

博士論文

放電臨界強度以下のミリ波中を進展する
電離波面に見られる構造解析とその電離過程

中村 友祐

謝辞

本論文は私が東京大学大学院新領域創成科学研究科先端エネルギー工学専攻博士後期課程在学中の成果をまとめたものです。本博士論文をまとめることが出来たのはひとえに修士、博士課程における研究生活の中で頂いた多くの方々のご指導、ご助力、ご厚意のお陰です。この場を借りてお世話になった方々への謝意を表したいと思います。

指導教員である東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻の小紫公也教授には、ミリ波放電の研究に対してご指導、ご鞭撻を頂く中で、研究の進め方、発表の仕方、論文の書き方など非常に多くのことをご教授頂きました。厚く感謝申し上げます。同大学院新領域創成科学研究科先端エネルギー工学専攻の小泉宏之准教授には、研究においてのご助言を頂いただけでなく、衛星の運用や学会における他の研究者との交流等、多くの貴重な機会を頂きました。深謝の意を表します。

私と同じく電磁ビーム放電に対して数値計算のアプローチから研究をされていらっしゃいます大同大学工学部機械工学科白石裕之教授、東北大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻大西直文教授、山口大学大学院創成科学研究科機械工学系専攻葛山浩准教授、東北大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻高橋聖幸助教には研究会、学会等において多くの有益なご討論ご助言を頂きました。ここに感謝の意を表します。

研究班の先輩である江戸川大学メディアコミュニケーション学部情報文化学科山口敏和講師、福井大学遠赤外領域開発センター福成雅史助教には私が修士課程に進学した頃より研究の基礎についてご指導頂き、多くのご討論ご助言を頂きました。心より感謝いたします。

研究室同期の浅川純様、松井康平様、柳沼和也様には日ごろよりご討論頂くだけでなく、相談等にも乗って頂き大変感謝しております。また、他の小紫小泉研究室のメンバーや、ご支援、ご協力を頂きながらここにお名前を記すことが出来なかった方々に心より謝意を表します。

最後に、ここに至るまで多くの心配をかけてしまいましたが、どのような状況でも応援して頂いた両親に心よりの感謝を申し上げます。

目次

謝辞	1
図目次	5
表目次	7
NOMENCLATURE.....	8
第1章 序論	13
1.1 マイクロ波ロケット	13
1.1.1 マイクロ波ロケットの原理	13
1.1.2 生成される推力	15
1.2 放電の物理過程	18
1.2.1 電極間放電	18
1.2.2 無電極での放電	20
1.3 高周波における加熱過程	23
1.3.1 逆制動放射加熱	23
1.3.2 ECR 加熱.....	24
1.4 高周波中の放電	25
1.4.1 高周波放電における放電臨界電界強度.....	25
1.4.2 電子拡散の影響を加えた臨界電界強度.....	26
1.5 電磁ビームに支持される大気放電	29
1.5.1 マイクロ波放電	29
1.5.2 レーザー放電	30
1.5.3 ミリ波放電	31
1.6 ミリ波中の電離波面進展	32
1.6.1 超臨界条件におけるミリ波放電実験.....	32
1.6.2 放電臨界強度を下回るビーム強度における放電実験.....	33
1.6.3 電離波面の進展速度と入射ビーム強度の関係.....	35
1.6.4 臨界強度以下の条件における進展原理.....	36
1.6.5 数値計算による進展の模擬	36
1.7 研究目的	38
第2章 ミリ波放電進展の物理モデルと数値計算手法.....	39
2.1 電離波面進展の物理過程	39
2.2 プラズマの支配方程式	40
2.3 電子の拡散係数	43
2.3.1 電子自由拡散	43
2.3.2 両極性拡散	43
2.3.3 有効拡散係数モデル	45
2.4 電子拡散方程式の理論進展速度	49

2.5	電離モデル	50
2.6	電磁界の方程式	52
2.7	基礎方程式まとめ	53
2.8	拡散方程式の離散化	54
2.9	Maxwell 方程式の離散化	55
2.9.1	FDTD 法	55
2.9.2	FDTD 法の空間高次精度化	57
2.9.3	プラズマ電流の組み込み	58
2.10	ラグランジュ補間	60
2.11	FDTD の境界条件	61
2.11.1	Mur の一次元境界条件	61
2.11.2	PML 境界条件	62
2.12	離散化法まとめ	63
2.13	イオン化周波数と拡散係数に依存する構造形成	64
第3章	数値計算による櫛状構造の解析	65
3.1	研究目的	65
3.2	数値計算方法	66
3.2.1	基礎方程式と計算手法	66
3.2.2	時間ステップと格子幅の決定	66
3.2.3	電離周波数と電子拡散を支配するパラメータ	67
3.2.4	計算領域と境界条件	68
3.3	数値計算結果	69
3.4	入射ミリ波の波長に対するピッチの依存性	71
3.5	櫛状構造を形成する物理について	72
3.6	電離波面の進展速度を決める物理について	73
3.6.1	二次元的な構造における電界集中	73
3.6.2	三次元的な構造における電界集中	74
3.7	測定結果を再現するための課題	76
3.8	まとめ	77
第4章	電離波面進展における累積電離効果	78
4.1	電子励起中性粒子による電離	78
4.2	電離波面を駆動するプリカーサ	79
4.3	輻射を介した励起中性粒子輸送モデル	81
4.3.1	光子を介した励起中性粒子の伝達	81
4.3.2	モデル化に用いる仮定	82
4.3.3	輻射を介した電子励起種輸送の拡散近似	83
4.3.4	励起中性粒子の拡散係数	85
4.3.5	励起中性粒子の生成項	85

4.3.6	基礎方程式	87
4.3.7	電子温度の導出法	89
4.3.8	反応係数	91
4.3.9	各方程式の離散化	92
4.3.10	計算領域と境界条件の設定	93
4.4	数値計算結果	94
4.4.1	計算条件の設定	94
4.4.2	進展の模擬	94
4.4.3	励起中性粒子の拡散係数への依存性.....	100
4.5	プリカーサによる電離波面の駆動	102
4.6	入射エネルギーの配分	103
4.7	クエンチング等による励起中性子減少の影響.....	104
4.7.1	励起中性粒子を減少させる化学反応.....	104
4.7.2	クエンチング等の影響への依存性.....	105
4.8	まとめ	106
第5章	結論	107
参考文献	108

図目次

図 1-1	マイクロ波ロケットの概念図	14
図 1-2	マイクロ波ロケットのエンジンサイクル	15
図 1-3	電極間放電の模式図	19
図 1-4	パッシェン曲線 ガス種や電極素材によって異なる	20
図 1-5	印加電界の周波数を 1 THz, 100 GHz, 10 GHz とした時の空気中における放電臨界電界強度の 中性粒子数密度に対する依存性	26
図 1-6	スケール長さを 1 mm として計算した印加電界の周波数を 1 THz, 100 GHz, 10 GHz とした時 の空気中における放電臨界電界強度の中性粒子数密度に対する依存性	28
図 1-7	大気中におけるミリ波放電の分類	29
図 1-8	電界集中によるフィラメント生成の模式図	30
図 1-9	領域 II におけるマイクロ波放電フィラメント構造の数値模擬	30
図 1-10	Hidaka らの実験の模式図	32
図 1-11	ミリ波放電プラズマの長露光写真	33
図 1-12	Y. Oda らの実験の模式図	33
図 1-13	進展プラズマの長露光写真	34
図 1-14	高速度カメラによる進展の様子	34
図 1-15	フラットトップビームによる電離波面で見られる楕状構造	35
図 1-16	電離波面の進展速度	35
図 1-17	超臨界条件における数値計算で得られた電子数密度分布	36
図 1-18	先行研究における電離波面進展速度の実験値と数値計算値	37
図 2-1	電離波面進展の模式図	39
図 2-2	Bolsig+で考慮されている電子周りのエネルギーフロー	51
図 2-3	電離波面の進展を解くための基礎方程式	53
図 2-4	FDTD における電場、磁場のメッシュ	56
図 2-5	吸収境界へと向かう電磁波	61
図 2-6	イオン化周波数と拡散係数によって変わる $\lambda/4$ 構造の有無	64
図 3-1	電離波面における楕状構造の模式図	65
図 3-2	格子収束性の確認	67
図 3-3	パラメータの値に対する進展速度の計算値	67
図 3-4	計算領域と境界条件	68
図 3-5	用いた初期電子分布のパターン	68
図 3-6	電子数密度分布の時間発展	69
図 3-7	電界の二乗平均平方根分布の時間発展	70
図 3-8	各パラメータを用いた計算における電離波面に見られる構造	70
図 3-9	波長 3.48 mm を用いた計算で得られた電子数密度分布	71
図 3-10	プラズモイド周りの電界振幅	72

図 3-11	一次元計算と二次元計算における電界振幅と電子数密度分布の違い.....	73
図 3-12	プラズモイド周りの電磁波のエネルギー流跡線(黒線)とポインティングベクトル(白矢印)、及びプラズマに吸収されるミリ波エネルギーの分布.....	74
図 3-13	(a)斜めから前からの電離波面撮影 (b)高速度カメラによる電離波面の写真	74
図 3-14	3次元計算における計算領域.....	75
図 3-15	H-k 面でのエネルギー流跡線(黒線)とポインティングベクトル(白矢印)、及びプラズマに吸収されるミリ波エネルギーの分布	75
図 4-1	プリカーサの模式図.....	80
図 4-2	輻射による励起中性粒子の輸送.....	81
図 4-3	本研究で提唱するモデルで用いる基礎方程式.....	88
図 4-4	本研究で提唱するモデルにおける電子周りのエネルギーフロー	91
図 4-5	計算領域の模式図.....	93
図 4-6	新モデルの計算による電離波面進展速度と先行研究における実験値、計算値の比較.....	94
図 4-7	計算により得られた電子数密度分布の時間発展	95
図 4-8	計算により得られた電子温度分布の時間発展	96
図 4-9	計算により得られた励起中性粒子数密度分布の時間発展	97
図 4-10	計算により得られた振動励起温度分布の時間発展	98
図 4-11	計算により得られた電界の平均二乗平方根分布の時間発展.....	99
図 4-12	励起中性粒子の拡散係数に対する進展速度の依存性	100
図 4-13	電子数密度分布に見られる $\lambda/4$ 構造	101
図 4-14	振動励起温度分布に見られる $\lambda/4$ 構造	101
図 4-15	進展速度に関わるパラメータの分布	102
図 4-16	入射エネルギーの行き先.....	103
図 4-17	電離波面進展速度の脱励起周波数に対する依存性	105

表目次

表 1-1	超臨界条件における Y. Hidaka らの実験条件	32
表 1-2	放電臨界強度を下回る条件における Y. Oda らの実験条件	34
表 3-1	進展速度 1 km/s を実現するパラメータのペア	68
表 3-2	数値計算で得られた最大電子数密度と構造のピッチ	70
表 4-1	代表的なクエンチング反応の係数	104

NOMENCLATURE

- a_1 : 音速
 A_{Ei} : アインシュタインの A 係数 (光脱励起速度係数)
 A_t : 推進機断面積
 B : 磁束密度
 c_0 : 光速
 d : 電極間距離
 D : 拡散係数
 D_a : 電子の両極性拡散係数
 D_e : 電子の自由拡散係数
 D_{eff} : 電子の有効拡散係数
 D_{en} : 電子のエネルギー拡散係数
 D_{ex} : 励起種の光輸送による拡散係数
 D_i : イオンの自由拡散係数
 e : 電気素量
 E : 電界
 E_0 : 電界の振幅
 E_{cr} : 放電臨界電界強度
 E_{eff} : 実効電界強度
 E_i : 電界における入射波成分
 E_s : 電界における電流に誘起された波の成分
 E_{sp} : 荷電粒子の偏りにより生じた電界
 E_{rms} : 電界の二乗平均平方根
 $E_{rms,cr}$: 高周波における放電臨界電界強度
 f : 任意の分布関数
 f_e : 電子のエネルギー分布関数
 f_i : 正味のイオン化周波数
 F : 粒子にかかる力
 H : 磁界
 H_s : 磁界における電流に誘起された波の成分
 I_c : 一回のエンジンサイクルで得られる運動量
 J_e : 電流密度
 k_B : ボルツマン定数
 $k_{i,r}(\varepsilon)$: 粒子種 i とエネルギー ε を持つ電子の衝突反応 r の反応係数
 K_a : 電子付着の反応係数
 K_i : イオン化の反応係数
 $K_{0,i}$: 基底から i 番目の電子励起種への反応係数

$K_{i,0}$: i 番目の電子励起種から基底への反応係数
 $K_{i,\text{ion}}$: i 番目の電子励起種からイオン化する反応係数
 K_{0i}^{v} : 基底から i 番目の振動励起種への反応係数
 $K_{n,0}^{\text{v}}$: i 番目の振動励起種から基底への反応係数
 l_f : 電子の平均自由行程
 l_{ion} : 電子が衝突電離に十分なエネルギーを電界からもらう距離
 l_t : 推進機の長さ
 l_p : 電子数密度勾配のスケール長さ
 L : 電離波面のスケール長さ
 m : 粒子の質量
 m_e : 電子質量
 m_h : 重粒子質量。ここでは窒素分子の質量
 m_i : イオンの質量
 n : 数密度
 n_c : カットオフ密度
 n_e : 電子数密度
 n_n : 中性粒子数密度
 n_n^* : 全電子励起中性粒子の合計密度
 $n_{n,i}^*$: ある電子励起中性粒子種 i の密度 0の場合は基底
 $n_{n,i}^{\text{v}}$: ある振動励起中性粒子 i の密度 0の場合は基底
 N_e : 電子の数
 p : 圧力
 p_0 : 雰囲気圧
 p_1 : 推力生成時の推進機内部圧力
 \mathbf{P} : 圧力テンソル
 P_{MMW} : 入射ミリ波のパワー
 q : 単位体積当たりの電荷
 q_e : 電子一つが単位時間あたりにもらうエネルギー
 \mathbf{Q} : 熱流束ベクトル
 Q_v : 振動励起種への入熱量
 r_{2b} : 基底への2体再結合係数
 r_i : ある電子励起種 i への3体再結合係数
 \mathbf{R} : 運動量生成項
 s_{IB} : 入射ミリ波の逆制動放射吸収係数
 S : 粒子生成項
 S_e : 電子生成項
 S_{ex} : 励起種生成項
 S_L : レーザーのパワー密度

S_e : エネルギー生成項
 t : 時間
 T : 温度
 T_e : 電子温度
 T_{ex} : 電子励起種の分布温度
 T_v : 振動励起温度
 u : 平均速度
 u_e : 電子の平均速度
 U_{ion} : 電離波面の進展速度
 U_{CJ} : チャップマン - ジュゲ速度
 v : 粒子の速度
 v_e : 電子の速度
 V_d : 絶縁破壊電圧
 Z : 波動インピーダンス
 Z_0 : 真空の波動インピーダンス
 Z_{ex} : 電子励起種の分配関数
 Z_v : 振動励起種の分配関数
 α, β : 任意のパラメータ 定義は章によって異なる
 γ : イオン一つが電極に衝突した際に放出される電子の数
 γ_g : ガスの比熱比
 ε : エネルギー
 ε_0 : 真空の誘電率
 ε_c : 一回のエンジンサイクルで投入可能なエネルギー
 ε_v : 中性粒子一つ当たりの平均振動励起エネルギー
 ϵ_{ion} : イオン化エネルギー
 ϵ_i : ある電子励起種 i の励起エネルギー
 ϵ_i^v : ある振動励起種 i の励起エネルギー
 $\epsilon_{i,r}$: ある粒子種 i に対する電子衝突反応 r の反応エネルギー
 κ : 光脱励起で生じた光子の再吸収係数
 λ : 電磁波の波長
 λ_D : デバイ長
 μ : 移動度
 μ_0 : 真空の透磁率
 μ_e : 電子の移動度
 μ_i : イオンの移動度
 ν_a : 電子付着周波数
 ν_i : イオン化周波数
 ν_m : 衝突周波数

