このマルコフ連鎖の状態空間は経路選択ベクトルの直積集合 \mathcal{R} であり、遷移確率行列を \mathbf{P}^0 により表す。また、状態 (経路ベクトル) \mathbf{r} から \mathbf{r}' への遷移確率を $\mathbf{P}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^0$ により表す。

次にこのダイナミクスにおいて、あるパラメータ ϵ により特徴づけられた確率でゆらぎが起きる (e.g., 効用に関わらずランダムに戦略を選ぶ) ダイナミクス (*perturbed dynamics*) を考える；そして先と同様に、このダイナミクスによる経路ベクトルの遷移を有限マルコフ連鎖としてモデル化する (*regular perturbed Markov chain* と呼ぶ)。Regular perturbed

Markov chain の遷移確率行列を \mathbf{P}^ϵ により表す. ただしこの遷移確率行列は, パラメータ ϵ がゼロになったとき, unperturbed Markov chain の遷移確率行列と一致するものとする, i.e., $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}^\epsilon = \mathbf{P}^0$.

$\epsilon > 0$ であるとき, perturbed Markov chain は非周期, かつ既約である, i.e., このマルコフ連鎖はエルゴード的である. すなわち, このマルコフ連鎖は唯一の定常分布 $\boldsymbol{\mu}^\epsilon$ を持ち, これは $\boldsymbol{\mu}^\epsilon \mathbf{P}^\epsilon = \boldsymbol{\mu}^\epsilon$ を満たす. この定常分布は, 長期間にわたり観測したときの各状態の観測頻度を表すものである. さらに, この定常分布はパラメータ ϵ がゼロに近づくことで, unperturbed Markov chain の定常分布のうち一つへと収束することが示されている (Young, 1993). そのため, ゆらぎの生起確率が十分小さくなったときの定常分布 $\boldsymbol{\mu}^\epsilon$ から, 摂動を含まないダイナミクスでの漸近的な挙動 (i.e., どの状態周辺に定常分布が収束するか) を調べることができる.

以上の準備の下, 確率的安定性は次のように定義される:

定義 11. (Stochastic stability, Young, 1993) ある状態 $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ がある regular perturbed Markov chain に対して確率的安定であるとき, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \boldsymbol{\mu}_r^\epsilon > 0$ が成立する.

4.3.2 動的利用者均衡の確率的安定性

では, unidirectional network における DUE ゲームの, 均衡解の確率的安定性を調べよう. 本稿では, 前節で収束性を調べた2つのダイナミクスの perturbed dynamics を考える. そして, それらのダイナミクスの確率的安定性について調べる.

Perturbed better response dynamics

Perturbed better response dynamics では, 確定的なダイナミクスと同様に, 各 day τ ごとに, ある車両 $i \in \mathcal{P}$ がランダムに選ばれ経路変更の機会が与えられる. しかし車両 i は, 摂動パラメータ ϵ で紐づけられた確率 $p_i(\epsilon)$ で, 経路変更にミスを起こすものとする (e.g., 現在の効用以下の経路を含む経路へとランダムに変更する). ただし, 摂動パラメータをゼロに近づけることで, ミスの確率もゼロに近づくものとする, i.e., $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_i(\epsilon) = 0$. このダイナミクスによるある状態 $\mathbf{r} = (r_i, \mathbf{r}_{-i})$ から $\mathbf{r}' = (r'_i, \mathbf{r}_{-i})$ への遷移確率 $\mathbf{P}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}$ は次のように表される:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^\epsilon = (1 - p_i(\epsilon))\mathbf{P}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^0 + \frac{1}{n} \cdot p_i(\epsilon) \cdot q_i(r'_i; \mathbf{r}_{-i}) \quad (4.4)$$

$$\text{where } \mathbf{P}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}^0 = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{1}{|D_i(\mathbf{r})|} & r'_i \text{ が車両 } i \text{ の better response による} \\ & \text{経路変更先の候補のとき.} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.5)$$

ここで $q_i(r'_i; \mathbf{r}_{-i})$ は, 現在の経路選択ベクトルが \mathbf{r}_{-i} であるとき, 車両 i がミスをするので, 経路 r'_i を選択する確率である: $\sum_{r'_i \in \mathcal{R}_i} q_i(r'_i; \mathbf{r}_{-i}) = 1$ を満たす. 式 (4.4) の第一項は, ミ

スをしなないときの遷移確率を示している；また第二項は、車両 i が選択され、かつミスをするので r_i から r'_i へと経路変更する確率を示している。

ミスの確率 $p_i(\epsilon)$ 、および経路選択確率 $q_i(r'_i; \mathbf{r}_{-i})$ は、構築される perturbed Markov chain が次の性質を満たすのであれば、どのようなものであってもよい：

1. マルコフ性を満たしている (i.e., 遷移確率は time-independent である)。
2. マルコフ連鎖が、エルゴード性を満たしている。
3. 摂動パラメータをゼロに近づけることで、確定的なダイナミクスに収束する

例えば、ミスを起こしたとき、利用者が効用に関わらずランダムに経路を選択する突然変異的なダイナミクスを考える場合は、

$$p_i(\epsilon) = \epsilon, \quad q_i(r'_i; \mathbf{r}_{-i}) = \frac{1}{|\mathcal{R}_i|} \quad (4.6)$$

とすれば良い。また、経路選択確率が利得と関係付けられているダイナミクスを考える場合は、次のような logit 型の経路選択確率を導入すれば良い：

$$q_i(r'_i; \mathbf{r}_{-i}) = \frac{\exp(-g_i(r'_i, \mathbf{r}_{-i}))}{\sum_{r_i \in \mathcal{R}_i} \exp(-g_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}))}. \quad (4.7)$$

そして以上の準備の下、perturbed better response dynamics の下での均衡解の確率的安定性は次の定理により示される：

定理 5. Unidirectional network 上での DUE ゲームを考える。このゲームに perturbed better response dynamics を適用したとき、このダイナミクスの確率的安定状態は、Nash 均衡状態の集合に含まれる。すなわち、確率的安定的な動的利用者均衡状態が存在する。

証明 12. Young (1993) は、確率的安定状態を解析するにあたり有用な、次の定理を示している：

定理 6. (Young (1993), Theorem 4) 有限の状態空間 \mathcal{R} を持つゲームを考える。まず、このゲームにゆらぎを含まない確定的なダイナミクスを適用し、このときの状態遷移をマルコフ連鎖でモデリングした unperturbed Markov chain を考える；そして、このマルコフ連鎖の再帰的同値類を $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_j$ と表す。次に、摂動パラメータ ϵ を持つこのダイナミクスの regular perturbed Markov chain を考え、その唯一の定常分布を μ^ϵ と表す。

このとき、 $\epsilon \rightarrow 0$ により、 μ^ϵ は unperturbed Markov chain の定常分布のうち、いずれか一つに収束する。さらに、確率的安定な状態は、unperturbed Markov chain の再帰的同値類のうち、最小の stochastic potential を持つものに含まれる^{*3}。

^{*3} Stochastic potential の詳細については Young (1993); Ellison (2000) を参考。

では, *unidirectional network* での DUE ゲームにおける均衡状態の確率的安定性を証明しよう. この DUE ゲームは *weakly acyclic game* であるため, *better response dynamics* は Nash 均衡へと収束し, 収束後は均衡解が実現し続ける, i.e., Nash 均衡状態は *unperturbed Markov chain* の吸収状態である. これは, 再帰的同値類のそれぞれが, Nash 均衡と一対一対応することを意味している. 上記の定理より, 確率的安定な状態は再帰的同値類の集合に含まれるため, 確率的安定状態は均衡状態の集合に含まれる. よって定理は証明された. \square

すなわち, *better response dynamics* の *perturbed dynamics* であれば, どのようなダイナミクスであっても, 均衡解の確率的安定性が保証されることが示された.

Perturbed best response dynamics

次に, *perturbed best response dynamics* の確率的安定性について調べよう. このダイナミクスの具体例として最もよく知られているものの一つは, 次に示す *logit-response dynamics* (Blume, 1993; Marden and Shamma, 2012; Alós-Ferrer and Netzer, 2017) である: ある day τ における経路選択ベクトルが \mathbf{r} で与えられているとき, day $\tau + 1$ において車両 i が経路 r_i へと変更する確率 $p_i(r_i; \mathbf{r}_{-i})$ は, 次のように与えられる:

$$p_i(r_i; \mathbf{r}_{-i}) = \frac{\exp(-\beta g_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}))}{\sum_{r_i \in \mathcal{R}_i} \exp(-\beta g_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}))}. \quad (4.8)$$

ここで, β ($0 < \beta < \infty$) は摂動パラメータ ϵ の逆数に相当するパラメータである, i.e., $\beta \rightarrow \infty$ により, ダイナミクスは *best response* に収束する.

Logit-response dynamics の収束性について, Alós-Ferrer and Netzer (2017) は次の定理を示している:

WAG では, *logit-response dynamics* の確率的安定状態は狭義 Nash 均衡の集合に含まれる.

これは, 先の Young の定理の応用であり, *logit-response* の *unperturbed dynamics* である *best response dynamics* の停留点 (i.e., マルコフ連鎖の吸収状態) が, 狭義 Nash 均衡状態と対応することを利用したものである. しかし前節で示した通り, DUE ゲームでは狭義 Nash 均衡状態は一般に存在を保証されない. そのため, *logit-response dynamics*, および *perturbed better response dynamics* は, 確率的安定な均衡の存在が保証されないといえる.

4.4 数値実験

本節では数値計算を通して, 理論解析では明らかにできなかった事項について調べる. 具体的には, まず *better response dynamics* の収束性について調べる. 次に, *perturbed better*

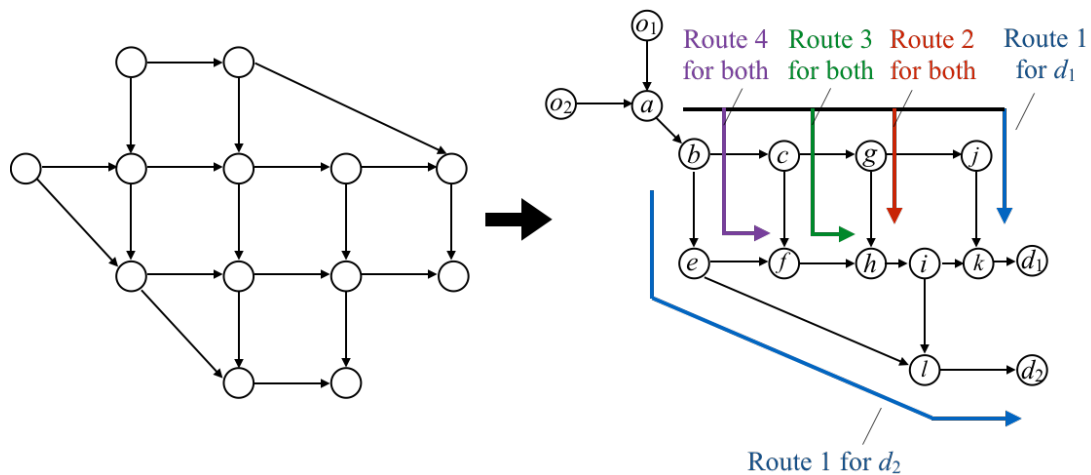


図 4.3: 左図：オリジナルの Dupuis ネットワーク．右図：本稿で取り扱うネットワーク

表 4.1: リンク・パラメータ (FFTT: 自由旅行時間, BN: ボトルネック容量, SF: 飽和交通流率)

Link	FFTT	BN	SF	Link	FFTT	BN	SF
	[sec]	[veh/sec]	[veh/sec]		[sec]	[veh/sec]	[veh/sec]
(o_1, a)	14	2	2	(f, h)	12	1.5	1.5
(o_2, a)	18	2	2	(g, h)	18	0.17	0.5
(a, b)	6	2	2	(g, j)	6	0.2	0.5
(b, c)	6	2	2	(h, i)	9	0.67	83
(b, e)	18	1.5	1.5	(i, k)	12	0.27	0.67
(c, f)	26	1.5	1.5	(i, l)	6	0.2	0.5
(c, g)	10	1.5	1.5	(j, k)	6	0.67	1
(e, f)	20	1.5	1.5	(k, d_1)	6	0.67	1
(e, l)	42	0.27	0.5	(l, d_2)	6	0.67	1

response dynamics, および perturbed best response dynamics の定常分布について調べる。

4.4.1 ネットワーク・需要設定

図 4.3 に、本章で取り扱う unidirectional network を示す。このネットワークは Nguyen Dupuis をベースに、unidirectional 構造を持つように構造を修正したものである。起点ノードの集合は $N_o = \{o_1, o_2\}$ であり、終点ノードの集合は $N_d = \{d_1, d_2\}$ である。ネットワーク上の各リンクは、リンク終端のボトルネック部とボトルネック以外の区間から構成されており、台形型の Fundamental Diagram を持っている。各リンクのパラメータ (e.g., 自由旅行時間, ボトルネック容量) を表 4.1 にまとめる。なお、ネットワーク上の各起点から各終点には、四つの経路が存在している (i.e., 各車両の経路選択肢集合は四つの経路から構成される)。これら経路は図に示したとおりに番号付けている。

ネットワーク上の各起点からは、それぞれ 100 台の車両が出発する。各車両は一定の車頭間隔で起点からネットワークに流入している (車頭間隔の具体的な値は後に示す)。また、各終点へ向かう車両の比率は 1 対 1 と設定している, i.e., 各起終点間を走行する車両

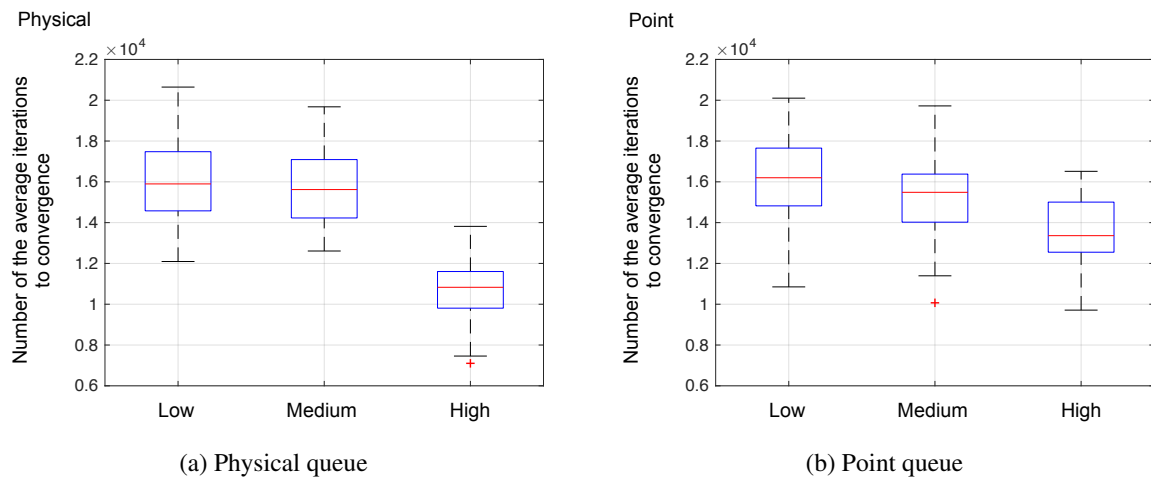


図 4.4: Nash 均衡状態に達する前の収束日数の平均値.

は、50 台ずつ存在する。

本稿では、Leclercq and Bécarie (2012) により提案された mesoscopic LWR モデルにより、各車両の挙動を計算する。この数値実験では、各車両が特定の箇所 (e.g., ノード) を通る時刻である *event time* を求める。次に *event time* のうち、最小の時刻までの車両挙動 (i.e., 各リンク上の車両軌跡) を、適用される動的な交通流モデルに従い求める。そして、これらを全ての車両がトリップを終えるまで繰り返している。なお、本稿では動的な交通流モデルとして、Newell (2002) の追従モデルを採用している。

4.4.2 数値実験結果

Better response dynamics の収束速度について

まず、better response dynamics が Nash 均衡に収束するために必要な日数を調べる。この数値実験では、起点から流入する車両の車頭間隔について、次の三種類のパターンを考える；2.5[sec/veh] (low パターン)、2.0[sec/veh] (medium パターン)、1.5[sec/veh] (high パターン)。さらに待ち行列の延伸が収束日数に影響するかどうかを考察するために、各需要パターンについて、physical queue と point queue のそれぞれを適用する。収束日数の比較にあたっては、各需要・queue モデルを適用したものについて、better response dynamics による均衡解への収束計算を 50 回行い、収束に要するまでの平均日数を計算した。なお経路選択ベクトルの初期値は、距離最短の経路と設定している。

図 4.4 に、平均収束日数の結果を示す。図 4.4 の左に physical queue、右に point queue を適用したものを示す。各図には、異なる需要パターンを適用した結果を箱ひげ図で示しており、図中赤線が収束日数の平均値を示している。これらの図からは、車頭間隔が短くなるほど (流入交通流率が高いほど)、収束日数が少なくなる傾向にあることが見て取れる。また physical queue と point queue の収束日数を比較すると、high の需要パターンで

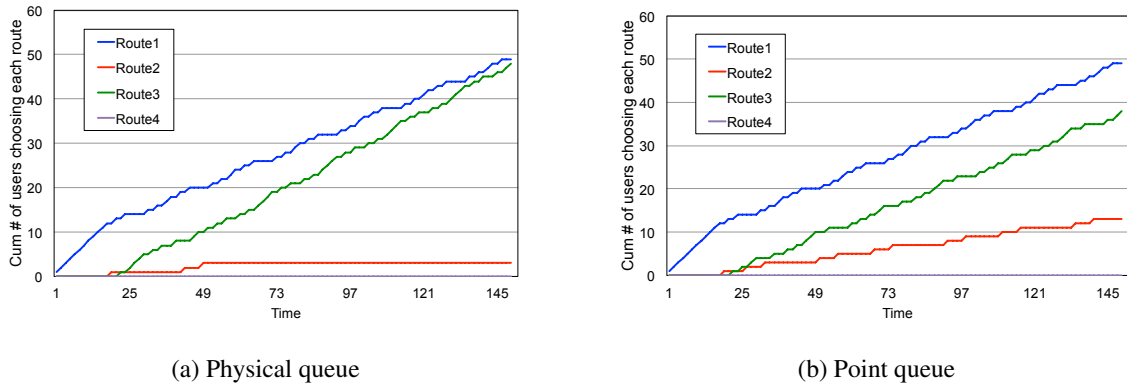


図 4.5: 均衡状態での、終点 d_1 に向かう各経路の累積流入台数.

は収束日数の平均値に明確な差が出ていることがわかる。この結果は、この数値実験の設定では、待ち行列の延伸が収束日数を少なくしていることを示唆している。

この要因について考察するために、均衡状態における経路選択パターンを調べた。図 4.5 に、physical queue と point queue のそれぞれを適用した場合における、各経路の利用者数の累積図を示す。横軸は時間を示しており、縦軸はその時刻までに経路に流入した車両の累積数を示している。これらの図を比較すると、physical queue を適用した場合は、より早い時刻において、経路 2 を利用する車両が存在しなくなっていることがわかる。これは、リンク (j, g) 上の待ち行列がリンク (c, g) に延伸することにより、この経路の旅行時間が増加したためである。このことは、均衡状態への収束過程を考えたとき、better response による各車両の経路変更先の候補から経路 2 が除外されやすくなることを意味している、i.e., 経路 1 と 3 の間での better response を行う傾向にある。一方で point queue を適用した場合は、待ち行列の延伸が生じていないために、経路 2 を利用する車両はより遅い出発時刻においても存在していることがわかる。すなわち、経路 2 は better response の候補として残り続けていることがわかる。結果として、この数値実験においては、待ち行列の延伸が better response による事後的な最短経路への変更確率を高めていると考えられる。そしてこのために、physical queue ではより少ない日数で均衡解へと収束していることが示唆される。

Perturbed dynamics の定常分布

次に、perturbed dynamics の定常分布を調べる。ここではまず、perturbed better response dynamics を適用したときの定常分布を求める；そして、ゆらぎのパラメータを小さくすることで、どのように均衡解へと収束するのかを調べる。次に perturbed best response dynamics を適用し、理論的には保証されなかったが、確率的安定な均衡は発現するのかどうかを調べる。

数値計算の設定について説明する。まず、perturbed better response dynamics では、十

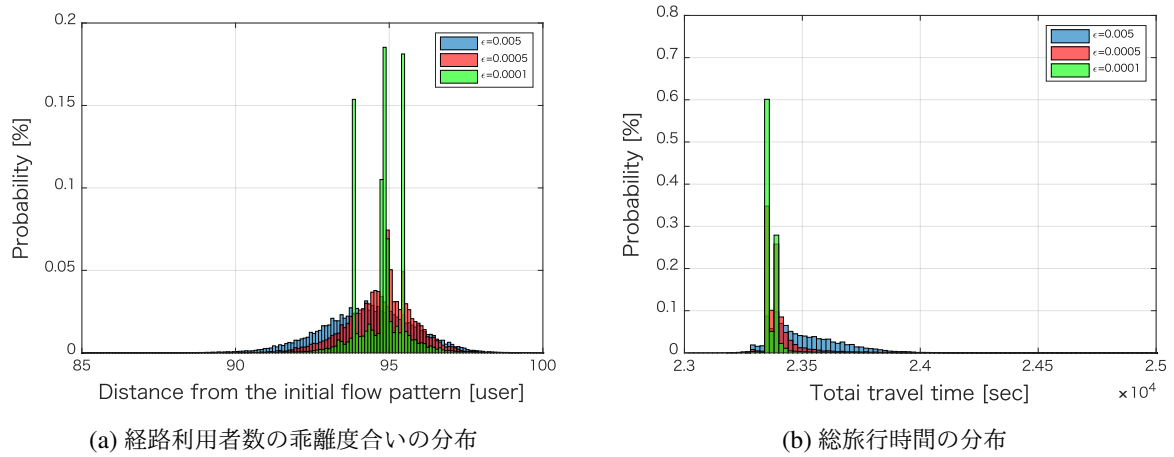


図 4.6: Perturbed better response dynamics における定常分布

分小さい確率 ϵ で利用者は better response にミスを起こすものとする。そしてミスを起こした利用者は、経路の利得に関わらずランダムに一つの経路を選択するものとする。次に、perturbed best response dynamics としては、logit-response dynamics を適用する。Logit-response では、ゆらぎのパラメータ β が与えられたとき、次に示す確率に基づき経路を選択する：

$$p_i(r_i; \mathbf{r}_{-i}) = \frac{\exp(-\beta g_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}))}{\sum_{r_i \in \mathcal{R}_i} \exp(-\beta g_i(r_i, \mathbf{r}_{-i}))}. \quad (4.9)$$

本稿では、各ダイナミクスについて、次に示す 3 パターンのゆらぎのパラメータを与えたときの定常分布を求める：perturbed better response では、 $\epsilon = 0.005, 0.0005, 0.0001$ ；logit-response では、 $\beta = 0.1, 1, 100$ 。なお、需要は high パターンのものを適用した。

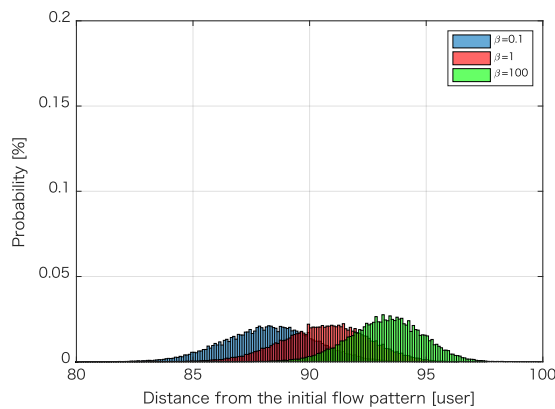
定常分布を求める際には、適用された perturbed dynamics に従った経路変更を、200,000 回繰り返す。初期経路選択ベクトルは、前節と同じく各利用者が最短距離経路を選んでいる状態であるとする。そして、各交通状態に対する頻度分布を求める。交通状態としては、次の 2 つの指標を用いている（1 つの繰り返しに対し、2 つの交通状態を用いて定常分布を導出している）：一つは、初期経路選択ベクトルからのフロー・パターンの乖離度合いである。具体的には、各経路の利用者数の乖離度合い $z(\tau)$ を、次に示すユークリッド距離で定義している：

$$z(\tau) = \left[\sum_{r \in \mathcal{R}} (f^r(\tau) - f^r(0))^2 \right]^{1/2}. \quad (4.10)$$

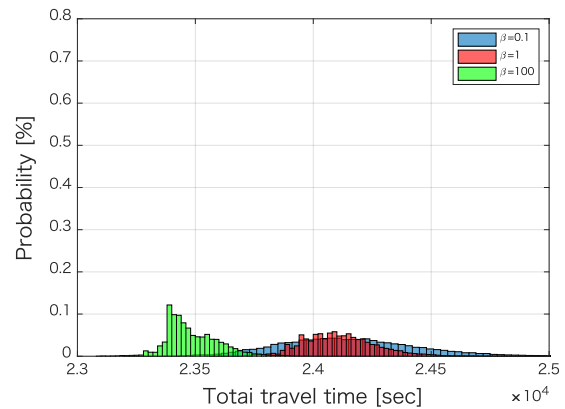
ここで $f^r(\tau)$ は、day τ における経路 r の利用者数を表している。もう一つの交通状態としては、旅行時間のパターンの類似度合いを見るために、総旅行時間を用いてる。

表 4.2: 各経路の利用者数

For d_1					For d_2					Total Time [sec]
r_1	r_2	r_3	r_4		r_1	r_2	r_3	r_4		
49	4	47	0		55	7	38	0		23342
49	4	47	0		55	6	39	0		23342
49	4	47	0		55	7	38	0		23342
49	3	48	0		55	7	38	0		23381
49	2	49	0		55	9	36	0		23381



(a) 経路利用者数の乖離度合いの分布



(b) 総旅行時間の分布

図 4.7: Logit-response dynamics における定常分布

Perturbed better response dynamics

図 4.6 に、perturbed better response dynamics を適用したときの定常分布を示す。各図において横軸は交通状態を示しており、縦軸は各状態の頻度分布を表している。まず図 4.6a を見ると、ゆらぎのパラメータ ϵ が小さくなることにより、交通状態が Nash 均衡周りへと収束していることがわかる。ただし、収束先の Nash 均衡は唯一ではなく、複数の確率的安定な Nash 均衡が存在していることがわかる。例えば $\epsilon = 0.0001$ では、5 本のビンが高い頻度分布を示しており、これらはそれぞれ異なる種類の Nash 均衡状態に対応している。

次に、総旅行時間の定常分布を状態としてとった定常分布(図 4.6b)をみると、 $\epsilon = 0.0001$ において経路選択ベクトルを状態とした定常分布では 5 本あったビンが、総旅行時間では 2 本のビンに集約されていることがわかる。このことから、フロー・パターンの些細な違いは有れども、ほとんどの Nash 均衡では同一のコスト・パターンを持っていることがわかる。しかし同時に微差ではあるが、総旅行時間が大きい (23381[sec])、社会的費用の観点から見ると「悪い」Nash 均衡と、総旅行時間がより小さい (23342[sec]) 「良い」Nash 均衡が存在している(表 4.2 に、各 Nash 均衡状態における各経路の利用者数、および総旅行時間を示す)。このように、粒子モデルでは単にフロー・パターンが一意にならないのではなく、コスト・パターンの面からみても単純には一意にならないことがわかる。

Logit response dynamics

次に、図 4.7 に、logit response dynamics を適用したときの定常分布を示す。まず図 4.7a を見ると、logit response dynamics ではゆらぎのパラメータを小さくしたとき (i.e., β を大きくする)、Nash 均衡状態周りには収束しつつあるものの、ある特定の状態の頻度が高くなることはなかった*4。なお、この数値計算の範囲内では、Nash 均衡は一度も発現していない。また、図 4.7b を見ると、総旅行時間も Nash 均衡状態周りに収束しつつある傾向が見えるが、その頻度は better response に対して低い。よってこの数値計算では、logit response dynamics では確率的安定な均衡が存在しないことが示唆される。

4.5 本章のまとめ

本章では、unidirectional network 上の DUE ゲームにおける、ゆらぎを含むダイナミクスの確率的安定性を解析した。解析の方法論は、次の3つの概念・方法論から構成されている：粒子モデルにおける DUE 配分問題の時間分解法、weakly acyclic game、そして定常分布の漸近的挙動解析。これらを組み合わせた方法論により、経路旅行時間の単調性を必要とすることなく、DUE 配分問題の数理的特性を解析することができる。具体的には、前章で証明した DUE ゲームの時間分解特性から、unidirectional network における DUE ゲームが weakly acyclic game であることを示した。次に、この関係性に基づき、粒子モデルでの基本的な day-to-day dynamics である better/best response dynamics の収束性について調べ、better response dynamics の収束性を示した。そしてこの収束性を活用することで、perturbed better response dynamics には確率的安定性均衡が存在することを証明した。

本研究で構築した方法論は、交通ネットワーク配分理論、およびゲーム理論で発展してきた方法論・概念を組み合わせたものである。これらの方法論は従来からよく知られているものではあるが、それらを統合することで、本研究は次のような理論的な貢献を行うことに成功している。第一に、DUE の安定性に関する既存研究では解析対象とするネットワーク構造が1経路1ボトルネック・ネットワークに限定されていたのに対し、本研究では unidirectional network での安定性・収束性に関する結論を確立したことである。第二に、DUE ゲームで確率的安定性を保証するにあたり、適用するダイナミクスにおける利用者の効用の厳密な改善性が重要な役割を果たすことを明らかにしたことである。第三に、均衡状態の数理的特性の解析にあたり、DUE 配分問題の時間分解法が果たす新たな役割を明らかにしたことである。

本研究では unidirectional network における DUE ゲームの確率的安定均衡の存在性を証明したが、その安定均衡に対応するフロー・パターン（またはコスト・パターン）は明ら

*4 β をさらに大きくした (i.e., ゆらぎのパラメータを小さくした) ケースでも数値計算を行なったが、そのときの定常分布は $\beta = 100$ のケースとほぼ同一であった。

かになっていない。特に、DUE ゲームが複数均衡を持つ場合、こういったフロー・パターンを持つ均衡状態が確率的安定化するのか (i.e., ダイナミクスによる均衡選択) を調べるのが重要となる。また、総旅行時間の観点から効率的・非効率的な均衡状態が存在するのであれば、ダイナミクスが効率的な均衡状態へと収束するためのプレイヤーの利得設計の方法論の構築も、興味深い課題である。DUE ゲームにおける状態空間は膨大であり、かつプレイヤー間の相互作用は複雑であるため、こうした解析は単純なものではない。しかしながら、これらは近年研究が進められてきている自律分散型の制御システム構築に資する重要な、挑戦する価値のある課題であると言えるだろう。

また、*weakly acyclic game* として取り扱える DUE ゲームの種別 (ネットワーク構造, 出発時刻選択の有無) について詳しく調べることも興味深い課題の一つである。本研究では *unidirectional network* 上での最早未配分車両の存在性から DUE ゲームと *weakly acyclic game* との結びつきを明らかにしたが、*unidirectional network* はあくまで存在性を担保するための十分条件である。そのため、最早未配分車両が存在するための必要十分条件を明らかにしていくことで、安定性解析を行えるネットワーク構造の種別を拡張することができよう。また、均衡集合への収束性が保証されている 1 経路 1 ボトルネック・ネットワークでの DUE と *weakly acyclic game* との関係性を明らかにしていくことも重要であろう。

第 5 章

渋滞パターンを与件としたスループット解析方法の構築

5.1 はじめに

本章では，DUE 配分問題の時間分解法を適用できる *unidirectional network* を対象として，スループットを理論的に解析する方法を構築する．提案方法は，第 1 章で説明したように，既存研究からその重要性が示唆されている「(安定的に観測される)空間的な渋滞パターン」を中心に組み立てられており，そのパターンとスループットを解析的に結びつけるために，DUE 理論を用いている．より具体的には，ネットワークの物理的条件および OD 需要から渋滞パターンを求める DUE 配分問題を，「渋滞パターンを与件として，スループット (定常的に流れうる OD 需要の和) を導出する逆問題」へと変換する．この問題は，出力を一意に決めるための基準^{*1}として，ネットワーク内に存在する車両台数が一定となる定常状態 (i.e., 周期境界条件) を想定する．これは，第 2 章で解説したように，履歴依存性が弱まった定常状態を考えることで，システムの性能を現時点の状態から表すことができるようになるためである．その結果，提案逆問題は線形方程式系で記述され，渋滞パターンとスループットを解析的に関係づけることができる．

本章の構成は次の通りである．続く **5.2** では，以降の解析の準備として，時刻別分解された DUE モデルおよび渋滞パターンを与件とした DUE の均衡解の導出法を概説する．**5.3** では，空間的な渋滞パターンを与件とした DUE の均衡解から逆問題を構築し，これを解くことにより定常状態におけるスループットを解析的に導出する．**5.4** では，ネットワーク内の車両存在台数が変化する際のスループットの特性を考察する．**5.5** では，ここまでの単一起点構造ネットワークでのスループット解析方法を，*unidirectional* 構造を持つネットワークへと拡張する．**5.6** では，数値実験により，提案手法の妥当性を確認する．最後に **5.7** では，本章のまとめを述べる．

^{*1} 通常の OD 交通量推定におけるエントロピー最大化や残差平方和最小化に相当する条件である．

5.2 動的利用者均衡状態

5.2.1 解析の前提条件

以下ではまず、単一起点の OD 構造を持つ一般構造のネットワークを対象とする。ネットワークはノード集合 \mathcal{N} 、リンク集合 \mathcal{L} 、起終点の集合 \mathcal{W} で表現されており、各々の集合の要素を $i \in \mathcal{N}$, $ij \in \mathcal{L}$, $od \in \mathcal{W}$ とする。ネットワークの構造は、ノード・リンク接続行列 \mathbf{A}^* ($|\mathcal{N}| \times |\mathcal{L}|$ 行列) で表される。この行列のランクは $|\mathcal{N}| - 1$ であるため (赤松隆, 桑原雅夫, 1992), 唯一の起点に対応する行を除き, その行列を既約接続行列 \mathbf{A} とする。さらに, 既約接続行列における $+1$ の要素を 0 にした行列を \mathbf{A}_- とおく。

各 OD ペア間の交通需要は外生的に与えられる。より具体的には, 時刻 t までに起点 o を出発し終点を d とする累積 OD 交通量を $Q_{od}(t)$ と表す。各リンクは First-In-First-Out (FIFO) 原理を採用し, 交通状態は Point Queue (PQ) モデルで表現されるとする。具体的には, 各リンク (i, j) は自由走行リンクと待ち行列リンクで構成されているとし, 自由走行リンクの旅行時間は定数 m_{ij} , 待ち行列リンクのボトルネック容量は μ_{ij} とする。このとき, 時刻 t にリンク (i, j) に流入した車両の旅行時間は,

$$c_{ij}(t) = m_{ij} + x_{ij}(t + m_{ij})/\mu_{ij} \quad (5.1)$$

where $x_{ij}(t) = A_{ij}(t - m_{ij}) - D_{ij}(t)$.

