研 究 速 報

UDC 539.371：531.36：539.32.072

有限回転変位を考慮した2次元剛体・ばねモデルの定式化（その1）
—静 的 問 題—

Formulation of 2-D Rigid Body Spring Models Including Effect of the Finite Rotational Displacement (I) -Static Problems-

三 藤 正 明*・竹 内 則 雄**・川 井 忠 彦***

Masaaki MITO, Norio TAKEUCHI and Tadahiko KAWAI

1. ま え が き

微小変形理論に基づく2次元剛体・ばねモデルの静的問題に対する定式化および地盤工学上の諸問題に応用した例は文献(1)に詳細に述べられている．そこで，本論文では，この2次元剛体・ばねモデル（略称，RBSM）の幾何学的非線形，すなわち有限回転変位を考慮した剛性方程式を増分形仮想仕事式を用いて具体的に求める．さらに，本モデルの幾何学的非線形問題に対する精度の検討のため片持ち梁の解析を行い，大変形を考慮した有限要素解と本モデルの解との比較検討を行う．

2. 増分形仮想仕事式による面内要素の定式化

まず，図-1に示すような剛体要素①を考える．いま，三角形の重心点における並進変位および回転変位成分を(u_1,v_1,θ_1)とすれば，任意点Pにおける水平および鉛直変位$U(x,y),V(x,y)$は

$$U(x,y)=u_1+r(\cos(\alpha+\theta_1)-\cos\alpha) \quad (1)$$
$$V(x,y)=v_1+r(\sin(\alpha+\theta_1)-\sin\alpha)$$

となる．ここで，rは重心点から任意点Pまでの距離，αは重心点と任意点Pを結ぶ直線がx軸となす角である．いま，重心点座標を(x_{G1},y_{G1})とし，$\sin\theta_1,\cos\theta_1$についてテーラー展開の2次の項まで考慮すると，

$$U(x,y)=u_1-(y-y_{G1})\theta_1-1/2(x-x_{G1})\theta_1^2 \quad (2)$$
$$V(x,y)=v_1+(x-x_{G1})\theta_1-1/2(y-y_{G1})\theta_1^2$$

となる．上式を用いて1次および2次の増分変位量を求めることにする．いま，前段回の回転変位を$\theta_1^{(0)}$，増分の並進変位および回転変位を$(\Delta u_1,\Delta v_1,\Delta\theta_1)$とすると，1次増分$\Delta\boldsymbol{U}_1^{(1)}$は次式のごとく与えられる．

$$\Delta\boldsymbol{U}_1^{(1)}=\boldsymbol{Q}_1\cdot\Delta\boldsymbol{u}_1 \quad (3)$$
$$(\Delta\boldsymbol{U}_1^{(1)})^t=\lfloor\Delta U_1^{(1)},\Delta V_1^{(1)}\rfloor \quad (\Delta\boldsymbol{u}_1)^t=\lfloor\Delta u_1,\Delta v_1,\Delta\theta_1\rfloor$$
$$\boldsymbol{Q}_1=\left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 0 & -(y-y_{G1})-(x-x_{G1})\theta_1^{(0)} \\ \hdashline 0 & 1 & (x-x_{G1})-(y-y_{G1})\theta_1^{(0)} \end{array}\right]$$

同様にして，2次増分$\Delta U_1^{(2)}$も以下のように求まる．

$$(\Delta\boldsymbol{U}_1^{(2)})^t=\lfloor\Delta U_1^{(2)},\Delta V_1^{(2)}\rfloor \quad (4)$$
$$\Delta U_1^{(2)}=1/2\cdot\Delta\boldsymbol{u}_1^t\cdot\boldsymbol{N}_1\cdot\Delta\boldsymbol{u}_1$$
$$\Delta V_1^{(2)}=1/2\cdot\Delta\boldsymbol{u}_1^t\cdot\boldsymbol{N}_2\cdot\Delta\boldsymbol{u}_1$$
$$\boldsymbol{N}_1=\left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -(x-x_{G1}) \end{array}\right]$$
$$\boldsymbol{N}_2=\left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -(y-y_{G1}) \end{array}\right]$$