ν_r : 再結合周波数
 ρ_0 : 雰囲気ガスの質量密度
 σ : 衝突断面積
 σ_E : 電気伝導率
 σ_M : 磁気伝導率
 τ_2 : エンジンサイクルにおける電離波面の進展時間
 τ_3 : エンジンサイクルにおける膨張波の進展時間
 τ_q : クエンチング等による光の放出を伴わない脱励起のタイムスケール
 Φ : 電位
 χ_i : 粒子種*i*の存在比
 Ψ : 任意の物理量
 ω : 電磁波の角周波数
 ω_c : 電子のサイクロトロン周波数

第1章

序論

波長が数ミリ程度のミリ波ビームを用いた大気放電実験において電離波面がビーム源の方向に向かって進展していく様子が観測されており、この現象を用いて地上から伝送されたミリ波のエネルギーを推力へと変換するビーミング推進機「マイクロ波ロケット」が提唱されている。この推進機の推進性能は電離波面の進展速度に大きく依存しており、この進展速度を正しく予測することが性能を上げるうえで不可欠である。同様の電離波面進展現象は用いる入射電磁波の波長が数センチ程度のマイクロ波帯、波長が数十マイクロメートル以下のレーザー波長帯においても観測されており、それぞれ進展構造、速度が異なっていることが知られている。この電離波面の進展は、ビーム強度が放電臨界強度以上の条件におけるものと臨界強度以下の条件におけるものとに分けられ、十分な電離が起きないはずの臨界強度以下においてもなぜ放電が維持されるかについて多くの先行研究が存在する。マイクロ波放電における進展ではフィラメント状の構造が電界集中を引き起こし、それにより臨界強度以下での放電が維持されているという先行研究があり、構造が観測されていないレーザー放電における先行研究では衝撃波が放電を誘起していると考えたと実験結果を説明できるとされている。一方臨界強度以下のミリ波放電実験では、マイクロ波放電で観測されている構造なしに電離波面が進展している様子が観測されており、この進展速度はレーザー放電によるものと比べてパワー密度に対する依存性が大きく異なっている。このため、ミリ波放電における電離波面の進展は他の波長帯におけるものと同じ進展原理では説明が出来ず、満足にこの進展速度を説明できている先行研究は存在しない。本章ではこれらに関する背景知識や先行研究について詳しく説明する。

1.1 マイクロ波ロケット

1.1.1 マイクロ波ロケットの原理

現在、宇宙太陽光発電衛星などの大型施設を軌道上に建設する上で、最も大きな障壁となっているのは、地上から軌道上に資材を輸送するコストが非常に高いことにある。現在運用されているロケットでは、低軌道でも1トンあたり数億円程度かかる、これでは数万トンの重量が想定されている宇宙太陽光発電衛星のための資材を打ち上げるのに1000兆円程度もかかってしまう。実際に現実的な予算はこれの1/100程度であることを考えると、打ち上げのコストを1/100程度まで減らさなければいけないことになる。このような超低価格化を実現する新しい打ち上げシステムの一つとして考えられているのがマイクロ波ロケットである [1]。マイクロ波ロケットとは、地上から推進器にミリ波と呼ばれる波長帯の電磁波を照射し、そのエネルギーで推進器内部の空気を加熱し推力に換えようというものである(図 1-1)。この方式には大きく分けて三つの利点がある。一つ目は、空気を吸い込み加熱するため推進剤を搭載しなくても良く、非常に高いペイロード比を実現することが出来ることである。二つ目は推進器自体の構造が非常に簡素なことであることで、これにより推進器本体は非常に安価に作成することが出来る。三つ目はミリ波を発信するビーム基地は地上にあり、何度でも使用することが可能なことである。ビーム基地そのものは建設に多額の費用が必要であるが、一度作ってしまえば何度でも使用でき、地上にあるため

整備もしやすく、また打ち上げでトラブルが起きたとしても深刻な損傷を負う確率は低い。以上三つの利点から、一回あたりの打ち上げコストを非常に安価なものとするのが可能となる [2]。

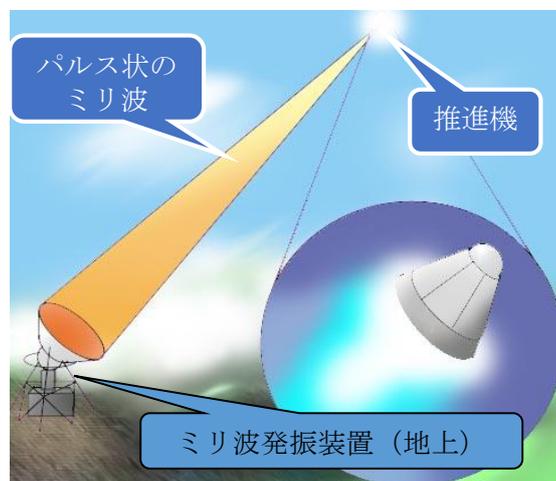


図 1-1 マイクロ波ロケットの概念図

ここでマイクロ波ロケットのエンジンサイクルについて説明する。このエンジンサイクルは大まかに4つのステップに分けることができる(図 1-2)。使用するミリ波はパルス状のものをを用いており、最初の2ステップではミリ波が推進器の開口端から入射しており、残りの2ステップではミリ波が入射していない。最初のステップは放電開始のステップである。推進器内に入射したミリ波はその最深部に設置された放物面鏡によって集光され、空気の絶縁破壊を起こし、プラズマを発生させる。次のステップでは電離波面の進展及び推進器内部の空気の過熱を行う。電離波面が集光点からミリ波のエネルギーを吸収し入射方向へと進展していく性質を利用し、推進器内部の空気を順次過熱していく。このときプラズマの伸展は衝撃波を伴う。3つめのステップでは排気を行う。開口端まで進展した電離波面を、ミリ波を止めることにより消し、推進器内部に溜まった高温高压の空気を外へと排出する。マイクロ波ロケットの推力のほとんどがこのステップで生み出される。最後のステップは吸気である。高压のガスが推進器外部へと排出しきると、今度は圧力振動により推進器内部に負圧の領域が生まれる。この負圧を利用し推進器側面に取り付けられたリード弁から新しい空気を取り込み最初の状態へと戻す。この4ステップを繰り返すことにより断続的に推力を得ることが出来る。

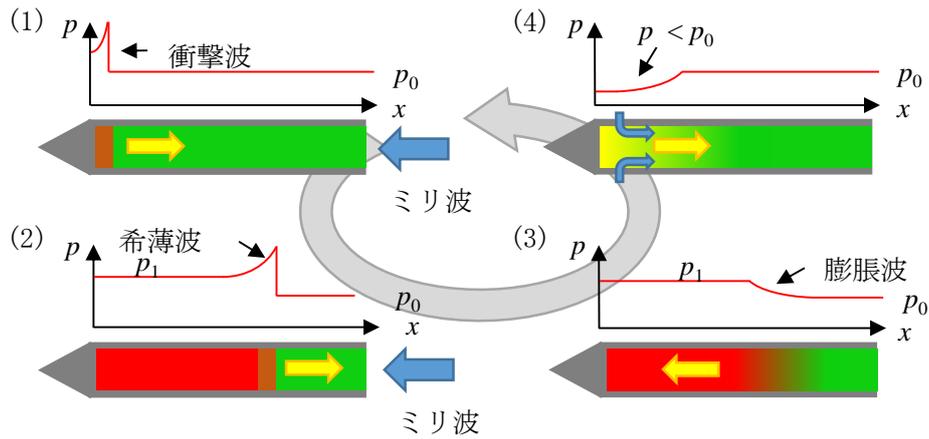


図 1-2 マイクロ波ロケットのエンジンサイクル

1.1.2 生成される推力

ここで、この推進器で生成される推力がどのようなになるか考える。電離波面の進展時間、すなわち図 1-2 の(2)の維持時間を τ_2 、膨張波の進展時間、すなわち図 1-2 の(3)の維持時間を τ_3 とおくと、1 サイクルで得られる運動量 I_c は、推進器内部の圧力 p_1 、推進器断面積 A_t に対して大まかに以下の様に書ける。

$$I_c = A_t(\tau_2 + \tau_3)(p_1 - p_0) \quad (1-1)$$

まず、 p_1 がどのような値となるか考える。推進器の軸方向長さを l_t 、電離波面の速度を U_{ion} と置くと、電離波面が推進器内部にある時間の最大値は l_t/U_{ion} であるので、一回のサイクルで投入可能なエネルギー ε_c は入射ミリ波のパワー P_{MMW} に対して以下の式で表せる。

$$\varepsilon_c = \frac{l_t}{U_{ion}} P_{MMW} \quad (1-2)$$

電離波面速度が十分に早く、定積加熱が仮定できるとすると、推進器内部の圧力 p_1 は並進エネルギーへの変換効率 α 、推進器断面積 A_t 、大気圧 p_0 に対して以下の様になる。

$$p_1 = \frac{2}{3} \alpha \frac{P_{MMW}}{A_t U_{ion}} + p_0 \quad (1-3)$$

α は実験値 [3]から計算すると1/3程度となる。 τ_2 については、電離波面が推進器を抜けていくまでの時間であるので次の式で与えられる。

$$\tau_2 = \frac{l_t}{U_{\text{ion}}} \quad (1-4)$$

また、 τ_3 については膨張波先端の進展速度が高圧域での音速 a_1 であることを考えると、理想気体を仮定して以下の様になる。

$$\tau_3 = \frac{l_t}{a_1} = l_t \sqrt{\frac{\rho_0}{\gamma p_1}} \quad (1-5)$$

ここで γ は推進器内部の気体の比熱比である。この式に式(1-3)を代入して変形すると

$$\tau_3 = l_t \sqrt{\frac{3\rho_0 A_t U_{\text{ion}}}{\gamma(2\alpha P_{\text{MMW}} + 3p_0 A_t U_{\text{ion}})}} \quad (1-6)$$

式(1-1)に式(1-4)と式(1-6)を代入して推力を求めると次の様になる。

$$I_c = \frac{2}{3} \alpha \frac{l_t P_{\text{MMW}}}{U_{\text{ion}}} \left(\frac{1}{U_{\text{ion}}} + \sqrt{\frac{3\rho_0 A_t U_{\text{ion}}}{\gamma(2\alpha P_{\text{MMW}} + 3p_0 A_t U_{\text{ion}})}} \right) \quad (1-7)$$

また、運動量結合係数 C_m は式(1-7)を式(1-2)で割ることで求められ、以下で与えられる。

$$C_m = \frac{2}{3} \alpha \left(\frac{1}{U_{\text{ion}}} + \sqrt{\frac{3\rho_0 A_t U_{\text{ion}}}{\gamma(2\alpha P_{\text{MMW}} + 3p_0 A_t U_{\text{ion}})}} \right) \quad (1-8)$$

このままでは各パラメータに対する依存性が分かりにくいのでもう少し簡略化することを考える。式(1-7)や式(1-8)の右辺にあるかっこの中身は式(1-5)を使うと以下の様にできる。

$$\frac{1}{U_{\text{ion}}} + \sqrt{\frac{3\rho_0 A_t U_{\text{ion}}}{\gamma(2\alpha P_{\text{MMW}} + 3p_0 A_t U_{\text{ion}})}} = \frac{a_1 + U_{\text{ion}}}{a_1 U_{\text{ion}}} \quad (1-9)$$

これを用いて式(1-7)と式(1-8)を書き換えると以下の様になる。

$$I_c = \frac{2}{3} \alpha \frac{l_t P_{\text{MMW}}}{U_{\text{ion}}} \frac{a_1 + U_{\text{ion}}}{a_1 U_{\text{ion}}} \quad (1-10)$$

$$C_m = \frac{2}{3} \alpha \frac{a_1 + U_{\text{ion}}}{a_1 U_{\text{ion}}} \quad (1-11)$$

U_{ion} が C-J 速度付近の値をとるときはデトネーションエンジンと同様になるため $a_1 = U_{\text{ion}}/2$ 程度となると考えられる [4]。また、 U_{ion} が a_1 よりも大きくなる場合には I_c 、 C_m は以下の値に近づく。

$$I_c \rightarrow \frac{2}{3} \alpha \frac{l_t P_{\text{MMW}}}{U_{\text{ion}} a_1} \quad (1-12)$$

$$C_m \rightarrow \frac{2}{3} \frac{\alpha}{a_1} \quad (1-13)$$

これらの結果から、電離波面の進展速度 U_{ion} によって、推力や運動量結合係数が増加することが分かった。この進展速度 U_i はミリ波放電の物理から決まっており、マイクロ波ロケットの性能を評価するにはこのミリ波放電現象に対する理解を深めることが必要である。

1.2 放電の物理過程

1.2.1 電極間放電

ここでは、電極間で起きる放電について説明する [5]。図 1-3 にこの放電の模式図を示す。気体中には自然界に存在する放射線等の影響で電子やイオンが 1 cm^3 に 10 個から 100 個程度存在するといわれており、この偶存電子が放電開始時において重要な役割を担う。まず、陰極付近の偶存電子が電界により加速されながら陽極へと向かう。この途中で中性粒子と衝突することで電離が起り、イオンが生成される。生成されたイオンは電界に加速されて陰極に衝突し、二次電子放出がおきる。これにより陰極付近に生成された電子が電界に加速されながら陽極へと向かう。このプロセスの繰り返りで電子が増えていけば放電が開始、維持されることになる。このプロセスを式で考える。電子が電界により加速され、ある距離を進んだ後に中性粒子と衝突を起こすわけだが、このときに電子がイオン化エネルギー ϵ_{ion} 以上のエネルギーを得ていれば、電離を起こすことが可能である。まず、この電離可能な電子の数を考える。電子がある距離 l 進むことが出来る単位長さ当たりの確率 $P(l)$ は平均自由行程 l_f に対して以下の様になる。

$$P(l) = \frac{1}{l_f} \exp\left(-\frac{l}{l_f}\right) \quad (1-14)$$

印加電場 E から電子がイオン化エネルギー ϵ_{ion} を得るには距離 $l_{\text{ion}} = \epsilon_{\text{ion}}/(eE)$ 以上進めばよいので、電子が十分なエネルギーを得る確率は以下で求められる。

$$\int_{l_{\text{ion}}}^{\infty} P(l) dl = \exp\left(-\frac{\epsilon_{\text{ion}}}{eEl_f}\right) \quad (1-15)$$

これは、電子の生成位置から十分遠くであれば、ある電子が十分なエネルギーを持っている確率とみなせる。この高エネルギー電子が平均自由行程 l_f で中性粒子と衝突して電離を起こすことを考えると、電子一つが単位距離進む間に起こす電離の数 α は以下の様に求められる。

$$\alpha = \frac{1}{l_f} \exp\left(-\frac{\epsilon_{\text{ion}}}{eEl_f}\right) \quad (1-16)$$

このことから、陰極付近に存在する偶存電子の数を $N_{e,0}$ とすると、これらが電極間距離 d を進む間に指数関数的に増えるので、陽極に入る電子の数 $N'_{e,0}$ は以下の様になる。

$$N'_{e,0} = N_{e,0} \exp(\alpha d) \quad (1-17)$$

この過程で生成されたイオンの数は、一価のイオンしか存在しないとすると電子の生成数と同じであるので、 $N'_{e,0} - N_{e,0}$ である。これらのイオン一個の衝突で陰極から放出される電子の数の平均を γ とおくと二次電子放出量は以下の様になる。

$$N_{e,1} = \gamma(N'_{e,0} - N_{e,0}) = \gamma\{\exp(\alpha d) - 1\}N_{e,0} \quad (1-18)$$