ここで, $x_{ij}(t)$ は時刻 t のリンク下流端での待ち行列台数, $A_{ij}(t), D_{ij}(t)$ は各々時刻 t までにリンク (i, j) を流入, 流出した累積交通量を表している。なお, $A_{ij}(t), D_{ij}(t)$ が時間微分可能であれば, 時刻 t におけるリンク (i, j) の流入, 流出交通流率 $\lambda_{ij}(t), g_{ij}(t)$ は下記のように書くことができる:

$$\lambda_{ij}(t) \equiv dA_{ij}(t)/dt, \quad g_{ij}(t) \equiv dD_{ij}(t)/dt. \quad (5.2)$$

5.2.2 時刻別分解された DUE の定式化

DUE は静的な利用者均衡を動的な場合に自然に拡張した解の概念であり, DUE 状態は以下のように定義される: 任意の時刻において, どの利用者も自分だけが経路を変更することによって自分の所要時間を改善できないような状態。言い換えれば, 全ての瞬間において, 全ての利用者が選択した経路が“事後的”に見ても各人の最短経路となっているような交通流パターンである。

DUE 状態では, 同時刻に同一起点を出発した利用者の任意のノードへの到着時刻は経路によらず等しい。さらに, DUE 状態では, 起点における利用者の出発順序が終点到着するまでのあらゆるノードへの到着時に維持されていなければならない。この性質により, 起点出発時刻毎に, 各ノードへの一意的な均衡到着時刻を定義することができる。

これらの特性とリンクモデルの性質から、時刻 s に起点を出発する利用者が経験する旅行時間は時刻 s 以降に起点を出発する利用者の影響を受けないことが分かる。すなわち、単一起点の OD 構造を持つネットワークにおける DUE 状態は、起点出発時刻別に分解することができる (Kuwahara and Akamatsu, 1993; 赤松隆, 桑原雅夫, 1994; Akamatsu et al., 2015)。

出発時刻別の DUE では、次の2つの変数が中心的な役割を果たす。1つは、出発時刻 s に関する各リンクの流入交通流率である：

$$y_{ij}(s) \equiv dA_{ij}(\tau_i(s))/ds. \quad (5.3)$$

もう1つは、起点を時刻 s に出発した車両が最も早くノード i に到着する時刻 $\tau_i(s)$ である。先に定義した絶対時刻 t における流入交通流率 $\lambda_{ij}(t)$ と $y_{ij}(s)$ の関係は以下のように表される：

$$y_{ij}(s) = \lambda_{ij}(\tau_i(s)) \dot{\tau}_i(s). \quad (5.4)$$

ここで、 $\dot{\tau}_i(s) \equiv d\tau_i(s)/ds$ である。

上記の変数を用いると、出発時刻別の DUE 配分は以下のように表される (Kuwahara and Akamatsu, 1993; 赤松隆, 桑原雅夫, 1994)：

・リンク旅行時間関数 (PQ モデル)

$$c_{ij}(s) = \int_0^s \dot{c}_{ij}(s) ds + c_{ij}(0) \quad \forall s, \quad (5.5)$$

$$\text{where } \dot{c}_{ij}(s) = \begin{cases} \frac{y_{ij}(s)}{\mu_{ij}} - \dot{\tau}_i(s) & \text{if } x_{ij}(\tau_i(s) + m_{ij}) > 0 \\ 0 & \text{if } x_{ij}(\tau_i(s) + m_{ij}) = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

・各ノードでのフロー保存則

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I(k)} y_{ik}(s) - \sum_{j \in O(k)} y_{kj}(s) - \dot{Q}_{ok}(s) &= 0 \quad \forall k \in \mathcal{N}, k \neq o, \forall s \\ \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{y}(s) &= -\dot{\mathbf{Q}}(s). \end{aligned} \quad (5.7)$$

・最短経路選択条件

$$\begin{cases} y_{ij}(s) \{c_{ij}(s) + \tau_i(s) - \tau_j(s)\} = 0 \\ c_{ij}(s) + \tau_i(s) - \tau_j(s) \geq 0, y_{ij}(s) \geq 0 \end{cases} \quad \forall ij \in \mathcal{L}, \forall s. \quad (5.8)$$

ここで、 $I(k)$ はノード k に流入するリンクの始点となるノードの集合、 $O(k)$ はノード k から流出するリンクの終点となるノードの集合、 $\dot{c}_{ij}(s) \equiv dc_{ij}(\tau_i(s))/ds$ 、 $\dot{Q}_{ok}(s) \equiv dQ_{ok}(s)/ds$ である。また、(5.7) は、フロー保存則を行列・ベクトル表示したものである。

5.2.3 渋滞パターンを与件とした DUE の均衡解

時刻別 DUE は相補性問題/変分不等式問題として表現されており，一般的に，解析解を求めることはできない．しかし，ネットワーク上の全てのリンクでフローの流入があり (i.e., $y_{ij}(s) > 0$)，かつ，全てのリンクで渋滞している (i.e., $x_{ij}(\tau_i(s)) > 0$)，“飽和ネットワーク”では，時刻別の DUE 問題が連立線形システム方程式に帰着し，均衡解を解析的に求めることが可能である (赤松隆，高松望，1999; Akamatsu and Kuwahara, 1999; Akamatsu, 2000; Akamatsu and Heydecker, 2003b).

時刻 s 以前に起点を出発したフローに対応したネットワークの状態は既知として，起点出発時刻が s の利用者に対応した均衡解を求めよう．飽和ネットワーク内の全てのリンクで流入および渋滞があるため，前節で相補性条件として表現されていたリンク旅行時間関数 (5.6) および最短経路選択条件 (5.8) は等式条件に帰着する：

$$\dot{c}_{ij}(s) = y_{ij}(s)/\mu_{ij} - \dot{\tau}_i(s) \quad \forall ij \in \mathcal{L}, \quad (5.9)$$

$$\dot{c}_{ij}(s) + \dot{\tau}_i(s) - \dot{\tau}_j(s) = 0 \quad \forall ij \in \mathcal{L}. \quad (5.10)$$

式 (5.9) を式 (5.10) へ代入すれば，

$$y_{ij}(s) = \mu_{ij} \dot{\tau}_j(s) \quad \forall ij \in \mathcal{L} \quad (5.11)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y}(s) = -(\mathbf{MA}_-^T) \dot{\boldsymbol{\tau}}(s) \quad (5.12)$$

$$\text{where } \mathbf{M} \equiv \text{diag}[\cdots, \mu_{ij}, \cdots].$$

が成立する．この式をフロー保存則 (5.7) に代入すれば，

$$(\mathbf{AMA}_-^T) \dot{\boldsymbol{\tau}}(s) = \dot{\mathbf{Q}}(s). \quad (5.13)$$

行列 \mathbf{AMA}_-^T のランクは一般に基準点の選び方に依存するが，単一起点ネットワークにおいては，起点ノード（純湧き出しノード）を基準点に選べば，ランクは必ず $|\mathcal{N}| - 1$ となる (Akamatsu and Kuwahara, 1999). 従って， \mathbf{AMA}_-^T は逆行列を持ち，均衡解は唯一に定まる：

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}(s) = (\mathbf{AMA}_-^T)^{-1} \dot{\mathbf{Q}}(s), \quad (5.14)$$

$$\mathbf{y}(s) = -(\mathbf{MA}_-^T)(\mathbf{AMA}_-^T)^{-1} \dot{\mathbf{Q}}(s). \quad (5.15)$$

またこの方法論は，非渋滞リンクを含むネットワークに対しても拡張が可能である：非渋滞リンクを含むネットワークに対しても適切にネットワークを縮約することにより，“縮約ネットワーク”と呼ばれる飽和ネットワークを構築することができる (Akamatsu and Heydecker, 2003a). 縮約ネットワークは，ネットワーク上の渋滞パターンが与えられたとき，非渋滞リンクの始点と終点ノードを 1 つのノードとして集約する (i.e., 非渋滞リンクを取り除く) ことにより構築される (図 5.1). また，フローの流入のないリンク (i.e., $y_{ij}(s) = 0$) がある場合は，そのリンクを削除する．

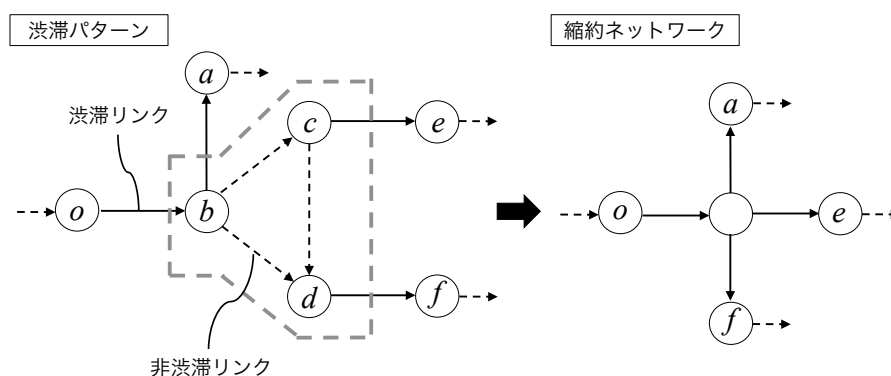


図 5.1: 縮約ネットワークの構築例

この縮約ネットワークのノード集合, リンク集合, 起終点集合をそれぞれ, $\mathcal{N}_R, \mathcal{L}_R, \mathcal{W}_R$ とすれば, このネットワークは全てのリンクが渋滞しているため,

$$(\mathbf{A}_R \mathbf{M}_R \mathbf{A}_{R-}^T) \dot{\tau}_R(s) = \dot{\mathbf{Q}}_R(s) \tag{5.16}$$

が成立する. ここで, 下付き添字 R は縮約ネットワーク上で定義された変数であることを意味する. また, $\mathbf{A}_R \mathbf{M}_R \mathbf{A}_{R-}^T$ は逆行列を持つため (Akamatsu and Heydecker, 2003a), この解は唯一である. なお, 縮約ネットワークにおいては, ノードの集約結果として起点に戻る渋滞リンクが生じ得る. この際, 既約接続行列を得るために縮約ネットワークの起点ノードを取り除くと, 純湧き出しノードではないノードが取り除かれ, 既約接続行列 \mathbf{A}_R から起点への流入情報が抜け落ちる (i.e., フロー保存則が満たされなくなる). 従って, この情報を補うために, このリンクの始点ノードに対応する要素のみにリンク容量値を持つベクトル δ_R を式 (5.16) の右辺に加える必要がある:

$$(\mathbf{A}_R \mathbf{M}_R \mathbf{A}_{R-}^T) \dot{\tau}_R(s) = \dot{\mathbf{Q}}_R(s) + \delta_R. \tag{5.17}$$

以降の解析では, 非飽和ネットワークを対象とするため, 添え字 R がついていない記号も全て縮約ネットワーク上で定義されたものであるとする.

5.3 ネットワーク・スループットの解析方法

本節以降では, 渋滞パターンとネットワークの交通性能 (i.e., スループット) の関係を理論的に分析する. この理論の基礎となるのが, 5.1 でもその概略を述べた, 周期境界条件を仮定した DUE の逆問題である. この問題の解は, ある一定台数の車がネットワーク内を走行する定常状態下でのスループット (定常的に流れうる OD 需要の和) を表しており, MFD 理論における Network Exit Function (NEF) に相当する.

本節ではまず, DUE を記述する状態量と巨視的な状態量の関係性を整理する. 次に, 5.3.2 では, 定常状態におけるスループットを解析的に導出する. 最後に, 5.3.3 で既存の MFD 解析手法との比較を行う.

5.3.1 巨視的な状態変数の表現

前節で構築した DUE 配分問題をスループットと結びつけて議論するために、巨視的な状態変数を DUE の記述に用いた変数を用いて表す：

$$A_d(t) = Q_{od}(t), \quad (5.18)$$

$$D_d(t) = Q_{od}(t - C_d^*(t)), \quad (5.19)$$

$$n_d(t) = A_d(t) - D_d(t). \quad (5.20)$$

これらは、終点別に区別された、ネットワークへの累積流入交通量、累積流出交通量および車両存在台数である。ここで、 $C_d^*(t)$ は時刻 t に終点 d に“到着”する車両の均衡（最小）OD 旅行時間である。式 (5.19) が成立するのは、DUE 状態においては OD 間で FIFO 条件が成立するためである。これらの巨視的な変数が微分可能であるとすると、

$$\lambda_d(\tau_o(s)) \equiv \frac{dA_d(\tau_o(s))}{dt} = \frac{dQ_{od}(\tau_o(s))}{dt} = \dot{Q}_{od}(s), \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} g_d(\tau_d(s)) &\equiv \frac{dD_d(\tau_d(s))}{dt} \\ &= \frac{dQ_{od}(\tau_d(s) - (\tau_d(s) - s))}{ds} \bigg/ \frac{d\tau_d(s)}{ds} \\ &= \dot{Q}_{od}(s) / \dot{\tau}_d(s), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_d(\tau_d(s))}{dt} &= \lambda_d(\tau_d(s)) - g_d(\tau_d(s)) \\ &= (dQ_{od}(\tau_d(s))/dt - \dot{Q}_{od}(s) / \dot{\tau}_d(s)), \end{aligned} \quad (5.23)$$

が成立する。なお、ここで $\tau_o(s) \equiv s$ である。式 (5.21), (5.22) は、終点毎のネットワークへの流入交通流率、流出交通流率（スループット）を表している。また、式 (5.23) はネットワーク内の車両存在台数のダイナミクスを表している。

5.3.2 スループットの解析的評価

以上の準備の下、ネットワークのスループットを解析的に評価する。具体的には、DUE 状態 (5.17) の逆問題を定式化し、その問題を解くことにより、スループットの解析式を導出する。

この逆問題の入力は、渋滞パターンであり、縮約ネットワークにより表現される。つまり、既約接続行列 \mathbf{A} (i.e., 縮約ネットワークのトポロジー) とリンク容量行列 \mathbf{M} (i.e., 渋滞リンクの容量パターン) が入力である*2。この縮約ネットワークのトポロジーについて、

*2 この渋滞パターンは本来、時刻 s に起点を出発した交通が経験するものであるが、以下では定常状態を考えるため s は省略する。

本稿では以下の仮定を置く：全ての OD で起終点ノードが1つのノードに集約されていない^{*3}。これは、ネットワークが混雑していない状況を排除するものである。なぜなら、この (MFD の自由流領域にあたる) 状況では、需要条件でスループットが決まっており、渋滞パターン (や供給条件) はスループットに影響をおよぼさないためである。

一方、この逆問題の出力となるのは、DUE 配分では外生的に与えられていた OD 交通流率である。この出力を一意に決めるためには、なんらかの追加的な条件が必要 (e.g., エントロピー最大化) であるが、本稿では周期境界条件を採用する。この条件は、ある一定台数の車両 n がネットワーク内を走行する定常状態におけるスループットを求めるために、従来研究 (Mazloumian et al., 2010; Leclercq and Geroliminis, 2013; Daganzo and Geroliminis, 2008) でしばしば用いられるものである。本研究において、周期境界条件は終点 d 毎に、

$$dn_d(t)/dt = 0 \Leftrightarrow dQ_{od}(\tau_d(s))/dt = \dot{Q}_{od}(s)/\dot{\tau}_d(s), \quad (5.24)$$

と表すことができる。また定常状態を考えるために、各終点の OD 交通流率が一定 (あるいは、十分緩やか) であることを仮定すると、

$$dQ_{od}(\tau_d(s))/dt = \dot{Q}_{od}(s) \quad \forall d, \quad (5.25)$$

が成立する。さらに、式 (5.24) と (5.25) を連立すれば、最終的に次の追加的な条件が得られる：

$$\dot{\tau}_d(s) = 1 \quad \forall d. \quad (5.26)$$

これは、定常的なスループット f_d は、ネットワークへの流入交通流率 λ_d 、あるいは、OD 交通流率 $\dot{Q}_{od}(s)$ に一致することを意味している。

この条件 (5.26) と DUE 条件 (5.17) を用いれば、提案逆問題は以下のように表される：

$$\begin{cases} \mathbf{f} + \boldsymbol{\delta} = (\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^T) \dot{\boldsymbol{\tau}} \\ \dot{\boldsymbol{\tau}} = [\dot{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \dot{\boldsymbol{\tau}}_d]^T = [\dot{\boldsymbol{\tau}}_i \mid \mathbf{1}]^T \end{cases} \quad (5.27)$$

ここで、下付き添え字のついたベクトル $\dot{\boldsymbol{\tau}}_i$ 、 $\dot{\boldsymbol{\tau}}_d$ は、それぞれ終点ノード集合 N_d 、通過ノード集合 N_i (i.e., $\mathcal{N} = \{o\} \cup N_i \cup N_d$) に対応する部分ベクトルを表す。ここで、逆問題 (5.27) の第一式は、OD 交通流率 $\dot{\mathbf{Q}}(s)$ をスループット \mathbf{f} で置き換え、かつ、渋滞パターンを与件とした DUE 均衡条件式である。

この問題をより詳しく見るために、提案問題 (5.27) をブロック表示すると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_i \\ \mathbf{f}_d + \boldsymbol{\delta}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{A}_d \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i-}^T & \mathbf{A}_{d-}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\tau}}_i \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{ii} & \mathbf{V}_{id} \\ \mathbf{V}_{di} & \mathbf{V}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\tau}}_i \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

^{*3} 起終点が集約される場合、集約された起終点間の旅行時間が自由旅行時間と一致し、OD 需要 $\dot{Q}_{od}(s)$ がそのままネットワークを流出する。

where

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{dd} &\equiv \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T, \mathbf{V}_{ii} \equiv \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T, \\ \mathbf{V}_{id} &\equiv \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T, \mathbf{V}_{di} \equiv \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T.\end{aligned}$$

また, $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_i | \mathbf{f}_d]^T$, $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_i | \mathbf{A}_d]^T$, $\mathbf{A}_- = [\mathbf{A}_{i-} | \mathbf{A}_{d-}]^T$, $\boldsymbol{\delta} = [\boldsymbol{\delta}_i | \boldsymbol{\delta}_d]^T$ である. そして, 問題 (5.28) を解くことで, 各終点ごとのスループット \mathbf{g}_d についての以下の命題が得られる.

命題 2. 単一起点ネットワークにおいて渋滞パターン (\mathbf{A}, \mathbf{M}) が与えられたとする. このとき, 車両存在台数が一定となる定常状態における終点別のスループット \mathbf{f}_d は以下の解析式で与えられる:

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{V}_{dd} \mathbf{1} - (\mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} [\mathbf{V}_{id} \mathbf{1} - \boldsymbol{\delta}_i] + \boldsymbol{\delta}_d). \quad (5.29)$$

証明 13. 式 (5.28) はブロックごとには,

$$\boldsymbol{\delta}_i = \mathbf{V}_{ii} \hat{\boldsymbol{\tau}}_i + \mathbf{V}_{id} \mathbf{1}, \quad (5.30)$$

$$\mathbf{f}_d + \boldsymbol{\delta}_d = \mathbf{V}_{di} \hat{\boldsymbol{\tau}}_i + \mathbf{V}_{dd} \mathbf{1}, \quad (5.31)$$

と表すことができる. この第一式の \mathbf{V}_{ii} は純湧き出しノードを含まない行列であり, 必ず逆行列を持つ (Akamatsu and Kuwahara, 1999). 従って, $\hat{\boldsymbol{\tau}}_i$ は一意に定まる:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_i = -(\mathbf{V}_{ii})^{-1} [\mathbf{V}_{id} \mathbf{1} - \boldsymbol{\delta}_i]. \quad (5.32)$$

この式を第二式に代入すれば, 解析式 (5.29) が得られる. (証明終)

この命題より, 定常状態におけるスループットは, 渋滞リンク同士の接続構造およびそれらの容量 (縮約ネットワーク), OD 分布 (OD 交通 “量” ではなく起終点ノードの位置) から決まることがわかる.

以下では, 式 (5.29) をより詳細に見ていこう. そのためにまず, 行列 $\mathbf{V} \equiv \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{A}_-^T$ について述べる. この行列の基本的な構造は, ノード・リンク接続行列 \mathbf{A} の行ベクトルと流入リンクの情報のみを保持した接続行列 \mathbf{A}_- の行ベクトルの積であり, 行列 \mathbf{V} の k 行 l 列要素 $[\mathbf{V}]_{kl}$ は以下のように与えられる:

$$[\mathbf{V}]_{kl} = \begin{cases} \sum_{j \in I(k)} \mu_{jk} & \text{if } k = l \\ -\mu_{kl} & \text{if } k \neq l, kl \in \mathcal{L} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (5.33)$$

すなわち, 対角要素 $[\mathbf{V}]_{kk}$ がノード k への流入リンクの容量の和を表しており, 非対角要素 $[\mathbf{V}]_{kl}$ ($k \neq l$) はノード k からノード l へ流出するリンク容量を表している.

このことから, 式 (5.29) の第一項は \mathbf{V}_{dd} の行和をとったベクトルであり, 各要素は以下のように与えられる:

$$[\mathbf{V}_{dd} \mathbf{1}]_d = \sum_{k \in I(d)} \mu_{kd} - \sum_{d' \in \{O(d) \cap N_d\}} \mu_{dd'}. \quad (5.34)$$

これは、縮約ネットワークで終点に流入するリンク容量の総和から他の終点に流出するリンク容量の総和を差し引いた量である。すなわち、終点 d からその終点以外へネットで流出する量 (i.e., スループットおよび通過ノードへの流出) である。一方、式 (5.29) の第二項は、次のように表される：

$$\begin{aligned} [-(\mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1}(\mathbf{V}_{id}\mathbf{1} - \delta_i) + \delta_d)]_d &= [\mathbf{V}_{di}\dot{\tau}_i - \delta_d]_d \\ &= - \sum_{k \in \{O(d) \cap N_i\}} \mu_{dk}\dot{\tau}_k - \mu_{do}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

これは、スループットの第一項 (5.34) で表されたフローのうち、終点 d でトリップを完了せず、通過ノードへ流出するフローである。なお、 $\dot{\tau}_k$ は、式 (5.32) によって表される DUE の配分原理から決まる従属変数であり、この終点に直接接続していないリンクの影響も反映されていることには注意が必要である。

以上より、式 (5.29) は一見複雑であるが、その意味は、縮約ネットワーク上の各終点ノードについてのフロー保存則に相当することがわかる。ただし、このフロー保存則は、渋滞パターンと DUE 配分原理 (i.e., 経路選択行動) により構造化された、より「グローバル」なフロー保存則である^{*4}；経路選択行動に影響しうる、この終点に直接接続していないリンクの影響も反映される。そのため、(5.29) による渋滞パターンの解析により、スループットの構造 (i.e., ネットワーク上のローカルな各リンクの交通状態と、グローバルなネットワーク性能の関係) を、理論的に考察することができる (次章を参照)。

ネットワーク全体のスループット F は、ベクトル \mathbf{f}_d の要素を全て足し合わせることで求められる：

$$\begin{aligned} F &= \mathbf{1}^T \{ \mathbf{V}_{dd}\mathbf{1} - (\mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1}[\mathbf{V}_{id}\mathbf{1} - \delta_i] + \delta_d) \} \\ &= \sum_{d \in N_d} \left\{ \sum_{k \in \{I(d) \cap \{N_i \cup \{o\}\}\}} \mu_{kd} - \sum_{k \in \{O(d) \cap \{N_i \cup \{o\}\}\}} \mu_{dk}\dot{\tau}_k \right\}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

ここで、終点間のフローのやり取りは相殺されるため、式 (5.34) の第二項は現れない。また、 $\dot{\tau}_o = 1$ である。

なお、以上は、Point Queue モデルを前提とした記述であったが、待ち行列の延伸が発生している状況においても上記の解析式は成立する。Point Queue を前提とした場合との唯一の違いは、入力となる行列 \mathbf{M} の要素のうち、待ち行列の延伸を受けた上流リンクの μ_{ij} を、そのリンク容量ではなく実際の“捌け量” (\leq 容量) とする点である。このとき、待ち行列の延伸によってどの程度捌け量が低下するかを、Physical Queue モデルを用いて求め

^{*4} なお、定常状態を考えている本研究では、起点における「ローカルな」フロー保存則からスループットを導出することも可能である。しかしながら、次章で解析するスループットの低下メカニズムを解明し、その制御ロジックを構築するためには、終点を異なる車両同士の関係性を適切に表現する、終点ベースでの定式化が必要となる。

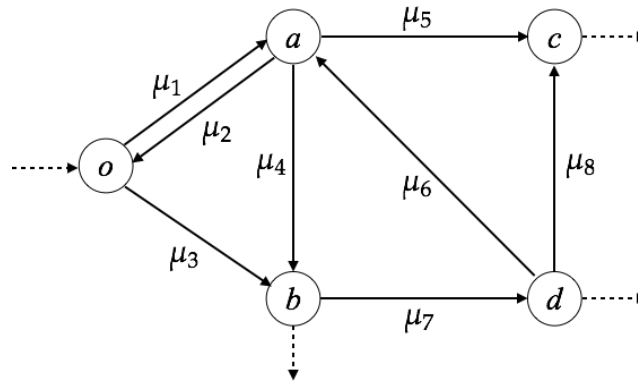


図 5.2: 1 起点 3 終点の縮約ネットワーク

る必要はない。なぜなら，本研究では，渋滞パターン (\mathbf{A}, \mathbf{M}) は入力（観測）情報であるためである。

具体例．スループットの解析式の計算例を示す．図 5.2 は，1 起点 3 終点の縮約ネットワークであり，ノード o が起点，ノード $\{b, c, d\}$ が終点，ノード $\{a\}$ は通過ノードである．各リンクの容量は図に示すとおりである。

このとき，式 (5.29) の要素となる行列・ベクトルは以下のように表される：

$$\mathbf{V}_{dd} = \begin{bmatrix} \mu_3 + \mu_4 & 0 & -\mu_7 \\ 0 & \mu_5 + \mu_8 & 0 \\ 0 & -\mu_8 & \mu_7 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{ii} = [\mu_1 + \mu_6],$$

$$\mathbf{V}_{id} = [-\mu_4 \quad -\mu_5 \quad 0], \mathbf{V}_{di} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu_6 \end{bmatrix},$$

$$\delta_i = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \delta_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

そして，これらを式 (5.29) に代入することにより，各終点のスループットが求まる：

$$\mathbf{f}_d = \begin{bmatrix} f_b \\ f_c \\ f_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_3 + \mu_4 - \mu_7 \\ \mu_5 + \mu_8 \\ \mu_7 - \mu_8 - \frac{\mu_2 + \mu_4 + \mu_5}{\mu_1 + \mu_6} \mu_6 \end{bmatrix}$$

ここで，2 行目の分数が，式 (5.32) で表される部分である：

$$\hat{\tau}_d = \frac{\mu_2 + \mu_4 + \mu_5}{\mu_1 + \mu_6}.$$

最後に， \mathbf{g}_d の要素の和をとれば，ネットワーク全体のスループットが求まる：

$$F = \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 - \frac{\mu_2 + \mu_4 + \mu_5}{\mu_1 + \mu_6} \mu_6.$$

この例からも，スループットは終点ノードに接続するリンク容量のみから表されるのではなく，（一見無関係な）リンク 1 や 2 が影響をおよぼすことがわかる。

5.3.3 既存の MFD 解析方法との比較

本節の最後に、variational theory (VT, Daganzo, 2005a,b) を活用した既存の MFD 解析方法 (e.g., Daganzo and Geroliminis, 2008; Leclercq and Geroliminis, 2013; Laval and Castrillón, 2015) との特性比較を行う。この方法は、ある一定台数の車両がネットワーク内を走行する定常状態でのネットワーク交通流を解析している点は、本研究で提案する方法と共通している。しかし、これらの方法には、次のような相違点が存在する。

まず既存の MFD 解析方法は、解析対象とするネットワーク構造をコリドー型道路網 (単路) に限定 (あるいは、そのようにネットワークを簡略化) し、かつ単路内での交通密度分布が一様であるという仮定を行っている。この設定下では、ネットワーク (供給側) の特性を表す静的なパラメータ (e.g., 単路上の link fundamental diagram や、信号パラメータ) を与件としたとき、交通密度に対するネットワーク上の交通状態は一意に定まる。そのため、VT を適用することで、MFD の全体図 (i.e., 各交通密度に対する空間平均交通流率) を解析的に明らかにすることができる。この意味で、この方法はあるネットワークの「(ある交通密度で実現しうる最大の平均交通流率を評価する) 理想的な」MFD を特定し、パラメータに対するその平均的な交通状態の変化を把握するにあたっては、有用な方法である。

一方で本研究で提案した方法では渋滞パターンを明示的に取り扱っているため、現実の MFD の形状決定にあたり重要な役割を果たすとされている、ネットワーク上の混雑の偏りがスループットに与える影響を解析することができる^{*5}。ただしこの方法論では、静的なパラメータのみから MFD の全体図を評価することは難しい。なぜならば、ある交通密度に対して起こりうる渋滞パターンを特定することは困難であるからである。しかし、観測情報から渋滞パターンが与えられたならば、各リンクの局所的な容量変化がネットワーク全体のスループットに与える影響を解析できる点に提案方法の長所がある。そしてこの長所が、次章に示すようにネットワーク全体の性能を改善するための渋滞リンク制御方策の構築において重要な役割を果たすことになる。

5.4 動的な状況下におけるスループットの解析方法

ここまでは、入力である渋滞パターンが (MFD 理論の想定する) 車両存在台数が一定となる定常状態にあるとして、理想的なスループットおよびその低下メカニズムを分析した。ただし、現実の渋滞パターンは当然ながら必ずしも定常状態にあるとは限らない。そこで本節では、周期境界条件および OD 交通流率一定の仮定が成立しない動的な状況を考

^{*5} 例えば、提案方法は、同一存在台数に対して異なる渋滞パターンが実現することで発生するとされるヒステリシス・ループ (see Fig. 3 in Geroliminis and Sun, 2011a, for example) を解析することもできうる。

え，そのような状況で観測された渋滞パターン (\mathbf{A}, \mathbf{M}) とスループットとの関係を近似的に導く．そして，車両存在台数の変化（巨視的な状態変化）とスループットとの関係を考察する．

いま，（絶対）時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ まで，ある渋滞パターン (\mathbf{A}, \mathbf{M}) が実現していたとする*6．そして，各終点ごとに， $\tau_d(s) = t, \tau_d(s + \Delta s) = t + \Delta t$ を満たす $s \sim s + \Delta s$ における OD 交通流率 $\dot{Q}_{od}(s)$ および $\dot{\tau}_d(s)$ の平均値を以下のように定義する：

$$\bar{Q}_{od} \equiv \frac{1}{\Delta s} \int_s^{s+\Delta s} \dot{Q}_{od}(s) ds, \quad \bar{\tau}_d \equiv \frac{1}{\Delta s} \int_s^{s+\Delta s} \dot{\tau}_d(s) ds.$$

ここで，後者は均衡旅行時間の増加率を表す：

$$\bar{\tau}_d = 1 + \frac{C_{od}^*(\tau_d(s + \Delta s)) - C_{od}^*(\tau_d(s))}{(s + \Delta s) - s} = \frac{\Delta t}{\Delta s}. \quad (5.37)$$

また，それらを全ての終点ノードについて並べたベクトルを $\bar{\mathbf{Q}}_d, \bar{\boldsymbol{\tau}}_d$ と書き，以下の仮定をおく．

仮定 1. $\bar{\mathbf{Q}}_d, \bar{\boldsymbol{\tau}}_d$ について，DUE 条件 (5.17) が近似的に成立する：

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{V}_{ii} & \mathbf{V}_{id} \\ \hline \mathbf{V}_{di} & \mathbf{V}_{dd} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{\boldsymbol{\tau}}_i \\ \bar{\boldsymbol{\tau}}_d \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\delta}_i \\ \bar{\mathbf{Q}}_d + \boldsymbol{\delta}_d \end{array} \right]. \quad (5.38)$$

ここで， $\bar{\boldsymbol{\tau}}_i$ は $\dot{\tau}_i(s)$ の平均値にあたる変数である．

式 (5.38) が（一般に）近似となる理由は，終点への到着時刻 $t \sim t + \Delta t$ を基準に考える際に，それに対応する起点からの出発時刻 $s \sim s + \Delta s$ （あるいは OD 間旅行時間）は，一般に終点毎に異なるためである（逆に，式 (5.17) は起点からの出発時刻 s を基準として記述されている）．ただし， $t \sim t + \Delta t$ で渋滞パターンは変化しないため，式 (5.17) の係数行列 \mathbf{V} は変化しない．また，式 (5.17) は線形であるため，均衡 OD 旅行時間が等しい場合には（あるいは，終点が 1 つの場合），式 (5.38) が厳密に成立する．従って，この仮定はリーズナブルなものであると考えられる．

以上の準備の下，動的な条件下における平均スループット $\bar{\mathbf{f}}_d(\mathbf{x}) \equiv [\bar{f}_d]_{vd}$, $\bar{f}_d \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f_d(\tau_d(s)) dt$ は，次のように評価される．

命題 3. 単一起点ネットワークにおいて，時刻 t から時刻 $t + \Delta t$ において渋滞パターン (\mathbf{A}, \mathbf{M}) が実現しており，また $\bar{\boldsymbol{\tau}}_d$ 与えられていたとする．このとき，終点別の平均スループット $\bar{\mathbf{f}}_d(\mathbf{x})$ は以下の解析式で近似される：

$$\bar{\mathbf{f}}_d \approx \mathbf{T}^{-1} \{ \mathbf{V}_{dd} \bar{\boldsymbol{\tau}}_d - (\mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} [\mathbf{V}_{id} \bar{\boldsymbol{\tau}}_d - \boldsymbol{\delta}_i] + \boldsymbol{\delta}_d) \} \quad (5.39)$$

where $\mathbf{T} \equiv \text{diag}[\dots, \bar{\tau}_d, \dots]$.