さて，図-1に示すような隣り合う要素①，②を考えると，1次の増分相対変位$\Delta\boldsymbol{\delta}^{(1)}$は(5)式で与えられる．

$$\Delta\boldsymbol{\delta}^{(1)}=\boldsymbol{B}\cdot\Delta\boldsymbol{u} \quad (5)$$
$$(\Delta\boldsymbol{\delta}^{(1)})^t=\lfloor\Delta\delta_x^{(1)},\Delta\delta_y^{(1)}\rfloor$$
$$(\Delta\boldsymbol{u})^t=\lfloor\Delta u_1,\Delta v_1,\Delta\theta_1,\Delta u_2,\Delta v_2,\Delta\theta_2\rfloor$$
$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} -1 & 0 & (y-y_{G1})+(x-x_{G1})\theta_1^{(0)} & 1 & 0 & -(y-y_{G2})-(x-x_{G2})\theta_2^{(0)} \\ \hdashline 0 & -1 & -(x-x_{G1})+(y-y_{G1})\theta_1^{(0)} & 0 & 1 & (x-x_{G2})-(y-y_{G2})\theta_2^{(0)} \end{array}\right]$$

同様にして，2次の増分相対変位$\Delta\boldsymbol{\delta}^{(2)}$も

$$\Delta\boldsymbol{\delta}^{(2)}=\Delta\boldsymbol{U}_2^{(2)}-\Delta\boldsymbol{U}_1^{(2)} \quad (6)$$
$$(\Delta\boldsymbol{\delta}^{(2)})^t=\lfloor\Delta\delta_x^{(2)},\Delta\delta_y^{(2)}\rfloor$$
$$\Delta\delta_x^{(2)}=\Delta U_2^{(2)}-\Delta U_1^{(2)},\Delta\delta_y^{(2)}=\Delta V_2^{(2)}-\Delta V_1^{(2)}$$

となる．以上により，2次のオーダーまで考慮した剛体変位関数および相対変位関数が求まった．つぎに，増分形仮想仕事式を用いて有限回転変位を考慮した剛性方程式を求めることにする．[2)]

いま，ある段階の解が得られたものとし，その状態における相対変位，境界応力，剛体変位，物体力および表面力ベクトルを

$$\boldsymbol{\delta}^{(0)},\boldsymbol{\sigma}^{(0)},\mathrm{U}^{(0)},\bar{\boldsymbol{P}}^{(0)},\bar{\boldsymbol{f}}^{(0)} \quad (7)$$

とする．そして，つぎの段階における物体力，表面力が

$$\bar{\boldsymbol{P}}^{(0)}+\Delta\bar{\boldsymbol{P}},\bar{\boldsymbol{f}}^{(0)}+\Delta\bar{\boldsymbol{f}} \quad (8)$$

に増加し，相対変位，境界応力および剛体変位が，

* 五洋建設(株)
** (株)国際テクノロジー・センター
*** 東京大学生産技術研究所 第2部

$$\boldsymbol{\delta}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\sigma}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{U}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{U} \tag{9}$$

になったとする．このとき，仮想増分相対変位を $\delta(\Delta\boldsymbol{\delta})$，仮想増分剛体変位を $\delta(\Delta\boldsymbol{U})$ とすれば，

$$\sum_{eb}\int_{s_b}\delta(\boldsymbol{\delta}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{\delta})^t\cdot(\boldsymbol{\sigma}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{\sigma})ds$$
$$-\sum_{e}\iint_A\delta(\boldsymbol{U}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{U})^t\cdot(\bar{\boldsymbol{P}}^{(0)}+\Delta\bar{\boldsymbol{P}})dA$$
$$-\sum_{eb}\int_{s_b}\delta(\boldsymbol{U}^{(0)}+\Delta\boldsymbol{U})^t\cdot(\bar{\boldsymbol{f}}^{(0)}+\Delta\bar{\boldsymbol{f}})ds=0 \tag{10}$$