よって、このプロセスによって陰極近傍の電子が増加する条件は以下の様になる。

$$\frac{N_{e,1}}{N_{e,0}} = \gamma\{\exp(\alpha d) - 1\} > 1 \quad (1-19)$$

これが放電開始の条件となる。これに式(1-16)を代入して変形すると以下の様になる。

$$E > \frac{\epsilon_{\text{ion}}/(el_f)}{\ln\left(\frac{d}{l_f}\right) - \ln\left(\ln\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)\right)} \quad (1-20)$$

さらに、平均自由行程 l_f は中性粒子密度 n_n と衝突断面積 σ を用いて $l_f = (\sigma n_n)^{-1}$ と表せることを使い、さらに電極間電圧 V は $V = Ed$ であることを考慮すると

$$V > \frac{(\sigma \epsilon_{\text{ion}}/e)n_n d}{\ln(\sigma n_n d) - \ln\left(\ln\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)\right)} \equiv V_d \quad (1-21)$$

となる。この V_d を絶縁破壊電圧、あるいは放電臨界電圧と呼ぶ。 V_d は $n_n d$ の関数として書き表せ、この関係をパッシェンの法則と呼ぶ。また、 V_d と $n_n d$ をそれぞれ縦軸、横軸にプロットしてできた曲線をパッシェン曲線と呼ぶ。この曲線を式(1-21)に適当なパラメータを代入して大まかに描いたものを図 1-4 に示す。なお、多くの教科書では $n_n d$ ではなく圧力 p を用いて pd の関数としているが、これには歴史的な意味合いしかなく、温度に依存してしまう p よりも中性粒子密度 n_n を用いるほうが物理に即しているためこのようにした。

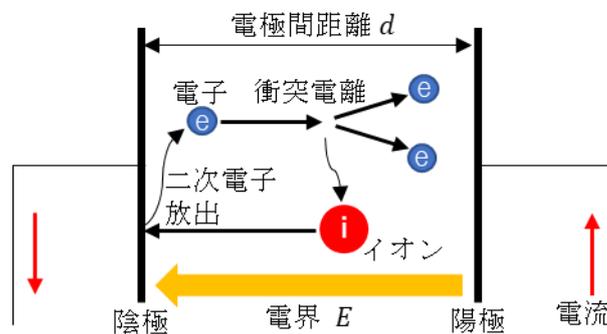


図 1-3 電極間放電の模式図

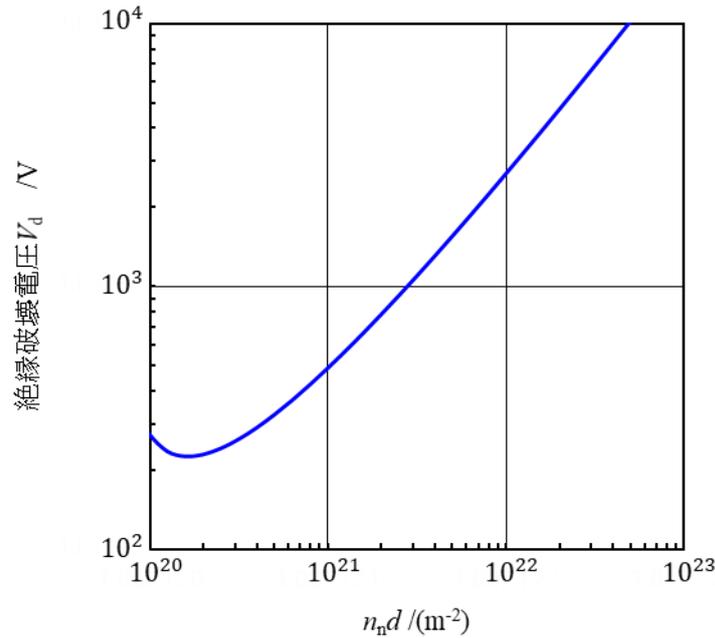


図 1-4 パッシェン曲線 ガス種や電極素材によって異なる

1.2.2 無電極での放電

電極間での放電の場合は電極間距離で加速される電子の増加量と、イオンが陰極に衝突することによる二次電子放出が放電開始を決める重要なパラメータであった。これは、電子が陽極で消滅するため、これを上回る電子生成が二次電子放出と電極間での衝突電離によって起きることが放電開始に必要なからである。ここで、放電開始時において電極あるいは壁面での電子損失が無視できるほど小さい場合はどうなるかについて考える。これは平均自由行程 l_f や電離エネルギーを得られる距離 l_{ion} にくらべて電極間距離ないしは壁面間距離が十分長い場合、あるいは磁場等により電極面への電子損失が阻害されている場合などに起こりうる。このような場合、放電開始時の低電離度状態においては電子を減らす影響として電子付着反応が主なものとなる。すなわち、衝突電離による増加が電子付着による減少を上回ることが放電開始の条件となる。これをパッシェンの法則と同様の方法で考えるとすると、式(1-15)で求められる電離に寄与できる電子の割合が、電子付着反応が可能な低エネルギー電子の割合を上回るような電界 E の印加が放電開始の条件ということになるわけだが、実際はこれよりも低い電界でも放電が可能である。これは、式(1-15)では静止電子が電界に平行な方向に加速される場合のみを考えていたが、電子の熱運動も電離に寄与できるからである。電子付着反応が寄与しうるような電子の運動エネルギー領域では、電子の弾性衝突による影響が卓越してくる。この弾性衝突によって電子が跳ね返される方向は、古典的に考えれば衝突断面積のうちどこに入るかに依存する。断面積の真ん中で衝突すれば来た方向に戻ることであり、断面積の端で当たれば軌道が少しずれるだけである。ここで、電子と重粒子が十分沢山あり、統計的な議論ができることとすると、電子は衝突によってランダムな方向に跳ね返され、進行方向がランダムな電子群が生まれることになる。ランダム運動とはすなわち熱運動であるので、これは衝突によって電子の熱エネルギーとなったと言えることが出来る。このようなプロセスによって、電子が電界から受けたエネルギーは熱運動へと蓄積されるため、放電開始条件を考えるにはこの熱運動による電離も含め

て電子付着反応を上回る条件を探さなければならない。この条件について式を交えて考える。まず、電界から電子がもらう熱エネルギーについて考える。電子の速度の平均値 $\mathbf{u}_e \equiv \langle \mathbf{v}_e \rangle$ に対する運動方程式を書くと、弾性衝突周波数 ν_m に対して以下で与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E} - \nu_m \mathbf{u}_e \quad (1-22)$$

ここで定常を仮定して \mathbf{u}_e の時間変化が十分に小さいとすると

$$\mathbf{u}_e = -\frac{e\mathbf{E}}{m_e\nu_m} \quad (1-23)$$

となる。よって、電子一つ当たり単位時間当たりにももらうエネルギー q_e は以下の様に求められる

$$q_e = -e\mathbf{E}\mathbf{u}_e = \frac{e^2|\mathbf{E}|^2}{m_e\nu_m} \quad (1-24)$$

この q_e を受けて電子の熱エネルギーが上がっていくことになるわけだが、熱エネルギーが上がるとそれに応じて非弾性衝突によって電子が失うエネルギーも大きくなるため、この失うエネルギーとももらうエネルギー q_e が釣り合う点で落ち着くことになる。これを式で書くと、ある粒子種 i と電子の衝突反応 r に対する反応エネルギーと反応係数をそれぞれ $\epsilon_{i,r}$ 、 $k_{i,r}(\epsilon)$ として以下の様になる。

$$q_e = \sum_{i,r} n_i \int_0^\infty \epsilon_{i,r} k_{i,r}(\epsilon) f_e(\epsilon) d\epsilon \quad (1-25)$$

この電子のエネルギー分布関数 $f_e(\epsilon)$ がボルツマン分布に従い、未知パラメータが電子温度 T_e のみであると仮定すると式(1-24)と式(1-25)からこの T_e を求めることが可能であるが、厳密に電子のエネルギー分布まで求めるのであれば各電子の速度分布に対してこのエネルギーバランスの式を解く必要がある。ここから求められる $f_e(\epsilon)$ を用いて放電開始の条件を表すと衝突電離の反応係数 $k_{i,\text{ion}}(\epsilon)$ と電子付着の反応係数 $k_{i,\text{att}}(\epsilon)$ に対して以下の様になる。

$$\sum_i n_i \int_0^\infty k_{i,\text{ion}}(\epsilon) f_e(\epsilon) d\epsilon > \sum_i n_i \int_0^\infty k_{i,\text{att}}(\epsilon) f_e(\epsilon) d\epsilon \quad (1-26)$$

よって、これを満たすような $f_e(\epsilon)$ を与えるのに十分な q_e となることが放電の条件となる。ここまで ν_m は簡単のため弾性衝突周波数であるとしてきたが、エネルギーの吸収量を計算する上では運動量の輸送があればどのようなものでもよく、総称して運動量輸送周波数と呼ばれる。放電開始条件についてももう少し考える。式(1-24)にある運動量輸送周波数 ν_m を、運動量輸送反応係数 $k_{i,m}(\epsilon)$ を使って細かく書くと以下

の様になる。

$$v_m = \sum_i n_i \int_0^\infty k_{i,m}(\varepsilon) f_e(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1-27)$$

ここで式(1-25)に(1-24)、(1-27)を代入し、さらに粒子種*i*の存在比 χ_i を用いて $n_i = \chi_i n_n$ としてエネルギーバランスの式を書き直すと、

$$\frac{|E|^2}{n_n^2} = \frac{m_e}{e^2} \sum_{i,r} \chi_i \int_0^\infty \epsilon_{i,r} k_{i,r}(\varepsilon) f_e(\varepsilon) d\varepsilon \cdot \sum_i \chi_i \int_0^\infty k_{i,m}(\varepsilon) f_e(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1-28)$$

となる。この式を見ると、電子のエネルギー分布 $f_e(\varepsilon)$ が電子温度 T_e で決まるボルツマン分布であることを仮定した場合、右辺が電子温度 T_e の関数であり、左辺が $|E|/n_n$ の関数となっていることが分かる。このことから、電子温度 T_e が $|E|/n_n$ の関数として書けることが分かる。同様の関係はボルツマン分布を仮定しない場合でも成り立ち、 $f_e(\varepsilon)$ は $|E|/n_n$ によって決まる。この $|E|/n_n$ は換算電界強度と呼ばれ、しばしばタウンゼント($\text{Td} = 10^{-21} \text{ Vm}^2$)という単位によって表記される。以上より、式(1-26)で等式が成り立つような $|E|/n_n$ が一つ存在することになる。ある n_n に対してこれを満たす電界強度を放電臨界強度 E_{cr} と呼ぶ。当然この E_{cr} は n_n に対して比例の関係となる。空気中におけるこの臨界を与える換算電界強度を、Bolsig+ [6]と呼ばれるフリーのソフトウェアを用いて計算した電子のエネルギー分布から求めると 106 Td となる。ここから、大気中における臨界電界強度 E_{cr} を求めると、これに大気の中性粒子密度 $2.7 \times 10^{25} /\text{m}^3$ をかけてやればよいので、 $E_{\text{cr}} = 2.8 \text{ MV/m}$ となる。なお、この値はあくまで計算値であり、実験値として大気の放電臨界電界強度を $E_{\text{cr}} = 2.4 \text{ MV/m}$ としている先行研究が多く存在する。

1.3 高周波における加熱過程

ここでは、高周波中では放電について考える。この場合、電子一つが電界からもらうエネルギーが 1.2.2 項における式(1-24)から変わってくる。本節では、高周波における電子加熱過程について説明する。

1.3.1 逆制動放射加熱

ガス中に高周波電界を印加した場合においても、ガス中の種電子がエネルギーを吸収し、エネルギーを得た電子が重粒子に衝突することによりプラズマを生成、維持することが出来る。この放電は無電極で起こすことが出来るため、電極損耗の心配がなく、長時間の放電に適しており、イオンスラストのプラズマ源 [7]に用いられることもあり、また、本研究で扱うミリ波放電における加熱過程でもある。ここで、どのような仕組みで電子が高周波からエネルギーをもらうのかについて考える。この過程は本研究において重要な過程であるため、ここで詳しく説明しておく [8]。まず、ある空間に電子が一つ存在する場合を考える。これに電磁波の振動電界 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$ が加わると、電子は以下の運動方程式に従い加速と減速を繰り返す。

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E} \quad (1-29)$$

ここで電磁波中の磁場の影響は一般的に電界による影響に比べて十分小さいため無視した。この方程式の解は $\mathbf{v}_e = (e\mathbf{E}_0/m_e)\cos\omega t + \mathbf{v}_{e,0}$ となるが、これは初速 $\mathbf{v}_{e,0}$ 周りの単振動であり、エネルギーの蓄積は起こらず、電磁波のエネルギーは吸収できない。ここで、振動中の電子が中性重粒子と弾性衝突するとどうなるかについて考える。弾性衝突には 1.2.2 節で説明したようにある方向への運動を熱運動へと変える効果がある。これにより、電子が振動時に一時的にもらっていたエネルギーが蓄積可能な熱エネルギーへと変換され、電磁波エネルギーの吸収することが出来る。

このエネルギーの吸収過程を式で考える。まず、1回の弾性衝突で起きる電子の運動量変化の平均は $m_e \mathbf{v}_e$ である。これは衝突断面積で積分すると求められる。これを考慮して電子の速度の平均値 $\mathbf{u}_e \equiv \langle \mathbf{v}_e \rangle$ に対する運動方程式を書くと、弾性衝突周波数 ν_m に対して以下の様になる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E} - \nu_m \mathbf{u}_e \quad (1-30)$$

これに入射電界 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$ を代入すると次の様に書ける。

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0 \sin \omega t - \nu_m \mathbf{u}_e \quad (1-31)$$

この微分方程式の解は

$$\mathbf{u}_e = \frac{e\mathbf{E}_0}{m_e\sqrt{\omega^2 + \nu_m^2}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (1-32)$$

$$\varphi = \arctan \frac{\nu_m}{\omega} \quad (1-33)$$

である。ここで、速度 \mathbf{v} で動いている物体が得るエネルギーは $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ であるので、電磁波から単位時間当たりに電子が吸収するエネルギーは $\langle -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_e \rangle$ とあらわせる。これを計算すると次の様になる。

$$\begin{aligned} q_e = \langle -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_e \rangle &= -e \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_e dt \cdot \frac{\omega}{2\pi} \\ &= \frac{e^2 E_0^2 \nu_m}{2m_e(\omega^2 + \nu_m^2)} \end{aligned} \quad (1-34)$$

この吸収過程はジュール加熱と呼ばれることも多いが、微視的な視点から議論する場合には逆制動放射と呼称される。

1.3.2 ECR 加熱

ECR 加熱は Electron cyclotron resonance 加熱の略で電子のサイクロトロン共鳴を利用したプラズマの加熱方式である。磁場中において、電子は磁束密度 B の磁力線の周りを以下に示すサイクロトロン周波数で回る。

$$\omega_c = \frac{eB}{m_e} \quad (1-35)$$

この周波数が印加する高周波電界の周波数と一致するとき、電子が効率よく高周波のエネルギーを吸収できる。これを用いた加熱は、イオンスラスタのプラズマ源 [9, 10]や、トカマクプラズマのミリ波ビームによる加熱 [11]等に利用される。