*6 前章までは時刻 s に起点を出発した交通が経験する渋滞パターンを考えていた．

証明 14. 仮定 1 より,

$$\bar{Q}_d \approx \mathbf{V}_{dd}\bar{\tau}_d - (\mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1}[\mathbf{V}_{id}\bar{\tau}_d - \delta_i] + \delta_d). \quad (5.40)$$

また, 以下の関係式:

$$\begin{aligned} \bar{g}_d &= \frac{D_d(t + \Delta t) - D_d(t)}{\Delta t} = \frac{Q_{od}(s + \Delta s) - Q_{od}(s)}{\Delta t} \\ &= \frac{\frac{1}{\Delta s} \int_s^{s+\Delta s} \dot{Q}_{od}(s) ds}{\frac{1}{\Delta s} \int_s^{s+\Delta s} \dot{\tau}_d(s) ds} = \frac{\bar{Q}_{od}}{\bar{\tau}_d} \end{aligned} \quad (5.41)$$

に上記の近似式を代入すれば (i.e., 起点での OD 交通流率を終点での流出率に変換すれば), 式 (5.39) が得られる. (証明終)

ここで, 動的な状況下のネットワーク全体の平均スループット \bar{F} は, 以下のように表される:

$$\begin{aligned} \bar{F} &\approx \mathbf{1}^T \mathbf{T}^{-1} \{ \mathbf{V}_{dd}\bar{\tau}_d - (\mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1}[\mathbf{V}_{id}\bar{\tau}_d - \delta_i] + \delta_d) \} \\ &= \sum_{d \in N_d} \left\{ \sum_{k \in I(d)} \mu_{kd} - \sum_{k \in O(d)} \mu_{dk} \bar{\tau}_k / \bar{\tau}_d \right\}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

詳しく定常状態と動的状況下のスループットの関係を考察しよう. 定常状態のスループット G から動的状況下の平均スループット \bar{G} を差し引くと,

$$F - \bar{F} = \sum_{d \in N_d} \sum_{k \in O(d)} \mu_{dk} (\bar{\tau}_k / \bar{\tau}_d - \tau_k / \tau_d). \quad (5.43)$$

ここで, $\bar{\tau}_0 = 1$, $\tau_d = 1$ を用いた. この式 (5.43) から, 両者の乖離は, 各終点ノードから流出するフローに関する部分に起因し, 終点への流入フローは差に影響を与えないことがわかる. また, この式 (5.43) からは厳密にその正負を判定することができないが, 下記のように全体的な傾向は読み取ることができる.

まず, 式 (5.4), (5.11) より, $\bar{\tau}_j / \bar{\tau}_i$ はリンク (i, j) の容量に対する (平均) 流入交通流率の比 (=流入交通流率/容量) を表しており, リンクの存在台数が増加しているとき, この値が 1 より大きくなることがわかる. 従って, ネットワークの車両存在台数が増加しているとき, 式 (5.43) の各項の該当部分の多くは $\bar{\tau}_j / \bar{\tau}_i > 1$ となる. 一方, 定常状態においてはネットワーク全体の車両存在台数を不変と仮定しているため, 全リンクの平均としては $\tau_k / \tau_d \approx 1$ が成り立っていないなければならない. つまり, 定常状態における解析式 (5.36) は, ネットワークの車両存在台数 (より正確には, 異なる終点の間の車両存在台数) が増加している局面においては, スループットを実際 (動的な状況下) より過大評価する傾向にある (車両存在台数が減少している局面では過小評価する傾向にある) と言える.

従って, 現実に観察される渋滞パターンから NEF/MFD を分析するためには, どのような渋滞パターンが実現しているかに加え, その渋滞パターンが (巨視的にみて) 渋滞が進

展している過程にあるのか、あるいは、渋滞が解消している過程にあるのかも考慮すべき要素であることがわかる。

5.5 Unidirectional network への提案方法の拡張

本節では、前節までの単一起点構造におけるスループットの解析方法を、unidirectional 構造を持つ多起点多終点のネットワークへと拡張する。まず 5.5.1 では、unidirectional network における渋滞パターンを与件とした動的利用者均衡モデルを定式化する。次に 5.5.2 で、飽和ネットワークにおける DUE の均衡式を導出する。5.5.3 では、単一起点における解析式の導出と同様に、モデルの逆解析を行うことによりスループットの解析式を導出する。

5.5.1 Unidirectional network における時刻別分解された DUE の定式化

第3章で説明したように、unidirectional network は時間分解法を適用できるネットワークの一般化概念である。このネットワークでは、各ノード上の均衡到着時刻は、任意の起点（基準点）からの出発時刻である基準時刻の関数として表せられる（これをノード・ポテンシャルと呼ぶ）。加えて、このノード・ポテンシャルは基準時刻に対する広義単調関数となる。そのため、unidirectional network での DUE 配分問題は、単一起点や単一終点ネットワークと同様に、基準時刻別に分解することができる。

では、unidirectional network 上の DUE を、基準点からの出発時刻別ごとに問題を分解した形で定式化しよう。基準時刻別の DUE では、次の二つの変数が中心的な役割を果たす。一つは、基準時刻 s に対応する、ノード i のノード・ポテンシャル $p_i(s)$ である^{*7}。もう一つは、基準時刻 s に関するリンク ij の流入交通流率 $y_{ij}(s)$ である。先に定義した絶対時刻 t における累積流入台数 $A_{ij}(t)$ 、及び流入交通流率 $\lambda_{ij}(t)$ とは次の関係が成立する：

$$y_{ij}(s) \equiv dA_{ij}(p_i(s))/ds \quad (5.44)$$

$$= \lambda_{ij}(p_i(s)) \dot{p}_i(s). \quad (5.45)$$

ここで、 $\dot{p}_i(s) \equiv dp_i(s)/ds$ である。これは、基準時刻の変化に対するノード i への到着時刻の伸び率を表している。

これらの変数を用いると、基準時刻別の DUE の定式化は、以下のようにまとめられる：

^{*7} なお、 $p_{0REF}(s) \equiv s$ である。

リンク旅行時間

基準時刻 s に関するリンク ij の旅行時間 $c_{ij}(s)$ は、次のように表される：

$$c_{ij}(s) = \int_0^s \dot{c}_{ij}(s) ds + c_{ij}(0) \quad \forall s, \quad (5.46)$$

$$\text{where } \dot{c}_{ij}(s) = \begin{cases} \frac{y_{ij}(s)}{\mu_{ij}} - \dot{p}_i(s) & \text{if } x_{ij}(p_i(s) + m_{ij}) > 0 \\ 0 & \text{if } x_{ij}(p_i(s) + m_{ij}) = 0 \end{cases} \quad (5.47)$$

ここで、 $\dot{c}_{ij}(s) \equiv dc_{ij}(\tau_i(s))/ds$ である。

最短経路選択条件

$$\begin{cases} y_{ij}(s) \{c_{ij}(s) + p_i(s) - p_j(s)\} = 0 \\ c_{ij}(s) + p_i(s) - p_j(s) \geq 0, y_{ij}(s) \geq 0 \end{cases} \quad \forall ij \in \mathcal{L}, \forall s. \quad (5.48)$$

FIFO 条件式とフロー保存則

FIFO が成立している (i.e., リンク内での追い越しが無い) とき、各リンクにおいて、入口への車両の到着順序と出口での退去順序は同じである。すなわち、フローが流れているリンクにおいて、

$$A_{ij}^o(t) = D_{ij}^o(t + c_{ij}(t)), \quad (5.49)$$

が成立する。なお $A_{ij}^o(t), D_{ij}^o(t)$ は、それぞれ起点を o とする車両の、リンク ij での時刻 t における累積流入・流出交通量である。特に、 $t = p_i(s)$ とすると、unidirectional network 上のフローが流れているリンクでは、DUE 状態において $c_{ij}(s) + p_i(s) = p_j(s)$ が成立しているため、

$$A_{ij}^o(p_i(s)) = D_{ij}^o(p_i(s) + c_{ij}(p_i(s))) = D_{ij}^o(p_j(s)) \quad (5.50)$$

となる。

次に、あるノード $i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_o$ におけるフロー保存則は、起点別にフローを分解することで次のように定式化することができる：

$$\sum_k D_{ki}^o(t) - \sum_k A_{ik}^o(t) - Q_{oi}(t) - C_{oi}^*(t) = 0. \quad (5.51)$$

$C_{oi}^*(t)$ は、起点 o を出発し、時刻 t にノード i に到着する車両が経験する均衡経路旅行時間である。

ここで $t = p_i(s)$ とすることにより，基準時刻 s に対応する時刻に出発した車両が満たすべきフロー保存則を考える．このとき均衡経路旅行時間について， $p_i(s) - C_{oi}^*(p_i(s)) = p_o(s)$ である．この関係式と (5.50) を (5.51) に代入し，全ての起点について足し合わせることで，

$$\begin{aligned} & \sum_o \left[\sum_k D_{ki}^o(p_i(s)) - \sum_k A_{ik}^o(p_i(s)) - Q_{oi}(p_o(s)) \right] = 0, \\ \Rightarrow & \sum_k A_{ki}(p_k(s)) - \sum_k A_{ik}(p_i(s)) - \sum_o Q_{oi}(p_o(s)) = 0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

が成立する．そしてこれを s で微分することで，各リンクでの FIFO 条件式と各ノードでのフロー保存則は，以下のような $y_{ij}(s)$ を利用した表現に帰着する：

$$\sum_k y_{ki}(s) - \sum_k y_{ik}(s) - \dot{Q}_{oi}(p_o(s)) \dot{p}_o(s) = 0, \quad (5.53)$$

$$\text{where } \dot{Q}_{oi}(p_o(s)) \equiv dQ_{oi}(p_o(s))/dp_o(s). \quad (5.54)$$

結果として，これらの条件を全てのノード・リンクについてとり，行列・ベクトル表示することによって，unidirectional network における基準時刻別分解された DUE 状態は，次のように相補性形式で表される：

$$\mathbf{m} \leq \mathbf{c}(s) \perp (\dot{\mathbf{c}}(s) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}(s) + \mathbf{A}_+^{*T}\dot{\mathbf{p}}^*(s)) \geq \mathbf{0} \quad (5.55)$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{y}(s) \perp (\mathbf{c}(s) + \mathbf{A}^{*T}\dot{\mathbf{p}}^*(s)) \geq \mathbf{0} \quad (5.56)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{y}(s) = -\dot{\mathbf{Q}}(s)\dot{\mathbf{p}}_o(s) \quad (5.57)$$

ここで， \mathbf{M} はリンク容量 μ_{ij} を対角要素とする $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ 対角行列， \mathbf{m} ， $\mathbf{c}(s)$ ，そして $\mathbf{y}(s)$ は，それぞれ m_{ij} ， $c_{ij}(s)$ ， $y_{ij}(s)$ を要素とする \mathcal{L} 次元ベクトルである．また， $\dot{\mathbf{p}}^*(s)$ ， $\dot{\mathbf{p}}^*(s)$ は，それぞれ $p_i(s)$ ， $\dot{p}_i(s)$ を要素とする \mathcal{N} 次元ベクトルであり， $\dot{\mathbf{p}}_o(s)$ は $\dot{\mathbf{p}}^*(s)$ の起点に関する行について抽出した \mathcal{N}_o 次元のベクトルである． $\dot{\mathbf{Q}}(s)$ は， i 行 j 列に $\dot{Q}_{ji}(p_j(s))$ を要素としてもつ $\{\mathcal{N} - \mathcal{N}_o\} \times \mathcal{N}_o$ の行列である．

5.5.2 渋滞パターンを与件とした DUE の均衡解

前節で示された時刻別 DUE は相補性問題/変分不等式問題として表現されており，一般的に解析解を求めることはできない．しかし単一起点ネットワークと同様に，ネットワーク上の全てのリンクでフローの流入があり (i.e., $y_{ij}(s) > 0$)，かつ，全てのリンクで渋滞している (i.e., $x_{ij}(p_i(s)) > 0$)，“飽和ネットワーク”では，時刻別の DUE 問題が連立線形システム方程式に帰着するため，均衡解を解析的に求めることが可能である．

具体的には，相補性条件として表現されていたリンク旅行時間関数 (5.55)，及び最短経路選択条件 (5.56) は，次の等式条件に帰着する：

$$\dot{\mathbf{c}}(s) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}(s) + \mathbf{A}_+^{*T}\dot{\mathbf{p}}^*(s) = \mathbf{0}, \quad (5.58)$$

$$\mathbf{c}(s) + \mathbf{A}^{*T}\dot{\mathbf{p}}^*(s) = \mathbf{0}. \quad (5.59)$$

ここで, (5.59) を s について微分し, (5.58) と連立させることにより,

$$\mathbf{y}(s) = -(\mathbf{MA}_{o-}^T \dot{\mathbf{p}}_o(s) + \mathbf{MA}_-^T \dot{\mathbf{p}}(s)). \quad (5.60)$$

なお, $\dot{\mathbf{p}}(s)$ は $\dot{\mathbf{p}}^*(s)$ から起点に関する要素を削除した $\mathcal{N} - \mathcal{N}_o$ 次元のベクトルである. よって, この式 (5.60) をフロー保存則 (5.57) に代入することにより, unidirectional network における DUE の均衡解に関する次の関係式を得る:

$$\mathbf{AMA}_{o-}^T \dot{\mathbf{p}}_o(s) + \mathbf{AMA}_-^T \dot{\mathbf{p}}(s) = \dot{\mathbf{Q}}(s) \dot{\mathbf{p}}_o(s). \quad (5.61)$$

5.5.3 スループットの解析的評価

スループットの解析の準備のため, 巨視的な状態変数を DUE の記述に使われた変数を用いて表す:

$$A_{od}(t) = Q_{od}(t), \quad (5.62)$$

$$D_{od}(t) = Q_{od}(t - C_{od}^*(t)), \quad (5.63)$$

$$n_{od}(t) = A_{od}(t) - D_{od}(t). \quad (5.64)$$

これらは, 起終点別に区別された, ネットワークへの累積流入交通量, 累積流出交通量, 及び車両存在台数である. なお, (5.63) が成立するのは, DUE 状態においては, OD 間で FIFO 条件が成立するためである. これらの巨視的な変数が微分可能であるとすると, ネットワーク内の車両存在台数のダイナミクスは, 次のように表される:

$$\frac{dn_{od}(p_d(s))}{dt} = \lambda_{od}(p_d(s)) - f_{od}(p_d(s)) \quad \forall od \in \mathcal{W}, \quad (5.65)$$

$$\text{where } \lambda_{od}(p_d(s)) \equiv \frac{dA_{od}(p_d(s))}{dt} = \frac{dQ_{od}(p_d(s))}{dt} \quad (5.66)$$

$$f_{od}(p_d(s)) \equiv \frac{dD_{od}(p_d(s))}{dt} = \frac{dQ_{od}(p_o(s))}{dt} \quad (5.67)$$

ここで, 式 (5.66), (5.67) は, それぞれ起終点毎のネットワークへの流入交通流率, 流出交通流率 (スループット) を表している.

以上の準備の下, 以下では DUE 状態 (5.61) の逆問題を定式化する. そしてその問題を解くことにより, 定常状態におけるスループットの解析式を導出する. まず, 周期境界条件は各起終点ペア毎に次のように表される:

$$\frac{dn_{od}(p_d(s))}{dt} \Leftrightarrow \frac{dQ_{od}(p_d(s))}{dt} = \frac{dQ_{od}(p_o(s))}{dt}, \quad (5.68)$$

$$\Leftrightarrow \dot{Q}_{od}(p_d(s)) \dot{p}_d(s) = \dot{Q}_{od}(p_o(s)) \dot{p}_o(s) \quad (5.69)$$

また、定常状態を考えるために、流入・流出交通流率が一定であることを仮定すると、

$$\dot{Q}_{od}(p_d(s)) = \dot{Q}_{od}(p_o(s)), \quad (5.70)$$

が成立する。ここで、(5.69)と(5.70)を連立させることにより、次の関係式を得る：

$$\dot{p}_o(s) = \dot{p}_d(s). \quad (5.71)$$

さらに、 $o = o_{REF}$ において $\dot{p}_o(s) = 1$ であることを考えると、unidirectional network における定常条件式は次の関係式に帰着することがわかる：

$$\dot{p}_o(s) = \dot{p}_d(s) = 1. \quad (5.72)$$

これは、ある終点 d における定常的なスループット f_d は、ネットワークへの流入交通流率 $\lambda_d = \sum_o \lambda_{od}$ 、あるいはOD交通流率 $\sum_o \dot{Q}_{od}(s)$ に一致することを意味している。

結果として、定常条件(5.72)とDUE条件(5.61)を用いることにより、提案逆問題は以下のように表される：

$$\begin{cases} \mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^T\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}_{o-}^T\mathbf{1} \\ \dot{\mathbf{p}} = [\dot{\mathbf{p}}_i \mid \dot{\mathbf{p}}_d]^T = [\dot{\mathbf{p}}_i \mid \mathbf{1}]^T \end{cases} \quad (5.73)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{p}}_i$ 、 $\dot{\mathbf{p}}_d$ は、それぞれ通過ノード集合 \mathcal{N}_i 、終点ノード集合 \mathcal{N}_d に対応する $\dot{\mathbf{p}}$ の部分ベクトルを表す。また、(5.73)の第一式は、OD交通流率 $\dot{\mathbf{Q}}(s)\dot{\mathbf{p}}_o(s)$ をスループット \mathbf{f} で置き換え、かつ渋滞パターンを与件としたDUE均衡条件式である。そして、この問題を解くことにより、終点別のスループット \mathbf{f}_d についての、以下の命題が得られる：

命題 4. (Unidirectional network におけるスループットの解析式) Unidirectional network において渋滞パターン (\mathbf{A}, \mathbf{M}) が与えられたとする。このとき、車両存在台数が一定となる定常状態における終点別のスループット \mathbf{f}_d は、以下の解析式で与えられる：

$$\mathbf{f}_d = \mathbf{V}_{dd}\mathbf{1} + \mathbf{V}_{do}\mathbf{1} - \mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1}[\mathbf{V}_{io}\mathbf{1} + \mathbf{V}_{id}\mathbf{1}]. \quad (5.74)$$

$$\text{where } \mathbf{V}_{ab} = \mathbf{A}_a\mathbf{M}\mathbf{A}_b^T. \quad (5.75)$$

証明 15. (5.73)について、通過ノードと終点ノードを区別してブロック表示することにより、次の関係式を得る：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{io}\mathbf{1} \\ \mathbf{V}_{do}\mathbf{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{ii} & \mathbf{V}_{id} \\ \mathbf{V}_{di} & \mathbf{V}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_i \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{V}_{ii}\dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{V}_{io}\mathbf{1} + \mathbf{V}_{id}\mathbf{1} \\ \mathbf{f}_d = \mathbf{V}_{dd}\mathbf{1} + \mathbf{V}_{do}\mathbf{1} + \mathbf{V}_{di}\dot{\mathbf{p}}_i \end{cases} \quad (5.77)$$

ここで、(5.77)の第一式の \mathbf{V}_{ii} は純湧き出しノードを含まない行列であり、必ず逆行列を持つ。従って、

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -(\mathbf{V}_{ii})^{-1}[\mathbf{V}_{io}\mathbf{1} + \mathbf{V}_{id}\mathbf{1}]. \quad (5.78)$$

が成立する。この式を(5.77)の第二式に代入すれば、(5.74)が得られる。(証明終)

5.5.4 単一起点ネットワークでの解析式との比較

最後に、得られた解析式を単一起点ネットワークにおけるスループットの解析式と比較しよう。このためにまず、式(5.74)の起点ノードに関する行列 \mathbf{A}_{o-}^T を、次のように起点別にブロック表示する：

$$\mathbf{A}_{o-}^T = \left[\cdots \mid \mathbf{A}_{dec;k-}^T \mid \cdots \right]. \quad (5.79)$$

ここで、 $\mathbf{A}_{dec;k-}^T$ は \mathbf{A}_{o-}^T の k 列目と等しい \mathcal{L} 次元の列ベクトルである。これを $\mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{o-}^T \mathbf{1}$ 、 $\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{o-}^T \mathbf{1}$ に代入すると、次が成立する：

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{o-}^T \mathbf{1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{M} \left[\cdots \mid \mathbf{A}_{dec;i-}^T \mid \cdots \right] \mathbf{1} \\ &= \sum_{k \in \mathcal{N}_o} \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{dec;k-}^T \end{aligned} \quad (5.80)$$

$$\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{o-}^T \mathbf{1} = \sum_{k \in \mathcal{N}_o} \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{dec;k-}^T. \quad (5.81)$$

ここで、 $\mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{dec;k-}^T$ 、 $\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{dec;k-}^T$ は、それぞれ式(5.29)の δ_d 、 δ_i と等価である：ある終点ノード d (または、通過ノード i) から起点 k へ流入するリンク (d, k) があるとき、行 d (または、行 i) の要素として $-\mu_{dk}$ を持つ。そしてこれらを代入することで、unidirectional network での解析式は、次のように表される：

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_d &= \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T \mathbf{1} - \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T (\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T)^{-1} \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{d-}^T \mathbf{1} \\ &+ \sum_{k \in \mathcal{N}_o} \left[\mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{dec;k-}^T - \mathbf{A}_d \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T (\mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{i-}^T)^{-1} \mathbf{A}_i \mathbf{M} \mathbf{A}_{dec;k-}^T \right]. \end{aligned} \quad (5.82)$$

これを見るとわかるように、unidirectional network での解析式では、起点に関する行列は各起点別の行列の線形和で表される。また、起点に関する行列が各起点別の行列の線形和で表されることは、unidirectional network の縮約ネットワークを次のように変換してもスループットは変化しないことを意味する：対応する縮約ネットワークにおいて、複数の起点を一つの起点に集約する（各起点と接続しているリンクが、全て一つの起点と接続しているものとみなす）。すなわち、式(5.82)は式(5.29)を包含する関係にあるとともに、その性質（次章で解析するスループットの解析式の感度）は単一起点のものと変わらないことがわかる。

5.6 数値計算例

本節では、動的な OD 需要パターンに従って実現した DUE 状態における NEF と、提案手法により解析的に評価した NEF を比較することにより、提案手法の妥当性を確認する。まず 5.6.1 では、数値計算の設定と DUE 状態の数値計算法を説明する。5.6.2 では、時々

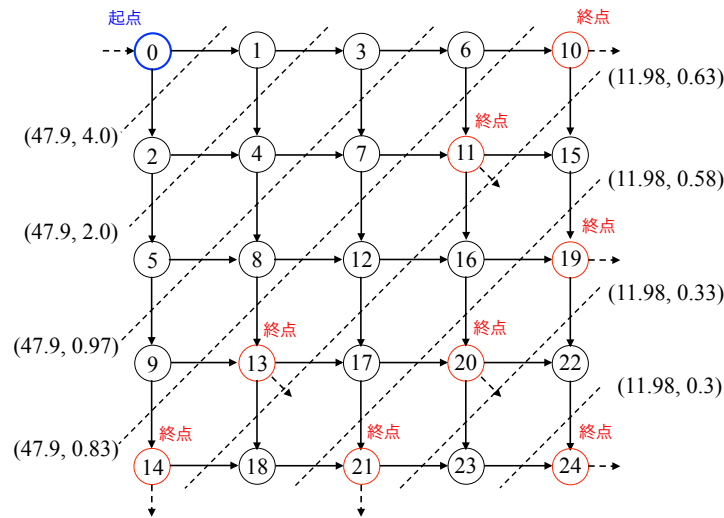


図 5.3: 単一起点ネットワーク

刻々の実現した渋滞パターンに提案手法を適用することで解析的に導出される理論値と実現値の比較を行なう。また、NEF と MFD の形状を比較することで、MFD を NEF の代替として利用する際の注意点を説明する。

5.6.1 数値計算設定

図 5.3 に、本節で取り扱う 1 起点多終点ネットワークを示す。起点はノード 0 であり、終点ノードの集合は $N_d = \{10, 11, 13, 14, 19, 20, 21, 24\}$ である。これら終点は起点からの距離に応じて、次の 3 つの終点群に区分する： $N_{d1} = \{10, 11, 13, 14\}$, $N_{d2} = \{19, 20, 21\}$, $N_{d3} = \{24\}$ 。ネットワーク上の各リンクは、リンク末端のボトルネック部とボトルネック以外の区間から構成されており、台形型の Fundamental Diagram (FD) を持つ。図中の括弧書きの数字は、それぞれ自由旅行時間 [sec]、ボトルネック容量 [veh/sec] を示しており、ボトルネック以外の区間における交通容量は 4[veh/sec] とする。数値実験を開始してから t 秒後のネットワークへの総流入交通流率は以下のように与えている。

$$\sum_{d \in N_d} \frac{dQ_{od}(t)}{dt} = \begin{cases} 2 + \frac{1}{600}t & t < 1800 \\ 5 & 1800 \leq t < 3900 \\ 5 - \frac{1}{600}(t - 3900) & 3900 \leq t < 5700 \end{cases}$$

また、各終点群に向かう利用者の比率は、 $N_{d1} : N_{d2} : N_{d3} = 1 : 2 : 2$ と設定した。DUE 状態におけるネットワーク全体の車両存在台数とスループットは、すべての需要が流入するまで 3 分間隔で集計され、各時間帯における平均値を実現値とする。なお、各リンクの渋滞の有無 (i.e., 渋滞パターンおよびリンク容量値) についても、3 分間集計されたリンク交通量から判定をし、解析式へのインプットとしている。

本研究では、井料によって提案された順序配分アルゴリズム (Iryo, 2011b; Satsukawa and

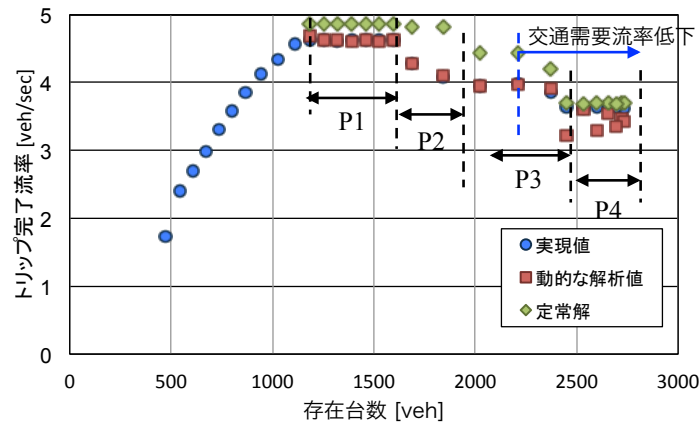


図 5.4: NEF の実現値と理論値

Wada, 2017) により DUE 配分を行う。この方法は、離散化された車両のうち、“最早未配分車両” (i.e., 当該車両の最短経路に含まれるリンクへの流入時刻が、他のどの車両の流入時刻よりも遅くない) を 1 台ずつ最短経路に配分するものである。すなわち、最早未配分車両を順次最短経路に配分することにより、後から配分される車両は前に配分された車両を追い越すことはなく (i.e., ある車両の軌跡が、それ以降の車両の軌跡に影響されない), どの車両も事後的な最短経路を走っている状態が達成される。本研究で取り扱う 1 起点多終点ネットワークにおいては、与えられた OD 需要をネットワークへの流入時刻が早い順に 1 台ずつ最短経路に配分していけば、ヒューリスティクスな計算をすることなく、DUE の均衡解を求めることができる。

また、この手法では待ち行列の延伸を考慮した様々な交通流モデルを採用することが出来るが、本研究では Newell の追従モデル (Newell, 2002) を採用している。このモデルでは、追従状態にある車両 n の軌跡は、直近の車両 $n-1$ の軌跡を (地点の容量 μ の関数である) 最小車頭距離 $d(\mu)$ と最少車頭時間 $\tau(\mu)$ だけシフトしたものとして計算される。より具体的には、車両 n の時刻 t における位置 x_n は、FD の自由旅行速度 (前進波速度) を v , 後進波の速度を w としたとき、

$$x_n(t) = \min\{x_{n-1}(t - \tau(\mu)) - d(\mu), x_n(t - 1) + v\} \tag{5.83}$$

$$\text{where } d(\mu) = \frac{wv}{\mu(w - v)}, \quad \tau(\mu) = -\frac{v}{\mu(w - v)}$$

と与えられる。ここでは、最適速度を $v = 16.7[\text{m/sec}]$, 後進波の速度を $w = 8.33[\text{m/sec}]$ としている。

5.6.2 数値計算結果

図 5.4 に、車両存在台数に対するスループットの実現値 (NEF) と、時々刻々に発現した渋滞パターンに対して解析式を適用することで導出した理論値の推移を示す。なお、理

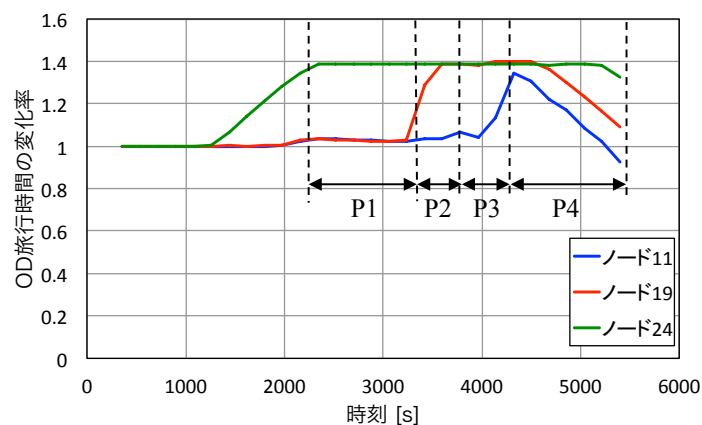


図 5.5: 各終点ノードへの旅行時間変化率

論値は動的状況下のものと、定常状態下のものを両方示している。図中の P1 ~ P4 は、図 5.6 に示した渋滞パターンが実現している車両存在台数の範囲を示している。

この図からまずわかることは、動的状況下のスループットの理論値が実現値にほぼ一致していることである。ただし、P4 において車両存在台数が減少しているときには、実現値と理論値の乖離が見られる。これは、この時間帯において、式 (5.38) による近似の誤差が大きくなるためであると考えられる。より具体的には、OD 旅行時間がそれぞれの終点群で異なることに加え（この点は P1 ~ P3 でも同様）、起点における流入交通流率が減少しているため、式 (5.38) による近似誤差が大きくなる。逆に、P1 ~ P3 は流入交通流率が一定であるため、式 (5.38) による近似誤差が小さい。つまり、ネットワークへの流入交通流率の変化が十分緩やかであれば、式 (5.42) は DUE 状態で実現するスループットのよい近似を与えることがわかる。