なる増分形仮想仕事式が得られる．ここで，S_b は各要素境界辺の領域であり，$\sum_e$ および $\sum_{eb}$ はそれぞれ各要素内，要素境界辺上の総和をとることを意味する．いま，上式の相対変位および剛体変位ベクトルを1次，2次成分で表し，高次項を省略すると以下のように書き表すことができる．

$$\sum_{eb}\int_{s_b}\delta(\boldsymbol{\delta}^{(1)})^t\cdot\Delta\boldsymbol{\sigma}ds+\sum_{eb}\int_{s_b}\delta(\Delta\boldsymbol{\delta}^{(2)})^t\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(0)}ds \tag{11}$$
$$-\sum_{e}\iint_A\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(2)})^t\cdot(\bar{\boldsymbol{P}}^{(0)}+\Delta\bar{\boldsymbol{P}})dA$$
$$-\sum_{eb}\int_{s_b}\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(2)})^t\cdot(\bar{\boldsymbol{f}}^{(0)}+\Delta\bar{\boldsymbol{f}})ds=\Delta\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{R}$$
$$\Delta\boldsymbol{F}=\sum_{e}\iint_A\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(1)})^t\cdot\Delta\bar{\boldsymbol{P}}dA$$
$$+\sum_{eb}\int_{s_b}\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(1)})^t\cdot\Delta\bar{\boldsymbol{f}}ds$$
$$\Delta\boldsymbol{R}=-\sum_{eb}\int_{s_b}\delta(\Delta\boldsymbol{\delta}^{(1)})^t\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(0)}ds+\sum_{e}\iint_A\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(1)})^t$$
$$\cdot\bar{\boldsymbol{P}}^{(0)}dA+\sum_{eb}\int_{s_b}\delta(\Delta\boldsymbol{U}^{(1)})^t\cdot\boldsymbol{f}^{(0)}ds$$

上式の $\Delta\boldsymbol{R}$ は前段階における不平衡外力のなす仮想仕事量である．以上の結果を用いて，剛性方程式を構成する係数行列および荷重ベクトルを具体的に求めることにする．まず初めに剛性行列を求めるため，増分境界応力 $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ と増分相対変位 $\Delta\boldsymbol{\delta}^{(1)}$ の関係をつぎのように仮定する．

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{k}\cdot\Delta\boldsymbol{\delta}^{(1)} \tag{12}$$
$$\boldsymbol{k}=\left[\begin{array}{c|c} k_{11} & k_{12} \\ \hline k_{21} & k_{22}\end{array}\right]$$

ここで，$\boldsymbol{k}$ 行列はばね行列である．$k_{11}\sim k_{22}$ の詳細な値は文献(1)に示されているので，ここでは説明を省略する．上式を(11)式の左辺第1項に代入すると，初期変位を考慮した剛性行列 $\boldsymbol{K}_d$ は，

$$\boldsymbol{K}_d=\int_{s_b}\boldsymbol{B}^t\cdot\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}ds \tag{13}$$

となる．$\boldsymbol{K}_d$ の詳細な値は表-1に示す．さて，つぎに初期応力行列 $\boldsymbol{K}_G$ を求めるため，初期応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$ を

$$(\boldsymbol{\sigma}^{(0)})^t=\lfloor\sigma^{(0)},\tau^{(0)}\rfloor \tag{14}$$

とする．このとき，初期応力のなす仮想仕事式は

$$(\Delta\boldsymbol{\delta}^{(2)})^t\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(0)}=\Delta\delta_x^{(2)}\sigma^{(0)}+\Delta\delta_y^{(2)}\tau^{(0)} \tag{15}$$

となり，(11)式の左辺第2項より初期応力行列 $\boldsymbol{K}_G$ は，

$$\boldsymbol{K}_G=\int_{s_b}\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & (x-x_{G1})\sigma^{(0)}+(y-y_{G1})\tau^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \text{SYM.} & & & 0 & 0 \\ \hline & & & & & -(x-x_{G2})\sigma^{(0)}-(y-y_{G2})\tau^{(0)}\end{array}\right]ds \tag{16}$$

と求めることができる．一方，初期物体力行列 $\boldsymbol{K}_p$ は，(11)式の左辺第3項より求めることができる．いま，(4)式を用いれば，

$$(\Delta\boldsymbol{U}^{(2)})^t\cdot(\bar{\boldsymbol{P}}^{(0)}+\Delta\bar{\boldsymbol{P}})=\Delta U^{(2)}(\bar{p}_x^{(0)}+\Delta\bar{p}_x)+\Delta V^{(2)}(\bar{p}_y^{(0)}+\Delta\bar{p}_y) \tag{17}$$

となる．上式より，初期物体力行列 $\boldsymbol{K}_p$ は

$$\boldsymbol{K}_p=\iint_A\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -(x-x_{G1})(\bar{p}_x^{(0)}+\Delta\bar{p}_n)-(y-y_{G1})(\bar{p}_y^{(0)}+\Delta\bar{p}_y)\end{array}\right]dA \tag{18}$$