1.4 高周波中の放電

ここでは 1.3.1 項で説明した逆制動放射加熱による放電について説明する。

1.4.1 高周波放電における放電臨界電界強度

高周波中での放電条件について考える [8]。高周波における電子一つ当たり単位時間当たりにもらうエネルギー q_e は 1.3.1 項で求めた式(1-34)より以下で与えられる。

$$q_e = \frac{e^2 E_0^2 \nu_m}{2m_e(\omega^2 + \nu_m^2)} \quad (1-36)$$

これを用いて 1.2.2 項と同様のエネルギーバランスを解けばよい。ここで式(1-24)と式(1-36)の比較から以下の様に実効電界強度を設定すると

$$E_{\text{eff}} = \frac{E_0/\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \omega^2/\nu_m^2}} \quad (1-37)$$

この E_{eff} に対して直流電界の場合と全く同じ議論ができる。したがって $f_e(\varepsilon)$ は E_{eff}/n_n によって決まり、放電条件も E_{eff}/n_n で決まることになる。式(1-37)を、電界の二乗平均平方根 $E_{\text{rms}} = E_0/\sqrt{2}$ を用いて書くと以下の様になる。

$$E_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{rms}}}{\sqrt{1 + \omega^2/\nu_m^2}} \quad (1-38)$$

このようにすると、高周波の周波数 ω が ν_m より十分小さい時に $E_{\text{eff}} = E_{\text{rms}}$ となる。よって、式(1-26)で等式を与えるような換算電界強度を $(E/n_n)_{\text{cr}}$ とおくと、高周波における放電臨界強度 $E_{\text{rms,cr}}$ は以下の様になる。

$$E_{\text{rms,cr}} = (E/n_n)_{\text{cr}} n_n \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\nu_m^2}} \quad (1-39)$$

この式から、 $\omega/\nu_m \ll 1$ の場合に $E_{\text{rms,cr}}$ は

$$E_{\text{rms,cr}} \approx (E/n_n)_{\text{cr}} n_n \quad (1-40)$$

となり、 $\omega/\nu_m \ll 1$ の場合には式(1-27)とあわせて

$$E_{\text{rms,cr}} \approx \frac{(E/n_n)_{\text{cr}} \omega}{\sum_i \chi_i \int_0^\infty k_{i,m}(\varepsilon) f_e(\varepsilon) d\varepsilon} \quad (1-41)$$

という n_n によらない値となることが分かる。印加電界の周波数を 1 THz, 100 GHz, 10 GHz とした時の、空気中における $E_{\text{rms,cr}}$ の n_n に対する依存性を 1.2.2 節の最後で説明した電子エネルギー分布の計算値から求めて図示すると図 1-5 の様になる。これを見ると、臨界電界強度の最小値は周波数が上がると高くなること分かるが、これは式(2-18)より明らかである。

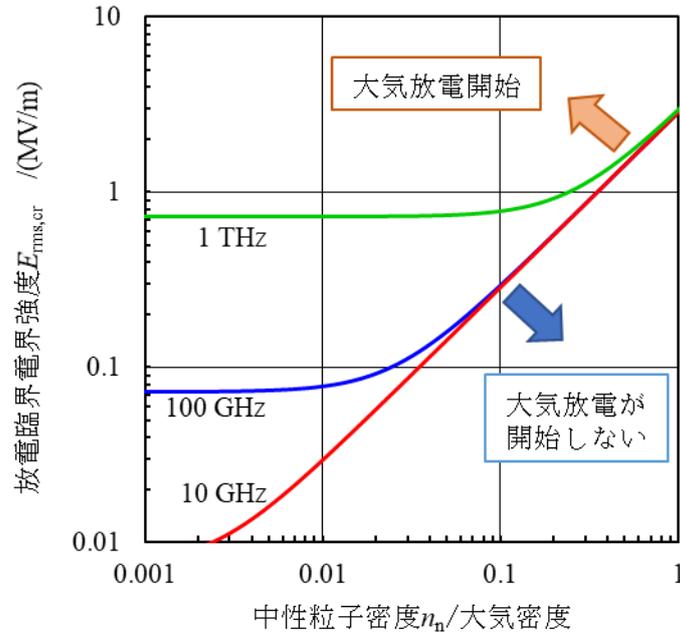


図 1-5 印加電界の周波数を 1 THz, 100 GHz, 10 GHz とした時の空気中における放電臨界電界強度の中性粒子数密度に対する依存性 横軸は大気における中性粒子数密度で規格化

1.4.2 電子拡散の影響を加えた臨界電界強度

前の項において求めた臨界電界強度は放電が起きる領域の大きさが無限に大きい場合に成り立つものである。しかし実際には放電領域はある有限の大きさを持っており、これが小さいと、生成された電子が拡散によって外部に逃げていく効果が無視できなくなるはずである。本項ではこの拡散による影響を考慮した場合の放電開始条件について考える [8]。まず、式をシンプルに書くため以下に示すイオン化周波数 ν_i と再結合周波数 ν_a を導入する。

$$\nu_i \equiv n_n \sum_i \chi_i \int_0^\infty k_{i,\text{ion}}(\varepsilon) f_e(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1-42)$$

$$\nu_a \equiv n_n \sum_i \chi_i \int_0^\infty k_{i,\text{att}}(\varepsilon) f_e(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1-43)$$

これを用いて電子数密度 n_e の拡散方程式を書くと、拡散係数 D に対して以下の様になる。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - D\nabla^2 n_e = (v_i - v_a)n_e \quad (1-44)$$

この式の導出等の詳しい説明は第 2 章で行う。電子数密度の勾配の典型的なスケール長さを l_p とおいて近似をすると以下の様になる。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = (v_i - v_a)n_e - \frac{D}{l_p^2}n_e \quad (1-45)$$

ここで、放電が開始するには $\partial n_e / \partial t > 0$ となればよいので、以下の放電開始条件式が導かれる。

$$v_i - v_a - \frac{D}{l_p^2} > 0 \quad (1-46)$$

これを変形すると以下の様になる。

$$\begin{aligned} \frac{v_i}{v_a + \frac{D}{l_p^2}} &> 1 \\ \frac{v_i}{v_a} \left(1 + \frac{D}{v_a l_p^2}\right)^{-1} &> 1 \end{aligned} \quad (1-47)$$

ここでさらに $K_i \equiv v_i/n_n$ 、 $K_a \equiv v_a/n_n$ を導入して書き換えると

$$\frac{K_i}{K_a} \left(1 + \frac{D}{K_a n_n l_p^2}\right)^{-1} > 1 \quad (1-48)$$

となる。拡散がない場合の放電開始条件は自明に $K_i/K_a > 1$ と表せることを考えると、式(1-48)よりスケール長さ l_p が小さい場合、ないしは中性粒子密度 n_n が小さい場合に拡散の影響が顕著に表れるが分かる。ここから放電臨界電界強度 $E_{\text{rms,cr}}$ を求めるには各 $n_n l_p^2$ に対してエネルギーバランスの式を解きなおさなければならないので容易ではないが、イオン化周波数に対して近似式を用いると比較的に求めることが出来る。多くの先行研究において K_i/K_a を与える近似式として、式(1-38)で定義した実効電界強度 E_{eff} と 1.2.2 項で求めた直流の場合の臨界電界強度 E_{cr} を用いて以下の式が用いられている。

$$\frac{K_i}{K_a} = \left(\frac{E_{\text{eff}}}{E_{\text{cr}}}\right)^{16/3} \quad (1-49)$$

これを式(1-48)に代入すると

$$\left(\frac{E_{\text{eff}}}{E_{\text{cr}}}\right)^{16/3} \left(1 + \frac{D}{K_a n_n l_p^2}\right)^{-1} > 1 \quad (1-50)$$

となる。これを変形して E_{eff} に対する関係式に直すと以下の様になる。

$$E_{\text{eff}} > E_{\text{cr}} \left(1 + \frac{D}{K_a n_n l_p^2}\right)^{3/16} \quad (1-51)$$

この式から放電臨界電界強度 $E_{\text{rms,cr}}$ を求めると

$$E_{\text{rms,cr}} = (E/n_n)_{\text{cr}} n_n \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{v_m^2} \left(1 + \frac{D}{K_a n_n l_p^2}\right)^{3/16}} \quad (1-52)$$

となる。これを使って、スケール長さ l_p を1 mmとしたときの $E_{\text{rms,cr}}$ を計算して図 1-5 を修正したものを図 1-6 に示す。これを見ると、低密度側においても $E_{\text{rms,cr}}$ が上昇し、パッシェン曲線に似た形状となっていることが分かる。

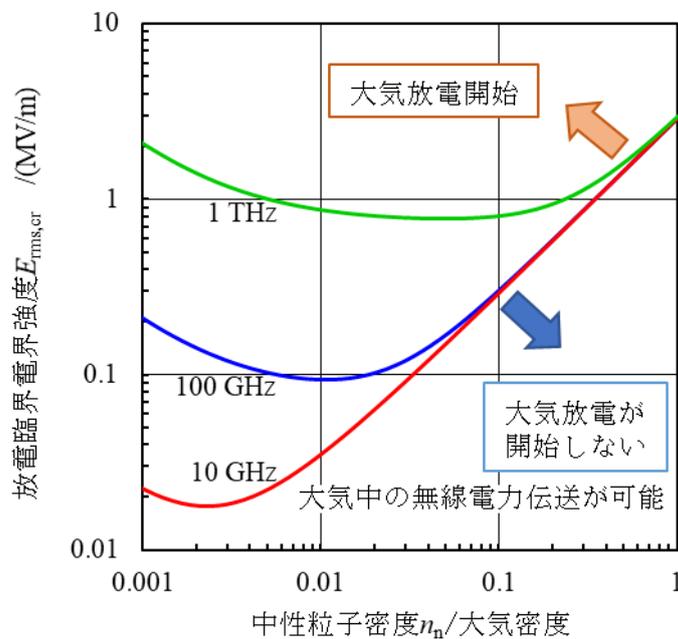


図 1-6 スケール長さを 1 mm として計算した印加電界の周波数を 1 THz, 100 GHz, 10 GHz とした時の空気中における放電臨界電界強度の中性粒子数密度に対する依存性

1.5 電磁ビームに支持される大気放電

ガス中において電磁ビームを初期電離プラズマに照射すると、そこから電離波面が電磁ビームの上流に向かって進展を始める。この現象は、電磁波のエネルギーを電子が 1.3.1 項で説明した逆制動放射により吸収し、このエネルギーによって電離波面前面の領域で次々と新しい電子が生成されることによって起きると考えられている。このような電磁ビームによる放電は 1.4.2 節で説明した臨界強度以上の電磁波でなければ起きないはずであるが、この進展現象は臨界強度を下回る場合においても観測されておりこの進展原理については入射ビームの周波数によっていくつかの説が提唱されている。本節では、各電磁ビームの波長帯において観測された電離波面進展とその進展原理について説明する。

1.5.1 マイクロ波放電

数センチの波長をもつマイクロ波帯の電磁ビームを用いた空気中における放電の研究は 1950 年代にロシアで行われ始めた。1957 年に Y. V. Khodataev が数百 Pa の雰囲気圧下において波長 3 cm 程度のマイクロ波を集光して放電を初めて観測すると、その後、より高圧下における放電が次々と観測され、2000 年には大気圧の数倍程度の高圧領域における放電も観測可能となった [12, 13]。これらの実験結果から、雰囲気圧と入射マイクロ波の強度によってプラズマの構造や性質が変化することが分かった。図 1-7 に K. V. Aleksandrov ら [14] による大気放電の分類を示す。マイクロ波による放電は雰囲気圧と入射エネルギーによって 3 つの領域に分けられる。図 1-7 の領域 I、II、III はそれぞれ、種となるプラズマなしで絶縁破壊が起きる領域、種プラズマが存在する場合のみそこからミリ波の入射方向へとプラズマが進展していく領域、種プラズマから離れて進展することが出来ない領域である。K. V. Aleksandrov らはこの領域 I を overcritical discharge、領域 II を undercritical discharge、領域 III を deeply undercritical discharge と呼び、領域 I と II、II と III の境目の電界強度をそれぞれ $E_{cr}(p)$ 、 $E_{thre}(p)$ としている。また、図 1-7 の点線よりも高圧側ではフィラメント構造が出来、低圧側では拡散的なプラズマとなる。

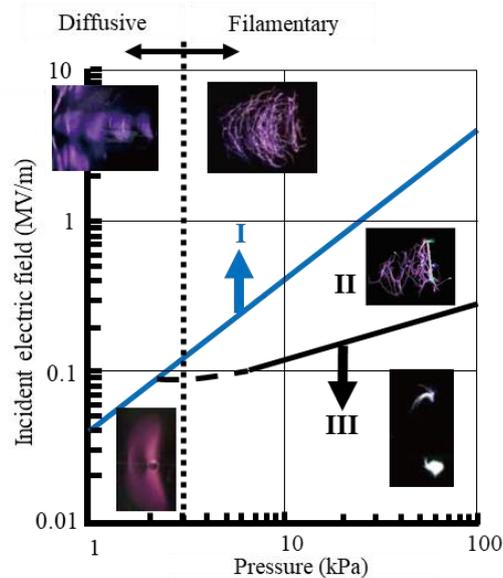


図 1-7 大気中におけるミリ波放電の分類 [14]

高圧側におけるフィラメント構造の形成についてはプラズマの電界遮蔽によっておこる電界集中によるものと考えられる [15]。図 1-8 にこの電界集中の模式図を示す。入射マイクロ波の電界がプラズマにより遮蔽されると、電界方向の両端に電界振幅の高い領域が生じる。この領域で新たな放電が起きプラズマが進展することによってフィラメントが形成される。K. V. Khodataev [16]は、この電界集中により、領域 II の入射電界振幅が臨界電界強度 $E_{cr}(p)$ を下回る領域においても放電が維持、進展が可能となっているという説を発表し、数値計算による模擬を行った。この数値計算における進展の様子を図に示す。入射波の振幅が $E_{cr}(n_n)$ であっても、フィラメントの作る電界集中領域で $E_{cr}(p)$ を超えると、その領域を通してビーム源方向へと進展することが可能となる。また、領域 II と III の領域の境界を決める理論式 [16]も提唱されており、実験値 [17]と良い一致を見せている。

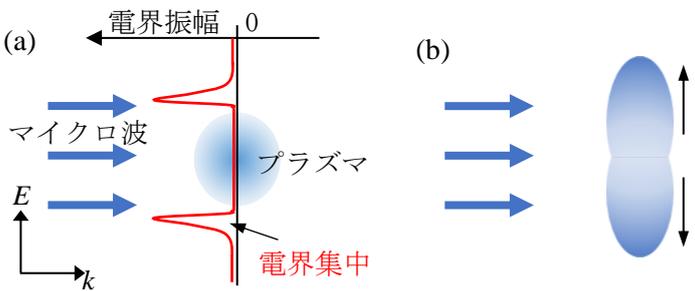


図 1-8 電界集中によるフィラメント生成の模式図 (a)プラズマ両端で電界集中がおき (b)集中したところに新たなプラズマが出来ることで電界方向に伸展する

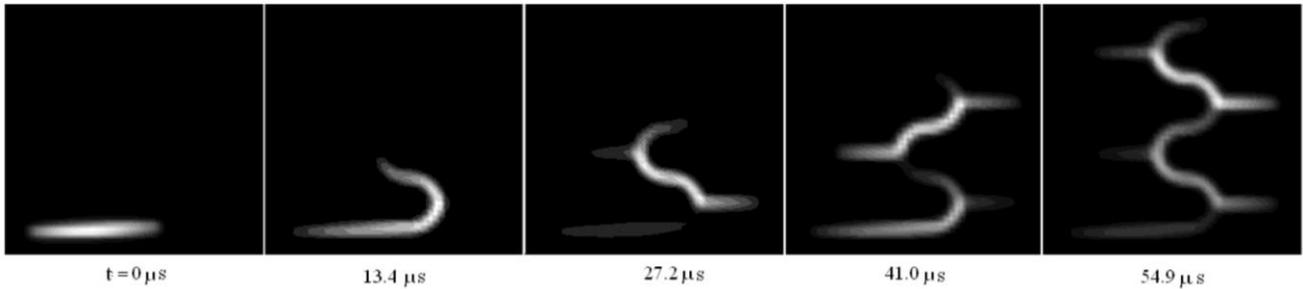


図 1-9 領域 II におけるマイクロ波放電フィラメント構造の数値模擬 上方から下方に向かってマイクロ波を照射 [16]