次に、定常状態下のスループットの理論値を見ると、渋滞パターンの遷移（P2 および P3）に伴い低下しているものの、スループットを過大評価していることがわかる。これは、5.4 でも考察した通り、ネットワーク内の異なる終点群の間の車両存在台数が増加しているためである。このことを、より具体的にみるために、図 5.5 に各終点ノードへの旅行時間の増加率 \bar{t}_d の時間推移を示す。異なる終点間の旅行時間の増加率の違いは、その終点間で待ち時間あるいは待ち行列が増加・減少していることを意味している。

この図をみると、P1 が実現している時間帯では、最も下流の終点への旅行時間の増加率のみが高く、終点群 N_{d2} と N_{d3} の間で車両存在台数が増加している。従って、定常状態を仮定したスループットはやや過大評価気味である。P2 の時間帯になると、 N_{d2} への旅行時間の増加率も上昇しており、P2 から P3 にかけて終点群 N_{d1} と N_{d2} の間の車両存在台数が増加している。従って、ここでも定常状態下のスループットは過大であり、 N_{d2} への旅行時間の増加率の上昇が急激であるため、その乖離も大きい。一方、P4 になると、最も上流の終点群 N_{d1} への旅行時間の増加率も上昇し（起点と終点群 N_{d1} の間の車両存在台

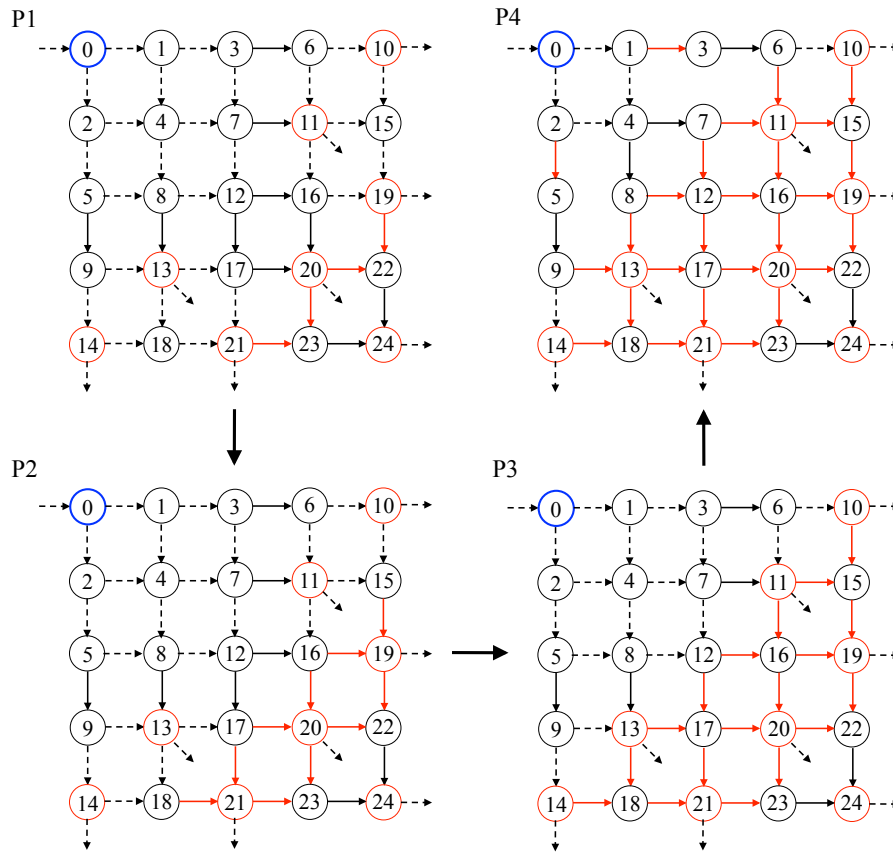


図 5.6: 渋滞パターンの進展 (実線：渋滞リンク，点線：非渋滞リンク，赤線：待ち行列の延伸で容量が変化したリンク)

数の増加し) 終わり，終点群 N_{d1} の上流側から車両存在台数が減少している．そして，この P4 の時間帯では，異なる終点群の間での車両存在台数の増減は小さいため，定常状態下のスループットと実現値の乖離は小さくなる．

最後に，MFD (車両存在台数と空間平均交通流率の関係) の挙動についても見ておこう．ここで，MFD の空間平均交通流率は，Edie の定義 (Edie, 1963) に従って計算した各リンクの交通量を，リンク長で重み付け平均して求めた．図 5.7 に NEF と MFD の実現値を示す．この図より，MFD が NEF の傾向をおおむね捉えていることがわかる．ただし，P2 ~ P3 では，その変化が NEF に比べて鈍っている．これは，スループット (交通処理量) の低下が直接反映される NEF と異なり，MFD はスループットに直接関係ないリンクも含むネットワーク全体のリンク交通量の平均値を表しているためである．また，P4 における車両存在台数の減少局面では，NEF は低下しないにも関わらず，MFD は低下している．これも同様に，スループットには関係ないリンク交通量の減少の影響である．つまり，MFD によりネットワークの交通性能を推し量ることは可能であるが，MFD を NEF の代替として利用する (スループットを推定する) 際には，以上のような傾向に注意が必要であると言えよう．

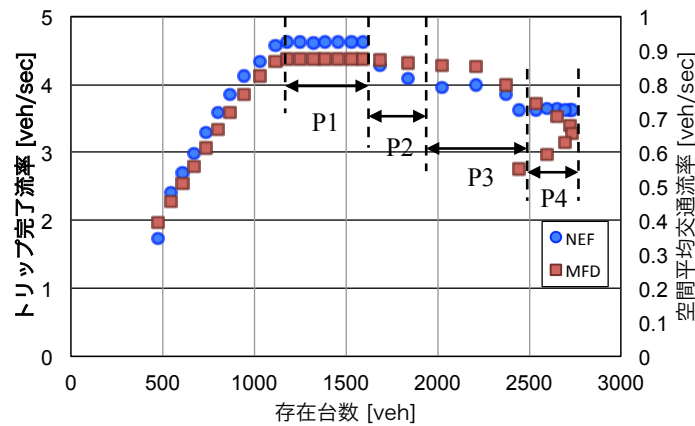


図 5.7: NEF と MFD の比較

5.7 本章のまとめ

本章では、**unidirectional network** を対象に、渋滞パターンに基づくスループットの解析法を構築した。具体的には、渋滞パターンを与件とした DUE 配分の逆問題を考え、定常状態、および動的状況下のスループットの解析式を導出した。その結果、定常状態におけるスループットは、縮約ネットワークの構造（渋滞リンク同士の接続関係）と容量パターン、およびその OD 分布により特徴づけられることが理論的に明らかになった。また、動的状態ではこれらの要素に加え、OD 旅行時間の変化率が影響を及ぼすことがわかった。すなわち、MFD 特性解明の鍵である渋滞パターンを通して、**unidirectional** 構造を持つネットワーク上の微視的な交通状態（渋滞リンクの交通容量）と巨視的な交通性能（スループット）間の関係性を明らかにすることができた。

本章で構築した解析式では、OD 分布（起点・終点の位置）の情報を必要とするが、その定量的な情報（いつ、どれだけの OD 交通量が発生、集中しているのか）は必要としない。すなわち、提案する方法論では、観測可能な交通情報に基づくネットワーク全体の交通性能のリアルタイムな評価が可能となる。そのため、提案解析方法は（**unidirectional network** 構造に限られるが）ネットワーク全体の交通性能をリアルタイムに把握できるという巨視的なアプローチの利点を損なうことなく、空間的な渋滞パターンとスループットとを解析的に結びつけることができている。

本章で構築した渋滞パターンの理論解析方法では、混雑したネットワーク全体のスループットを特徴づける渋滞リンクの特定が可能となる。加えて、構築した解析式からは、局所的な渋滞リンク容量の変化がスループットに与える影響を定量的に把握することが可能となる。そのため、各渋滞リンクの容量変化前後のスループット変化を解析することで、スループットを改善するための渋滞リンク制御方策を考えることができる。次章ではこの

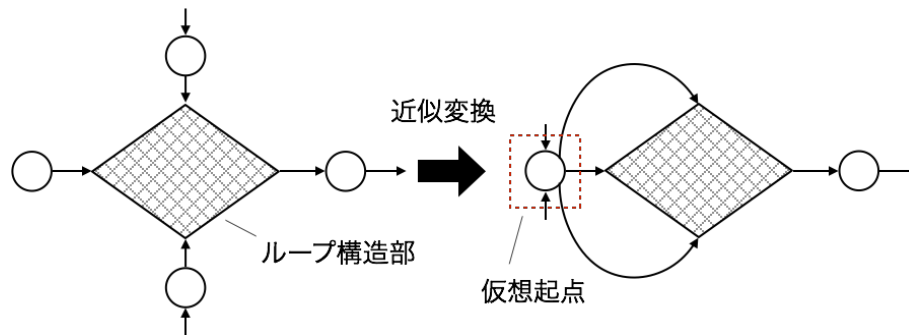


図 5.8: ループ構造部と複数起点の集約のイメージ

解析（感度分析）から、まず、渋滞リンクの容量変化がスループットに与える影響のメカニズムを明らかにする。そしてその結果に基づき、スループットを改善する渋滞リンク制御方を、具体的な制御形態（i.e., 制約条件）を考慮して、構築する。

Appendix 5.A 一般構造ネットワークへの提案方法の拡張案

ここまでは *unidirectional network* を対象として定常状態におけるスループットの構造、及びその特徴について考察した。一方で現実のネットワークについては、*unidirectional network* 構造を持つネットワークとして解析できるものは限られている。そこで本付録では、前節までの議論を一般的な構造を持つネットワークに対して適用するための手法について考察する。具体的には、一般構造ネットワークを *unidirectional network* へと近似変換する手法について考察する。そして、近似変換されたネットワークに前章で構築した解析式を適用することで、スループットを近似解析する。

以下ではまず、ネットワークの近似変換のアイデアについて概説する。そして、近似変換の具体的な手法を説明し、その特性について考察を行う。

5.A.1 近似変換の基本的なアイデア

本節で提案する近似変換手法の基本的なアイデアは、一般構造ネットワーク上の有向・無向のループ構造を、単一起点構造へと変換することである。より具体的には、ループ構造に含まれる複数の起点ノード、及びループ構造へと流入するリンクの上流ノードを、一つの仮想的な起点へと集約する（図 5.8）。そして、これを全てのループに適用することで、単一起点構造が仮想的な起点を通して組み合わさった、*polytree* 構造へとネットワークを変換する。以下では、この近似変換のアイデアについて説明する。

スループットを解析するためのループ構造の近似変換にあたっては、重要な点は二つ存在する。一つは、変換前後でスループットの値が一致していることである。これは、ループ構造への流入フローが、変換前後で変わらないことを要求するものである。なぜならば、本稿で解析対象とする定常状態では、ループ構造からの流出フローの総和（i.e., ルー

プ構造部内の終点におけるスループットと、ループ構造を通過する交通量の和)は、流入フローと一致するためである。そのため、ループ構造から他のノードへの接続構造(ループ構造からの流出構造)を変えない場合は、ループ構造に含まれる起点から流入するフロー、及びループ構造へと流入するリンクの交通状態(i.e., フロー, 渋滞・非渋滞状態)が同一となるような変換が必要となる。

一方でより重要なことは、近似変換前後でスループットの感度が同一であることである。すなわち、前節で議論したような異なる終点を持つフローの相互作用(i.e., ブロッキング現象, 終点通過交通量の増加)が、変換後のネットワークでも同様に発現している必要がある。ここで、スループットを一致させるために、ループ構造への流入フローが一致する変換を行うとき、ループ構造部内の終点への流入フローは変換前後で整合するものと考えられる; すなわち、ブロッキング現象は適切に表現される。そのため、感度を整合させるためには、ある終点から他の終点へと流出する終点通過フローを適切に表現する必要がある。具体的には、ある終点から別の終点に向かうフローの経路選択肢、及びその経路を構成するリンクといった、終点同士の接続関係が、変換前後で保存されている必要があると考えられる。

こうした変換の鍵となるのが、本節のはじめに説明した、ループ構造の単一起点化である。この変換では、ループ構造部へと流入するフローは全て仮想的な起点から流出するものとしているが、変換前でのループ構造部への流入フローを持つノード(ループ構造部内の起点ノード、またはループ構造へと流入するリンクの下流ノード)へとリンクを接続すれば、ループ構造部への流入フローの総量は変換前後で一致する。加えて、ループ構造部から流出構造を変化させていないため、ループ構造内の各終点を流出するフローの、他の終点への経路構造は保存されている。すなわち、ループ構造部内の終点に関して、スループットの値を一致させるとともに、その感度を変換前のものと整合的に解析できると考えた。

5.A.2 近似変換アルゴリズム

前節の議論を踏まえ、本節では、一般構造ネットワークのループ構造を単一起点構造へと変換することによる、**unidirectional network** への近似変換手法を構築する。以下ではまず、手法の説明に先立ち、本節で用いる変数の定義について説明する。次に、**unidirectional network** への近似変換アルゴリズムを示す。

まず、ある渋滞パターン (\mathbf{A}, \mathbf{M}) におけるループ構造の集合を $CG(\mathbf{A}, \mathbf{M})$ と表す。あるループ構造 $CG_i \in CG(\mathbf{A}, \mathbf{M})$ は、始点・終点ノードが同一である無向の経路、及びその経路に含まれるノードから構成されている。ここで無向の経路とは、有向・無向ループの両方について考えるための、有向リンクを無向リンクと考えたときの経路である、i.e., 有向リンクについて下流ノードから上流ノードへとノードを辿ることを許す。 CG_i はノードの集

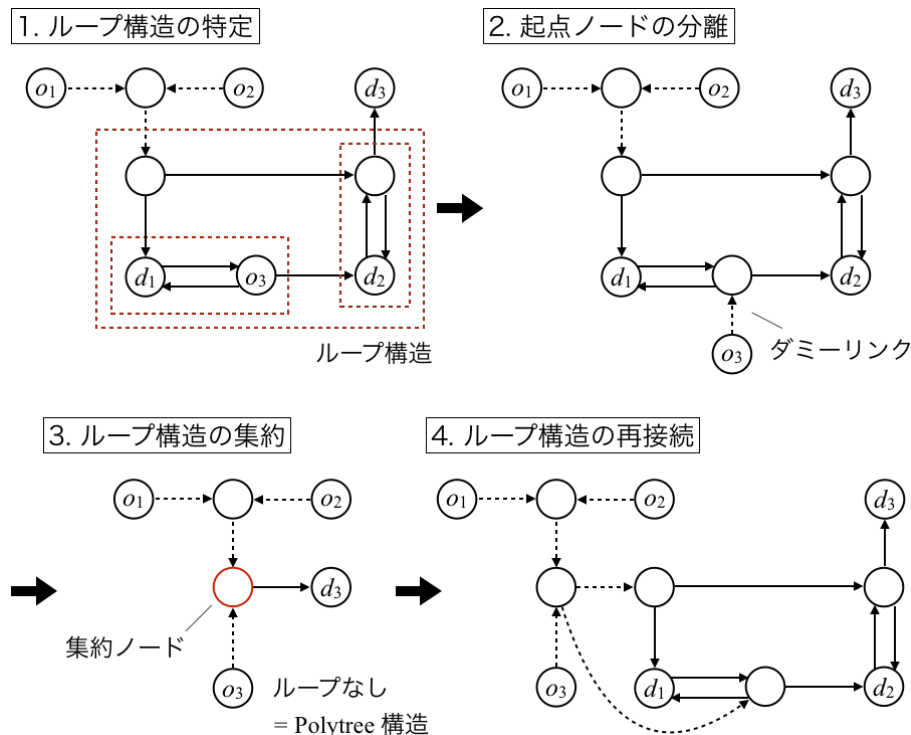


図 5.9: 一般構造のネットワークの unidirectional network への変換 (点線: 非渋滞リンク, 実線: 渋滞リンク)

合ともみなす (e.g., ノード $a \in \mathcal{N}$ がループ構造 CG_i に含まれているとき, $a \in CG_i$). あるノードは複数のループ構造に共通して含まれる場合もある (e.g., $a \in CG_i \cap a \in CG_j, i \neq j$). なお, フローが流れていないリンクについては, 削除して考える.

以上の準備の下, 次の手順を踏むことにより, polytree 構造を基本構造としてもつネットワークを構築する (変換の手順を具体的なネットワークで表したものを図 5.9 に示す):

unidirectional network への近似変換アルゴリズム

1. 渋滞パターン上のループ構造の特定: 渋滞パターン (\mathbf{A}, \mathbf{M}) のループ構造集合 $CG(\mathbf{A}, \mathbf{M})$ を特定する.
2. 起点ノードの分離: ループ構造 $CG_i \in CG(\mathbf{A}, \mathbf{M}), \forall i$ に起点ノード n が含まれる場合, この起点をループ構造から分離する. 具体的には, 非渋滞状態であるダミーリンクを作成し, この上流に純起点として接続し直す^{*8}.
3. ループ構造の集約: ループ構造 CG_i を一つのノードへと集約する. また, 集約されたノードが他のループに含まれるとき, このループも同一のノードに集約する. 集約後のノードを CN と表し^{*9}, あるループ構造 CG_i がこのノードに集約されていることを $CG_i \in CN$ と表す.

^{*8} このダミーリンクは, 後で行う渋滞パターンの縮約の際に除去されるため, スループットの構造に影響をあたえることはない.

^{*9} なお, CN は複数存在しうる, i.e., 全てのループが一つのノードへと集約されるとは限らない.

4. ループ構造の再接続：集約ノード CN に，集約された構造 $CG_i \in CN$ を，ループ構造へ流入するリンクを用いて接続する．具体的には，あるループ構造 $CG_i \in CN$ に属する構造以外から流入するリンク l について，同一の交通状態（渋滞，非渋滞）・フロー・容量を持つリンクを作成し，このリンクの上流に CN ，下流に変換前のネットワークにおいて l が下流に持つノードを接続する．なお，集約したノードから流出するリンクについては，変換前の構造と同じノードを上流に持つように接続し直す．

このようにして変換されたネットワークでは，集約ノード CN があるループ構造 $CG_i \in CN$ にとっての（単一の）起点ノードとなる．結果として，変換後のネットワークは単一構造が集約ノードを介して polytree の構造で接続する構造となり，これは UN である．よって，このネットワークを渋滞パターンに基づき縮約し，解析式 (5.74) を適用すれば，スループットの構造を近似的に求めることができる．

この近似変換アルゴリズムにおいて，変換後のネットワークが一意であることを示す次の定理をあげる：

定理 7.（近似変換されたネットワークの一意性）unidirectional network への近似変換アルゴリズムにおいて，変換後のネットワークの構造は一意である．

証明 16. unidirectional network への近似変換アルゴリズムの「ループ構造の集約」において，どのような順番でループ構造を集約しても，ある集約ノード CN に含まれるループ構造が一意であることを示せば良い．ここであるループ構造 CG_i が他のループ構造と共通するノードを持たないとき， CG_i はそれ単独で一つのノード CN に集約されることは自明．そのため，共通するノードを持つループが複数存在するときに，集約の順番によってループの集約先が変化しないことを示せば十分である．このために，集約に関する次の性質を示す：

性質 1. ある二つのループ CG_i, CG_j が存在し，これらが変換前のネットワークにおいて少なくとも一つのノードを共通して持つものとする．このとき， $CG_a, (a = \{i, j\})$ を集約したノード CN は， $CG_b, (b = \{i, j; b \neq a\})$ を構成するノードの一部となるか， CG_b を含む $\therefore CG_i, CG_j$ は集約の順番に関わらず，ノード CN に集約される．

この性質から，集約の順番によらず変換前のネットワークにおけるループ構造のみから，集約先のノードが決まることがわかる．よって，これをネットワーク上の全てのループに適用すれば，集約の順番によらず，ループの集約先が決まることは明らか．よって証明．（証明終）

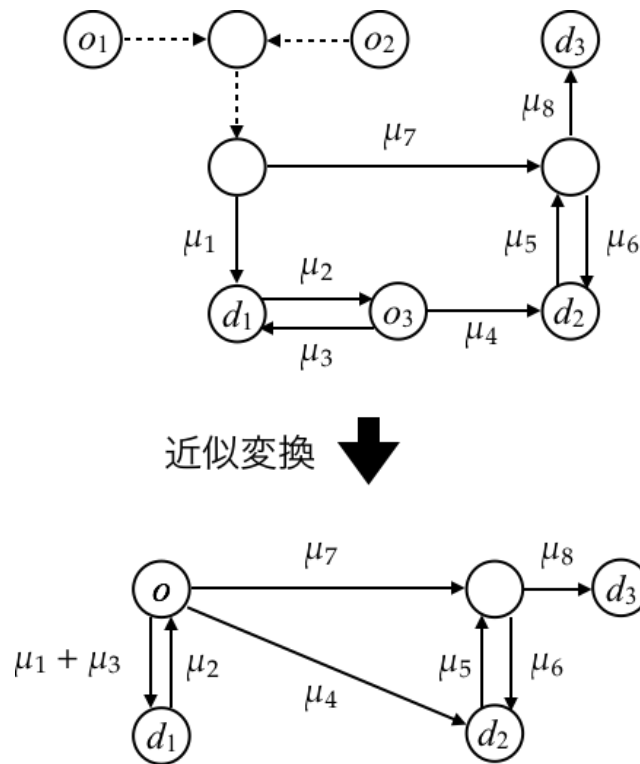


図 5.10: 変換後の渋滞パターンに対応する縮約ネットワーク

具体例

図 5.10 に示す，図 5.9 の変換後の渋滞パターンに対応する縮約ネットワークを用いて，スループットの計算例を示す．このネットワークは 1 起点 3 終点のネットワークであり，ノード {o} が起点，ノード {d₁, d₂, d₃} が終点ノードである．各リンク l の容量は図に示すとおりである．

このとき，(5.74) の要素となる行列，ベクトルは以下のように表される：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{dd} &= \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 + \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_7 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{ii} = \begin{bmatrix} \mu_4 + \mu_6 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{V}_{io} &= \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{id} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu_5 & -\mu_7 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{V}_{do} &= \begin{bmatrix} -\mu_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{di} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu_4 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{5.84}$$

そして，これらを式 (5.74) に代入することにより，各終点のスループットが求まる：

$$\mathbf{f}_d = \begin{bmatrix} f_{d_1} \\ f_{d_2} \\ f_{d_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_3 + \mu_5 - \frac{\mu_5 + \mu_7}{\mu_4 + \mu_6} \mu_4 \\ \mu_7 \end{bmatrix}$$

最後に、 \mathbf{f}_d の要素の和をとれば、スループット F が求まる：

$$F = \mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7 - \mu_2 - \frac{\mu_4}{\mu_4 + \mu_6}(\mu_5 + \mu_7). \quad (5.85)$$

なお分数部分が、近似変換後のネットワークにおける DUE 均衡解 \dot{p}_i であり、車両の経路選択行動を反映したものである。

定常状態におけるローカルな保存則から導出されるトスループットと比較してみよう。定常状態において、各終点のスループットは流入するリンクの容量から流出するリンクの容量を引いたものと等しい。従って、

$$F = \mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_7 - \mu_2 - \mu_4. \quad (5.86)$$

が成立することがわかる。これは、一見 (5.85) とは異なるが、定常状態における通過ノードでの保存則 $\mu_4 + \mu_6 = \mu_5 + \mu_7$ を考慮すると、

$$\frac{\mu_4}{\mu_4 + \mu_6}(\mu_5 + \mu_7) = \mu_4 \quad (5.87)$$

が成立することがわかる。これを (5.85) に代入すると、二つのスループットは同一であることがわかる。

この例からも、定常状態におけるスループットは、誤差なく推定できることがわかる。加えて、(5.85) の解析解からは、終点ノードには直接接続しないリンク 6 が、車両の経路選択行動に関わるリンクとして、スループットに影響を及ぼしていることがわかる。

5.A.3 近似変換アルゴリズムの誤差について

本稿で提案する近似変換手法は、ループ構造部内、及びその下流の構造は変化させていないため、これらの構造部に位置する終点のスループットの感度については、オリジナルのものと整合的に解析することができる。一方で、ループ構造部の「上流」に位置する終点に関しては、スループットの感度は変換前後で異なる可能性がある。これは、ループ構造部に流入する全てのフローが通る集約ノードが構築されることで、ループ構造部中のあるリンク容量の変化によるフローの変化が、集約ノードを介して本来影響し得なかった上流側のネットワークに影響を及ぼすようになるためである。

こうしたことが起こる状況を示すネットワークのイメージから、それを簡単に確かめてみよう。図 5.11 に、二起点多終点の、unidirectional network でないネットワークを示す。このネットワークでは、起点 o_1, o_2 から出発したフローは、多終点構造を持つネットワークを通った後にループ構造に流入する。このネットワークに前述した近似変換アルゴリズムを適用すると、図中の右図のような unidirectional network が構築される。

ここで、リンク (a, b) の容量 μ_{ab} を増強したときの、フロー・パターンの変化を見てみよう。まず、オリジナル・ネットワークでは、この容量増強に伴い、ノード a からの流出フ

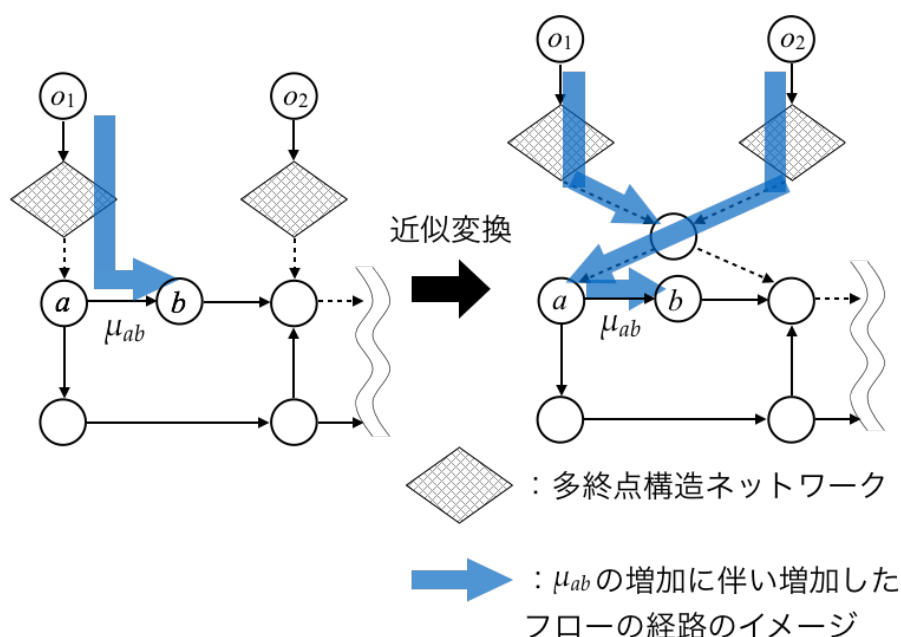


図 5.11: ループ構造部上流の感度が異なるネットワークイメージ

ローが増加する；そして、定常状態におけるフロー保存則から、このノード a への流入フローも増加することになる、i.e., o_1 下流の多終点構造を通過するフローが増加する。すなわち、このリンクの容量変化によるフロー・パターンの変化から、 o_1 下流の多終点構造内に位置する終点におけるスループットのみが変化するることがわかる。

一方で、近似変換されたネットワークでは、ノード a, b の上流に、どちらのネットワークからの流出フローも通る集約ノードが構築される。そして、ノード a からの流出フローの増加の影響は、まず集約ノードからノード a への流出フローの増加として記述され、その後集約ノード上のフロー保存則から、集約ノードに接続する両方のリンク上のフローの変化として記述される。この結果として、元々片方のネットワークのみにしか影響しなかったリンク容量の変化が、両方のネットワークのスループットを変化させうることをわかる。すなわち、スループットの感度はオリジナルのものとは異なりうることをわかる。

このように、本近似手法では、本来ループ部へと流入するリンクの上下流ノード個別で考えなければいけなかったフロー保存則が、集約ノードで集計的に取り扱われてしまう。その結果、ループ構造部中のあるリンクのフローが変化したときの影響が、ループ上流側に適切に伝わらないことが起こりうる。こうした本来あるリンクのフロー変化に連動しないはずのリンク上のフローが変化するという現象が、一般構造ネットワークの *unidirectional network* への近似変換にあたっての、近似誤差となる。そのため、ループ構造部内、及び下流の終点のみに着目して感度分析を行う、などのように、スループットの感度分析にあたっては、このような近似誤差を踏まえた工夫が必要となる。

第6章

スループットを改善する渋滞リンク 制御方策の構築

6.1 はじめに

本章では、前章で構築したネットワーク・スループットの解析式の分析を通して、混雑したネットワークの交通性能を改善する交通制御法を構築する。制御法構築の基盤となるのは、動的利用者均衡状態でのスループットの感度分析方法である。具体的には、ある渋滞パターンの構造（渋滞リンク同士の接続関係）を与件とした解析式の微分を通して、渋滞リンク容量変化前後のスループット変化を解析的に明らかにする。感度分析では、容量が変化する渋滞リンクの種類（i.e., 渋滞リンクの上・下流ノードが起点、通過、終点のどれであるか）別に場合分けを行うことができる。これら全ての場合における感度を網羅的に調べることにより、スループットを改善するための渋滞リンク制御の条件（i.e., どの渋滞リンクの容量を改善・制限すればよいか）、およびそのメカニズムを明らかにする。そして解明した条件に基づき、過飽和状態にある信号交差点での制御を想定して、渋滞リンク制御方策を構築する。

以下では、まず **6.2** において、解析式の微分を通してリンク容量の変化に対するスループットの変化（感度）を解析する。次に **6.3**、および **6.4** では、スループットの感度が正（または負）となる渋滞リンク容量変化の条件を明らかにする。また、各条件に対応した渋滞リンク容量変化が起きる具体的な交通状態の考察を通して、容量変化がスループット変化に与える影響のメカニズムについて明らかにする。そして **6.5** では、過飽和状態にある信号交差点における渋滞リンク制御方策を構築する。**6.6** では提案信号制御方策の妥当性を、数値計算から確認する。最後に、**6.7** で本章のまとめを行う。

6.2 解析式の感度分析

いま、容量パターン $\boldsymbol{\mu} \equiv [\dots, \mu_{ij}, \dots]^T$ を対角要素に持つ容量行列を $\mathbf{M}(\boldsymbol{\mu})$ とし、その他の行列/ベクトルも $\mathbf{f}_d(\boldsymbol{\mu})$, $\mathbf{V}(\boldsymbol{\mu})$, $\dot{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\mu})$, $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\mu})$ と表現する。そして、容量パターン $\boldsymbol{\mu}$ における $\mathbf{f}_d(\boldsymbol{\mu})$ と、容量パターン $\boldsymbol{\mu}' \equiv \boldsymbol{\mu} + \Delta\boldsymbol{\mu}$ における $\mathbf{f}_d(\boldsymbol{\mu}')$ を比較する。

まず、式 (5.30) から、二つの容量パターンについて通過ノードに関して以下の式が成り立つ：

$$\boldsymbol{\delta}_i(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{V}_{ii}(\boldsymbol{\mu})\dot{\boldsymbol{\tau}}_i(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{V}_{id}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{1} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_i(\boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\delta}_i(\Delta\boldsymbol{\mu}) &= [\mathbf{V}_{ii}(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{V}_{ii}(\Delta\boldsymbol{\mu})]\dot{\boldsymbol{\tau}}_i(\boldsymbol{\mu}') \\ &\quad + [\mathbf{V}_{id}(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{V}_{id}(\Delta\boldsymbol{\mu})]\mathbf{1} \end{aligned} \quad (6.2)$$

ここでは $\mathbf{V}(\boldsymbol{\mu})$ と $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\mu})$ が $\boldsymbol{\mu}$ について線形であるという性質を用いた： $\mathbf{V}(\boldsymbol{\mu}') = \mathbf{V}(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{V}(\Delta\boldsymbol{\mu})$, $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\mu}') = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\delta}(\Delta\boldsymbol{\mu})$. 次に、式 (6.2) から式 (6.1) を差し引くことで、以下の式を得る（ただし、以降の式では $\boldsymbol{\mu}$ は省略した）：

$$\begin{aligned} [\dot{\boldsymbol{\tau}}_i(\boldsymbol{\mu}') - \dot{\boldsymbol{\tau}}_i] &= -(\mathbf{V}_{ii})^{-1} [\mathbf{V}_{ii}(\Delta\boldsymbol{\mu})\dot{\boldsymbol{\tau}}_i(\boldsymbol{\mu}') \\ &\quad + \mathbf{V}_{id}(\Delta\boldsymbol{\mu})\mathbf{1} - \boldsymbol{\delta}_i(\Delta\boldsymbol{\mu})]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

また、終点ノードについても同様に、容量パターン変化前後の式 (5.39) の辺々を差し引き、式 (6.3) を代入することで、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_d(\boldsymbol{\mu}') - \mathbf{f}_d &= \mathbf{V}_{dd}(\Delta\boldsymbol{\mu})\mathbf{1} - \boldsymbol{\delta}_d(\Delta\boldsymbol{\mu}) \\ &\quad + \mathbf{V}_{di}(\Delta\boldsymbol{\mu})\dot{\boldsymbol{\tau}}_i(\boldsymbol{\mu}') - \mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1}\mathbf{V}_{ii}(\Delta\boldsymbol{\mu})\dot{\boldsymbol{\tau}}_i(\boldsymbol{\mu}') \\ &\quad - \mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1} [\mathbf{V}_{id}(\Delta\boldsymbol{\mu})\mathbf{1} - \boldsymbol{\delta}_i(\Delta\boldsymbol{\mu})]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

最後に、 $\Delta\boldsymbol{\mu} = [0, \dots, 0, \Delta\mu_{kl}, 0, \dots, 0]^T$ の場合を考える。式 (6.4) の両辺に $\mathbf{1}^T$ をかけ、 $\Delta\mu_{kl}$ で割り、極限 $\Delta\mu_{kl} \rightarrow 0$ をとることにより、リンク (k, l) の容量変化に関するスループットの感度式 $\partial F / \partial \mu_{kl}$ は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mu_{kl}} &= \mathbf{1}^T \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}_{dd}(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} \mathbf{1} - \frac{\partial \boldsymbol{\delta}_d(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} \right. \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{V}_{di}(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} \dot{\boldsymbol{\tau}}_i - \mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}_{ii}(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} \dot{\boldsymbol{\tau}}_i \\ &\quad \left. - \mathbf{V}_{di}(\mathbf{V}_{ii})^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{V}_{id}(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} \mathbf{1} - \frac{\partial \boldsymbol{\delta}_i(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_{ab}(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} &\equiv \lim_{\Delta\mu_{kl} \rightarrow 0} \mathbf{A}_a \mathbf{M}(\Delta\boldsymbol{\mu}) \mathbf{A}_b^T / \Delta\mu_{kl} = \mathbf{A}_a \mathbf{I}_{kl} \mathbf{A}_b^T \\ \frac{\partial \boldsymbol{\delta}_a(\Delta\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{kl}} &\equiv \lim_{\Delta\mu_{kl} \rightarrow 0} \boldsymbol{\delta}_a(\Delta\boldsymbol{\mu}) / \Delta\mu_{kl} = \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

ただし, $a, b \in \{i, d\}$. また, \mathbf{I}_{kl} はリンク (k, l) に対応する対角要素のみ 1, それ以外の要素は 0 となる $|L_R| \times |L_R|$ 行列, \mathbf{e}_k はノード k に対応する要素のみ 1 となる単位ベクトルである. また, k が起点のときあるいは l が起点でないとき, $\mathbf{e}_k = \mathbf{0}$ とする. 式 (6.5) は, その第一項が解析式 (5.36) の第一項の感度を表しており, それ以外の項は解析式 (5.36) の第二項の感度を表している.