となる．同様にして，(11)式の左辺第4項より求まる初期表面力行列 $\boldsymbol{K}_f$ は上式を参考にすると，

$$\boldsymbol{K}_f=\int_{s_b}\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -(x-x_{G1})(\bar{f}_x^{(0)}+\Delta\bar{f}_x)-(y-y_{G1})(\bar{f}_y^{(0)}+\Delta\bar{f}_y)\end{array}\right]dS \tag{19}$$

となる．つぎに荷重ベクトルについて考えてみる．まず，物体力による増分荷重ベクトル $\Delta\boldsymbol{F}_p$ は

$$\Delta\boldsymbol{F}_p=\iint_A\boldsymbol{Q}_1^t\cdot\Delta\boldsymbol{P}dA \tag{20}$$

研究速報

となる．いま，要素内の増分物体力を一定とすれば，

$$\Delta \boldsymbol{F}_p=\begin{bmatrix}\Delta\bar{p}_x A\\ \Delta\bar{p}_y A\\ 0\end{bmatrix} \tag{21}$$

である．ここで，A は要素の面積を表す．増分表面力による荷重ベクトル $\Delta\boldsymbol{F}_f$ は，

$$\Delta\boldsymbol{F}_f=\int_{S_b}\boldsymbol{Q}_1^t\cdot\Delta\boldsymbol{F}dS \tag{22}$$

$$=\int_{S_b}\begin{bmatrix}\Delta\bar{f}_x\\ \Delta\bar{f}_y\\ (-(y-y_{G1})-(x-x_{G1})\theta_1^{(0)})\Delta\bar{f}_x\\ +((x-x_{G1})-(y-y_{G1})\theta_1^{(0)})\Delta\bar{f}_y\end{bmatrix}dS$$

となる．最後に不平衡荷重ベクトルを求める．初期応力による残差荷重ベクトル $\Delta\boldsymbol{R}_\sigma$ は

$$\Delta\boldsymbol{R}_\sigma=\int_{S_b}\boldsymbol{B}^t\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(0)}dS \tag{23}$$

$$=\int_{S_b}\begin{bmatrix}-\sigma^{(0)}\\ -\tau^{(0)}\\ ((y-y_{G1})+(x-x_{G1})\theta_1^{(0)})\sigma^{(0)}\\ \quad+(-(x-x_{G1})+(y-y_{G1})\theta_1^{(0)})\tau^{(0)}\\ \sigma^{(0)}\\ \tau^{(0)}\\ (-(y-y_{G2})-(x-x_{G2})\theta_2^{(0)})\sigma^{(0)}\\ \quad+((x-x_{G2})-(y-y_{G2})\theta_2^{(0)})\tau^{(0)}\end{bmatrix}dS$$

となる．初期物体力による残差荷重ベクトル $\Delta\boldsymbol{R}_p$ は，(22)式を参考にすると

$$\Delta\boldsymbol{R}_p=\int_A\!\!\int\boldsymbol{Q}_1^t\cdot\bar{\boldsymbol{P}}^{(0)}dA \tag{24}$$

となる．同様にして，初期表面力による残差荷重ベクトル $\Delta\boldsymbol{R}_f$ は

$$\Delta\boldsymbol{R}_f=\int_{S_b}\boldsymbol{Q}_1^t\cdot\bar{\boldsymbol{f}}^{(0)}dS \tag{25}$$