1.5.2 レーザー放電

レーザーの波長帯における電離波面の進展は 1964 年に S. A. Ramsden ら [18]が波長 0.7 μm のレーザーを集光して行った大気放電実験によってはじめて発見された。その後多くのレーザー放電実験が行われ、特に高出力発振が可能な CO₂ レーザー(波長 10.6 μm)を用いた大気放電実験は 1970 年代から現在までの間に 1 GW/m²程度から 10⁴ GW/m²以上の領域に至るまで様々なレーザーパワー密度に対して行われ、進展速度が観測された [19, 20, 21, 22]。CO₂ レーザーの放電臨界強度は 10⁴ GW/m²以上であり、1 GW/m²か

ら 10^4 GW/m^2 は臨界強度を下回る領域における放電であるが、電離波面中に構造は観測されていないため、マイクロ波放電と同じ様に電界集中によって電離波面が進展しているとは考えにくい。S. A. Ramsdenら [23]はレーザーによる電離波面進展の発見と同じ年の1964年にこの進展はレーザーによるプラズマを介したガスの加熱が引き起こすデトネーションであるとし、進展速度はC-J速度になるとした。このモデルによる進展速度 U_{CJ} はレーザーのパワー密度 S_L とガスの比熱比 γ_g に対して以下の式で与えられる [23, 24]。

$$U_{\text{CJ}} = \left[2 \left(\gamma_g^2 - 1 \right) \frac{S_L}{\rho_0} \right]^{1/3} \quad (1-53)$$

W. E. Maherら [19]は 10^3 から 10^4 GW/m^2 のオーダーのパワー密度における実験で観測された進展速度とこの理論式を比較し、大まかに一致しているとしているが、実験値の指数関数による近似曲線の次数は0.4程度であり、理論値の1/3とずれがあると指摘している。進展の原理については他にもいくつか提案されており [24, 25]、現在に至るまで議論が続いている。また、入射レーザーの強度が数十 GW/m 以下の領域ではデトネーションではなく衝撃波が電離波面よりも速い速度で進むコンパッションの領域となる様子が観測されており [22, 26, 27]、この低パワー領域では別の進展原理が提唱されている [28, 29]。

1.5.3 ミリ波放電

ミリ波とは波長が数 mm 程度の電磁波のことであり、周波数に換算すると30 GHz から300 GHz の領域に相当する。この波長領域における電磁波の発振器であるジャイロトロンは1960年代にロシアで発明された後、核融合分野におけるプラズマの加熱源として開発が進み、現在では数 MW の出力のビームを千秒以上にわたる長時間に渡って連続発振することが可能となっている [30]。これを用いた電離波面の観測は1980年代から行われ始め [31]、2006年にはY. Odaら [32]によって臨界電界強度を下回る強度のミリ波中を進展する電離波面の構造が可視化された。さらに2008年にはY. Hidakaら [33]によって臨界強度付近における電離波面の進展が観測された。これらの実験の詳細や進展原理については次の節で説明する。

1.6 ミリ波中の電離波面進展

1.6.1 超臨界条件におけるミリ波放電実験

Y. Hidaka ら [33, 34]は図 1-7 における領域 I と領域 II の境目付近のパワー密度のミリ波中における放電の観測を行った。この実験の概略図を図に示す。大気中において、ジャイロトロン窓から放射されたミリ波をレンズにより集光し、その集光点付近における電離波面の様子が観測された。用いた実験条件を表 1 に示す。集光点におけるミリ波の強度は 25GW/m^2 程度であり、これは放電臨界強度の 2、3 倍程度の値であり、図 1-7 の領域 I にあたる。この集光点で絶縁破壊が起き、ミリ波の入射方向へと進展していく電離波面が観測された。

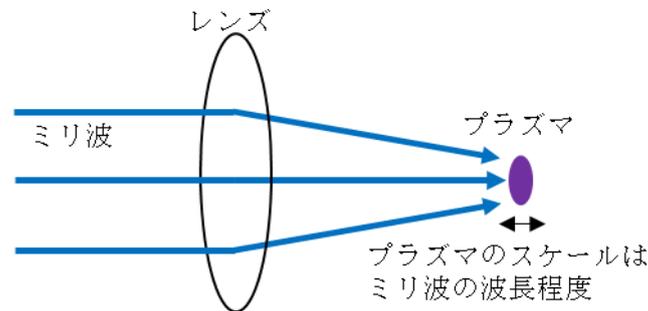


図 1-10 Hidaka らの実験の模式図

表 1-1 超臨界条件における Y. Hidaka らの実験条件

ミリ波周波数	110 GHz
ビームプロファイル	ガウシアン
偏波	直線偏波
ビームスポット径	4 mm
集光点でのビーム強度	25GW/m^2 以上
照射時間	$1\ \mu\text{s}$

図 1-11 にこの実験で観測された放電の構造を示した。用いたミリ波は直線偏波であるため異方性を持っているが、この入射波の磁場と垂直な($E-k$ 面)と電場に垂直な面($H-k$ 面)で放電構造が異なることがわかる。 $E-k$ 面で発光領域がビームと垂直な方向に伸び、フィラメント構造を形成している。一方 $H-k$ 面では放電が横には伸びず、点在するような構造をしていることが見て取れる。また、いずれの面においてもビーム方向における構造は離散的で、この間隔はビームの波長 λ に対して $\lambda/4$ 程度となっている。これは入射波と反射波が作る定在波によって生まれるものと考えられる [33]。また、同様の実験は窒素ガス中でも行われ、電離波面進展速度の比較が行われた [34]。この実験で計測された入射ミリ波のパワー密度が 30GW/m^2 の時の大気圧の空気中と窒素ガス中における進展速度はそれぞれ 14 km/s と 12 km/s であり 15%程度の違いしかないことが分かる。

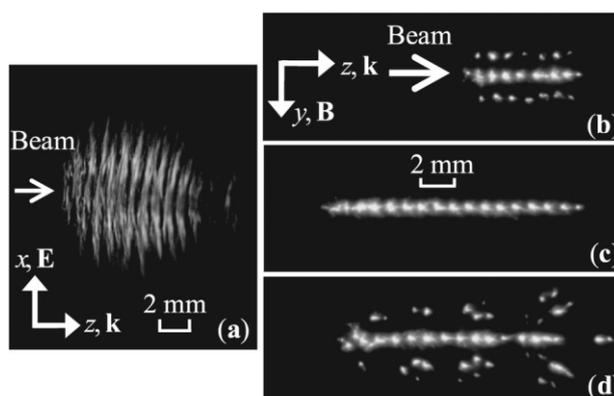


図 1-11 ミリ波放電プラズマの長露光写真 (露光時間 > 照射時間) [33]

1.6.2 放電臨界強度を下回るビーム強度における放電実験

Y. Oda ら [32, 3]は図 1-7 における領域 II の低強度領域で大気放電実験を行った。実験の模式図を図 1-12 に示す。導波管から放電臨界強度を下回るミリ波を大気中へと放射し、その先に着火器として放物面鏡を設置する。ミリ波が放物面鏡で集光されて絶縁破壊をおこし、そこから電離波面が導波管側に向かって進展する様子が観測された。この実験の条件を表 1-2 に示す。ミリ波放電の臨界強度は 20 GW/m^2 程度であるので、この実験におけるビーム強度は臨界強度の十分の一程度である。前述の超臨界条件における実験とのビーム強度以外の主な違いには、ビーム径が 10 倍ほど大きく、波長の 10 倍程度であること、ミリ波の照射時間は 1000 倍の 1 ms 程度であることがあげられる。この実験で観測された放電プラズマの構造の長露光写真を図 1-13 に示す。T. Yamaguchi ら [36]によって高速度カメラで撮影された、同様の条件下における電離波面進展の短露光写真を図 1-14 に示す。この写真から露光写真でフィラメント状に見えたプラズマは、粒状のプラズモイドの軌跡であることが分かる。

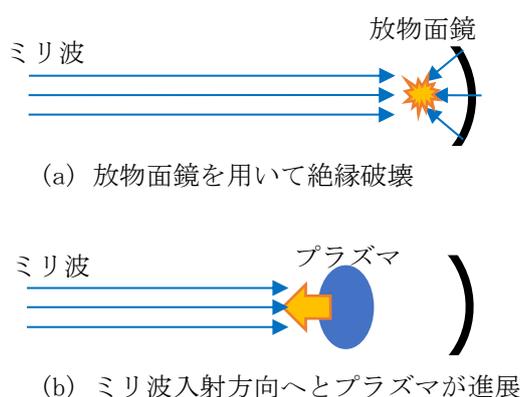


図 1-12 Y. Oda らの実験の模式図

表 1-2 放電臨界強度を下回る条件における Y. Oda らの実験条件

ミリ波周波数	170 GHz
ビームプロファイル	ガウシアン
偏波	直線偏波
ビームスポット径	40 mm
集光点でのビーム強度	1 GW/m ² 程度
照射時間	1 ms

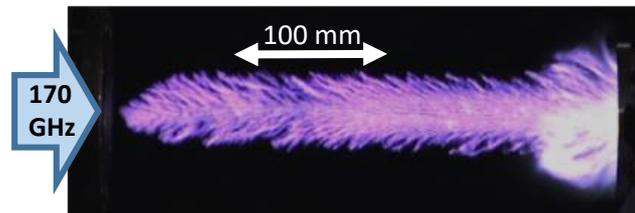


図 1-13 進展プラズマの長露光写真 [35]



図 1-14 高速度カメラによる進展の様子 [36]

しかし、図 1-14 に示す写真では粒の様子が不明瞭で粒の間隔についての議論が難しい。これは、ガウシアンビームを用いているため、場所によりビーム強度が径方向位置によって異なり、結果としてプラズモイドの分布が三次元的になっていることが原因であると考えられる。そこで、このプラズモイドについてさらに細かく調べるため、T. Yamaguchi ら [36]はフラットトップのビーム、すなわち径方向位置によってもビーム強度が変化しないビームを、ミラー系を用いて作成し放電実験を行った。この実験における電離波面の高速度カメラによる写真を図 1-15 に示す。この写真から、プラズモイドが 1.6 mm 程度のピッチで等間隔に並んでいる構造をとっていることが分かる。このプラズモイドが等間隔に並んで進む軌跡が楕円のようなことから、この構造を楕円状構造と呼ぶこととする。この楕円状構造はミリ波以外の波長領域では観測されておらず、ミリ波特有の構造であることが考えられる。また、マイクロ波放電の様にこの構造による電界集中が電離波面の進展に影響を及ぼしていることも考えられる。

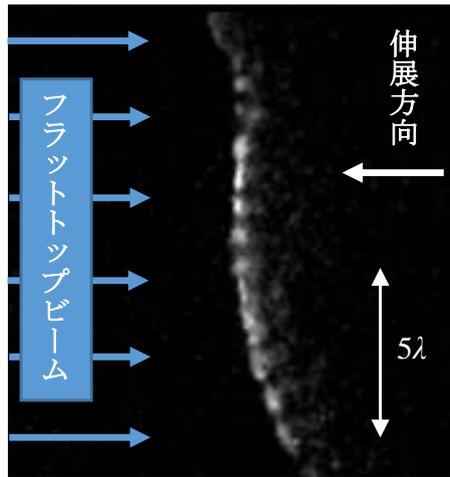


図 1-15 フラットトップビームによる電離波面で見られる楕状構造 (露光時間 100 ns) [35]

1.6.3 電離波面の進展速度と入射ビーム強度の関係

実験で観測されたミリ波の電離波面の進展速度を入射ビームの強度(ピークパワー密度)を横軸にして示したものを図 1-16 に示す。ミリ波の進展速度はビーム強度に対してほぼ比例の関係となっている。同じ図に CO₂ レーザー中における進展速度を示す。これを見るとレーザーとミリ波では進展速度の傾向が大きく異なっていることが分かる。

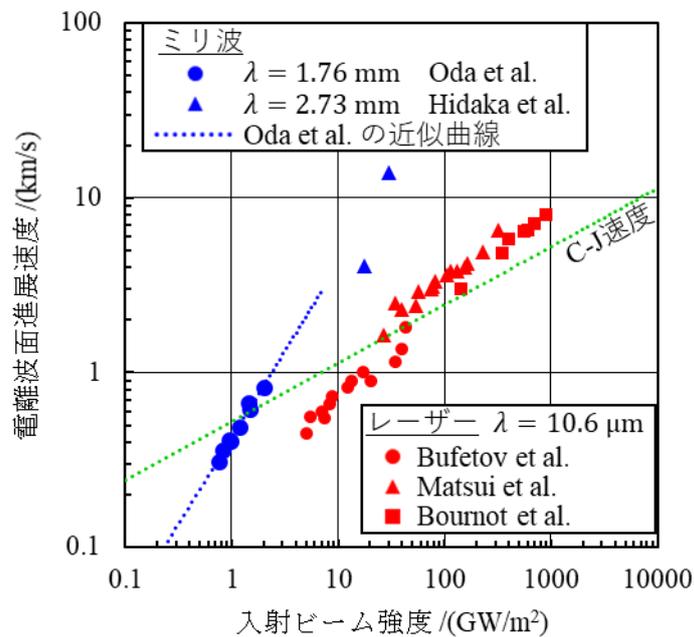


図 1-16 電離波面の進展速度 [32, 3, 34, 21, 22, 20]

1.6.4 臨界強度以下の条件における進展原理

臨界強度を下回るビーム強度におけるミリ波放電の進展原理はどのようなものかについて考える。進展中のプラズマの高速度カメラによる写真(図 1-15)には、マイクロ波帯において観測されているようなファイラメント状の構造は見られず、また図 1-9 に示すような進展の仕方も観測されていない。このことから、マイクロ波帯における放電で主張されているものと全く同じ原理では進展が説明できないと考えられる。また、レーザー放電で主張されているように圧縮性流体の物理によって進展速度が決まるのであれば、投入エネルギーのみによって決まるため電磁波の周波数には依存せず、レーザーにおける進展速度と同じとなるはずであるが、そうはなっていないためレーザーと同様の原理でも説明できない。ミリ波放電においてはレーザー放電におけるものよりも低いパワー密度においてデトネーションの領域へと達するが、デトネーション領域入っても進展速度の入射ビーム強度に対する依存性の変化は観測されていない。ミリ波放電におけるエネルギー吸収率の実験値から計算した C-J 速度を図 1-16 に示す。この図における指数関数近似曲線の次数を比較すると C-J 速度の次数 $1/3$ に対してミリ波における進展速度の次数は 1 であり大きな開きがある。数 GW/m^2 の領域での進展速度は C-J 速度の数倍程度となるが、このような速度で移動する加熱領域に対するデトネーション理論における解は背面のマッハ数が音速よりも早い「弱いデトネーション」と呼ばれる領域に来ることが知られている [37]。このような解は圧縮性流体の物理からは得られず、放電プラズマの物理によって決まっていると考えられる。現在、ミリ波帯の電離波面進展を十分に説明できるような進展原理は見つかっていない。