この感度式は, 容量が変化するリンクの上・下流ノードの種類 (i.e., 起点, 終点, 通過) に応じて場合分けをすることで, 次のように表すことができる:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_{kl}} = \begin{cases} \mathbf{1}^T (\mathbf{A}_d \mathbf{I}_{kl} \mathbf{A}_{d-}^T) \mathbf{1} & \text{if } k, l \in \mathcal{N}_d \text{ or } k = o \wedge l \in \mathcal{N}_d \\ -\mathbf{1}^T \mathbf{e}_k & \text{if } k \in \mathcal{N}_d \wedge l = o \\ \mathbf{1}^T \mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} \mathbf{e}_k & \text{if } k \in \mathcal{N}_i \wedge l = o \\ -\mathbf{1}^T \mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} (\mathbf{A}_i \mathbf{I}_{kl} \mathbf{A}_{i-}^T) \dot{\tau}_i & \text{if } k = o \wedge l \in \mathcal{N}_i \text{ or } k, l \in \mathcal{N}_i \\ \mathbf{1}^T (\mathbf{A}_d \mathbf{I}_{kl} \mathbf{A}_{d-}^T) \mathbf{1} - \mathbf{1}^T \mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} (\mathbf{A}_i \mathbf{I}_{kl} \mathbf{A}_{d-}^T) \mathbf{1} & \text{if } k \in \mathcal{N}_i \wedge l \in \mathcal{N}_d \\ \mathbf{1}^T (\mathbf{A}_d \mathbf{I}_{kl} \mathbf{A}_{i-}^T) \dot{\tau}_i - \mathbf{1}^T \mathbf{V}_{di} (\mathbf{V}_{ii})^{-1} (\mathbf{A}_i \mathbf{I}_{kl} \mathbf{A}_{i-}^T) \dot{\tau}_i & \text{if } k \in \mathcal{N}_d \wedge l \in \mathcal{N}_i \end{cases} \quad (6.6)$$

ここで, \wedge は and の論理演算子を表す.

6.3 スループットの低下メカニズム解析

本節では, 前節で導出した感度式 (6.6) を用いて, (縮約ネットワークでの) あるリンク容量が低下した際に, スループットが低下する条件を特定する. そして, その条件からより具体的にスループットの低下メカニズム, およびそのときの交通状況を考察していく. この感度分析では, 待ち行列の延伸前後の縮約ネットワークのトポロジー \mathbf{A} の変化はないものとする. なお, 本節で想定するリンク容量の低下要因は, 下流側リンクからの待ち行列の延伸による上流リンクの捌け量の低下 (i.e., 先詰まり) であるが, 本節の分析自体はその他の要因による容量低下 (e.g., 交通事故) を考えても成立する.

6.3.1 スループットの低下条件

感度式 (6.6) を, その上下流ノードの種類で分類されるリンクタイプ別に解析することにより, 以下の命題が成立する:

命題 5. 単一起点ネットワークにおいて渋滞パターン (\mathbf{A}, \mathbf{M}) が与えられているとする. このとき, リンク (k, l) の容量低下により, 定常状態におけるスループットが低下する必要十分条件は, 上下流ノード k, l の種類別に以下のように与えられる:

- a) k が起点ノード, かつ, l が終点ノード.
- b) k が起点ノード, かつ, l が通過ノードであり, 起点からノード l への少なくとも 1 つの終点を通る経路が縮約ネットワーク上に存在する.

c) k, l が通過ノードであり、以下の条件式を満たす：

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_i} \sum_{d \in \{l(i) \cap \mathcal{N}_d\}} \mu_{di} [v_{il}^{-1} - v_{ik}^{-1}] \dot{t}_l > 0. \quad (6.7)$$

d) k が通過ノード、かつ、 l が終点ノードであり、以下の条件を満たす：

$$1 - \sum_{i \in \mathcal{N}_i} \sum_{d \in \{l(i) \cap \mathcal{N}_d\}} \mu_{di} v_{ik}^{-1} > 0. \quad (6.8)$$

証明 17. 6.A を参照.

命題 5 における 4 つの条件の違いは、リンク容量が低下した際に変化するスループット (5.36) の項の違いに対応している。より具体的には、容量低下するリンクの縮約ネットワーク上の位置と解析式の変化は以下のように整理される（それらを図示した図 6.1 の右列も参照）。

命題 5-a) を満たすリンクの容量低下は、式 (5.36) の第一項の低下、すなわち終点へ流入するフローの低下をもたらす。図 6.1a の縮約ネットワーク上では、終点 d に流入するリンク (o, d) がこの条件に該当する。

命題 5-b) を満たすリンクの容量低下は、式 (5.36) の第二項の増加、すなわち終点から通過ノードへ流出するフロー（i.e., 通過交通）の増加をもたらす。図 6.1c の縮約ネットワーク上では、通過ノード l に到達するフローは、終点ノード d を経由する経路とそうでない経路を通ることが可能である。このうち、終点ノードを bypass しない経路上のリンク (o, l) がこの条件に該当する。

命題 5-c) の式 (6.7) を満たすリンクの容量低下は、命題 5-b) を満たすリンクの容量低下と同様に、式 (5.36) の第二項の増加をもたらす。容量低下するリンクの縮約ネットワーク上の位置も同様であり、図 6.1e の縮約ネットワーク上では、終点 d' を通る経路とそうでない経路が存在し、終点ノードを bypass しない経路上のリンク (k, l) がこの条件に該当する。

命題 5-d) を満たすリンクの容量低下は、式 (5.36) の第一項と第二項の低下、すなわち終点ノードへの流入フローの低下および終点ノードから通過ノードへの流出フローの低下を意味している。図 6.1g の縮約ネットワーク上では、終点 d に流入するリンク容量の低下が生じる一方で、その終点 d を経由して終点 d' に向かう通過交通も減少する。

なお、図 6.1 の右列には、命題 5 の各条件式を満たす、最小構成要素の縮約ネットワークを示している。従って、より複雑な縮約ネットワークであっても、あるいは、オリジナル・ネットワークにおける渋滞状況が一見複雑であっても、スループットが低下する場合には、図 6.1 の右列に示した構造が縮約ネットワークの部分ネットワークとして発現する。次節では、これらの構造が発現するオリジナル・ネットワークの典型例（図 6.1 の左列）を通して、具体的にスループットの低下メカニズムについて考察していく。

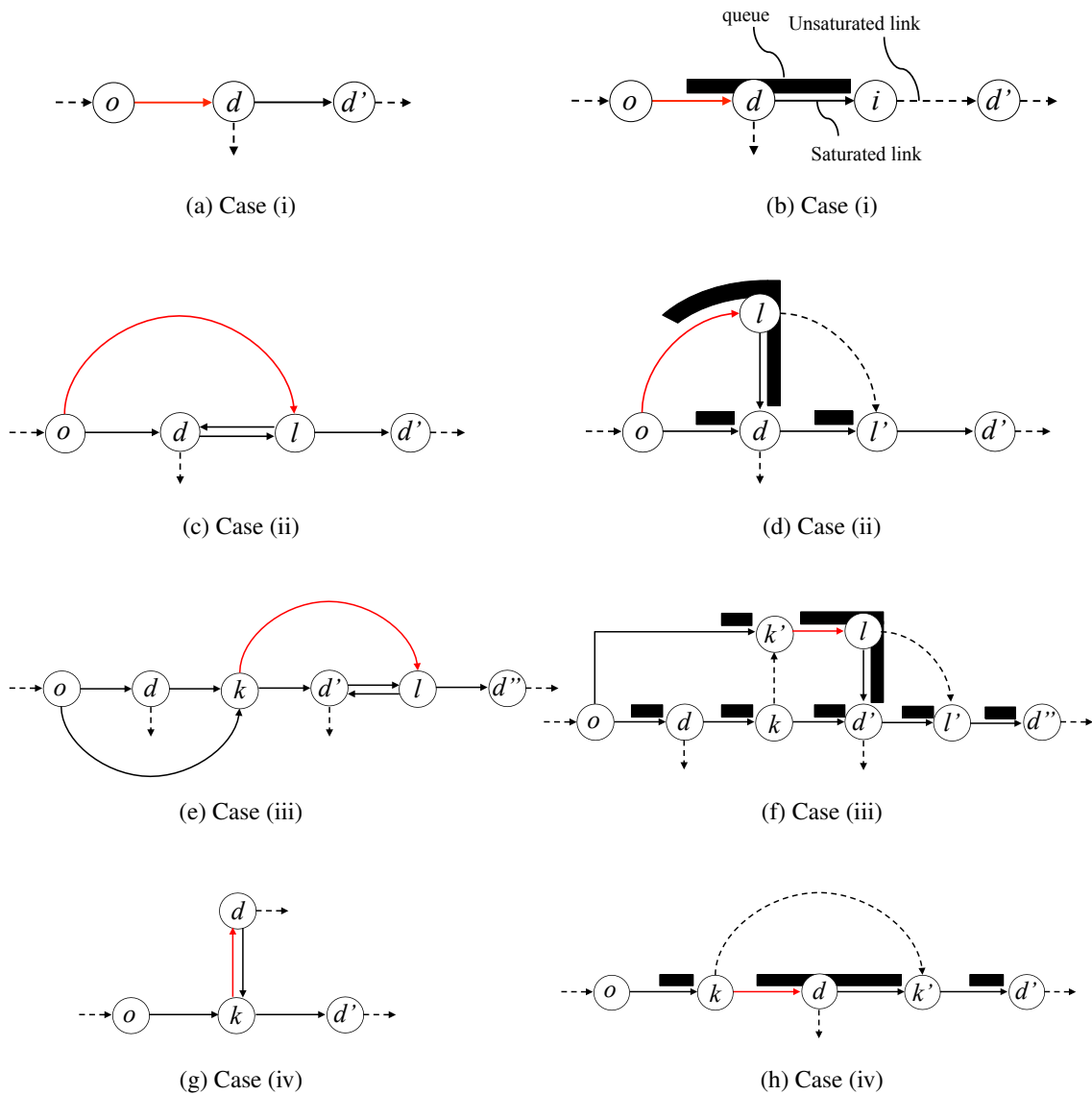


図 6.1: 左列：命題 5 を満たすリンク（赤線）を含む縮約ネットワークの最小構成要素，右列：対応するオリジナル・ネットワークの例

6.3.2 スループットの低下メカニズム

終点のブロッキングによる低下

ほぼ縮約ネットワークと同型であるが，図 6.1b に，命題 5-a) を満たすリンク (o, d) を含むオリジナル・ネットワークの例を示す．ネットワーク上のリンク (d, i) の渋滞がリンク (o, d) に延伸し，リンク容量（捌け量）が低下していくとしよう．このとき，より下流側の終点（i.e., 終点ノード d' ）に向かうリンクの待ち行列の延伸が上流側の終点 d に向かう交通流をブロックし（i.e., 先詰まりが発生し），終点へ流入できるフローが低下する．このスループットの低下現象を本稿では，「ブロッキング」と呼ぶ．このような状況は，例えば高

速道路であれば、オフ・ランプ直下流にボトルネックがあるような場合によく生じると考えられる。

経路選択（通過交通量）の変化による低下

図 6.1d に、命題 5-b) を満たすリンク (o,l) を含むオリジナル・ネットワークの典型例を示す。このネットワークでは、終点ノード d' に向かう利用者が、終点ノード d を経由する経路とそうでない経路を使用しうる。前節と同様に、リンク (l,d) の渋滞がリンク (o,l) に延伸しリンク容量が低下したとしよう。このとき、終点を d' とする利用者の経路選択が変化し、終点 d を経由する経路をより多く利用するようになる。しかし、終点 d に流入するリンク $\{(o,d), (l,d)\}$ の容量は変わっていないため、一定の容量を異なる終点に向かう利用者同士が分け合うという状況にある。そして、この一定の容量のうち終点 d を通過するフロー（通過交通）が増加するため、スループットが低下する。これは、市街地を迂回するバイパスが、混雑によりその機能を果たせなくなっている状況であると解釈できる。

図 6.1f は命題 5-c) を満たすリンク (k',l) を含むオリジナル・ネットワークである。この例でも、上記と同様のロジックで、終点 d' でのスループットが減少する。ただし同時に、終点 d の通過交通が減り (i.e., リンク (o,d) の容量のうち経路 (k,k') を通過する交通が減る)、終点 d でのスループットは増加する。これら 2 つの効果の差を表しているのが、式 (6.7) 左辺であり、この式が正のとき全体のスループットは減少する。

経路選択によるブロッキングの緩和

図 6.1h に、命題 5-d) を満たすリンク (k,d) を含むオリジナル・ネットワークの例を示す。これは、上記 a) のブロッキングによるスループットの低下が、経路選択により緩和されている状況である。いま、リンク (d,k') の渋滞がリンク (k,d) に延伸したとしよう。このとき、終点 d' に向かう利用者の経路選択が変化し、終点 d を通過しない経路がより利用されるようになるため、終点 d の通過交通は減少する。しかし同時に、下流ボトルネックから延伸する待ち行列により終点 d への流入フローが減少する。ここで、条件式 (6.8) が満たされている場合、ブロッキングによるスループットの低下が経路選択の影響によるスループットの増加を上回っているため、結果的にスループットは低下する。これは、バイパスが本来の機能を果たしているものの、その利便性が十分ではない状況であると解釈することができる。

以上をまとめると、ネットワーク・スループットの主な低下要因は、待ち行列の延伸に伴う容量低下により引き起こされる、異なる終点を持つ利用者同士の相互作用にあるといえる。この相互作用は、待ち行列の延伸が起きているリンクが終점에接続しているか否か、という観点から、直接的なものと間接的なものに分けることができる。直接的な相互作用では、終점에接続するリンクに待ち行列の延伸が到達することでブロッキングが発生し、終点流入交通量が減少するという影響が生じている。一方間接的な相互作用では、待

ち行列の延伸により終点を迂回する経路の機能不全が生じることで、利用者の経路選択行動を介して終点通過交通量が増加するという影響が生じている。

なお、ここで解明されたスループットの低下メカニズムは完全に新しい知見というわけではなく、ネットワーク交通としては従来からも知られた現象ではある。実際 Daganzo (2007) では、スループットを最大化するためには終点のブロッキングと通過交通を回避すべきとして、混雑したエリアへの流入交通量を制御する方法 (AB strategy for cities) を提案している。しかし、本研究では既存研究と異なり、渋滞パターンの解析を通して、局所的なリンク容量変化とネットワーク全体のスループットの変化を理論的に明らかにしている。このために、次節以降で行うように、ネットワーク性能を改善 (あるいは性能低下を回避) する渋滞リンク制御方策の構築、およびそのロジックを理論的に頑健な形で提示することができるようになる。

6.4 容量増強のパラドクス解析

6.4.1 パラドクスの生起条件

本節では、交通ネットワークにおける容量増強のパラドクス (e.g., Braess, 1968; Smith, 1978) の基本的特性について考察する。容量増強のパラドクスとは、交通ネットワークの局所的な改善 (e.g., 容量増強, 道路の新設等) が、ネットワーク全体の利用効率性であるスループットをかえって低下させる現象である。この解析は、次節で行う動的制御方策の構築に際して有用な知見を提供することになる: 容量を制限すべきリンクの種類を明らかにすることができる。

スループットの低下メカニズムの解析と同様に、感度式 (6.6) をリンクの種類別に解析することにより、以下の命題が成立する:

命題 6. 単一起点ネットワークにおいて渋滞パターン (\mathbf{A}, \mathbf{M}) が与えられているとする。このとき、リンク (k, l) の容量増強により、定常状態におけるスループットが低下する容量増強パラドクスが生起する必要十分条件は、上下流ノード k, l の種類別に以下のように与えられる:

- a) k が終点ノード, かつ, l が起点ノード.
- b) k が通過ノード, かつ, l が起点ノードであり, 起点からノード k への少なくとも1つの終点を通る経路が縮約ネットワーク上に存在する.
- c) k, l が通過ノードであり, 以下の条件式を満たす:

$$\sum_{i \in N_i} \sum_{d \in \{l(i) \cap N_d\}} \mu_{di} [v_{il}^{-1} - v_{ik}^{-1}] \hat{t}_l < 0. \quad (6.9)$$

- d) k が終点ノード, かつ, l が通過ノードであり, 以下の条件を満たす:

$$\sum_{i \in N_i} \sum_{d \in \{l(i) \cap N_d\}} \mu_{di} v_{il}^{-1} - 1 < 0 \quad (6.10)$$

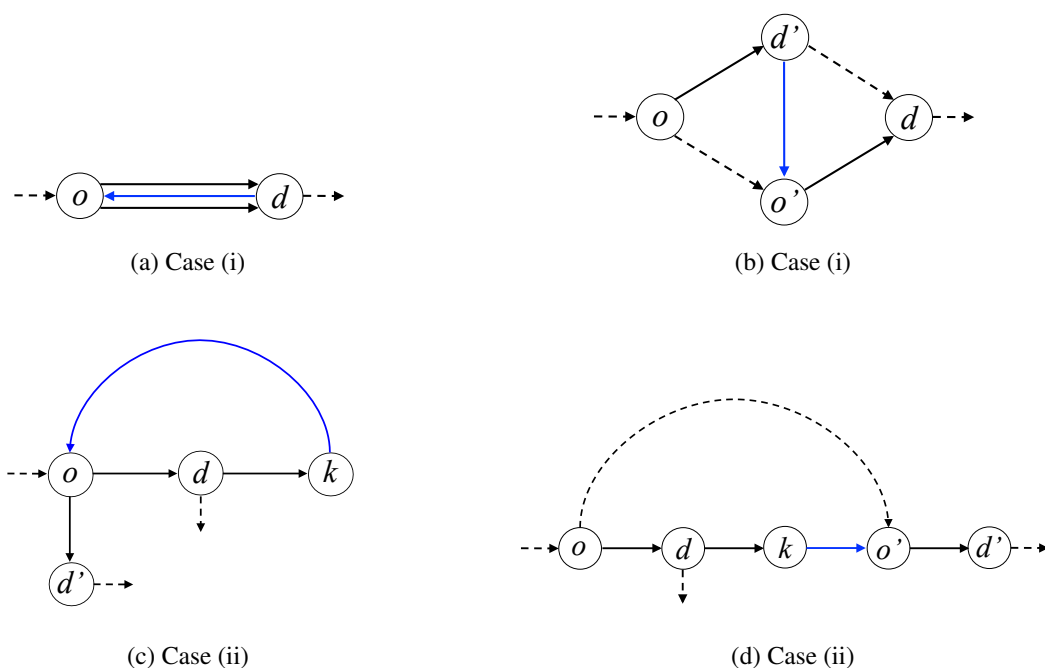


図 6.2: 左列：命題 6 を満たすリンク（青線）を含む縮約ネットワークの最小構成要素，右列：対応するオリジナル・ネットワークの例

証明 18. 6.A を参照.

図 6.2 に、命題 6 を満たす最小構成要素の縮約ネットワーク，および対応するオリジナル・ネットワークを示す．なおここで特定した条件を満たすリンクの容量変化は，全て，前節で示した間接的な相互作用を引き起こすことになる．すなわち，該当リンクの容量増加は，利用者の経路選択行動を介して終点通過交通量を増加させることで，ネットワーク・スループットを減少させる．しかし容量増強パラドクスのメカニズムには，終点が唯一であっても終点通過交通量の増加が生じることがわかった．以下では，オリジナル・ネットワーク上のフロー・パターンの変化を見ていくことで，そのパラドクスのメカニズムについて説明していく．

6.4.2 パラドクスのメカニズム

図 6.2a に、命題 6-a) を満たすリンク (d, o) を含む縮約ネットワークを示す．このネットワークでは，終点と同じ利用者同士の相互作用により，スループットの低下が発生する；唯一の終点 d に向かう利用者の経路選択が変化し，縮約ネットワーク上での通過交通量が増加することにより，自己破壊的 (self-destructive) にネットワークの効率性を低下させている．

その具体的なメカニズムを見るために，図 6.2b に示したオリジナル・ネットワーク上のフロー・パターンを追っていくと，次のようになる：リンク (d, o) に対応するリンク (d', o')

の容量を増強した場合、終점에接続する二つのリンクのうち、渋滞しているリンク (o', d) の交通量は増加しないことは明らかである。一方で、非渋滞リンク (d', d) の交通量は、リンク (o, d') から流出する交通量がよりリンク (d', o') を通過するようになるため、減少する。結果として、容量に余裕のあるリンクから、容量に余裕のない渋滞リンクを通過する経路へと利用者が変更することにより、ネットワーク全体のスループットが低下している；これが縮約ネットワーク上では唯一の終点の通過交通量の増加として表現されることになる。

一方、命題 6 を満たす他の三種類の条件は、終点が異なる利用者同士の相互作用による容量増強のパラドクスの生起条件を表している。命題 6-b) を満たすリンクを含む縮約ネットワーク、およびそのオリジナル・ネットワークを図 6.2c, 6.2d に示す。このネットワーク上では、リンク (k, o) (オリジナル上では (k, o')) の容量増強により、終点 d の通過交通量が増えることでスループットが低下する。命題 6-c) は、命題 5-c) の正負が逆転した条件であり、その逆転したメカニズムによりスループットが低下する*1。命題 6-d) を満たすリンクが含まれる時の交通状態は、低下メカニズムの考察で示した図 6.1f に含まれている。パラドクスのメカニズムも、その逆転したメカニズムとなる：リンク (d', l') の容量を増強した場合、終点 d' の通過交通量が増加するため、この終点のスループットは減少する。ただし同時にリンク (l, l') の交通量が減少するため、経路 $\{(o, d), (d, k), (k, k'), (k', l), (l, l')\}$ の交通量は減少し、終点 d のスループットは増加する。そして、前者の影響が後者の影響を上回っている (i.e., 式 (6.10) が満たされている) とき、ネットワーク・スループットは減少する。

パラドクスの生起条件からは、どのリンクの容量を減少させればネットワーク全体の効率性を向上させることができるのかが明らかとなる。そのため、特定のリンク容量を制約 (もしくは改善) する交通制御とネットワーク全体の性能の関係性を、(渋滞パターンを与件とする意味で) 局所的に、しかし簡便かつ解析的に与えることができる。従って、ネットワーク性能の低下を回避する渋滞リンク制御方策構築の基礎として有用であると考えられる。

ただし、実際の制御にあたっては、通常何らかの制約条件が存在している。例えば、合流部においてある特定のリンク容量を減少させることは、同一箇所に流入する他の方向のリンク容量を増加させることに繋がる。そのため交通制御方策を構築するためには、具体的な制御スキーム、およびその制御に伴う制約条件を具体化した上で、複数のリンク容量が同時に変化するときのスループットの感度を解析する必要がある。次節では、その具体的な制御スキームとして過飽和ネットワークにおける信号制御方策を考えることとする。

*1 なおこの条件は、Akamatsu (2000); Akamatsu and Heydecker (2003b) で示された、リンク旅行時間に関する容量増強のパラドクスの生起条件と類似したものである。ただし、本研究では定常状態を考えていること、またネットワーク・スループットに対しパラドクスが生起することを示している点で異なっている。

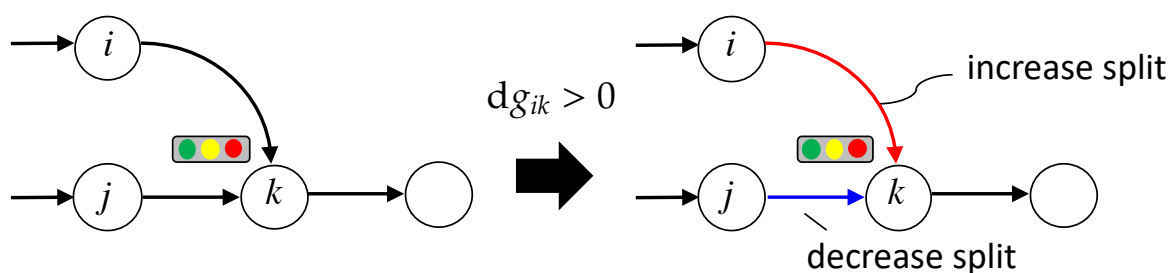


図 6.3: 信号制御の概念図

6.5 解明したメカニズムに基づく動的制御方策の構築

本節ではこれまでに解明したスループットの感度分析結果に基づき、過飽和ネットワークにおける信号制御方策を構築する．具体的には、まず流入リンクが2本である信号交差点を考え、これらの流入リンクが渋滞状態にある交通状態を考える．このとき、各流入リンクの容量は飽和交通流率とスプリットの積で表すことができる．また、ある一方の流入リンクにスプリットを多く割り振る（i.e., 容量を増加させる）とき、もう一方の流入リンクのスプリットを減少させる必要があるという制約条件が存在している．こうした状況において、どういった流入リンクにスプリットを割り振ることでスループットを改善することができるのかを、感度分析式の応用から明らかにする．

6.5.1 信号制御方策の導出とそのロジック

図 6.3 に示すような、ある信号交差点ノード k に接続するリンクが渋滞している状態を考える．流入リンク (i, k) の容量は飽和交通流率 s_{ik} と、リンクに割り振られるスプリット g_{ik} の積として表される： $\mu_{ik} = s_{ik}g_{ik}$ ．信号交差点は、片方の流入リンクに割り振るスプリットを減らすことで、もう一方の流入リンクに割り振るスプリットを増加させることができるものとする．ここで、流入リンク (i, k) に割り振るスプリットを dg_{ik} 増加させたときのスループットの感度は、式 (6.5) の感度分析式の線形和をとることで、次のように表される：

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial \mu_{ik}} d\mu_{ik} + \frac{\partial F}{\partial \mu_{jk}} d\mu_{jk} \\ &= \frac{\partial F}{\partial \mu_{ik}} (s_{ik} dg_{ik}) + \frac{\partial F}{\partial \mu_{jk}} (s_{jk} dg_{jk}) = \left(s_{ik} \frac{\partial F}{\partial \mu_{ik}} - s_{jk} \frac{\partial F}{\partial \mu_{jk}} \right) dg_{ik}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

ここで、 dF は、リンク (i, k) のスプリットを dg_{ik} だけ増加させたときの、スループットの変化を表している．また計算にあたっては、合流部でのスプリットの関係性である $dg_{ik} = -dg_{jk}$ を用いた．

表 6.1: 信号交差点ノード k が通過ノードであるときの、リンク (i, k) にスプリットを割り振ったときのスループットの感度

No.	upstream nodes	dF	causes of sensitivity	additional condition
1	$i = o \wedge j \in \mathcal{N}_i$	≥ 0	second term	–
2	$i = o \wedge j \in \mathcal{N}_d$	> 0	second term	–
3	$i, j \in \mathcal{N}_i$	≥ 0	second term	There is no route from the origin to node i so that it passes through a destination.
4	$i \in \mathcal{N}_i \wedge j \in \mathcal{N}_d$	≥ 0	second term	–
5	$i, j \in \mathcal{N}_d$	0	second term	–

表 6.2: 信号交差点ノード k が終点ノードであるときの、リンク (i, k) にスプリットを割り振ったときのスループットの感度

No.	upstream nodes	dF	causes of sensitivity	additional condition
1	$i = o \wedge j \in \mathcal{N}_i$	> 0	first & second terms	$s_{ik} - s_{jk} > 0$.
2	$i = o \wedge j \in \mathcal{N}_d$	> 0	first term	–
3	$i, j \in \mathcal{N}_i$	> 0	first & second terms	$s_{ik} - s_{jk} > 0$
4	$i \in \mathcal{N}_i \wedge j \in \mathcal{N}_d$	≥ 0	first & second terms	–
5	$i, j \in \mathcal{N}_d$	0	first term	–

前節までと同様に、この感度式の正負は信号交差点に接続するリンクの上下流ノードの種類に応じて場合分けを行うことで整理することができる。具体的には、信号交差点ノードが通過ノード ($k \in \mathcal{N}_i$)、もしくは終点ノード ($k \in \mathcal{N}_d$) のときのスループットの変化の正負は、それぞれ表 6.1 と 6.2 のように整理される。結果として、ネットワーク・スループットを改善するにあたっては、渋滞パターンを与件とした上で、これらの表において正の感度を示すリンクに、よりスプリットを割り振れば良い（あるいは、負の感度を示すリンクのスプリットを減らす）ことがわかる。すなわちこれが、ある信号交差点に流入するリンクが渋滞状態となったときの、渋滞パターンに基づいた信号制御方策となる。

提案する信号制御のロジックは、前節までで明らかにしたスループット変化のメカニズムから理解することができる。まず信号交差点ノードが通過ノードであるとき（表 6.1）、スプリットが変化することにより、終点に直接接続しないリンクの容量が変化することになる、i.e., 間接的な相互作用を引き起こす。よって、この交差点における信号制御の基本ロジックは、利用者の経路選択行動を介して、終点通過交通量を減少させるといったものになる。これを実現するための信号制御の基本戦略は次のようにまとめられる：

通過ノードにおける信号制御： 交差点に接続するリンクのうち上流ノードの種類が、縮約ネットワーク上において起点であるリンクが存在する場合、そのリンクの

スプリットを増加する。または、終点であるリンクが存在する場合、そのリンクのスプリットを削減する。

この基本戦略はどちらも、ある終点に向かう利用者を、終点を通過する経路から通過しない経路へと誘導するものとなる。

次に信号交差点ノードが終点ノードであるとき（表 6.2）は、スプリットの変化は終点に直接接続するリンクの容量を変化させることになる、i.e., 直接的な相互作用を引き起こす。そのためこの交差点における制御の基本ロジックは、他の終点における通過交通量を減少させるとともに、この交差点に接続するリンクの容量を増加させ、終点流入可能交通量を増加させる、といったものになる具体的には、次の信号制御方策が導出される：

終点ノードにおける信号制御：交差点に接続するリンクのうち上流ノードの種類が、縮約ネットワーク上において終点であるリンクが存在する場合、そのリンクのスプリットを減少させる。または、どちらのリンクの上流ノードも終点でない場合、飽和交通流率が高いリンクのスプリットを増加する。