である．

以上により，剛性方程式を構成する係数行列およびベクトルがすべて求まった．これらの結果は以下のように

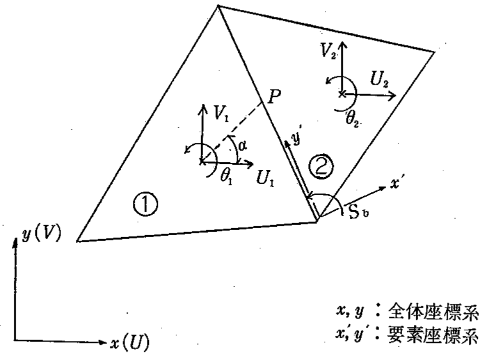

図-1　隣接する面内三角形要素

表-1　初期変位の影響を考慮した剛性行列

$k_{11}I_0$	$k_{12}I_0$	$-k_{11}(I_{y1}+I_{y1}\theta_1^{(0)})$ $-k_{12}(-I_{x1}+I_{y1}\theta_1^{(0)})$	$-k_{11}I_0$	$-k_{12}I_0$	$-k_{11}(-I_{y2}-I_{x2}\theta_2^{(0)})$ $-k_{12}(I_{x2}-I_{y2}\theta_2^{(0)})$
	$k_{22}I_0$	$-k_{21}(I_{y1}+I_{x1}\theta_1^{(0)})$ $-k_{22}(-I_{x1}+I_{y1}\theta_1^{(0)})$	$-k_{21}I_0$	$-k_{22}I_0$	$-k_{21}(-I_{y2}-I_{x2}\theta_2^{(0)})$ $-k_{22}(I_{x2}-I_{y2}\theta_2^{(0)})$
		$k_{11}\{I_{yy11}+2I_{xy11}\theta_1^{(0)}+I_{xx11}(\theta_1^{(0)})^2\}$ $+(k_{21}+k_{12})\{-I_{xy11}+I_{yy11}\theta_1^{(0)}-I_{xx11}\theta_1^{(0)}+I_{xy11}(\theta_1^{(0)})^2\}$ $+k_{22}\{I_{xx11}-2I_{xy11}\theta_1^{(0)}+I_{yy11}(\theta_1^{(0)})^2\}$	$k_{11}(I_{y1}+I_{x1}\theta_1^{(0)})$ $+k_{21}(-I_{x1}+I_{y1}\theta_1^{(0)})$	$k_{12}(I_{y1}+I_{x1}\theta_1^{(0)})$ $+k_{22}(-I_{x1}+I_{y1}\theta_1^{(0)})$	$k_{11}(-I_{yy12}-I_{xy12}\theta_1^{(0)}-I_{xy21}\theta_2^{(0)}$ $-I_{xx12}\theta_1^{(0)}\theta_2^{(0)})+$ $k_{21}(I_{xy12}-I_{yy12}\theta_1^{(0)}+I_{xx12}\theta_2^{(0)}$ $-I_{xy21}\theta_1^{(0)}\theta_2^{(0)})+$ $k_{12}(I_{xy21}+I_{xx12}\theta_1^{(0)}-I_{yy12}\theta_2^{(0)}$ $-I_{xy12}\theta_1^{(0)}\theta_2^{(0)})$ $k_{22}(-I_{xx12}+I_{xy21}\theta_1^{(0)}+I_{xy12}\theta_2^{(0)}$ $-I_{yy12}\theta_1^{(0)}\theta_2^{(0)})$
		SYM.	$k_{11}I_0$	$k_{12}I_0$	$k_{11}(-I_{y2}-I_{x2}\theta_2^{(0)})$ $+k_{12}(I_{x2}-I_{y2}\theta_2^{(0)})$
				$k_{22}I_0$	$k_{21}(-I_{y2}-I_{x2}\theta_2^{(0)})$ $+k_{22}(I_{x2}-I_{y2}\theta_2^{(0)})$
					$k_{11}\{I_{yy22}+2I_{xy22}\theta_2^{(0)}+I_{xx22}(\theta_2^{(0)})^2\}$ $+(k_{12}+k_{21})\{-I_{xy22}+I_{yy22}\theta_2^{(0)}$ $-I_{xx22}\theta_2^{(0)}+I_{xy22}(\theta_2^{(0)})^2\}$ $+k_{22}\{I_{xx22}-2I_{xy22}\theta_2^{(0)}+I_{yy22}(\theta_2^{(0)})^2\}$