1.6.5 数値計算による進展の模擬

2010 年に J. P. Boeuf ら [38] は超臨界条件の 110 GHz ミリ波中での大気放電を二次元数値計算により再現した。計算は入射ミリ波の電場ベクトル \mathbf{E} と波数ベクトル \mathbf{k} が作る平面($\mathbf{E}-\mathbf{k}$ 面)と磁場ベクトル \mathbf{H} と波数ベクトル \mathbf{k} が作る平面($\mathbf{H}-\mathbf{k}$ 面)において別々に行われ、初期条件としておいた種プラズマからミリ波入射方向へと進展する電離波面の時間発展を解いた。この計算の結果得られた電子数密度分布を図 1-17 に示す。この結果は構造、進展速度共に実験結果 [33, 34] とよく一致している。また、2014 年には K. Kourtzanidis ら [39] によって、三次元計算による超臨界条件の 110 GHz 大気放電の模擬が行われ、三次元計算の場合も二次元計算と同様の構造が出来ることを示した。

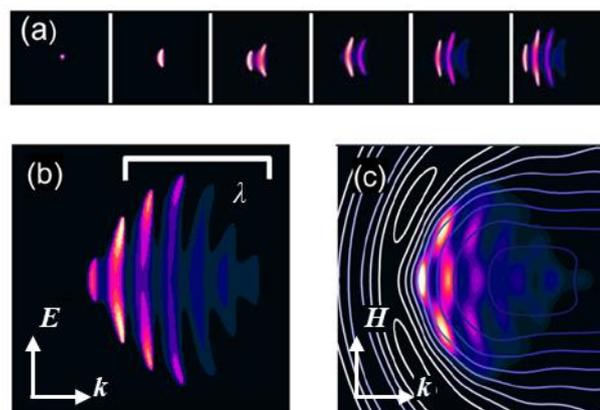


図 1-17 超臨界条件における数値計算で得られた電子数密度分布 [38]
(a)E-k 面における進展の様子 (b)E-k 面での分布 (c)H-k 面での分布

2017年に M. Takahashi ら [40]は J. P. Boeuf らのモデルに膨張波による影響を加えることで臨界強度以下における電離波面進展の数値計算による模擬を試みた。イオン化の係数は1.2.2項で説明したように換算電界強度 E/n_n の関数となることが知られているが、中性粒子密度 n_n が低下すればイオン化係数が上昇する効果が期待できることを意味する。この先行研究ではミリ波による加熱により気体が膨張して中性粒子密度が低下する過程を考慮するため、Maxwell 方程式や電子の拡散方程式に式を加えて計算が行われた。この計算による電離波面の進展速度と実験値の比較を図 1-18 に示す。放電臨界強度(20 GW/m²程度)付近の領域で、実験と一致する進展速度の結果を得ている一方、臨界電界強度を大きく下回る領域においては、進展自体は起きているものの進展速度は実験から予測されるものよりも一桁ほど小さい。また実験を行った強度領域を含む臨界強度の十分の一程度の強度領域では電離波面の進展は起きていない。このことから、電離波面の進展を駆動するイオン化の原因は他にあると考えられる。

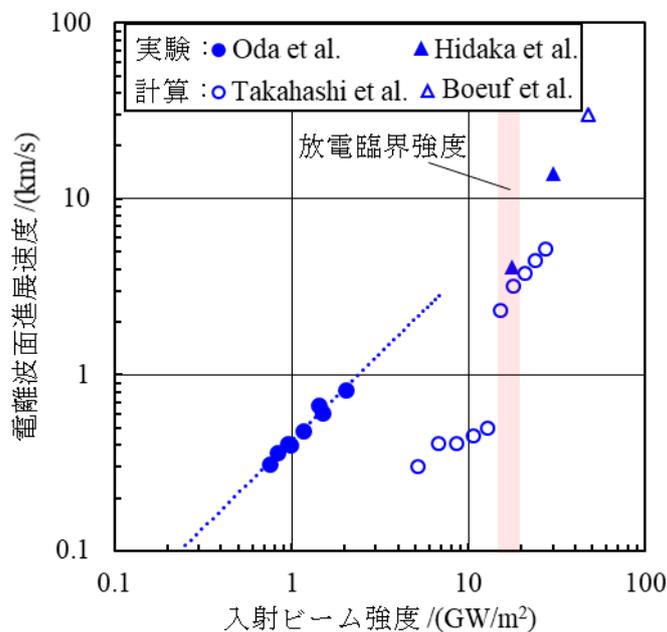


図 1-18 先行研究における電離波面進展速度の実験値と数値計算値 [32, 3, 34, 40, 38]

1.7 研究目的

ここまですと、電磁ビーム中を入射方向へと進展する電離波面が観測されており、この現象をエネルギー変換に用いる推進機である「マイクロ波ロケット」が提唱されている。この推進性能を見積もる上で電離波面の進展速度が重要なパラメータとなるが、ここで用いる放電臨界強度以下のミリ波ビーム中における進展は、その進展原理が未解明である。以上のことから本研究全体における目的は、ミリ波放電における電離波面の進展速度を正しく予測するために、この電離波面で起きている現象を解明することにある。

第2章

ミリ波放電進展の物理モデルと数値計算手法

2.1 電離波面進展の物理過程

ここで電磁ビーム中の電離波面の進展過程についてもう少し考えてみる。この進展はプラズマ自体が動くのではなく、プラズマのビーム入射側に新しいプラズマが次々と生成されることによって電離領域が移動していく現象である。この進展の模式図を図 2-1 に示す。電磁ビームのエネルギーは電子によって吸収されるため、当然電子数密度が高い領域でより多くのエネルギーが吸収されることになるわけだが、これだけを考えると電子数密度が高いところで多くの放電が起きてより高密度になるだけとなり、進展は起こらない。ここで重要なパラメータとなってくるのが拡散である。拡散によって高電子数密度のエネルギー吸収領域から電子がビーム入射方向へと運ばれ、その電子がビームのエネルギーを吸収して電離を引き起こす過程が重要となる。入射ビーム強度が放電臨界強度以上であれば、入射方向へと拡散した電子がそのまま衝突電離を引き起こし増殖していくことが出来る。しかし、臨界強度を下回る場合には電子が減少してしまうため、電子波面の進展には電子が拡散した先の環境に何かしらの変化が起こっていることが必要である。また、1.4.1 項では電離反応と電子付着反応のバランスから臨界強度を求めたが、この進展現象においては電子付着が電子離脱によって相殺されたとしても電離速度が不十分であり、電離の反応自体が増えていなければ説明がつかない。このような電離を引き起こす環境変化として、1.5.1 項で説明したマイクロ波帯における進展では電界集中が主張されており、1.5.2 項で説明したレーザーにおいては衝撃波加熱が主張されている。よって、放電臨界強度を下回るビーム強度における進展ではこうした環境変化が起きている電離可能な領域の移動も重要な要素の一つとなるのである。ミリ波による進展において何がこの環境変化をもたらしているのかは未だ説明されておらず、これがこの領域における進展の理解を妨げている大きな要因の一つである。

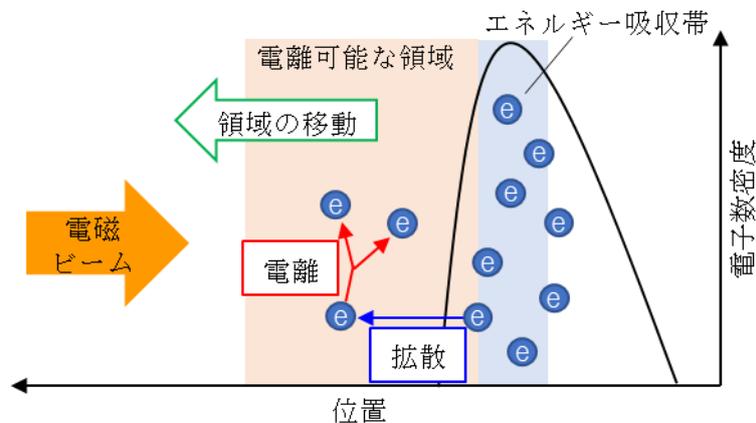


図 2-1 電離波面進展の模式図

2.2 プラズマの支配方程式

ここではボルツマン方程式から、プラズマを解くための諸方程式を求める [41]。プラズマは一般的に電子、複数の種類のイオン、励起種、基底粒子などから成り立っているが、その中の一種についてのみ考える。まず、ある種類の粒子に対するボルツマン方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_e \quad (2-1)$$

ここで f は、 $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ をかけるとある空間領域 $d\mathbf{r}$ 、速度領域 $d\mathbf{v}$ にある粒子数となる量である。右辺は衝突や放射などによる変化の影響を表す項である。この f を用いると、粒子数密度 n 、平均速度 \mathbf{u} 、平均エネルギー ε は以下のように表される。

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2-2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2-3)$$

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{m}{2n} \int |\mathbf{v}|^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2-4)$$

ここである速度に依存する物理量 Ψ のある空間における平均値

$$\langle \Psi(\mathbf{v}) \rangle = \frac{1}{n} \int \Psi(\mathbf{v}) f d\mathbf{v} \quad (2-5)$$

に対するボルツマン方程式を考えると

$$\frac{\partial n \langle \Psi \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (n \langle \Psi \mathbf{v} \rangle) - \frac{n}{m} \langle \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \Psi \rangle = \left(\frac{\partial n \langle \Psi \rangle}{\partial t} \right)_e \quad (2-6)$$

この式を用いて各物理量に対するボルツマン方程式を考える。

$\Psi = 1$ として式 3-6 に代入すると粒子数保存の式が得られる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = S \quad (2-7)$$

ここで S は分裂、イオン化などで生じる正味の粒子生成量である。

$\Psi = m\mathbf{v}$ として代入すると運動量保存の式が得られる。

$$\frac{\partial n\mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{m}\nabla \cdot \mathbf{P} + n\frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{R} \quad (2-8)$$

ここで圧力テンソル \mathbf{P} 、運動量生成項 \mathbf{R} はそれぞれ以下の式で表される。

$$\mathbf{P} = m \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})f d\mathbf{v} \quad (2-9)$$

$$\mathbf{R} = -n\mathbf{u}v_m \quad (2-10)$$

v_m は衝突周波数(正確には運動量輸送周波数)であり、 \mathbf{R} は衝突により他の種類の粒子から輸送される運動量を表している。上記の式で用いられている、ベクトル同士を並べて書く表記(例えば $\mathbf{u}\mathbf{u}$)は

$$\mathbf{u}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x u_x & u_x u_y & u_x u_z \\ u_y u_x & u_y u_y & u_y u_z \\ u_z u_x & u_z u_y & u_z u_z \end{pmatrix} \quad (2-11)$$

を表す。式(2-8)の左辺第二項、右辺第一項は式(2-6)の左辺第二項に対応し、それぞれ、平均速度による項、平均からのずれによる項を意味する。

$\Psi = m|\mathbf{v}|^2/2$ を代入するとエネルギー保存測が得られる。

$$\frac{\partial (n\varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}\varepsilon + \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{Q}) = n\mathbf{u} \cdot \mathbf{F} + S_\varepsilon \quad (2-12)$$

ここで、 S_ε は他の種類の粒子との衝突などによってもたらされるエネルギー上昇量。 \mathbf{Q} は熱流束ベクトルで以下のように表される。

$$\mathbf{Q} = \int |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u})f d\mathbf{v} \quad (2-13)$$

しかし、式(2-6)だけでは解くことが不可能である。それは式 3-6 が速度の分布に関する式を含んでおらず、したがって \mathbf{v} を含んだ \mathbf{P} や \mathbf{Q} を求めることが出来ないからである。そこで、速度の分布についての仮定をおいてやる必要がある。ここでは圧力テンソル \mathbf{P} が対角かつ等方であるという仮定をおく。すると単位行列 \mathbf{I} に対して

$$\mathbf{P} = k_B n T \mathbf{I} \quad (2-14)$$

$$k_B n T = \frac{m}{3} \int |\mathbf{v} - \mathbf{u}|^2 f d\mathbf{v} \quad (2-15)$$

と書くことが出来る。なお k_B はボルツマン定数である。式(2-8)に式(2-7)と式(2-14)を代入すると

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{k}{mn} \nabla(nT) = \frac{\mathbf{F}}{m} - \nu_m \mathbf{u} \quad (2-16)$$

ここで、衝突が十分頻繁に起こっており、平均速度 \mathbf{u} の変化が時間的にも空間的にも他の項に比べて小さいことを仮定すると次のようになる。

$$\frac{k_B}{mn} \nabla(nT) = \frac{\mathbf{F}}{m} - \nu_m \mathbf{u} \quad (2-17)$$

力としてかかっているのが電界による影響のみとし、 q を単位体積あたりの電荷とすると

$$\Gamma \equiv \quad n\mathbf{u} = \frac{q}{m\nu_m} n\mathbf{E} - \frac{k_B}{m\nu_m} \nabla(nT) \quad (2-18)$$

となる。

$$\mu \equiv \frac{|q|}{m\nu_m} \quad (2-19)$$

$$D \equiv \frac{k_B T}{m\nu_m} \quad (2-20)$$

とおくと、 μ と D の間に以下の関係式が成り立つ。

$$\frac{D}{\mu} = \frac{k_B}{|q|} T \quad (2-21)$$

式 3-18 を D と μ を用いて表記すると

$$\Gamma \equiv \quad n\mathbf{u} = \pm \mu n\mathbf{E} - \nabla(Dn) \quad (2-22)$$

この式 3-22 を粒子数保存の式 3-7 に代入すると以下の式が得られる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (\pm \mu n\mathbf{E} - \nabla(Dn)) = S \quad (2-23)$$

式(2-22)、式(2-23)にエネルギー保存の式(2-12)を加えて解けば、粒子数、平均速度、エネルギーが求まるが、そのためには S 、 S_ε 、 ν_m といった生成項に関するパラメータを求めるモデルが必要となる。

2.3 電子の拡散係数

2.3.1 電子自由拡散

以下の式で表される電子についての式(2-20)を電子自由拡散係数と呼ぶ [42]。

$$D_e \equiv \frac{k_B T_e}{m_e \nu_m} \quad (2-24)$$

電子が直流電界の影響を受けない場合、電子についての式(2-23)の \mathbf{E} は0とみなせるので、電子数密度 n_e は以下の拡散の方程式を満たす。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla^2 D_e n_e = S_e \quad (2-25)$$

2.3.2 両極性拡散

一見すると外部から直流電界をかけない場合に電子数密度の挙動は式(2-25)に従いそうなものであるが、実際は従うとは限らない。これは、電子が自由に拡散すると移動度の違いから陽イオンが取り残され、この電荷の偏りにより電子を引き戻す方向へと電界が生じるからである。この電界は陽イオンからすると拡散方向へと働くため、電子に引きずり出されるような形で陽イオンも拡散することになる。これを両極性拡散と呼ぶ [42]。ここではこの両極性拡散がどのような式で表せるかを考える。

まず、存在する電界が荷電粒子の偏りによるもの(これを \mathbf{E}_{sp} と表記する)のみであること、及び空間的な拡散係数変化が十分小さいことを仮定すると、式(2-23)は以下のようなになる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (\pm \mu n \mathbf{E}_{sp} - D \nabla n) = S \quad (2-26)$$

ここで、簡単のためプラズマが電子、一価の陽イオン、中性粒子の三種のみで構成されていると仮定する。電子、陽イオンの粒子密度 n_e 、 n_i についての式は以下のようなになる。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (-\mu_e n_e \mathbf{E}_{sp} - D_e \nabla n_e) = S \quad (2-27)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu_i n_i \mathbf{E}_{sp} - D_i \nabla n_i) = S \quad (2-28)$$

ここで電子、陽イオンに対する各係数をそれぞれ下付きの e, i で表した。外部 DC 電界が存在しない場合、電氣的な中性から、 $n_e = n_i \equiv n$ が良い近似として成り立つ。また、電子、陽イオンが電氣的中性を保ちつつ流れるため

$$\Gamma_e \equiv n_e \mathbf{u}_e = n_i \mathbf{u}_i \equiv \Gamma_i \equiv \Gamma \quad (2-29)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} -\mu_e n_e \mathbf{E}_{\text{sp}} - D_e \nabla n_e &= \mu_i n_i \mathbf{E}_{\text{sp}} - D_i \nabla n_i \\ \mathbf{E}_{\text{sp}} &= \frac{D_i - D_e \nabla n}{\mu_i + \mu_e n} \end{aligned} \quad (2-30)$$