なお、実際にスプリットを制御する際にはステップサイズ（i.e., 一度にどれだけのスプリットを変化させるのか）を決めておく必要がある。これについては、Smith et al. (2015)でも行われているように、渋滞パターンの変化が急激にならないよう、十分小さなステップサイズを定めておけば良い（i.e., スプリットを徐々に変化させる）。こうしたステップサイズの設計方針は、渋滞パターンが容量変化の前後で同一であるという感度分析の仮定とも整合したものである。

6.5.2 提案信号制御方策の特徴

本節の最後に、本研究で提案する信号制御方策の特徴についてまとめる。まず、提案制御では、各信号交差点を自律分散的に動作させることにより、ネットワーク・スループットを望ましい状態へと誘導している、ということである。具体的には、各交差点は縮約ネットワーク上で接続している渋滞リンクの上・下流ノードの種類、および飽和交通流率といった局所的な情報に基づき、他の交差点とは独立して制御を行うことができる。すなわち提案制御では、均衡制約付き最適化問題など制御主体間の相互作用を考慮した複雑な全体最適化問題を取り扱うことなく、ネットワーク全体の交通状態を改善する渋滞リンク制御法を提示できる。

また提案制御は、渋滞リンクの容量制御を通して、ある存在台数において実現しうるスループットを改善する制御を行っている、i.e., MFD の形状を変化させる制御を行っている。これは、（存在台数に対するスループットの実現値である）MFD を不変とみなす、既存のスループット制御方策と大きく異なる点である。すなわち、提案制御はある存在台数におけるネットワーク性能を最大限に発揮させるような制御を行うことができる。

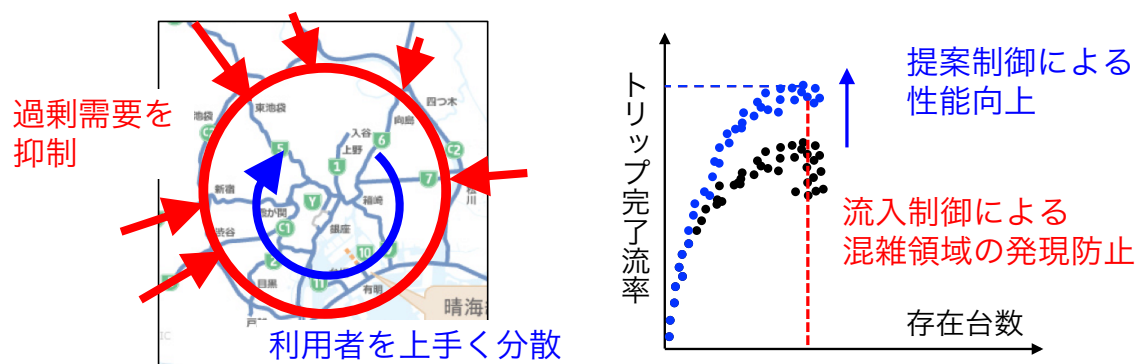


図 6.4: Hybrid 制御の概念図

一方で、提案制御は、待ち行列の延伸に伴うブロッキング現象が引き起こすスループットの低下に対しては、効果的ではない、i.e., NEF における混雑領域（存在台数の増加に伴いスループットが低下する領域）の発現を防止する効果を持たない。また、提案制御によりあるリンクの待ち行列が延伸し、スループットがより低下する可能性も存在する^{*2}。これは、提案制御がネットワークへの流入交通需要自体を調整する機能を持たないため、ネットワーク性能を最大限発揮してもその容量以上の過剰需要が流入してきた場合、待ち行列の延伸が避けられないためである。そのため、このような問題を避けるためには、重要な路線上の待ち行列長に応じて戦略を実施するかどうかを決定するなどの、一定の基準を設けることが考えられる。または、既存の MFD 研究で提案されている流入制御 (e.g., Daganzo, 2007; Yoshii et al., 2010; Keyvan-Ekbatani et al., 2012; Haddad and Shraiber, 2014) と組み合わせることにより、存在台数を最適台数に保ちながら待ち行列の延伸を防止することも考えられる。

特に、MFD と本研究の提案制御を組み合わせた制御方策は、各方策の利点を相互補完的に活用することで、より効率的な制御を行えることが期待される。具体的には、提案制御は交通流をうまく分散させることにより、ネットワーク上に散在している渋滞リンクの容量を目一杯使い切る効果を持っている、i.e., ネットワーク上の混雑の偏りを適切な方向へと是正する^{*3}。それに対して、既存の MFD 制御では混雑の偏りを防ぐことはできないが、ネットワーク外からの過剰需要の流入を抑制することで、ネットワーク性能の低下を防ぐ機能を持つ^{*4}。そのため、流入制御とネットワーク内制御を組み合わせることで、ネットワークの外からの過剰需要を抑制し、かつネットワーク内で顕在化するボトルネッ

^{*2} この現象は Daganzo (1998) でも言及されている。

^{*3} 適切な経路誘導施策が混雑の偏りを是正しネットワーク性能を改善する効果を持つことは、Knoop et al. (2012); Mahmassani et al. (2013); Yildirimoglu et al. (2015) などでも示されている。

^{*4} なお、エリアを適切に分割しその中で MFD 制御を行うことにより、エリア内の混雑の偏りを考慮した流入制御を行うといった提案もなされている (e.g., Haddad and Geroliminis, 2012; Aboudolas and Geroliminis, 2013; Keyvan-Ekbatani et al., 2015b; Kouvelas et al., 2017)。

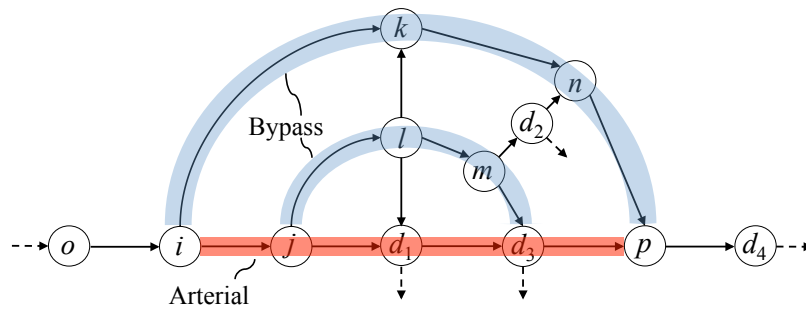


図 6.5: 幹線道路（赤リンク）とバイパス（青リンク）から構成される単一起点ネットワーク

表 6.3: リンクの設定 (FFTT: 自由旅行時間, BC: ボトルネック容量, SF: 飽和交通流率)

Link	FFTT [sec]	BN [veh/sec]	SF [veh/sec]	Link	FFTT [sec]	BN [veh/sec]	SF [veh/sec]
(o, i)	143.88	6	6	(i, k)	71.94	3	6
(i, j)	28.78	2.53	4	(k, n)	21.58	1.5	3
(j, d_1)	28.78	0.83	1.67	(n, p)	50.36	0.93	1.87
(d_1, d_3)	28.78	0.5	1	(l, k)	28.78	0.5	1
(d_3, p)	28.78	0.55	1.1	(l, d_1)	21.58	0.5	1
(j, l)	28.78	4	4	(m, d_2)	14.39	0.67	1.0
(l, m)	14.39	4	4	(d_2, n)	14.39	0.33	0.67
(m, d_3)	28.78	0.92	1.83	(p, d_4)	57.56	1	2.5

ク容量を上手く使い切らせるような、MFDに基づいた合理的な hybrid 制御方策を構築することが出来ると考えられる。

6.6 数値計算

本節では、前章での数値計算例と同様に、動的な OD 交通需要パターンに従って実現した DUE 状態における NEF と提案手法により解析的に評価した NEF を比較することにより、提案手法の妥当性を確認する。まず 6.6.1 では、数値計算の設定を説明する。次に 6.6.2 で、時々刻々実現した渋滞パターンに提案手法を適用し、スループットが低下する際に 6.3 で示したメカニズムが働いていることを確認する。そして 6.6.3 では、本章で提案した信号制御戦略を適用し、その効率性を調べる。

6.6.1 数値計算設定

図 6.5 に、本節で取り扱う単一起点ネットワークを示す。このネットワークは幹線道路とバイパスから構成されたネットワークを想定している。起点はノード o であり、終点

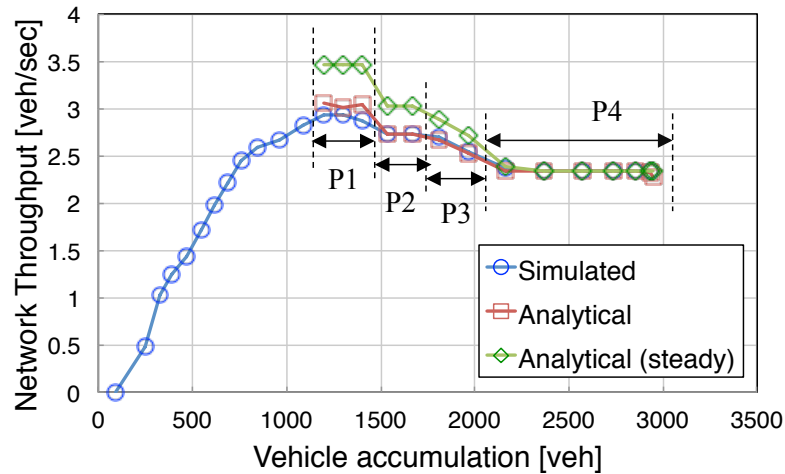


図 6.6: NEF の実現値と理論値

ノードの集合は $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ である。また、ノード $\{k, l, n, p, d_1, d_3\}$ は信号交差点である：ノードに流入するリンクに割り振られるスプリットを制御することができる。なお、本研究ではスプリットの和は 1 と設定している (i.e., 損失時間は考えない)。ネットワーク上の各リンクは、リンク終端のボトルネック部とボトルネック以外の区間から構成されており、台形型の Fundamental Diagram (FD) を持つ。各リンクの容量や飽和交通流率は幹線道路上のリンクが大きくなるように設定している (表 6.3 も参照)。ただし、信号交差点に流入するリンクの容量は、スプリットと飽和交通流率の積となっている。信号制御戦略を適用しないときに各リンクに割り振られるスプリットは 0.5 と設定した。

数値実験を開始してから t 秒後のネットワークへの総流入交通流率は以下のように与えている。

$$\sum_{d \in N_d} dQ_{od}(t)/dt = \begin{cases} 1 & t < 180, \\ 1 + \frac{1}{720}(t - 180) & 180 \leq t < 1980, \\ 3.5 & 1980 \leq t < 3780, \\ 3.5 - \frac{1}{720}(t - 3780) & 3780 \leq t < 5580, \\ 1 & 5580 \leq t < 5760. \end{cases}$$

また、各終点に向かう利用者の比率は、 $d_1 : d_2 : d_3 : d_4 = 1 : 1 : 2 : 3$ と設定した。DUE 状態におけるネットワーク全体の車両存在台数とスループットは、すべての需要が流入するまで 3 分間隔で集計され、各時間帯における平均値を実現値とする。なお、各リンクの渋滞の有無 (i.e., 渋滞パターンおよびリンク容量値) についても、3 分間集計されたリンク交通量から判定をし、解析式へのインプットとしている。また、DUE 状態の数値計算法、および適用する交通流モデルは前章と同じものを用いている。

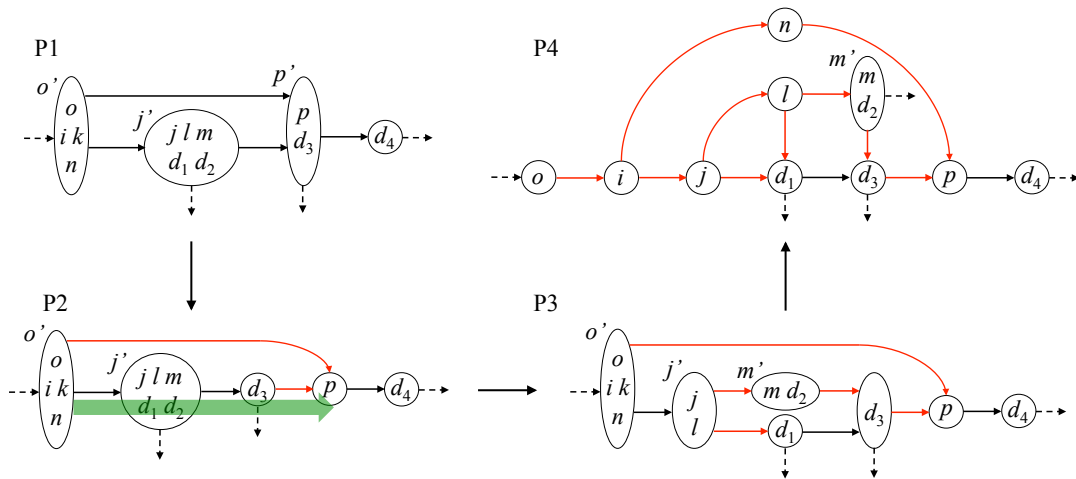


図 6.7: 渋滞パターン（縮約ネットワーク）の進展（黒線：渋滞リンク，赤線：待ち行列の延伸で容量が変化したリンク）. 縮約ネットワーク上の各ノードの記号を左上の添字に示す (e.g., 渋滞パターン P1 においてノード $\{o, i, k, n\}$ が縮約された先のノードを o' とする).

6.6.2 数値計算結果：スループットの低下メカニズム確認

図 6.6 に，NEF の実現値と，時々刻々の渋滞パターンに対し解析式を適用することで導出した理論値（動的状況下のもものと定常状態下のももの両方を示している）の推移を示す．また，図 6.7 に，NEF 中の P1-P4 に対応する渋滞パターン（縮約ネットワーク）を示す．図中，赤線で示されたリンクが，待ち行列の延伸により容量が低下したリンクである．

まず，図 6.6 から，動的状況下でのスループットの理論値が実現値とほぼ一致していること，および定常状態下の解析式はスループットを過大評価していることがわかる．ただし，定常状態下の解析式ではスループットの低下傾向自体は捉えられていることがわかる．これらの結果は，前章のグリッドネットワークにおける数値計算結果と整合的であり，考察した手法の妥当性を補強するものである．

続いて，6.3 で考察したスループットの低下メカニズムが働いていることを，図 6.7 に示す渋滞パターンの進展から確認しよう．まず，スループットが最初に低下した渋滞パターン P1 から P2 への進展を見ると，待ち行列の延伸により，利用者の経路選択が変化していることがわかる．具体的には，縮約ネットワーク上で終点群 d_1, d_2, d_3 を迂回するバイパスの役割を持つリンク (o', p) の容量が低下することにより，終点 d_4 に向かう利用者が終点群を通過する経路（図中緑色の矢印）をより利用するようになっている．なお，このときリンク (d_3, p) の容量も低下しているため，バイパスへと利用者が経路を変更するメカニズムも働いている．しかし今回のケースでは，前者の影響が後者の影響を上回っているため，スループットは低下している．実際に各リンクの容量変化によるスループットの感度

を計算すると、リンク (o', p) の容量低下によるスループットの変化は、

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_{o'p}} \cdot d\mu_{o'p} = \frac{\mu_{d_3p} \mu_{pd_4}}{(\mu_{d_3p} + \mu_{o'p})^2} \cdot d\mu_{o'p} = 0.25 \cdot -0.43 \approx -0.1.$$

と求められる (命題 5-b 参照). 同様に、リンク (d_3, p) の容量低下の影響は次のように求められる (命題 6-d 参照):

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_{d_3p}} \cdot d\mu_{d_3p} = -\frac{\mu_{o'p} \mu_{pd_4}}{(\mu_{d_3p} + \mu_{o'p})^2} \cdot d\mu_{d_3p} = -0.42 \cdot -0.05 \approx 0.02.$$

結果として感度は負となり、待ち行列の延伸によってスループットは低下することが確認できる.

次に、渋滞パターン P2 から P3 への進展を見ると、終点群 d_1, d_2, d_3 への流入交通量が低下するブロッキング現象が起きていることが確認できる; リンク (j', m') と (j', d_1) の容量が低下している. このとき、各リンクの容量変化によるスループットの感度は 1 であり、各リンクの容量低下によりスループットが低下していることを確認できる.

最後に、渋滞パターン P3 から P4 への進展では、ネットワーク上のほとんどのリンクに待ち行列の延伸が波及した状態になっている. このときは、ネットワーク・スループットに関係するリンクの容量はすでに下がりきっている状態となっており、存在台数の増加は起点直下流のリンク (o, i) 上の存在台数を増加させるのみの状態である. そのため、スループットは存在台数に対して *insensitive* となっている (水平部分を示す).

6.6.3 数値計算結果：信号制御戦略の適用

次に、本章で提案した信号制御戦略の効率性を、既存の信号制御方策と比較しながら確認する. 既存の信号制御方策としては、Smith (1979a,b, 1980) で提案された *Policy P₀* と、Webster (1958) の *equisaturation policy* を検討する. *Policy P₀* では、まず信号交差点に流入する各リンクについて、飽和交通流率と待ち行列による遅れ時間の積である *pressure* を求める (Smith, 1987; Smith et al., 2015). そして、この *pressure* が各流入リンクについて平等化するようにスプリットを割り振る方向を決定する、一方、*equisaturation policy* では、信号交差点リンクの上流リンクが渋滞状態にあるとき、より遅れ時間が大きいリンクにスプリットを割り当てるように制御する (Smith, 1987; Mounce, 2009). すなわち、渋滞パターン、および待ち行列遅れ時間を与件としたとき、各信号制御戦略は次のようにスプリットを割り当てる:

$$[\text{Policy } P_0] \quad \text{Pressure が高いリンクのスプリットを増加する.} \quad (6.12)$$

$$[\text{Equisaturation}] \quad \text{遅れ時間が大きいリンクのスプリットを増加する.} \quad (6.13)$$

本研究では、上記の信号制御戦略、および提案信号制御戦略を 3 分ごとに適用して信号交差点のスプリットを制御する. 各戦略のステップサイズは 0.05 とし、割り当てるスプリッ

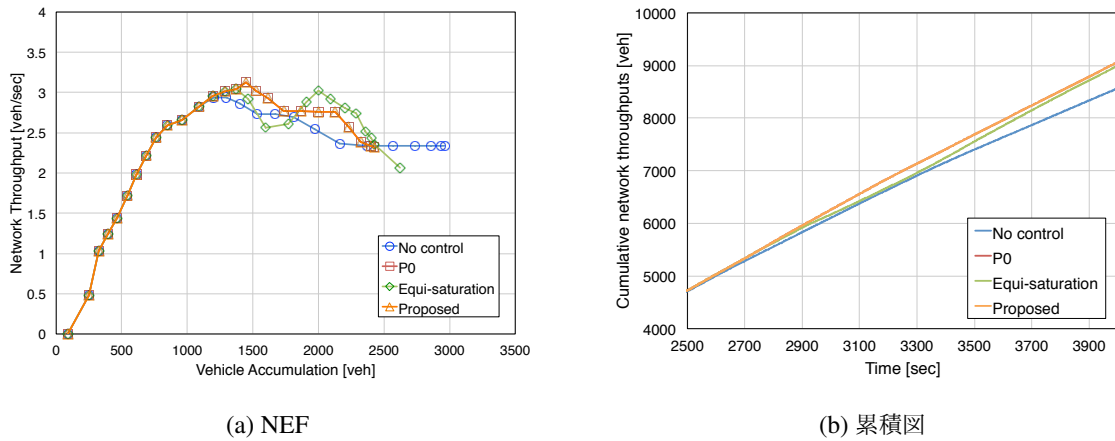


図 6.8: ピーク時の交通流率が高いケース

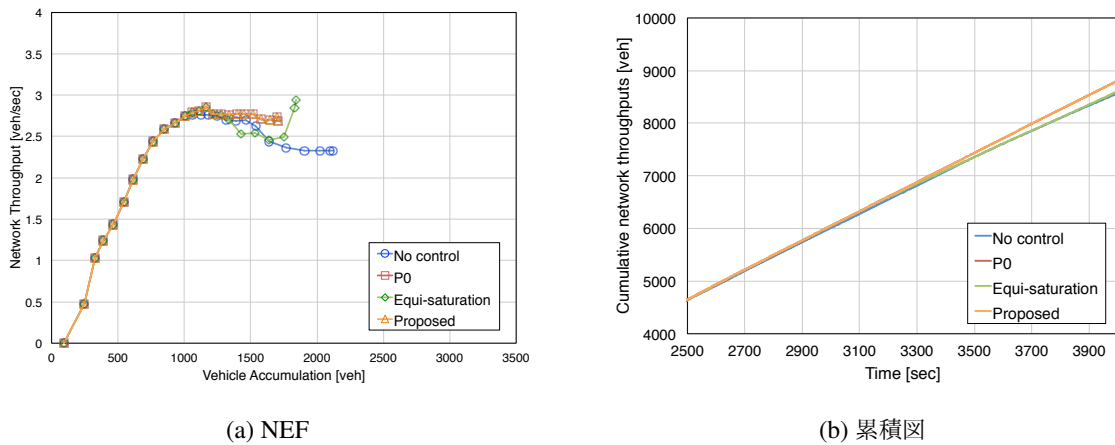


図 6.9: ピーク時の交通流率が中程度のケース

ト g の下限・上限値は次のように設定した ; $0.3 \leq g \leq 0.7$. また, 戦略のロバスト性を確認するために, ピーク時の流入交通流率が高いケースと中程度のケースで数値計算を行なった. 具体的には, ピーク時の流入交通流率が高いケースでは **6.6.1** と同じ需要を用いている. 一方, 中程度のケースでは, ピーク時の流入交通流率を $3.1[\text{veh}/\text{sec}]$ と設定した.

図 6.8 にピーク交通流率が高いケースの結果を示す. 図 6.8a と 6.8b は, それぞれ NEF とネットワーク・スループットの累積曲線を示している. まず NEF を見ると, 提案制御, および Policy P_0 は制御なしのケースと比較して高いスループットを達成できていることがわかる. また, 渋滞領域における NEF の形状を比較すると, 適用する信号制御によって異なる特性を示していることがわかる. 具体的には, 提案制御・Policy P_0 では, 存在台数の増加に伴いスループットは単調に減少している. 対して equisaturation policy では, スループットが振動 (増減) していることが見て取れる. これは equisaturation policy では, 利用者の経路選択とそれに応じて割り振られる各リンクのスプリットが振動を起こしているためである. これらの結果からは, 提案制御・Policy P_0 では利用者の経路選択

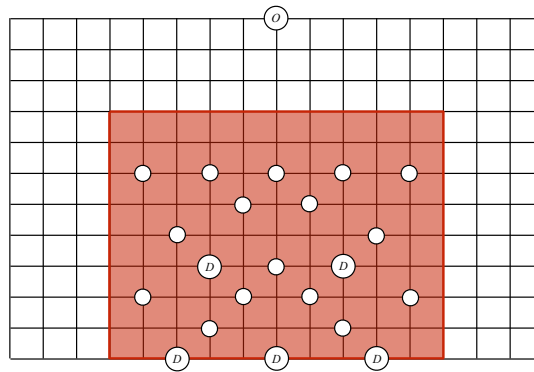
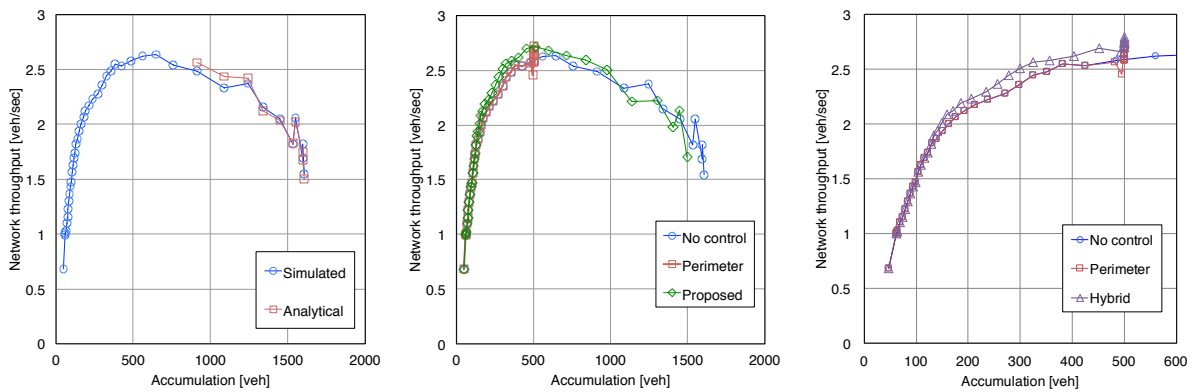


図 6.10: 中規模サイズのネットワーク



(a) 制御なしのケースにおける NEF の実現値と理論値 (b) 流入制御・信号制御を独立に適用したケース (c) Hybrid 制御を適用したケース

図 6.11: 中規模サイズのネットワークにおける NEF

行動と整合的な方向にスプリットを割り振ることができていることが示唆される。一方で, *equisaturation policy* では不整合な方向へとスプリットを割り振っていることが見て取れる。

次に累積曲線を見ると, 全ての信号制御戦略において, 累積スループットが改善していることがわかる。具体的には, シミュレーションが開始してから 4,000[sec] (信号制御なしのケースにおいて存在台数が減少し始める時刻) までの累積スループットを比較すると, 提案制御・Policy P_0 では 5.8%, *equisaturation policy* では 5.0% の改善を達成できている。

また, 図 6.9 にピーク交通流率が中程度のケースの結果を示す。このケースでは, 定性的には同様の結果が示されているが, 改善の程度は小さいことがわかった。具体的には, 累積スループットについて, 提案制御・Policy P_0 では 2.8%, *equisaturation policy* では 0.5% 改善していることが確認できた。これは, ネットワークの混雑の度合いが低いためであると考えられる。

6.6.4 数値計算結果：流入制御と組み合わせた hybrid な制御の適用

最後に、6.5.2 で考察した、MFD ベースの流入制御と提案制御を組み合わせた hybrid な制御の効率性について調べる。ここでは、図 6.10 に示す中規模サイズ（ノード数：204，リンク数：758，終点数：21）のネットワーク上で数値計算を行う。そして、MFD ベースの流入制御として、Daganzo (2007) で提案された素朴な“bang-bang”タイプの流入制御を導入する。この制御では、指定されたエリア（図中赤で塗りつぶされたエリア）内の存在台数が、与件とする閾値を超えないように、エリアに流入するリンクの容量を制限する。

より具体的に数値計算の設定を説明する。まず、ネットワークの起点は図中のノード o であり、他の白丸が終点ノードを表す。リンクの長さは全て 100[m] であり、各リンクの飽和交通流率、容量は待ち行列の延伸が発生するように、より起点から離れたリンクの容量が小さくなるように設定している。ネットワークに流入する交通需要は、6.6.1 と同じものを用いている。各終点に向かう利用者の比率は、白丸中に D と示されているノードが他の白丸の二倍となるように設定している。なお、ネットワークサイズの拡大に従い、渋滞パターンや各交通量の集計間隔は 6[min] と設定した。

図 6.11 に数値計算の結果得られた NEF を示す。まず、図 6.11a は、NEF の実現値と解析値（動的な状況下）を示している。この図からは、ネットワーク・サイズが中規模に拡大したときも実現値と解析値がおおよそ一致していることが確認できる。

次に、図 6.11b に流入制御と提案制御を独立に適用した結果を示す。なお流入制御では、エリア内の許容存在台数を、制御なしのケースでの臨界存在台数である 500[veh] と設定している。この図からは、どちらの制御もネットワークの状態を改善できていることがわかる。しかし、これらの制御は異なる特徴を持っていることが見て取れる。具体的には、流入制御は終点間のブロッキング現象を回避することにより、スループットの低下を防止する（i.e., 混雑領域を発現させない）制御を行なっている。一方で、提案制御は終点への流入交通量の増加、および終点通過交通量を減少させることにより、スループットを改善する（i.e., 容量を向上させる）制御を行なっている。ただし、後者は待ち行列の延伸を防ぐ機能を持っていないため、存在台数が一定以上に達するとブロッキング現象が発生しスループットの低下が起きる。なお、スループットの改善は NEF の自由流領域でも起きていることがわかる。これは、自由流領域でもネットワーク上では部分的に混雑が発生しており、そこで信号制御が作動しているためである。

最後に、図 6.11c に hybrid な制御を適用した結果を示す。この図からは、6.5.2 で考察したように、流入制御と提案制御が相補的に機能し、NEF が混雑領域に陥るのを防止しつつ、スループットの改善が実現していることが確認できる。制御の効率性の比較として、図 6.12 にスループットの累積曲線を示す。シミュレーションが開始してから 15,120[sec]（制御なしのケースにおいて存在台数が減少し始める時刻）までの累積スループットは、

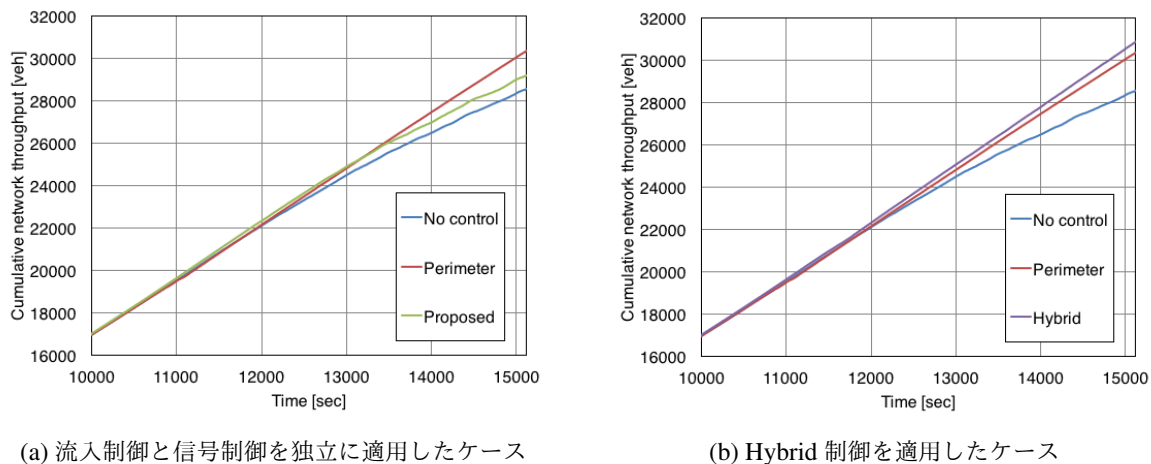


図 6.12: 中規模サイズのネットワークにおけるスループットの累積図

流入制御，提案制御，hybrid 制御のそれぞれで 6.3%，2.2%，8.1% 改善した．また，総旅行時間は 20.5%，15.8%，32.3% と大きな改善が実現している．そのため，この数値計算の設定においては，hybrid 制御は流入制御と提案制御の改善のほぼ和としての改善を実現できていることがわかった．

6.7 本章のまとめ

本章では，前章で構築したネットワーク・スループットの解析式の感度分析を通して，ネットワーク交通流の動的制御方策を構築した．具体的にはまず，解析式の微分から，渋滞リンク容量変化前後のスループット変化を表す，スループットの感度式を明らかにした．次に，感度式について，容量が変化する渋滞リンクの種類別の場合分けを行い，これを網羅的に調べることで，感度の正負条件，およびそのメカニズム（ロジック）について整理を行った．そして，その整理に基づき，スプリットの総和が一定となる制約条件を考慮した上で，過飽和状態にある信号交差点の交通制御方策を構築した．

本章では，スループットの低下が，待ち行列の延伸によるリンク容量の低下が引き起こす，次の 2 つの相互作用により引き起こされることを理論的に明らかにした：終点ノードのブロッキングによる終点流入交通量の減少（直接的な相互作用），および利用者の経路選択行動を介した終点通過交通量の増加（間接的な相互作用）．本研究では **unidirectional network** を解析対象としているが，ここで明らかとなったメカニズムや，制御の基本ロジック自体は，より一般的な多起点多終点 OD 分布を想定しても発現しうるものである．なぜならば，多起点多終点構造は，単一起点構造（または **unidirectional** 構造）の重ね合わせとみなせるためである．また，DUE の仮定を緩め，利用者の異質性や観測の不完全性を考慮した，より現実的な経路選択モデルでも，定性的には同様の結論が得られると考えられる．

また本研究で用いた感度分析方法からは、各制御主体が他の主体とは独立に制御パラメータを決定できる、自律分散的な性質を有する渋滞リンクの容量制御のロジックが明らかとなった。これは、近年発展が目覚ましい、近未来型の制御システムの実装にあたって、その制御法の構築について系統的な方針を提供できるものと考えられる。例えば、自動運転を利用した制御を想定した場合、ネットワーク的にローカルには速度調整を通した各リンクの擬似的な容量制御、グローバルには全体最適を狙った経路選択などを、各主体が自律分散的に行うことができる。このとき、本研究で提案する方法論は、ネットワーク全体を改善する制御の方向性を明らかにするための、理論的基盤となりうる。渋滞パターンに基づいた、より効果的な交通制御法の構築については今後の重要な課題となる。