$I_0=\int ds$　　$I_{xxij}=\int(x-x_{Gi})(x-x_{Gj})ds$

$I_{xi}=\int(x-_{Gi})ds$　　$I_{xyij}=\int(x-x_{Gi})(y-y_{Gj})ds$

$I_{yi}=\int(y-y_{Gi})ds$　　$I_{yyij}=\int(y-y_{Gi})(y-y_{Gj})ds$　　$(i,j=1,2)$

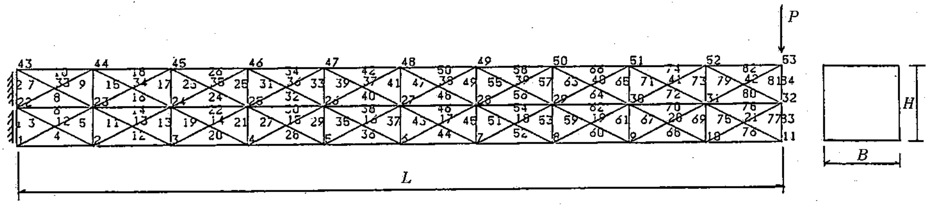

図-2　解析モデルと材料定数

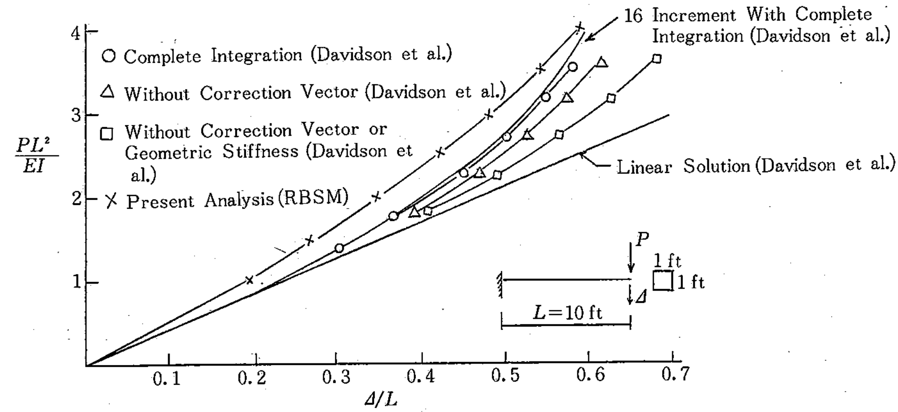

図-3　剛体・ばねモデル解と有限要素解の比較

整理することができる.

$$[K_d+K_G-K_p-K_f]\{\Delta U\}=\Delta F+\Delta R \quad (26)$$

$$\Delta F=\Delta F_p+\Delta F_f$$

$$\Delta R=-\Delta R_\sigma+\Delta R_p+\Delta R_f$$

3. 有限回転変位を考慮した片持ち梁の解析

有限回転変位問題に関する精度の検討を行うため，片持ち梁を用いて解析を行った．この解析モデルは，Davidson らが有限要素の三角形定ひずみ要素を用いて解析したモデルと同じものである．[3] 図-2 に本モデルに用いた要素分割を示す．荷重条件としては，図に示されるように集中荷重を先端部に作用させた．図-3 に Davidson らの解と本モデルの解を示す．ここで，無次元化を行い縦軸には PL^2/EI, 横軸には Δ/L を取る．図中, ×印が本モデルを用いて求めた解である．その他は Davidson らによる解で，上側の実線は増分回数を 16 として求めた解，○印が増分回数を 8 と粗くして求めた解であり，また，△印，□印は不平衡荷重ベクトルおよび幾何剛性行列を省略して求めた解である．このとき，剛体・ばねによる増分回数は 35 であり，また，不平衡荷重ベクトルは省略している．図より，荷重を 16 分割して求めた有限要素解と比較して多少低目の値を示しているのがわかる．

4. ま と め

有限回転変位を考慮した 2 次元剛体・ばねモデルの剛性方程式を導いた．さらに，解析例として片持ち梁を取り上げ，先端部の変位について有限要素を用いた大変形解析解と本モデルの解を比較したところ，本モデルのほうがやや低目の値が得られた．今後の課題として，数多くの数値解析を行うことにより適切な要素の大きさ，増分回数などに関するデータの蓄積が必要となるであろう．また，適切な降伏条件式を取り入れることにより，地盤工学上の諸問題に対して幾何学的非線形と材料非線形を組み合わせた解析が可能となるであろう．

(1985 年 6 月 14 日受理)

参 考 文 献

1) 竹内則雄：“新離散化モデルによる地盤基礎の極限解析法に関する基礎的研究”，東京大学提出学位論文，(1981)
2) 川井忠彦：“不連続体力学のすすめ（その 4）一剛体一バネモデルによる有限回転変位問題の解析一”，生産研究，VoL.35, No. 5, (1983)
3) H. L. Davidson, W. F. Chen : “Nonlinear Analysis in Soil and Solid Mechanics”, Numerical Method in Geomechanics, (1976)