また

$$\Gamma = -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \quad (2-31)$$

となる。以上から式(2-27)と式(2-28)は以下の式となる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \right) = S \quad (2-32)$$

ここで

$$D_a = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \quad (2-33)$$

とおくと式(2-32)は

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot (D_a \nabla n) = S \quad (2-34)$$

と書ける。この D_a を両極性拡散係数と呼ぶ。一般的に電子の質量は陽イオンの質量に比べて十分大きく、したがって

$$\mu_e \equiv \frac{e}{m_e v_m} \gg \frac{e}{m_i v_m} \equiv \mu_i \quad (2-35)$$

である。また、電子温度が陽イオンの温度に比べて十分高い場合

$$\mu_i D_e = \frac{k_B e T_e}{m_i m_e v_m^2} \gg \frac{k_B e T_i}{m_i m_e v_m^2} = \mu_e D_i \quad (2-36)$$

となる。このことを仮定して近似すると式(2-33)は

$$D_a \approx \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e \quad (2-37)$$

となる。

2.3.3 有効拡散係数モデル

式(2-34)はデバイ長が見たいスケールに対して十分小さいときに成り立つ式である。デバイ長 λ_D は以下の式で表される。

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_e}{n e^2}} \quad (2-38)$$

ϵ_0 は真空の誘電率、 k はボルツマン定数である。この式から、プラズマの密度が十分大きい場合はデバイ長が短くなるため、式(2-34)の両極性拡散近似がよく成り立ち、逆に密度が小さくなると近似が成り立たなくなることが分かる。たとえば見たい現象のスケールが1 mm程度であるとし、電子温度 $T_e \cong 2 \text{ eV}$ とすると、プラズマ密度が 10^{20} m^{-3} の場合はデバイ長 $\lambda_D \cong 10^{-3} \text{ mm}$ なので両極性拡散の近似が成り立つが、プラズマ密度が $10^{14} / \text{m}^3$ の場合はデバイ長 $\lambda_D \cong 1 \text{ mm}$ となるので、この近似は適当と言えなくなる。高密度のプラズマスポットを扱う場合においても、スポット外縁部においてはプラズマ密度が徐々に低くなるため、この部位におけるプラズマの動きを解くのに両極性拡散近似を用いることは出来ない。そこで、このように、両極性拡散が使えず、電子の自由拡散にもならない領域においても使える有効拡散係数を求めることが必要となるのである。この節では本研究において用いた J. Boeuf らによる有効拡散係数 [38, 41]について説明する。これを求めるには分極による電界 \mathbf{E}_{sp} をより厳密に見る必要がある。 \mathbf{E}_{sp} はポテンシャル ϕ に対し $\mathbf{E}_{sp} = -\nabla\phi$ と書け、このポテンシャル ϕ は以下のポアソン方程式により決定される。

$$\nabla^2 \phi = -\frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) \quad (2-39)$$

ここで、式(2-28)から式(2-27)を引くと

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_i - n_e) + \nabla \cdot \{ (\mu_i n_i + \mu_e n_e) \mathbf{E}_{sp} - (D_i \nabla n_i - D_e \nabla n_e) \} = 0 \quad (2-40)$$

となる。この式に式(2-39)を代入し、さらに $\mathbf{E}_{sp} = -\nabla\phi$ を使うと

$$-\frac{\varepsilon_0}{e} \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{\text{sp}} + \nabla \cdot \{(\mu_i n_i + \mu_e n_e) \mathbf{E}_{\text{sp}} - (D_i \nabla n_i - D_e \nabla n_e)\} = 0 \quad (2-41)$$

さらに $n_i - n_e \ll n_e \equiv n$ を仮定し、微少項を除去すると上記の式は以下のようになる。

$$\nabla \cdot \left[\frac{\varepsilon_0}{e} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{\text{sp}} + (\mu_i + \mu_e) n \mathbf{E}_{\text{sp}} - (D_i - D_e) \nabla n \right] = 0 \quad (2-42)$$

プラズマ領域から十分離れた場所においては \mathbf{E}_{sp} 、 n が 0 であることから

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{e} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{\text{sp}} + (\mu_i + \mu_e) n \mathbf{E}_{\text{sp}} - (D_i - D_e) \nabla n &= 0 \\ \frac{\varepsilon_0}{en(\mu_i + \mu_e)} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{\text{sp}} + \mathbf{E}_{\text{sp}} &= \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \end{aligned} \quad (2-43)$$

ここで

$$\tau_m = \frac{\varepsilon_0}{en(\mu_i + \mu_e)} \quad (2-44)$$

とおく。式(2-43)と両極性拡散における \mathbf{E}_{sp} の式(2-30)を比較すると、左辺に $\tau_m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{\text{sp}}$ が加わっていることが分かる。 \mathbf{E}_{sp} の微分を残したままでは、拡散係数と同様の形に落とし込むことが出来ないので、この微分を、近似を用いて消すことを考える。ここで二つの仮定をおく。一つ目は \mathbf{E}_{sp} の分布がある形を保ちつつプラズマの伝播とともに進行していること、二つ目はこの分布がある指数関数の形をしていることである。この仮定をおくと以下の式が成り立つ。

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{sp}}}{\partial t} = U_{\text{ion}} \frac{\partial \mathbf{E}_{\text{sp}}}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{\text{ion}}} \quad (2-45)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{sp}}}{\partial \hat{\mathbf{r}}_{\text{ion}}} = \frac{\mathbf{E}_{\text{sp}}}{2L} \quad (2-46)$$

ここで、 U_{ion} はプラズマの伝播速度 (ionization front velocity)、 $\hat{\mathbf{r}}_{\text{ion}}$ は伝播方向単位ベクトル、 L はプラズマフロントにおける特性長である。 U_{ion} は [43] より

$$U_{\text{ion}} = 2\sqrt{v_i D_e} \quad (2-47)$$

と表される。これについては 2.4 節で説明する。また、 L は

$$L = \sqrt{\frac{D_e}{\nu_i}} \quad (2-48)$$

である。以上より、式(2-43)の左辺第一項は次のように近似できる。

$$\tau_m \frac{\partial \mathbf{E}_{sp}}{\partial t} \cong \nu_i \tau_m \mathbf{E}_{sp} \quad (2-49)$$

ここで簡単のため $\alpha \equiv \nu_i \tau_m$ とおくと式(2-43)は

$$\alpha \mathbf{E}_{sp} + \mathbf{E}_{sp} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \quad (2-50)$$

式を整理すると

$$\mathbf{E}_{sp} = \frac{1}{\alpha + 1} \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \quad (2-51)$$

よって

$$\begin{aligned} \Gamma_e &\equiv -\mu_e n_e \mathbf{E}_{sp} - D_e \nabla n_e \\ &\cong -\left(\frac{\mu_e}{\alpha + 1} \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} + D_e \right) \nabla n_e \end{aligned} \quad (2-52)$$

この式より、有効拡散係数は以下のようにとればよいことが分かる。

$$D_{\text{eff}} \equiv \frac{\mu_e}{\alpha + 1} \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} + D_e \quad (2-53)$$

この式を変形すると

$$\begin{aligned} D_{\text{eff}} &= \frac{\mu_e D_i - \mu_e D_e + (\alpha + 1)(\mu_i + \mu_e) D_e}{(\alpha + 1)(\mu_i + \mu_e)} \\ &= \frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e + \alpha(\mu_i + \mu_e) D_e}{(\alpha + 1)(\mu_i + \mu_e)} \end{aligned}$$

$$= \frac{D_a + \alpha D_e}{\alpha + 1} \quad (2-54)$$

となる。この式から $\alpha \gg 1$ のときは $D_{\text{eff}} \approx D_e$ となり、逆に $\alpha \ll 1$ のときは $D_{\text{eff}} \approx D_a$ となることが分かる。ここでもう少し α について考察する。 α を少し詳しく書くと以下のようなになる。

$$\alpha \equiv v_i \tau_m = v_i \frac{\varepsilon_0}{en(\mu_i + \mu_e)} \quad (2-55)$$

ここで $\mu_i \ll \mu_e$ をもちいて近似すると

$$\begin{aligned} \alpha &\cong v_i \frac{\varepsilon_0}{en\mu_e} \\ &= \frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2 n} v_i v_m \end{aligned} \quad (2-56)$$

となる。ここで λ_D^2/L^2 を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_D^2}{L^2} &= \frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{ne^2} \cdot \frac{v_i}{D_e} \\ &= \frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2 n} v_i v_m \end{aligned} \quad (2-57)$$

よって α は

$$\alpha \cong \frac{\lambda_D^2}{L^2} \quad (2-58)$$

となり、デバイ長 λ_D をプラズマフロントの特性長 L で割ったものの二乗に等しいことが分かる。すなわち、この節の冒頭で、「見たいスケール」というあいまいな表現をつかっていたが、これはプラズマフロントの特性長 L に他ならないのである。以上の議論から、電子についての式(2-23)は、有効拡散係数を用いて

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot (D_{\text{eff}} \nabla n_e) = S \quad (2-59)$$

と書ける。

2.4 電子拡散方程式の理論進展速度

以下の式で表される電子の拡散方程式に従う電離波面の進展がどのような速度をとるかを考える。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - D\nabla^2 n_e = f_i n_e \quad (2-60)$$

1次元の定常進展を考えると、この式は以下の様に変形できる。

$$-U_{\text{ion}} \frac{\partial n_e}{\partial x} - D \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} = f_i n_e \quad (2-61)$$

この式の特性方程式は次の様になる。

$$D\lambda_e^2 + U_{\text{ion}}\lambda_e + f_i n_e = 0 \quad (2-62)$$

特性方程式の解は

$$\lambda_e = \frac{-U_{\text{ion}} \pm \sqrt{U_{\text{ion}}^2 - 4Df_i}}{2D} \quad (2-63)$$

となる。ここから、 $U_{\text{ion}}^2 - 4Df_i < 0$ のとき式は振動解をもつことになるが電子数密度は負の値にはならず、かつ無限遠で0という境界条件であることからこの解をとることはできず、よって、定常進展解を持つには以下の条件が必要となる。

$$U_{\text{ion}} \geq 2\sqrt{Df_i} \quad (2-64)$$

このことから、 D や f_i が場所によって異なる場合には $2\sqrt{Df_i}$ のピーク値が進展速度の制約となると考えられる。先行研究 [43]から、進展速度は $2\sqrt{Df_i}$ のピーク値となることが知られている。よって f_i が空間に一様であるか、あるいは電子数密度が十分に低い位置でピーク値を持つ場合には、 D は電子数密度が十分低く式(2-58)が0とみなせる場合に最大値 D_e をとるので、進展速度は $2\sqrt{D_e f_i}$ となる。

2.5 電離モデル

電子の生成項を求めるには電離のモデルが必要となる。ミリ波放電における電離波面進展の場合、電離波面前面の領域での電離が重要となるが、この領域では中性粒子の温度は低いと考えられるため、電離過程のほとんどが電子衝突電離であると考えられる。電離にかかわる過程が中性粒子との間の電子衝突電離と電子付着反応のみであるとする(他の節では f_i と置いているがここでは紛らわしいのでこのようにおく)はあるエネルギー ε を持つ電子の分布関数 $f_e(\varepsilon)$ に対して以下の様に求められる[6]。

$$\omega_i = \sum_i n_i \int_0^\infty k_{i,\text{ion}}(\varepsilon) f_e(\varepsilon) d\varepsilon - \sum_i n_i \int_0^\infty k_{i,\text{att}}(\varepsilon) f_e(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2-65)$$

右辺の第一項は電子衝突電離の項で第二項は電子付着反応の項である。また $k_{i,\text{ion}}$ と $k_{i,\text{att}}$ はそれぞれ中性粒子種 i との衝突電離、付着の反応係数である。本研究で扱う大気中においては窒素分子や酸素分子を中性粒子種として考えればよい。また、電子数密度が増えてくると下記に示す再結合の周波数 ω_r も増えてくる。

$$\begin{aligned} \omega_r = & \sum_i n_i^+ \int_0^\infty k_{i,2\text{br}}(\varepsilon) f_e(\varepsilon) d\varepsilon \\ & + \sum_i n_i^+ \int_{\varepsilon'=0}^{\varepsilon'=\infty} \int_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\infty} k_{i,3\text{br}}(\varepsilon, \varepsilon') f_e(\varepsilon) f_e(\varepsilon') d\varepsilon d\varepsilon' \end{aligned} \quad (2-66)$$

右辺の第一項はイオン種 i との二体再結合、第二項は三体再結合を表す。また $k_{i,2\text{br}}$ と $k_{i,3\text{br}}$ はそれぞれ二体再結合係数と三体再結合係数である。

これらを求めるには電子の分布関数 $f_e(\varepsilon)$ が必要である。この $f_e(\varepsilon)$ は式(2-1)に示すボルツマン方程式を使えば求めることが出来るが、すべてを解くのは大変であるので簡単な近似を用いるのが一般的である。 $f_e(\varepsilon)$ が空間的に十分一様であるとする(式(2-1)は以下の様にあらわされる。

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e = \left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_e \quad (2-67)$$

また、定常を仮定すると以下の式を解けばよい。

$$\frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e = \left(\frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_e \quad (2-68)$$

これを解くには、各エネルギー帯の電子が入射波からもらうエネルギーや衝突により失うエネルギーを計算してやらなければならない。これを、各基底中性粒子中において解く **Bolsig+** [6] というソフトウェアがフリーで公開されており、先行研究において広く用いられている。図 2-2 に **Bolsig+** で考慮している電

子周りのエネルギーフローを示す。また、 f_e について Maxwell 分布を仮定すればもっと簡単に解くことが出来る。

Bolsig+は主に中性粒子にしか対応しておらず、イオンとの反応の計算には用いることが出来ないため、式(2-66)の二体再結合には以下の近似式が使われることもある。

$$v_r = r n_e \quad r_{zb} \equiv 10^{-13} \left(\frac{300 \text{ K}}{T_e} \right) \text{ m}^3/\text{s} \quad (2-69)$$

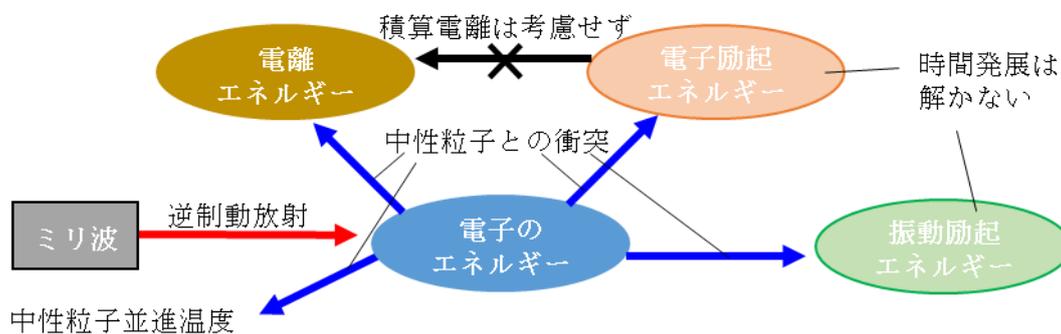


図 2-2 Bolsig+で考慮されている電子周りのエネルギーフロー

2.6 電磁界の方程式

ここまで電子の拡散方程式に関する話をしてきたが、ミリ波中での電離波面進展を解くには電磁波とプラズマの相互作用を解かなければならない。まず電磁波を解くために Maxwell 方程式が必要である。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_e \quad (2-70)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2-71)$$