より挑戦的な課題としては、多起点多終点ネットワークに対して、提案した解析手法を拡張することが挙げられる。多起点多終点ネットワークの一般的な DUE 配分手法が確立していない現状では、その拡張の方向性も自明ではないが、1つの方向性としては、多起点多終点のフロー・パターンを起点別に分解する（cyclic decomposition の考え方に基づく）アプローチが考えられる。ただし、非線形の FIFO 制約を考慮して、フローをどう適切に起点別に分解すべきか、あるいは、重ね合わせるべきか、など解決すべき課題も多い。こうした問題に対しては、シミュレーション分析なども用いて、その拡張の方向性を探っていくことが求められる。

Appendix 6.A 命題 5 と命題 6 の証明

行列の要素を計算することにより、式 6.5 は次のように表される：

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_{kl}} = \begin{cases} 0 & \text{if } k, l \in \mathcal{N}_d & \text{[Case 1]} \\ 1 & \text{if } k = o \wedge l \in \mathcal{N}_d & \text{[Case 2]} \\ -1 & \text{if } k \in \mathcal{N}_d \wedge l = o & \text{[Case 3]} \\ \sum_{i \in \mathcal{N}_i} \sum_{d \in \{l(i) \cap \mathcal{N}_d\}} \mu_{di} v_{il}^{-1} \dot{\tau}_l & \text{if } k = o \wedge l \in \mathcal{N}_i & \text{[Case 4]} \\ -\sum_{i \in \mathcal{N}_i} \sum_{d \in \{l(i) \cap \mathcal{N}_d\}} \mu_{di} v_{ik}^{-1} & \text{if } k \in \mathcal{N}_i \wedge l = o & \text{[Case 5]} \\ \sum_{i \in \mathcal{N}_i} \sum_{d \in \{l(i) \cap \mathcal{N}_d\}} \mu_{di} [v_{il}^{-1} - v_{ik}^{-1}] \dot{\tau}_l & \text{if } k, l \in \mathcal{N}_i & \text{[Case 6]} \\ 1 - \sum_{i \in \mathcal{N}_i} \sum_{d \in \{l(i) \cap \mathcal{N}_d\}} \mu_{di} v_{ik}^{-1} & \text{if } k \in \mathcal{N}_i \wedge l \in \mathcal{N}_d & \text{[Case 7]} \\ [\sum_{i \in \mathcal{N}_i} \sum_{d \in \{l(i) \cap \mathcal{N}_d\}} \mu_{di} v_{il}^{-1} - 1] \dot{\tau}_l & \text{if } k \in \mathcal{N}_d \wedge l \in \mathcal{N}_i & \text{[Case 8]} \end{cases} \quad (6.14)$$

ここで、 v_{kl}^{-1} は逆行列 $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ の k 行 l 列の要素である。また計算においては、 $\mathbf{A}_a \mathbf{I}_{kl} \mathbf{A}_{b-}^T$ ($a, b \in \{i, d\}$) の m 行 n 列要素が次のように表されることを用いている：

$$[\mathbf{A}_a \mathbf{I}_{kl} \mathbf{A}_{b-}^T]_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{if } \{a = b \wedge l \in \mathcal{N}_a\} \wedge \{m = n = l\} \\ -1 & \text{if } \{k \in \mathcal{N}_a \wedge l \in \mathcal{N}_b\} \wedge \{m = k \wedge n = l\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad a, b \in \{i, d\}. \quad (6.15)$$

では、式 (6.14) の各ケースについて、感度が正 (i.e., 命題 5 の条件に対応) となるか、負 (i.e., 命題 6 の条件に対応) となるかを調べていこう。

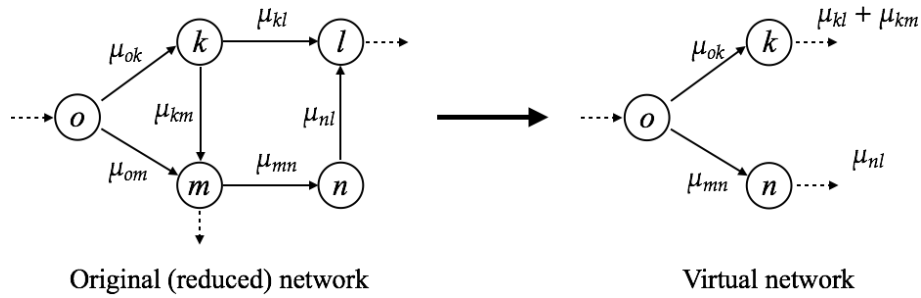


図 6.13: 仮想ネットワークの例

まず、Case 1 から 3 まではその正負は明らかである。ここで、Case 1 は命題 5-a) に、Case 3 は命題 6-a) にそれぞれ対応している。次に Case 4 と 5 については、起点からノード l 、または k までに少なくとも一つの終点を通る経路が存在するとき (i.e., スループットの解析式の第二項が非ゼロであるとき)、感度は非ゼロとなる。さらに、逆行列 $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ は非負行列であり (Appendix 6.B 参照)、かつ t_i は正である。そのため、Case 4 の感度は正であり (命題 5-b) に対応)、Case 5 の感度は負となる (命題 6-b) に対応)。

Case 6 では、渋滞パターンにより感度は正・負のどちらの値も取りうる。これは、それぞれ命題 5-c) と 6-c) に対応している。Case 7 も同様に感度は正・負のどちらの値も取りうるが、渋滞パターンにおいてループが存在しないとき、感度係数は正となる。これはすなわち、Case 7 はパラドクスの生起にあたり必要条件とならないことを証明できる。そのため、この条件は命題 5-d) と対応づけることができる。

この証明にあたっては、次の解析式を用いる：

補題 7. (Akamatsu and Heydecker Akamatsu and Heydecker (2003b) の式 (25)) 単一起点の OD 構造を持つループのない縮約ネットワークでは、 \mathbf{V}^{-1} の i 行目 l 列要素 $[\mathbf{V}^{-1}]_{il}$ は以下のように与えられる：

$$[\mathbf{V}^{-1}]_{il} = \frac{1}{\sum_{j \in I(i)} \mu_{ji}} \sum_{r \in \hat{\mathcal{R}}(i,l)} \prod_{(a,b) \in r} \frac{\mu_{ab}}{\sum_{a' \in I(b)} \mu_{a'b}}. \quad (6.16)$$

ここで、 $\hat{\mathcal{R}}(i,l)$ はノード i からノード l までの経路である。

行列 \mathbf{V}^{-1} と $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ は異なるため、この解析式を直接 v_{ii}^{-1} に適用することはできない。そのため、ここではさらに、通過ノードのみで構成される以下の仮想的な縮約ネットワークを考える：(a) 通過ノードに流入するリンクの上流ノードのうち通過ノードでないもの (i.e., 起終点ノード) を 1 つの仮想的な起点として集約する；(b) 通過ノードから終点ノードに流出するリンク容量を仮想的な OD 需要とする (図 6.13)。このとき、仮想的なネットワークもループのない単一起点の縮約ネットワークになり、元ネットワークにおける \mathbf{V}^{-1} と仮想ネットワークの $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ は同じ役割を果たす。従って、解析式に現れる経路は通過ノードのみを通る経路 $\mathcal{R}(i,l)$ とすれば、式 (6.16) を v_{ii}^{-1} に適用することができる。

上記を代入することにより，Case 7 の感度は次のように表される：

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_{kl}} = 1 - \sum_{i \in N_i} \sum_{d \in \{I(i) \cap N_d\}} \left\{ p_{id} \sum_{r \in \mathcal{R}(i,k)} \prod_{(a,b) \in r} p_{ba} \right\} \quad \text{where} \quad p_{ba} \equiv \frac{\mu_{ab}}{\sum_{a' \in I(l)} \mu_{a'b}}. \quad (6.17)$$

Akamatsu and Heydecker (2003b) で示されているように，式 (6.17) の $\sum_{r \in \mathcal{R}(i,k)} \prod_{(a,b) \in r} p_{ba}$ は，車両がリバース・ネットワーク（元のネットワークの有向リンクの向きを全て逆向きにしたネットワーク）をマルコフ連鎖（推移確率 p_{ba} ）に従って移動するときのノード k から i に到達する確率 P_{ki} と解釈することができる．この概念を使えば，式 (6.17) は，次のように書き直すことができる：

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_{kl}} = 1 - \sum_{i \in N_i} \sum_{d \in \{I(i) \cap N_d\}} \{p_{id} \cdot P_{ki}\} = 1 - \sum_{d \in N_d} P_{kd}. \quad (6.18)$$

ここで，仮想ネットワーク内にはループはないため，リバース・ネットワークにおいて，ノード k から仮想的な起点に到達する確率は 1 である： $P_{ko} + \sum_{d \in N_d} P_{kd} = 1$ ．従って， $1 - \sum_{d \in N_d} P_{kd} \geq 0$ であり，元ネットワークの起点 o から通過ノードのみを通過してノード k に到達する経路がなければ，等号が成立する．従って，式 (6.18) は非正である．

同様に，Case 8 の感度は非正であることを証明することができる．そのため，この条件は命題 6-d) と対応づけることができる．

Appendix 6.B 逆行列 $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ の非負性の証明

通過ノードへの流出入リンクの容量を要素に持つ行列 \mathbf{V}_{ii} の逆行列 $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ が，非負行列であることを示す．

まず，ある非特異（正則）な行列 \mathbf{B} の逆行列 $(\mathbf{B})^{-1}$ が非負行列であるためには，行列 \mathbf{B} が \mathbf{M} -行列であればよい． \mathbf{M} -行列とは，全ての固有値の実部が正である \mathbf{Z} -行列のことであり， \mathbf{Z} -行列とは全ての非対角成分が 0 以下である行列である．すなわち \mathbf{Z} -行列は以下を満たす．

$$\mathbf{Z} = (z_{ij}); z_{ij} \leq 0, i \neq j. \quad (6.19)$$

ここで，式 (5.33) より明らかに， \mathbf{V}_{ii} の非対角成分は 0 以下であり，定義より \mathbf{V}_{ii} は \mathbf{Z} -行列である．

以上の条件より， $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ が非負行列であるためには， \mathbf{M} -行列であること，すなわち \mathbf{V}_{ii} の固有値が正であれば良い．この固有値を解析的に表すことはできないが，ゲルシュゴリンの定理を用いることによりその範囲を求めることができる．

定理 8.（ゲルシュゴリンの定理） $n \times n$ の複素行列 \mathbf{B} の各成分を b_{ij} とする．また，各 $j \in \{1, \dots, n\}$ に対して， R_j を第 j 列の非対角成分の絶対和とする．そして， b_{jj} を中心と

する半径 R_j の閉円板 (b_{jj}, R_j) をゲルシュゴリンの円板という。このとき、行列 \mathbf{B} の任意の固有値は、少なくとも1つのゲルシュゴリンの円板上にある。

以上のゲルシュゴリンの定理より、全ての列において以下が成り立つとき、固有値は必ず0以上となる。

$$b_{jj} - R_j = b_{jj} - \sum_{i \neq j} |b_{ij}| \geq 0 \quad \forall j. \quad (6.20)$$

行列 \mathbf{V}_{ii} では、 b_{jj} はノード j への流入リンク容量の総和であり、 $\sum_{i \neq j} |b_{ij}|$ はそのうち通過ノードから流入するリンク容量の総和である。よって、全ての列について式(6.20)が明らかに成り立っており、 \mathbf{V}_{ii} の全ての固有値は0以上である。さらに \mathbf{V}_{ii} は正則行列であるため、固有値に0を持つことはない。

以上より \mathbf{V}_{ii} の全ての固有値は正であるため、 \mathbf{V}_{ii} は非特異な \mathbf{M} -行列である。非特異な \mathbf{M} -行列の逆行列は非負行列になるため、 \mathbf{V}_{ii} の逆行列 $(\mathbf{V}_{ii})^{-1}$ は非負行列である。(証明終)

第7章

結論

7.1 本研究の成果

本論文では、渋滞パターンに基づくネットワーク・スループットの解析理論を構築した。またその理論に基づき、スループットを改善するための渋滞リンク制御方策を構築した。本論文の基盤理論は、利用者の選択行動と道路の交通条件との相互作用の結果生じる均衡状態におけるネットワーク交通流を記述する動的利用者均衡 (DUE) 配分理論である。本論文では、渋滞パターンとスループットとの関係を解析的に把握するために、DUE 配分理論の時間分解法を適用できる *unidirectional* 構造を持つネットワークにおける解析を行った。また、解析理論の構築に先立ち、均衡解析の妥当性を保証するため、DUE 配分理論の安定性解析を行った。以下に具体的な成果を示す。

動的利用者の確率的安定性解析

本論文の第3章および第4章では、動的利用者均衡の安定性をゲーム理論の枠組みから解析する、新たな方法論を構築した。この方法論は、交通ネットワーク配分理論・ゲーム理論のそれぞれで発展してきた方法論/概念である、粒子モデルの時間分解法・戦略型ゲームのクラスである *weakly acyclic game*・ゆらぎを含むダイナミクスの定常分布解析から構築されている。この方法論の解析を通して、本研究は、時間分解法を適用できるネットワーク上の DUE が、ゲーム理論で確率的安定性に関する知見が蓄積されてきた *weakly acyclic game* という戦略型ゲームのクラスであることを示した。そして粒子モデルでの基本的な *day-to-day dynamics* である、*better response* の *perturbed dynamics* の確率的安定均衡が存在することを示した。また、確率的安定均衡の存在を保証するにあたり、ダイナミクス・均衡解の狭義性が重要な役割を果たすことを示した。

第3章では解析の準備として、Iryo and Smith (2017) により提案された *unidirectional network* について概説した。*Unidirectional network* は、流体モデルにおける DUE 配分問題に対し時間分解法を適用できるネットワークである。ただし、粒子モデルにおける DUE

配分問題 (DUE ゲーム) の時間分解特性 (最早未配分車両の存在性) については明らかではなかった。本章では、まず DUE ゲームの定式化を行い、その時間分解法である順序配分アルゴリズムについて概説した。次に、unidirectional network が満たすべき性質について整理した。ここでは、時間分解法が適用できるネットワークとしての性質であるポテンシャル関数の単調性について、原著論文で設定されていた仮定を緩めた上で示した。そして、unidirectional network での DUE ゲームでの最早未配分車両の存在性を証明した。これにより、unidirectional network での DUE 配分問題について、交通流モデルによらず時間分解法を適用できることが保証されるようになる。

第4章では、第3章で証明した最早未配分車両の存在性にに基づき、DUE ゲームの確率的安定性について解析した。まず、unidirectional network における DUE ゲームが、戦略型ゲームのクラスである weakly acyclic game であることを証明した。次に、ゲーム理論の分野で蓄積されてきた weakly acyclic game の解析結果を援用することで、粒子モデルにおける基本的なダイナミクスである better response dynamics および best response dynamics の収束性を調べた。ここでは、better response dynamics が収束性を持つことを示した他、収束性の保証にあたり均衡解の狭義性、およびダイナミクスにおける利用者の効用の厳密な改善性が重要な役割を果たすことを明らかにした。そして、収束性の解析結果に基づき、ゆらぎを含むダイナミクスの安定性概念である確率的安定性について解析し、perturbed better response dynamics での確率的安定均衡の存在性を示した。

本研究では、ゲーム理論と交通ネットワーク配分理論で発展してきた方法論/概念を組み合わせることにより、これまで1経路1ボトルネック・ネットワークに限定されてきた安定性解析を、unidirectional network で行うことに成功している。この方法論は、DUE ゲームと weakly acyclic game との結びつきに基づいたものである。すなわち、異なるネットワーク構造あるいは出発時刻選択がある DUE ゲームにおいても、この結びつきを示すことができれば、同様の解析を行うことができる。

また、本研究では確率的安定均衡の存在性を示すのみならず、その保証にあたりダイナミクスでの利用者の利得の厳密な改善性が重要な役割を果たすことを明らかにしている。この性質は、従来の安定性解析方法であるリアプノフ・アプローチが要求していた、経路旅行時間関数の単調性が置き換わったものとして解釈することができるだろう。しかし単調性が解析対象とする DUE ゲームの問題構造の性質である一方、ダイナミクスの厳密な改善性は適用されるダイナミクスそれ自体の性質である。そのため、本研究の成果からは、解析対象とする DUE の配分問題が良い性質を持たずとも (i.e., 単調性・狭義性を満たさない)、適用するダイナミクスが良い性質を持つのであれば、安定均衡の存在を保証できうことが分かる。このように、本研究は DUE の安定性解析に資する、新たな数理的性質および解析の観点を提供することができている。

渋滞パターンに基づく制御方策の構築

本論文の第5章および第6章では、まず観測される渋滞パターンを与件としてスループットを解析する方法論を構築した。この方法では、DUE 配分理論を用いて、ネットワークの空間的要素（e.g., ネットワーク構造・起終点分布・利用者の経路選択行動）とスループットとの関係を解析的に明らかにしている。次に、構築した解析式の感度分析を通して、スループットを特徴づけるリンクの容量変化がスループットに影響を与えるメカニズムを明らかにした。そして解析したメカニズムに基づき、現時点の渋滞パターンに基づき各信号交差点が隣接するリンク容量を独立に制御する、自律分散型の信号制御方策を構築した。

第5章では、渋滞パターンを与件とする DUE 配分問題の逆解析を行うことで、スループットの解析式を導出した。提案する逆問題は、解を一意に定めるための追加的な条件として定常状態条件（周期境界条件）を導入している。これにより、通常の OD 推定問題とは異なり、ある渋滞パターンにおいて定常的に流れうる OD 交通量であるスループットを解析的に評価できるようになる。そして、逆問題を解くことにより、ネットワークの空間的要素（e.g., ネットワーク構造・起終点分布・利用者の経路選択行動）とスループットとを結びつける解析式を導出した。加えて、定常状態の仮定を緩和し、ネットワーク内の存在台数が増加/減少する過程にある、動的な状況下のスループットについても、各起終点間の旅行時間の伸び率を与件とすることで導出できることを示した。

第6章では、まず、渋滞リンクの容量（捌け交通量）変化とスループットの変化との関係性を、解析式の感度分析（i.e., 容量に対する微分）を通して明らかにした。具体的には、スループットの感度が正/負になる一般的な条件を、各渋滞リンクの上・下流ノードの種類（起点・通過・終点）についての場合分けから導出した。そして、渋滞リンク容量が変化する具体的な交通状況を調べることで、容量変化がスループットに与える影響のメカニズムを明らかにした。その結果、スループットの低下は次の2つの直接的・間接的なメカニズムにより引き起こされることがわかった：終점에接続するリンクの容量低下に起因する終点流入交通量の低下（特に、待ち行列の延伸に起因するとき、これは滞留車両の終点流入交通量のブロッキング現象として表現される）と、迂回経路（e.g., バイパス経路）の機能不全に起因した、終점에接続するリンク容量に占める終点通過交通量の増加。

次に、解明したスループット変化のメカニズムを基盤とし、スループットを改善する渋滞リンクの制御ロジックを導出し、過飽和信号交差点を対象とした制御方策の構築を行った。ここでは制御に付随する具体的な制約条件として、交差点に流入するリンクに割り振るスプリットの総和が一定であることを想定している。そして、与件とされた渋滞パターン上の信号交差点を考え、ある瞬間のスループットを改善するためには、どのリンクによりスプリットを割り振るべきかを考える問題を構築した。この問題を解析し、各信号交差

点は、隣接するリンクの情報のみに基づきスプリットを（他の信号交差点の制御とは無関係に）独立に配分することで、スループットを改善できることを示した。すなわち、提案する交通制御方策は、終点到に接続するリンク容量をネットワーク規模で有効活用できるよう、自律分散的に制御を行うことができることを示した。

本研究で構築したスループット解析法のモチベーション自体は、観測される交通状態に基づきスループットを改善する（あるいはスループットの低下を防ぐ）MFD研究のものを受け継いでいる。しかし状態変数として混雑の空間分布を表す渋滞パターンに着目することで、既存研究では不明であった各リンクの具体的な交通制御のロジックを明らかにすることに成功した。スループットを性能指標としたネットワーク内の交通制御法の構築に際し、具体的な方針を提供できる点は、本研究の大きな特徴であるといえよう。また、本研究では過飽和信号交差点での渋滞リンク制御方策を構築したが、感度分析を応用することにより、容量制御を行う異なる制御スキームに対しても同様に交通制御方策を構築することができる。例えば、高速道路ネットワークへの流入交通量を制限するランプ流入制御において、どのランプからの流入交通量を制限するべきかといった方針を与えることができる。他にも、あるリンクの混雑課金や速度制限はリンクの捌け交通量の変化につながる制御であり、こうした制御形態に対しても本研究で構築した感度分析に基づく交通制御法構築の方法論は有効であろう。

加えて、本研究が提案する方法論では、ネットワーク内部の各制御主体が、自律分散的に制御を行うことで、スループットを改善できることを示している。自律分散性は、交通ネットワークのような巨大化・複雑化したシステムの制御にあたり、非常に望ましい性質である。例えば、中央集権的に制御する場合に必要な情報収集や・制御パラメータの最適化にかかる費用/時間のコストを大きく削減できることが挙げられる。また、各制御主体は他の主体の制御指標とは独立に設定することもできるため、効率性あるいは安全性を改善する制御を各制御主体が地点近辺の交通特性に基づき独立に行うといったことも可能となるだろう。このように、柔軟性・拡張性の高い交通制御法構築の基礎を提供できる点でも、本研究で提案する方法論は適用性が高いといえる。

7.2 今後の展望

最後に、今後の研究課題を記す。

安定性解析

安定均衡に対応するフロー・パターンの解析

本研究では *better response dynamics* の確率的安定性を示したが、安定均衡に対応するフロー・パターンの性質 (e.g., 各リンク/経路のコスト・パターン) については未解明である。そのため、特に複数均衡が存在する場合、安定均衡として選ばれる状態の性質を明らかに

していくことが望まれる。

Unidirectional network での DUE ゲームでは時間分解法（順序配分アルゴリズム）を適用して得られる解以外の均衡解も存在しうが、直感的には前者が確率的安定状態となると考えられる。こうした仮説の検証方法としては、確率的安定均衡の選択指標である、“stochastic potential” (Young, 1993) を用いることができるだろう。ある状態の stochastic potential は、(概説すれば) その状態が実現するために必要なミスの頻度を示すものであり、これが一番小さい再帰的同値類が確率的安定状態として選ばれることになる。状態空間が膨大な DUE 配分問題では各状態の stochastic potential を計算することは困難である。しかし、時間分解法により得られる均衡解と他の均衡解の stochastic potential とを比較した解析を行うことで、前述した仮説を検討することができると考えられる。

異なるダイナミクスの収束性・安定性解析

本研究では収束性・安定性解析の第一歩として better/best response dynamics に着目したが、道路利用者の行動選択の実態に即した、より尤もらしいダイナミクスの解析が求められるだろう。例えば、利用者の学習行動を踏まえたダイナミクス (e.g., Marden et al., 2009) などの解析である。この解析にあたっては、道路利用者の選択行動として尤もらしい行動原理を実証的な知見などから明らかにした上で、適切なダイナミクスを構築することも必要となるだろう。また、前述した均衡状態に対応するフロー・パターンの解析と関連したものとしては、効率的な (e.g., 総旅行時間が小さい) 均衡交通状態、あるいはシステム最適状態を達成するためのダイナミクスの構築なども、交通制御の観点からは望ましい事項である。

ダイナミクスの構築に関連した議題としては、ダイナミクスを確率的安定化する方法論の構築も興味深い議題の一つである。本研究では、DUE 配分問題に狭義均衡が存在しない場合、適用するダイナミクスでの利用者の利得の厳密な改善性が確率的安定均衡の存在を保証することを述べた。そのため、厳密な改善性をダイナミクスに提供する、交通行動として尤もらしい追加的な基準を明らかにすることで、best response dynamics を含む様々なダイナミクスを確率的安定化できると考えられる。一つの方法論として考えられるのは、利用者の知覚を歪ませることである；例えば、効用が同一である複数の経路が存在する場合、DP 原理を満たす経路を優先する、といった追加的な基準を導入することである。DP 原理が満たされているとき、利用する経路が終点以外のノードについても最短経路となっている。これは道路利用者の行動原理としてはそう不自然なものではないと考えられる。こうした基準は、交通制御の安定化などとも関連するものとして、理論解析的・数値的検討が必要となるだろう。

均衡解への収束速度の解析

ダイナミクスが均衡状態へどれだけの速度で収束するのかは、現実の交通システムにおける均衡（に近い）状態の実現性にも関わる、興味深い議題である。一例として、本研究では待ち行列が分岐部に延伸することで収束速度が速まりうることを、数値計算の結果から示した。こうした待ち行列と収束速度の関係については、ネットワーク形状や交通需要を変化させた、系統的な数値計算から明らかにしていくことが望まれる。また、初期状態やダイナミクスの違いも収束速度に影響を与えうる要因であり、調べる必要があるだろう。

制御方策の構築

実証分析

本研究では渋滞パターンとスループットとの間に安定的な関係が存在するという仮定に基づいた理論を構築している一方で、その実証的知見は十分に蓄積されているとは言えない。そのため、本研究で構築した理論がどの範囲で成立するのか、または成立しないのかを明らかにするためにも、実証分析・検証は必要となる。制御を行う上でも、現実の交通流はいつも均衡状態にあるわけではなく、制御がどれだけ有効なのかも分かっているわけではない。そのため、理論解析では捉えられない様々な問題が、どのようにネットワークの挙動や制御の有効性に影響を及ぼすのかを、実証データから把握していく必要がある。また実際に観測される渋滞パターンは交通量の集計ミスなども含むかなりノイズーなものであるため、そうしたデータの取り扱い方についても考える必要があるだろう。

動的な枠組みへの拡張

本研究では主に定常状態を想定しているが、それを動的な枠組みに拡張することは制御の実装にあたって重要な課題である。特に、この定常状態では制御に対して利用者の行動選択が即座に対応するような状況を想定することになるが、現実の制御では制御に対する道路利用者の知覚の遅れなどが存在する。そのため、こうした現実的な制御を考える上で重要な制御の要素を、自律分散・リアルタイム性といった性質の良さを残しながら組み入れ、制御方策を構築することも必要となるだろう。この解析にあたっては、理論解析だけではなく、数値計算・シミュレーション分析を通して、考えるべき要素の特定や、そのパラメータ化・パラメータの評価を行うことが考えられる。このような分析を重ねることで、より現実的な交通制御にも十分に耐えうる、適用性の高い制御方策へと本方法論を発展させることができる。

多起点多終点への拡張

より挑戦的な、しかし解決されなければならない課題としては、多起点多終点ネットワークに対して、提案した解析方法を拡張することが挙げられる。多起点多終点ネットワークの一般的な DUE 配分手法が確立していない現状では、その拡張の方向性も自明ではないが、1つの方向性としては、多起点多終点のフロー・パターンを起点別に分解する (cyclic decomposition の考え方に基づく) アプローチかが考えられる。ただし、非線形の FIFO 制約を考慮して、フローをどう適切に起点別に分解すべきか、あるいは、重ね合わせるべきか、など解決すべき課題も多い。これについては、完全に解析的に制御方策を構築する方法に頼るのではなく、最適化などを通じた問題構築も考える必要があるだろう。

参考文献

- Aboudolas, K., Geroliminis, N., 2013. Perimeter and boundary flow control in multi-reservoir heterogeneous networks. *Transportation Research Part B: Methodological* 55, 265–281.
- Akamatsu, T., 2000. A dynamic traffic equilibrium assignment paradox. *Transportation Research Part B: Methodological* 34, 515–531.
- Akamatsu, T., 2001. An efficient algorithm for dynamic traffic equilibrium assignment with queues. *Transportation Science* 35, 389–404.
- Akamatsu, T., Heydecker, B., 2003a. Detecting dynamic traffic assignment capacity paradoxes: Analysis of non-saturated networks.
- Akamatsu, T., Heydecker, B., 2003b. Detecting dynamic traffic assignment capacity paradoxes in saturated networks. *Transportation Science* 37, 123–138.
- Akamatsu, T., Kuwahara, M., 1999. A capacity increasing paradox for a dynamic traffic assignment with departure time choice, in: *Proceedings of the 14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Jerusalem, Israel.
- Akamatsu, T., Nagae, T., 2007. Dynamic ramp metering strategies for risk averse system optimal assignment, in: Allsop, R.E., Bell, M.G., Heydecker, B. (Eds.), *Proceedings of the 17th international symposium on transportation and traffic theory*, Elsevier, Amsterdam. pp. 87–110.
- Akamatsu, T., Wada, K., Hayashi, S., 2015. The corridor problem with discrete multiple bottlenecks. *Transportation Research Part B: Methodological* 81, 808–829.
- Allsop, R.E., 1972. Estimating the traffic capacity of a signalized road junction. *Transportation Research* 6, 245–255.
- Allsop, R.E., 1974. Some possibilities for using traffic control to influence trip distribution and route choice, in: *Proceedings of the 6th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Sydney, Australia. pp. 345–373.
- Alós-Ferrer, C., Netzer, N., 2017. On the convergence of logit-response to (strict) Nash equilibria. *Economic Theory Bulletin* 5, 1–8.
- Ardekani, S., Herman, R., 1987. Urban network-wide traffic variables and their relations. *Transportation Science* 21, 1–16.

- Arnott, R., 2013. A bathtub model of downtown traffic congestion. *Journal of Urban Economics* 76, 110–121.
- Arnott, R., de Palma, A., Lindsey, R., 1990. Departure time and route choice for the morning commute. *Transportation Research Part B* 24, 209–228.
- Arnott, R., de Palma, A., Lindsey, R., 1993a. A structural model of peak-period congestion : A traffic bottleneck with elastic demand. *The American Economic Review* 83, 161–179.
- Arnott, R., Palma, A.D.E., Lindsey, R., de Palma, A., Lindsey, R., 1993b. Properties of dynamic traffic equilibrium involving bottlenecks, including a paradox and metering.
- Astarita, V., 1996. A continuous time link model for dynamic network loading based on travel time function, in: Lesort, J. (Ed.), *Proceedings of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Pergamon, Lyon, France. pp. 79–102.
- Balijepalli, N.C., Watling, D.P., 2005. Doubly dynamic equilibrium distribution approximation model for dynamic traffic assignment, in: Mahmassani, H.S. (Ed.), *Proceedings of the 16th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Emerald Group Publishing. pp. 741–760.
- Beckmann, M., McGuire, C.B., Winsten, C.B., 1956. *Studies in the Economics of Transportation*. Yale University Press, New Haven.
- Blume, L.E., 1993. The statistical mechanics of strategic interaction. *Games and Economic Behavior* 5, 387–424.
- Braess, D., 1968. Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. *Unternehmensforschung Operations Research - Recherche Opérationnelle* 12, 258–268.
- Buisson, C., Ladier, C., 2009. Exploring the impact of homogeneity of traffic measurements on the existence of Macroscopic Fundamental Diagrams. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 2124, 127–136.
- Cantarella, G.E., Cascetta, E., 1995. Dynamic processes and equilibrium in transportation networks: towards a unifying theory. *Transportation Science* 29, 305–329.
- Cantarella, G.E., Watling, D.P., 2016. A general stochastic process for day-to-day dynamic traffic assignment: Formulation, asymptotic behaviour, and stability analysis. *Transportation Research Part B: Methodological* 92, 3–21.
- Carey, M., 1987. Optimal time-varying flows on congested networks. *Operations Research* 35, 58–69.
- Carey, M., 1992. Nonconvexity of the dynamic traffic assignment problem. *Transportation Research Part B: Methodological* 26, 127–133.
- Carey, M., Ge, Y.E., McCartney, M., 2003. A whole-link travel-time model with desirable properties. *Transportation Science* 37, 83–96.
- Cascetta, E., 1989. A stochastic process approach to the analysis of temporal dynamics in

- transportation networks. *Transportation Research Part B: Methodological* 23, 1–17.
- Chow, A.H., 2009a. Properties of system optimal traffic assignment with departure time choice and its solution method. *Transportation Research Part B: Methodological* 43, 325–344.
- Chow, A.H.F., 2007. Analysis of dynamic system optimal assignment with departure time choice, in: Allsop, R.E., Bell, M.G.H., Heydecker, B.G. (Eds.), *Proceedings of the 17th international symposium on transportation and traffic theory*, Elsevier, Amsterdam. pp. 301–326.
- Chow, A.H.F., 2009b. Dynamic system optimal traffic assignment - a state-dependent control theoretic approach. *Transportmetrica* 5, 85–106.
- Daganzo, C.F., 1985. The uniqueness of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck. *Transportation Science* 19, 29–37.
- Daganzo, C.F., 1994. The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory. *Transportation Research Part B: Methodological* 28, 269–287.
- Daganzo, C.F., 1995a. A finite difference approximation of the kinematic wave model of traffic flow. *Transportation Research Part B: Methodological* 29, 261–276.
- Daganzo, C.F., 1995b. The cell transmission model, part II: Network traffic. *Transportation Research Part B: Methodological* 29, 79–93.
- Daganzo, C.F., 1996. The nature of freeway gridlock and how to prevent it, in: Lesort, J. (Ed.), *Transportation and traffic theory : proceedings of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Pergamon-Elsevier, Lyon, France. pp. 629–646.
- Daganzo, C.F., 1998. Queue spillovers in transportation networks with a route choice. *Transportation Science* 32, 3–11.
- Daganzo, C.F., 2005a. A variational formulation of kinematic waves: Basic theory and complex boundary conditions. *Transportation Research Part B: Methodological* 39, 187–196.
- Daganzo, C.F., 2005b. A variational formulation of kinematic waves: Solution methods. *Transportation Research Part B: Methodological* 39, 934–950.
- Daganzo, C.F., 2007. Urban gridlock: Macroscopic modeling and mitigation approaches. *Transportation Research Part B: Methodological* 41, 49–62.
- Daganzo, C.F., Gayah, V.V., Gonzales, E.J., 2011. Macroscopic relations of urban traffic variables: Bifurcations, multivaluedness and instability. *Transportation Research Part B: Methodological* 45, 278–288.
- Daganzo, C.F., Geroliminis, N., 2008. An analytical approximation for the macroscopic fundamental diagram of urban traffic. *Transportation Research Part B: Methodological* 42, 771–781.
- D’Ans, G.C., Gazis, D.C., 1976. Optimal control of oversaturated store-and-forward transporta-

- tion networks. *Transportation Science* 10, 1–19.
- Dickson, T.J., 1981. A note on traffic assignment and signal timings in a signal-controlled road network. *Transportation Research Part B: Methodological* 15, 267–271.
- Doan, K., Ukkusuri, S.V., 2012. On the holding-back problem in the cell transmission based dynamic traffic assignment models. *Transportation Research Part B: Methodological* 46, 1218–1238.
- Edie, L.C., 1963. Discussion of traffic stream measurements and definitions, in: Almond, J. (Ed.), *Proceedings of the Second International Symposium on the Theory of Traffic Flow*, OECD, Paris, France. pp. 139–154.
- Ellison, G., 2000. Basins of attraction, long-run stochastic stability, and the speed of step-by-step evolution. *Review of Economic Studies* 67, 17–45.
- Erera, A.L., Daganzo, C.F., Lovell, D.J., 2002. The access-control problem on capacitated FIFO networks with unique O-D paths is hard. *Operations Research* 50, 736–743.
- Fosgerau, M., 2015. Congestion in the bathtub. *Economics of Transportation* 4, 241–255.
- Fosgerau, M., Small, K.A., 2013. Hypercongestion in downtown metropolis. *Journal of Urban Economics* 76, 122–134.
- Foster, D., Young, H.P., 1990. Stochastic evolutionary game dynamics. *Theoretical Population Biology* 38, 219–232.
- Friesz, T.L., Bernstein, D., Smith, T.E., Tobin, R.L., Wie, B.W., 1993. A variational inequality formulation of the dynamic network user equilibrium problem. *Operations Research* 41, 179–191.
- Friesz, T.L., Kwon, C., Mookherjee, R., 2007. A computable theory of dynamic congestion pricing, in: *Proceedings of the 17th international symposium on transportation and traffic theory*, Elsevier. pp. 1–26.
- Friesz, T.L., Luque, J., Tobin, R.L., Wie, B.W., 1989. Dynamic network traffic assignment considered as a continuous time optimal control problem. *Operations Research* 37, 893–901.
- Gayah, V.V., Daganzo, C.F., 2011. Clockwise hysteresis loops in the Macroscopic Fundamental Diagram: An effect of network instability. *Transportation Research Part B: Methodological* 45, 643–655.
- Gazis, D.C., 1964. Optimum control of a system of oversaturated intersections. *Operations Research* 12, 815–831.
- Geroliminis, N., Daganzo, C.F., 2007. Macroscopic modeling of traffic in cities. *Proceedings of the Transportation Research Board 86th Annual Meeting*.
- Geroliminis, N., Daganzo, C.F., 2008. Existence of urban-scale macroscopic fundamental diagrams: Some experimental findings. *Transportation Research Part B: Methodological* 42, 759–770.

- Geroliminis, N., Haddad, J., Ramezani, M., 2013. Optimal perimeter control for two urban regions with macroscopic fundamental diagrams: A model predictive approach. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 14, 348–359.
- Geroliminis, N., Levinson, D.M., 2009. Cordon pricing consistent with the physics of overcrowding. *Transportation and Traffic Theory 2009* , 219–240\740.
- Geroliminis, N., Sun, J., 2011a. Hysteresis phenomena of a Macroscopic Fundamental Diagram in freeway networks. *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 45, 966–979.
- Geroliminis, N., Sun, J., 2011b. Properties of a well-defined macroscopic fundamental diagram for urban traffic. *Transportation Research Part B: Methodological* 45, 605–617.
- Ghali, M., Smith, M., 1995. A model for the dynamic system optimum traffic assignment problem. *Transportation Research Part B: Methodological* 29, 155–170.
- Godfrey, J.W., 1969. The mechanism of a road network. *Traffic Engineering and Control* 11, 323–327.
- Haddad, J., 2015. Robust constrained control of uncertain macroscopic fundamental diagram networks. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 59, 323–339.
- Haddad, J., Geroliminis, N., 2012. On the stability of traffic perimeter control in two-region urban cities. *Transportation Research Part B: Methodological* 46, 1159–1176.
- Haddad, J., Ramezani, M., Geroliminis, N., 2013. Cooperative traffic control of a mixed network with two urban regions and a freeway. *Transportation Research Part B: Methodological* 54, 17–36.
- Haddad, J., Shraiber, A., 2014. Robust perimeter control design for an urban region. *Transportation Research Part B: Methodological* 68, 315–332.
- Haddad, J., Zheng, Z., 2018. Adaptive perimeter control for multi-region accumulation-based models with state delays. *Transportation Research Part B: Methodological* , 1–21.
- Hart, S., Mas-Colell, A., 2000. A simple adaptive procedure leading to correlated equilibrium. *Econometrica* 68, 1127–1150.
- Hendrickson, C., Kocur, G., 1981. Schedule delay and departure time decisions in a deterministic model. *Transportation Science* 15, 62–77.
- Herman, R., Prigogine, I., 1979. A two-fluid approach to town traffic.
- Ho, J.K., 1980. A successive linear optimization approach to the dynamic traffic assignment problem. *Transportation Science* 14, 295–305.
- Iryo, T., 2011a. Multiple equilibria in a dynamic traffic network. *Transportation Research Part B: Methodological* 45, 867–879. doi:10.1016/j.trb.2011.02.010.
- Iryo, T., 2011b. Solution algorithm of Nash equilibrium in dynamic traffic assignment with discretised vehicles. *Journal of JSCE, Ser. D3 (Infrastructure Planning and Management)* 67, 70–83. [In Japanese].

- Iryo, T., 2013. Properties of dynamic user equilibrium solution: Existence, uniqueness, stability, and robust solution methodology. *Transportmetrica B* 1, 52–67.
- Iryo, T., Smith, M.J., 2017. On the uniqueness of equilibrated dynamic traffic flow patterns in unidirectional networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, <https://doi.org/10.1016/j.trb.2017.09.009>.
- Iryo, T., Yoshii, T., 2007. Equivalent optimization problem for finding equilibrium in the bottleneck model with departure time choices, in: Heydecker, B.G. (Ed.), *Mathematics in Transport*, Oxford. pp. 231–244.
- Jong, D.D., Knoop, V.L., Hoogendoorn, S.P., De Jong, D., Knoop, V.L., Hoogendoorn, S.P., 2013. The effect of signal settings on the macroscopic fundamental diagram and its applicability in traffic signal driven perimeter control strategies, in: *IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Proceedings, ITSC*, pp. 1010–1015.
- Keyvan-Ekbatani, M., Kouvelas, A., Papamichail, I., Papageorgiou, M., 2012. Exploiting the fundamental diagram of urban networks for feedback-based gating. *Transportation Research Part B: Methodological* 46, 1393–1403.
- Keyvan-Ekbatani, M., Papageorgiou, M., Knoop, V.L., 2015a. Controller design for gating traffic control in presence of time-delay in urban road networks. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 59, 308–322.
- Keyvan-Ekbatani, M., Papageorgiou, M., Papamichail, I., 2013. Urban congestion gating control based on reduced operational network fundamental diagrams. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 33, 74–87.
- Keyvan-Ekbatani, M., Yildirimoglu, M., Geroliminis, N., Papageorgiou, M., 2015b. Multiple concentric gating traffic control in large-scale urban networks. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 16, 2141–2154.
- Knoop, V., Hoogendoorn, S., Van Lint, J., 2012. Routing strategies based on macroscopic fundamental diagram. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 2315, 1–10.
- Knoop, V.L., Hoogendoorn, S.P., 2013. Empirics of a generalized macroscopic fundamental diagram for urban freeways. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* 2391, 133–141.
- Kouvelas, A., Saeedmanesh, M., Geroliminis, N., 2017. Enhancing model-based feedback perimeter control with data-driven online adaptive optimization. *Transportation Research Part B: Methodological* 96, 26–45.
- Kuwahara, M., 1990a. Equilibrium queueing patterns at a two-tandem bottleneck during the morning peak. *Transportation Science* 24, 217–229.
- Kuwahara, M., 1990b. Some aspects of the dynamic equilibrium assignment in oversaturated

- networks. *JSCE Journal of Infrastructure Planning and Management* 419 (IV-13, 123–126. [In Japanese.].
- Kuwahara, M., Akamatsu, T., 1993. Dynamic equilibrium assignment with queues for a one-to-many OD pattern, in: Daganzo, C.F. (Ed.), *Proceedings of the 12th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Elsevier, Berkeley. pp. 185–204.
- Lamotte, R., Geroliminis, N., 2017. The morning commute in urban areas with heterogeneous trip lengths. *Transportation Research Part B: Methodological* .
- Laval, J.A., Castrillón, F., 2015. Stochastic approximations for the macroscopic fundamental diagram of urban networks. *Transportation Research Procedia* 7, 615–630.
- Leclercq, L., Bécarie, C., 2012. A meso LWR Model designed for network applications. *Proceedings of the 91st Transportation Research Board Annual Meeting (TRB)* .
- Leclercq, L., Geroliminis, N., 2013. Estimating MFDs in simple networks with route choice. *Transportation Research Part B: Methodological* 57, 468–484.
- Leclercq, L., Parzani, C., Knoop, V.L., Amourette, J., Hoogendoorn, S.P., 2015. Macroscopic traffic dynamics with heterogeneous route patterns. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 59, 292–307.
- Lin, D.Y., Unnikrishnan, A., Waller, S.T., 2011. A dual variable approximation based heuristic for dynamic congestion pricing. *Networks and Spatial Economics* 11, 271–293.
- Lovell, D., Daganzo, C.F., 2000. Access control on networks with unique O-D paths. *Transportation Research Part B* 34, 185–202.
- Mahmassani, H.S., Saberi, M., Zockaie, A., 2013. Urban network gridlock: Theory, characteristics, and dynamics. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 36, 480–497.
- Marden, J.R., Shamma, J.S., 2012. Revisiting log-linear learning: Asynchrony, completeness and payoff-based implementation. *Games and Economic Behavior* 75, 788–808.
- Marden, J.R., Young, H.P., Arslan, G., Shamma, J.S., 2009. Payoff-based dynamics for multi-player weakly acyclic games. *SIAM Journal on Control and Optimization* 48, 373–396.
- Mazloumian, A., Geroliminis, N., Helbing, D., 2010. The spatial variability of vehicle densities as determinant of urban network capacity. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 368, 4627–4647.
- Merchant, D.K., Nemhauser, G.L., 1978a. A model and an algorithm for the dynamic traffic assignment problems. *Transportation Science* 12, 183–199.
- Merchant, D.K., Nemhauser, G.L., 1978b. Optimality conditions for a dynamic traffic assignment model. *Transportation Science* 12, 200–207.
- Monderer, D., Shapley, L.S., 1996. Potential games. *Games and Economic Behavior* 14, 124–143.
- Mounce, R., 2006. Convergence in a continuous dynamic queueing model for traffic networks.

- Transportation Research Part B: Methodological 40, 779–791.
- Mounce, R., 2009. Existence of equilibrium in a continuous dynamic queueing model for traffic networks with responsive signal control, in: Lam, W.H., Wong, S.C., Lo, H.K. (Eds.), Proceedings of the 18th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, Springer US, Hong Kong. pp. 327–344.
- Mounce, R., Smith, M., 2007. Uniqueness of equilibrium in steady state and dynamic traffic networks, in: Allsop, R.E., Bell, M.G., Heydecker, B.G. (Eds.), Transportation and Traffic Theory, Elsevier, Oxford. pp. 281–299.
- Muñoz, J.C., Laval, J.A., 2006. System optimum dynamic traffic assignment graphical solution method for a congested freeway and one destination. Transportation Research Part B: Methodological 40, 1–15.
- Newell, G.F., 2002. A simplified car-following theory: A lower order model. Transportation Research Part B: Methodological 36, 195–205.
- Nie, X., Zhang, H.M., 2005. Delay-function-based link models: Their properties and computational issues. Transportation Research Part B: Methodological 39, 729–751.
- Nie, Y.M., 2011. A cell-based Merchant-Nemhauser model for the system optimum dynamic traffic assignment problem. Transportation Research Part B: Methodological 45, 329–342.
- Peeta, S., Mahmassani, H.S., 1995. System optimal and user equilibrium time-dependent traffic assignment in congested networks. Annals of Operations Research 60, 81–113.
- Qian, Z.S., Shen, W., Zhang, H.M., 2012. System-optimal dynamic traffic assignment with and without queue spillback: Its path-based formulation and solution via approximate path marginal cost. Transportation Research Part B: Methodological 46, 874–893.
- Ramezani, M., Haddad, J., Geroliminis, N., 2015. Dynamics of heterogeneity in urban networks: Aggregated traffic modeling and hierarchical control. Transportation Research Part B: Methodological 74, 1–19.
- Sandholm, W.H., 2010. Population Games and Evolutionary Dynamics. MIT Press.
- Satsukawa, K., Wada, K., 2017. A note on the solution algorithm of Nash equilibrium in dynamic traffic assignment for single destination networks. Journal of JSCE, Ser. D3 (Infrastructure Planning and Management) 73, 103–108. [In Japanese].
- Shen, W., Nie, Y., Zhang, H., 2006. Path-based system optimal dynamic traffic assignment models: formulations and solution methods, in: IEEE Intelligent Transportation Systems Conference Proceedings, pp. 1298–1303.
- Shen, W., Nie, Y., Zhang, H.M., 2007. On path marginal cost analysis and its relation to dynamic system-optimal traffic assignment, in: Allsop, R.E., Bell, M.G.H., Heydecker, B. (Eds.), Proceedings of the 17th international symposium on transportation and traffic theory, Elsevier, London, England. pp. 327–360.

- Shen, W., Zhang, H.M., 2009. On the morning commute problem in a corridor network with multiple bottlenecks: Its system-optimal traffic flow patterns and the realizing tolling scheme. *Transportation Research Part B: Methodological* 43, 267–284.
- Shen, W., Zhang, H.M., 2014. System optimal dynamic traffic assignment: Properties and solution procedures in the case of a many-to-one network. *Transportation Research Part B: Methodological* 65, 1–17.
- Smith, M., Huang, W., Viti, F., 2013. Equilibrium in capacitated network models with queueing delays, queue-storage, blocking back and control. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 80, 860–879.
- Smith, M., Mounce, R., 2011. A splitting rate model of traffic re-routeing and traffic control. *Transportation Research Part B: Methodological* 45, 1389–1409.
- Smith, M.J., 1978. In a road network, increasing delay locally can reduce delay globally. *Transportation Research* 12, 419–422.
- Smith, M.J., 1979a. The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria. *Transportation Research Part B* 13, 295–304.
- Smith, M.J., 1979b. Traffic control and route-choice; a simple example. *Transportation Research Part B* 13, 289–294.
- Smith, M.J., 1980. A local traffic control policy which automatically maximises the overall travel capacity of an urban road network. *Traffic engineering and control* 21, 298–302.
- Smith, M.J., 1984a. The existence of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck. *Transportation Science* 18, 385–394.
- Smith, M.J., 1984b. The stability of a dynamic model of traffic assignment—An application of a method of Lyapunov. *Transportation Science* 18, 245–252.
- Smith, M.J., 1987. Traffic control and traffic assignment in a signal-controlled network with queuing, in: Gartner, N., Wilson, N. (Eds.), *Proceedings of the 10th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Elsevier, Cambridge, Massachusetts. pp. 61–77.
- Smith, M.J., 1993. A new dynamic traffic model and the existence and calculation of dynamic user equilibria on congested capacity-constrained road networks. *Transportation Research Part B* 27, 49–63.
- Smith, M.J., Ghali, M., 1990. The dynamics of traffic assignment and traffic control: A theoretical study. *Transportation Research Part B* 24, 409–422.
- Smith, M.J., Liu, R., Mounce, R., 2015. Traffic control and route choice: Capacity maximisation and stability. *Transportation Research Part B: Methodological* 81, 863–885.
- Smith, M.J.M., Wisten, M.B., 1995. A continuous day-to-day traffic assignment model and the existence of a continuous dynamic user equilibrium. *Annals of Operations Research* 60, 59–79.

- Sun, D., Benekohal, R.F., Waller, S.T., 2006. Bi-level programming formulation and heuristic solution approach for dynamic traffic signal optimization. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* 21, 321–333.
- Szeto, W.Y., Lo, H.K., 2006. Dynamic traffic assignment: Properties and extensions. *Transportmetrica* 2, 31–52.
- Ukkusuri, S., Doan, K., Aziz, H.A., 2013. A bi-level formulation for the combined dynamic equilibrium based traffic signal control. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 80, 729–752.
- Vickrey, W.S., 1969. Congestion theory and transport investment. *The American Economic Review* 59, 251–260.
- Wada, K., Satsukawa, K., Smith, M.J., Akamatsu, T., 2018. Network throughput under dynamic user equilibrium : Queue spillback, paradox and traffic control. *Transportation Research Part B: Methodological* , <https://doi.org/10.1016/j.trb.2018.04.002>.
- Waller, S.T., Ziliaskopoulos, A.K., 2006. A combinatorial user optimal dynamic traffic assignment algorithm. *Annals of Operations Research* 144, 249–261.
- Wang, J., Du, M., Lu, L., He, X., 2018. Maximizing network throughput under stochastic user equilibrium with elastic demand. *Networks and Spatial Economics* 18, 115–143.
- Wardrop, J.G., 1952. Some theoretical aspects of road traffic research.
- Watling, D., 1998. Perturbation stability of the asymmetric stochastic equilibrium assignment model. *Transportation Research Part B: Methodological* 32, 155–171.
- Watling, D.P., Cantarella, G.E., 2013. Modelling sources of variation in transportation systems: theoretical foundations of day-to-day dynamic models. *Transportmetrica B: Transport Dynamics* 1, 3–32.
- Webster, F.V., 1958. Traffic signal settings. *Road Research Technical Paper No.39* .
- Wong, S.C., Yang, H., 1997. Reserve capacity of a signal-controlled road network. *Transportation Research Part B* 31, 397–402.
- Yagar, S., 1974. Capacity of a signalized road junction: Critique and extensions. *Transportation Research* 8, 137–147.
- Yang, H., Bell, M.G., 1998. A capacity paradox in network design and how to avoid it. *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 32, 539–545.
- Yildirimoglu, M., Geroliminis, N., 2014. Approximating dynamic equilibrium conditions with macroscopic fundamental diagrams. *Transportation Research Part B: Methodological* 70, 186–200.
- Yildirimoglu, M., Ramezani, M., Geroliminis, N., 2015. Equilibrium analysis and route guidance in large-scale networks with MFD dynamics. *Transportation Research Procedia* 9, 185–204.

- Yoshii, T., Yonezawa, Y., Kitamura, R., 2010. Evaluation of an area metering control method using the macroscopic fundamental diagram, in: 12th World Conference for Transportation Research, pp. 1–12.
- Young, H.P., 1993. The evolution of conventions. *Econometrica* 61, 57–84.
- Young, H.P., 2004. *Strategic Learning and Its Limits*. Oxford University Press, USA.
- Yu, H., Ma, R., Zhang, H.M., 2018. Optimal traffic signal control under dynamic user equilibrium and link constraints in a general network. *Transportation Research Part B: Methodological* 110, 302–325.
- Zhang, D., Nagurney, A., 1996. On the local and global stability of a travel route choice adjustment process. *Transportation Research Part B: Methodological* 30, 245–262.
- Zhang, H.M., Shen, W., 2010. Access control policies without inside queues: Their properties and public policy implications. *Transportation Research Part B: Methodological* 44, 1132–1147.
- Zhao, C.L., Leclercq, L., 2018. Graphical solution for system optimum dynamic traffic assignment with day-based incentive routing strategies. *Transportation Research Part B: Methodological* 117, 87–100.
- Zhu, D., Marcotte, P., 2000. On the existence of solutions to the dynamic user equilibrium problem. *Transportation Science* 34, 402–414.
- Zhu, F., Ukkusuri, S.V., 2013. A cell based dynamic system optimum model with non-holding back flows. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* 36, 367–380.
- Ziliaskopoulos, A.K., 2000. A linear programming model for the single destination system optimum dynamic traffic assignment problem. *Transportation Science* 34, 36–49.
- Ziyou, G., Yifan, S., 2002. A reserve capacity model of optimal signal control with user-equilibrium route choice. *Transportation Research Part B: Methodological* 36, 313–323.
- 井料隆雅, 2011. 車両を離散化した動的交通量配分問題の Nash 均衡解の解法. *土木学会論文集 D3* 67, 70–83.
- 井料隆雅, 吉井稔雄, 朝倉康夫, 2005. 出発時刻選択問題の均衡状態に関する数理的解析. *土木学会論文集* 2005, 105–118.
- 佐津川功季, 和田健太郎, 2017. 単一終点ネットワークにおける動的交通量配分問題の Nash 均衡解の解法について. *土木学会論文集 D3* 73, 103–108.
- 和田健太郎, 瀬尾亨, 中西航, 佐津川功季, 柳原正実, 2017. Kinematic Wave 理論の近年の発展: 変分理論とネットワーク拡張. *土木学会論文集 D3 (土木計画学)* 73, I.1139–I.1158.
- 国土交通省, 2017. 首都圏白書. *Technical Report*.
- 土木学会, 1998. 交通ネットワークの均衡分析—最新の理論と解法—. 丸善.
- 桑原雅夫, 1998. 道路交通における出発時刻選択に関する研究解説. *土木学会論文集*, 73–84.

- 桑原雅夫, 2002. 動的な限界費用に関する理論的分析. 土木学会論文集 2002, 127-138.
- 桑原雅夫, 2004. 渋滞現象と需要解析. 土木計画学研究・論文集 21, 1-9.
- 王鵬飛, 和田健太郎, 赤松隆, 杉田正俊, 名古屋利一, 鷺見浩, 2016. 長期間観測データを用いた Macroscopic Fundamental Diagram の特徴づけ: 仙台市および京都市におけるケース・スタディ. 交通工学論文集 2, 11-20.
- 王鵬飛, 赤松隆, 和田健太郎, 2015. Macroscopic Fundamental Diagram における渋滞領域発生メカニズムに関する実証研究, in: 土木計画学研究・講演集.
- 赤松隆, 2007. 交通ネットワーク流の動的制御モデル. 土木計画学研究・講演集 35, 311 (CD-ROM).
- 赤松隆, 和田健太郎, 2014. 動的な交通ネットワーク流問題, in: 第 26 回 RAMP シンポジウム論文集, pp. 31-46.
- 赤松隆, 桑原雅夫, 1992. ネットワーク接続行列のランクについて. 土木学会論文集, 223-226.
- 赤松隆, 桑原雅夫, 1994. 渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分—1 起点・多終点および多起点・1 終点 od ペアの場合. 土木学会論文集, 21-30.
- 赤松隆, 高松望, 1999. 動的な交通ネットワーク・フローと od 構造の関係に関する理論的考察. 土木学会論文集, 39-51.
- 長江剛志, 赤松隆, 2007. リアルタイム観測情報を活用した動的なシステム最適交通配分: 確率制御アプローチ. 土木学会論文集 D 63, 311-327.

謝辞

本研究を遂行する上で、多くの方々からご指導・ご支援をいただきました。本論文を結ぶにあたり、短くはありますが、この場をお借りして、お世話になりました皆様への感謝の意を表します。

まず、本論文の主査である大口敬教授には、筆者が先生の研究室の門戸を叩いて以来、終始厳しくも暖かいご指導をいただきました。自分の世界にこもりがちな私に対し、とにかく外に出る、行って理論研究としての自分の言葉が通じない人間にどう研究を伝えるかを考えると、ことあるごとに人に分かりやすく、かつ魅力的に伝えることの大切さをご教示いただきました。そうした技法を磨くための研究会の場に連れ出していただいたことも多く、発表や議論の一つ一つが自身の成長の糧となりました。また、常に自分の研究を俯瞰し、研究の目的やその本質は何かを意識することの重要性を、先生の研究に対する姿勢から学ぶことができました。至らぬところ多くあったかと思いますが、私の研究を暖かく見守ってくださったことに、深く感謝申し上げます。

また、副査の先生方にも大変お世話になりました。羽藤英二教授には、筆者の学部時代より厳しく、しかし暖かくご指導いただきました。研究を進めるにあたり、巨人の肩の上に立つことの重要性と、同時にその既存の知見を消化し自分の言葉として語れるようになることの重要性とをいつも指摘していただいたように思います。自分自身の力不足ゆえ、ご指摘された点を十分に改善できてはいないと感じていますが、これからも自分を戒めつつ、一人の研究者として努力していきたいと思っています。布施孝志教授には、筆者の修士論文の副査に引き続きお世話になりました。説明に伺うたび、自身が取り組んでいる問題に対する異なる切り口からのご意見をいただきました。複雑な問題や現象を自然に、かつ魅力的に説明することの大切さを教えていただいていたように思います。本田利器教授には、研究に対して厳しい姿勢を取りつつも、終始柔らかい語り口で接していただきました。副査説明にあたっては、自身の研究が理論研究であることを改めて自覚するとともに、そうした研究としての見せ方・説明仕方を考える必要があることをご指摘いただきました。言葉足らずが多い私の説明をフォローしていただいたことも多く、大変感謝しております。

神戸大学の井料隆雅教授には、個別の研究内容や博士論文全体の構成などについて、親身になってご指導・議論をしていただきました。特に、神戸大学滞在時には、お忙しい中多くの時間を議論に割いていただくとともに、日常からお気遣いいただきました。博士論文の序章におきましても、研究の核となる様々な概念やキーワードの整理にお付き合いいただきとともに、研究の位置付けについて大局的・歴史的な観点からもアドバイスをしていただきました。様々なご意見をいただいたことで、自身の研究の構成や内容、表現などを改善していくことができたと感じております。東北大学の桑原雅夫教授には、学会などでお会いするたび、研究への激励をいただきました。特に本研究の渋滞パターンに基づく交通制御方策に関する研究につきましては、研究の初期段階からその内容を肯定的に捉えてくださり、心強いお言葉もかけていただきました。議論を通じてネットワーク交通流のこれからを考える上で理論的・実用的観点の双方から重要な示唆を得ることができたと感じております。

また、学会や研究会に参加した際、いつも関係する皆様から暖かい声をかけていただき、また研究の議論をしていただけたことは、本当にありがたく、幸運なことでした。東北大

学の赤松隆教授には、私の研究を個別に聞いていただく機会もあり、研究内容に対して深く議論させていただくことができました。私の拙い説明に対しても、じっくりと聞いていただき、話の意図や概念を整理していただき、さらには研究の持つ発展可能性についてもアドバイスをいただきました。議論を通じて、自分自身の研究に対する理解を深め、そして将来研究の方向性についても示唆を得ることができ、感謝しています。岐阜大学の宮城俊彦特任教授にも、研究に対するアドバイスをいただきました。本研究の安定性解析に関する部分は、自分の研究発表に対する宮城先生からの質疑の内容に端を発しています。面白いトピックと巡り会えたことに深く感謝しています。名古屋大学の井料美帆准教授には、筆者の修士研究以来よりお世話になりました。名古屋大学の合同セミナーなどでお会いするときには研究生活についてお気遣いいただき、大変感謝しています。金沢大学の中山晶一郎教授、東北大学の長江剛志准教授、金沢大学の高山雄貴准教授からは、特に金沢大学で開かれる交通・都市理論ドクター勉強会の折に、研究に対する貴重なご意見をいただきました。先生方の評である、楽しそうに研究している、というお言葉は、自分の中で研究を進める上で意識すべき言葉ともなっています。愛媛大学の吉井稔雄教授には、坊ちゃんセミナーにての発表の際に、特にお世話になりました。発表の後いただいた、理論研究で突っ走れとのお言葉は、今でも自分の研究を進める際の大きなモチベーションとなっています。また名古屋大学の中村英樹教授からは、合同セミナーの発表の際に貴重な意見をいただいたと感じています。立命館大学の塩見康博准教授、高知工科大学の西内裕晶講師からは、学会にて有益な助言をいただいたのと同時に、博士研究に対する激励をいただきました。株式会社アイ・トランスポート・ラボの堀口良太様には、研究に対し実務者の観点から様々にご指摘やご意見をいただきました。とかく理論にこもりがちな自分にとっては、交通工学の現場で今何が求められているのかといった話は新鮮であり、自分自身の視野を広げる貴重な機会になったと感じています。多くの方に気にかけていただき、貴重なご意見をいただきました。深く感謝いたします。

東京大学の日下部貴彦講師、東京工業大学の中西航特任助教、東京大学の瀬尾亨助教、首都大学東京の柳原正美助教には、交通流理論勉強会をはじめ、様々な研究会や学会でご一緒することが多く、そのたびに暖かい声をかけていただけました。必然自身の研究を聞いていただく機会も多く、そのたびに質疑応答を通して数々の思い至らない点をご指摘いただきました。また、東京理科大学の柳沼秀樹講師、愛媛大学の坪田隆宏助教、東北大学の澤実助教からも、研究に対する刺激的なアドバイスをいただきました。アドバイスのみならず、若手研究者としてどうあるべきかを言葉や姿勢を通じて御指南いただけたと思っています。神戸大学井料研究室の滞在にあたりましては、現東京大学の浦田淳司助教、神戸大学の坂井勝哉研究員、Peque Genaro Jr Canas 研究員、安田昌平さんに大変お世話になりました。1ヶ月を二回という変則的、かつ短い期間ではありましたが、様々な面白い研究に関する議論をしていただき、充実した生活をおくらせていただきました。各領域の最先端を切り開いている皆様の研究内容、または研究に対する姿勢そのものは自分にとって、とても大きな刺激になりました。大変感謝しております。今後ともよろしく願います。

日々の研究生活では、大口研究室のメンバーの方々にも大変お世話になりました。秘書の森本紀代子さんには、学会・研究会参加にあたっての事務手続きなどを一手に引き受けてくださり、大変感謝しています。それだけでなく、博士研究への激励を様々な形でしていただきました。技術専門員の西川功さんには、筆者の唐突なお願い事をいつも笑顔で聞いていただき、また良く話し相手になっていただきました。坂井康一准教授にも研究を見ていただきました。Charitha Dias 研究員には、折に触れて研究の議論や、自国から離れて

生活を送る研究者としての体験談を聞かせていただきました。また秘書の野本京子さんには、研究費の管理など、順風な研究生活を送れるようご支援いただきました。また、大口研究室の学生の皆様方には、頻繁に話しかけてくる面倒な先輩にいつも付き合ってくださいましたことに感謝しています。

研究の遂行にあたり、日本学術振興会から特別研究員奨励費（課題番号 18J12493）、東京大学から博士課程研究遂行協力制度の RA、東京大学生産技術研究所から同じく RA として補助金のご支援をいただきました。また、日本学生支援機構から奨学金のご支援をいただきました。深く感謝いたします。

そして、私が研究者を志したきっかけであり、自分の研究者としての目標でもある、東京大学の和田健太郎助教に心より感謝申し上げます。和田先生には、私の修士研究以来、何から何まで本当にお世話になりました。この5年間は、全てにおいて未熟な私に対し、叩き直すと言っても過言でないほど厳しく、しかしお見捨てなさることなく万事において指導していただきました。苛烈ですが暖かい言葉、先生の研究に対する丁寧で真摯な姿勢、それら一つ一つが、自分の研究者としての基盤を形成する糧となっています。研究成果が思うように出ないこともありましたが、辛抱強く、私自身が納得できるように昼夜を問わず議論して下さったこともありました。そうした議論を通じて、細かなこととことん、丁寧に突き詰めていくことの大切さを教えられたように思います。また、研究を楽しみ、味わい尽くしながら進めていく先生の姿を近くで感じながら自身も研究を行えた時間は、とても貴重な、充実した時間だったと感じています。力不足ゆえ、ご期待に添えなかったことも多々あるかとは思いますが、いただいた教えを胸に、これからも努力していきます。誰よりも身近な先達として、頼りにさせていただきました。ありがとうございます。

最後になりましたが、筆者の学生生活を支えて下さった両親に深く感謝いたします。

本当に多くの方々との縁に恵まれて、ここに博士論文をまとめることができました。ご指導、ならびにご援助いただいた全ての方々に、あらためて感謝申し上げます。ありがとうございました。

2019年2月
佐津川功季