また、プラズマにおける電磁波の反射を解くにはプラズマ中の電流 \mathbf{J}_e を求める必要があり、これは電子の流速 \mathbf{u}_e から以下の様に与えられる。

$$\mathbf{J}_e = -en_e \mathbf{u}_e \quad (2-72)$$

\mathbf{u}_e は以下に示す電子の運動方程式に従う。

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} = -\frac{e\mathbf{E}}{m_e} - \nu_m \mathbf{u}_e \quad (2-73)$$

したがって、電流を求めるには式(2-72)と式(2-73)より以下の微分方程式を解けばよい。

$$\frac{d\mathbf{J}_e}{dt} = \frac{e^2 n_e}{m_e} \mathbf{E} - \nu_m \mathbf{J}_e \quad (2-74)$$

式(2-70)、式(2-71)、式(2-74)を連立して解くことにより、プラズマ周りの電界の分布を解くことが出来る。

2.7 基礎方程式まとめ

電離波面の進展には、電子拡散と電離のプロセスが重要である。これらを考慮して電子数密度の分布を解くには以下に示す電子の拡散方程式を用いることが出来る。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - D\nabla^2 n_e = f_i n_e \quad (2-75)$$

電子拡散係数 D には電子が自由に動ける場合の自由拡散係数 D_e とイオンと一緒に拡散する両極性拡散係数 D_a があり、電子数密度勾配のスケール長と比べてデバイ長が十分長い場合には自由拡散となり、短い場合には両極性拡散となる。また両者の間を近似的に解く有効拡散係数 D_{eff} のモデルも提案されている。電子の生成項 $f_i n_e$ については衝突電離、再結合等の影響が考慮でき、 E/n_n の関数として導かれる電子のエネルギー分布関数を使って求めることが出来る。

電磁波を解くには Maxwell 方程式を解けばよい。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_e \quad (2-76)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2-77)$$

この式の中に含まれるプラズマ中の電流については以下に示す電子の運動方程式から導ける。

$$\frac{d\mathbf{J}_e}{dt} = \frac{e^2 n_e}{m_e} \mathbf{E} - \nu_m \mathbf{J}_e \quad (2-78)$$

以上の4式について適宜離散化して解けば、電離波面の進展を数値計算により模擬することが出来る。

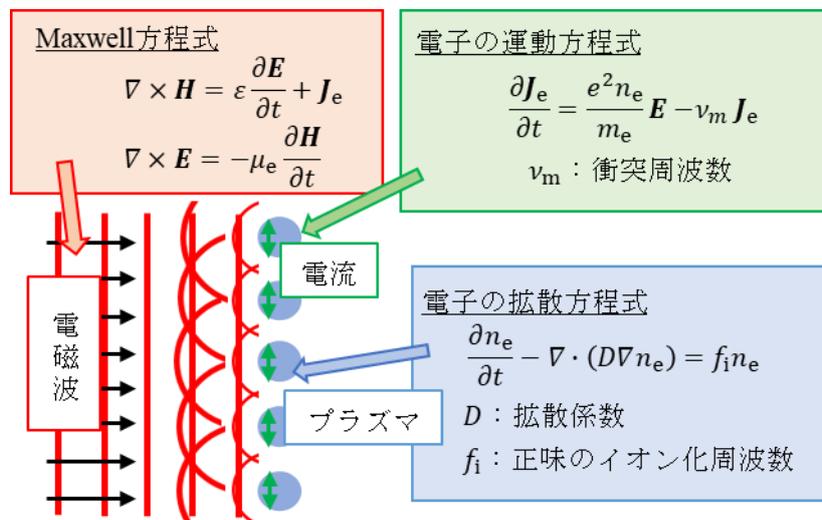


図 2-3 電離波面の進展を解くための基礎方程式

2.8 拡散方程式の離散化

プラズマの拡散方程式を離散化するにあたり、計算の安定化を図るため以下の様に生成項をイオン化周波数 ν_i の項と電子消滅の周波数 ν_d の項に分ける。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot (D \nabla n_e) = (\nu_i - \nu_d) n_e \quad (2-79)$$

D の空間変分が十分小さいことを仮定すると、以下の方程式を解けばよい。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - D \nabla^2 n_e = (\nu_i - \nu_d) n_e \quad (2-80)$$

ここではこの方程式を離散化していく。まず時間変分の離散化を行う。計算の安定性のため、生成項のうち電子数を減らす方向にかかる項、ここでは ν_d を含む電子消滅項を半陰解法的に $\nu_d n_e^{n+1}$ とする [41]。

$$\begin{aligned} \frac{n_e^{n+1} - n_e^n}{\Delta t} - D \nabla^2 n_e^n &= \nu_i n_e^n - \nu_d n_e^{n+1} \\ n_e^{n+1} &= \frac{1}{1 + \nu_d \Delta t} \{ (1 + \nu_i \Delta t) n_e^n + D \Delta t \nabla^2 n_e^n \} \end{aligned} \quad (2-81)$$

空間変分を含む部分 $\nabla^2 n_e^n$ については以下のようにすると二次精度で離散化できる。

$$\nabla^2 n_e|_{i,j}^n = \frac{n_e|_{i+1,j}^n - 2n_e|_{i,j}^n + n_e|_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{n_e|_{i,j+1}^n - 2n_e|_{i,j}^n + n_e|_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad (2-82)$$

また、精度を上げて四次精度とするには以下の様にしてやればよい。

$$\begin{aligned} \nabla^2 n_e|_{i,j}^n &= \frac{-n_e|_{i+2,j}^n + 16n_e|_{i+1,j}^n - 30n_e|_{i,j}^n + 16n_e|_{i-1,j}^n - n_e|_{i-2,j}^n}{12\Delta x^2} \\ &+ \frac{-n_e|_{i,j+2}^n + 16n_e|_{i,j+1}^n - 30n_e|_{i,j}^n + 16n_e|_{i,j-1}^n - n_e|_{i,j-2}^n}{12\Delta y^2} \end{aligned} \quad (2-83)$$

2.9 Maxwell 方程式の離散化

2.9.1 FDTD 法

この節ではマクスウェル方程式から電磁場の時間発展を解く数値計算法の一つである Finite Difference Time Domain (FDTD)法 [44]について説明する。まず、マクスウェル方程式を以下に示す。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_e \quad (2-84)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2-85)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho \quad (2-86)$$

$$\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}) = 0 \quad (2-87)$$

式(2-86)、式(2-87)については時間微分項を含んでいないため、初期条件において満たしていれば自動的にそれ以降の時間においても満たされる。よって時間発展を解くには式 4-1 と式 4-2 を差分化すればよい。これらの式を分けて書くと

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial z} \right) - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_x \\ \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial x} \right) - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_y \\ \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y} \right) - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{J}_z \end{cases} \quad (2-88)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (2-89)$$

となる。ここで、図 2-4 のように座標をとる。このように各パラメータにおいて位置を変えるのが FDTD 法の特徴である。さらに、電界と磁界で計算する時間を半時間刻みだけずらして差分化を行うと以下のような式となる。

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{E}_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \mathbf{E}_x|_{i+1/2,j,k}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\mathbf{H}_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - \mathbf{H}_z|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{\mathbf{H}_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_y|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \mathbf{J}_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} \right) \\ \frac{\mathbf{E}_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1} - \mathbf{E}_y|_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\mathbf{H}_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_x|_{i,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{\mathbf{H}_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - \mathbf{H}_z|_{i-1/2,j+1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta x} - \mathbf{J}_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} \right) \\ \frac{\mathbf{E}_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1} - \mathbf{E}_z|_{i,j,k+1/2}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\mathbf{H}_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_y|_{i-1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{\mathbf{H}_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_x|_{i,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - \mathbf{J}_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} \right) \end{cases} \quad (2-90)$$

$$\begin{cases} \frac{H_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} - H_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{E_z|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1/2} - E_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{E_y|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1/2} - E_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta z} \right) \\ \frac{H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} - H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{E_x|_{i+1/2,j,k+1}^{n+1/2} - E_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{E_z|_{i+1,j,k+1/2}^{n+1/2} - E_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) \\ \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1} - H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{E_y|_{i+1,j+1/2,k}^{n+1/2} - E_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{E_x|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2} - E_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \end{cases} \quad (2-91)$$

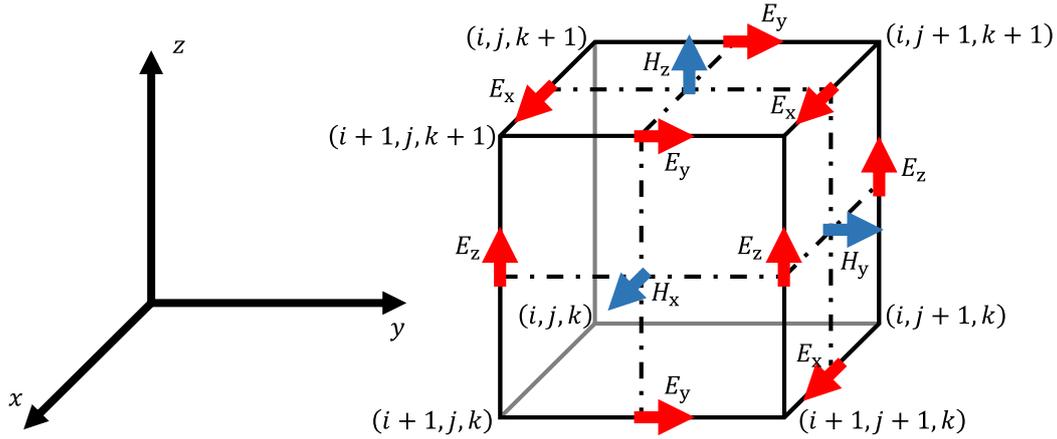


図 2-4 FDTD における電場、磁場のメッシュ

空間刻み幅は、電磁波を再現するのに波長 λ に対して $\lambda/10$ より小さくとれば十分に再現が可能である [45]。しかし、プラズマが存在する場合、空間電流が存在するためこの変化の空間スケールに対して十分小さくおく必要がある。時間刻みについては計算の安定性から以下の条件が必要となる。

$$\Delta t \leq \frac{1}{c_0 \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (2-92)$$

ここで c_0 は真空中における光速である。この条件は、空間において等方的に刻みを設定する場合、 $\Delta x = \Delta y = \Delta z \equiv \Delta l$ とおくと

$$\Delta t \leq \frac{\Delta l}{c_0 \sqrt{3}} \quad (2-93)$$

となる。

FDTD 法は二次元空間でどうなるかを考える。これには z 方向の変化量が 0 であるとすれば良い。よって、式(2-90)、式(2-91)は次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_x|_{i+1/2,j}^{n+1} - E_x|_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{1}{\varepsilon_0} J_x|_{i+1/2,j}^{n+1/2} \\ \frac{E_y|_{i,j+1/2}^{n+1} - E_y|_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{1}{\varepsilon_0} J_y|_{i,j+1/2}^{n+1/2} \\ \frac{E_z|_{i,j}^{n+1} - E_z|_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) - \frac{1}{\varepsilon_0} J_z|_{i,j}^{n+1/2} \end{array} \right. \quad (2-94)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H_x|_{i,j+1/2}^{n+1} - H_x|_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{E_z|_{i,j+1}^{n+1/2} - E_z|_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} \\ \frac{H_y|_{i+1/2,j}^{n+1} - H_y|_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_0} \frac{E_z|_{i+1,j}^{n+1/2} - E_z|_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} \\ \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - H_z|_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{E_y|_{i+1,j+1/2}^{n+1/2} - E_y|_{i,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{E_x|_{i+1/2,j+1}^{n+1/2} - E_x|_{i+1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \end{array} \right. \quad (2-95)$$

2.9.2 FDTD 法の空間高次精度化

本研究において注目している現象は波長の数倍程度の大きさのものであるため、計算領域は比較的広めにとらなければならない。一方、伸展中のプラズマ密度変化の距離スケールは入射ミリ波の波長よりも短いことが考えられ、空間精度をプラズマがないときに比べて高く設定する必要がある。そのため、このままでは空間精度を得るためにメッシュサイズを小さくする必要があり、一方計算領域は広いため、メッシュ数が多くなり、計算コストが膨大になってしまうことが考えられる。そこで、同じメッシュサイズでもより高精度に計算できるスキームを用いた。上記の FDTD スキームは時間二次、空間二次精度のスキーム(S22)となっているが、ここでは時間二次、空間四次精度のスキーム(S24) [46]について説明する。空間高次精度化を行うには、さらに一つ隣のデータまで用いて計算を行えばよい。例えば $E_x|_{i+1/2,j}^{n+1}$ を求めるのに S22 では $H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}$ と $H_z|_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}$ を用いるが、高精度化を行うには、さらに隣の $H_z|_{i+1/2,j+3/2}^{n+1/2}$ と $H_z|_{i+1/2,j-3/2}^{n+1/2}$ を用いる必要がある。これを適当な重みをつけて足し合わせる。以下に二次元における S24 の式を示す。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_x|_{i+1/2,j}^{n+1} - E_x|_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = \frac{9}{8\varepsilon_0} \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{1}{8\varepsilon_0} \frac{H_z|_{i+1/2,j+3/2}^{n+1/2} - H_z|_{i+1/2,j-3/2}^{n+1/2}}{3\Delta y} - \frac{1}{\varepsilon_0} J_x|_{i+1/2,j}^{n+1/2} \\ \frac{E_y|_{i,j+1/2}^{n+1} - E_y|_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{9}{8\varepsilon_0} \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{1}{8\varepsilon_0} \frac{H_z|_{i+3/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i-3/2,j+1/2}^{n+1/2}}{3\Delta x} - \frac{1}{\varepsilon_0} J_y|_{i,j+1/2}^{n+1/2} \\ \frac{E_z|_{i,j}^{n+1} - E_z|_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{9}{8\varepsilon_0} \left(\frac{H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \\ \quad - \frac{1}{8\varepsilon_0} \left(\frac{H_y|_{i+3/2,j}^{n+1/2} - H_y|_{i-3/2,j}^{n+1/2}}{3\Delta x} - \frac{H_x|_{i,j+3/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j-3/2}^{n+1/2}}{3\Delta y} \right) - \frac{1}{\varepsilon_0} J_z|_{i,j}^{n+1/2} \end{array} \right. \quad (2-96)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{H_x|_{i,j+1/2}^{n+1} - H_x|_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{9}{8\mu_0} \frac{E_z|_{i,j+1}^{n+1/2} - E_z|_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} + \frac{1}{8\mu_0} \frac{E_z|_{i,j+2}^{n+1/2} - E_z|_{i,j-1}^{n+1/2}}{3\Delta y} \\ \frac{H_y|_{i+1/2,j}^{n+1} - H_y|_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = \frac{9}{8\mu_0} \frac{E_z|_{i+1,j}^{n+1/2} - E_z|_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{1}{8\mu_0} \frac{E_z|_{i+2,j}^{n+1/2} - E_z|_{i-1,j}^{n+1/2}}{3\Delta x} \\ \frac{H_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - H_z|_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{9}{8\mu_0} \left(\frac{E_y|_{i+1,j+1/2}^{n+1/2} - E_y|_{i,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{E_x|_{i+1/2,j+1}^{n+1/2} - E_x|_{i+1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \\ \quad + \frac{1}{8\mu_0} \left(\frac{E_y|_{i+2,j+1/2}^{n+1/2} - E_y|_{i-1,j+1/2}^{n+1/2}}{3\Delta x} - \frac{E_x|_{i+1/2,j+2}^{n+1/2} - E_x|_{i+1/2,j-1}^{n+1/2}}{3\Delta y} \right) \end{array} \right. \quad (2-97)$$

2.9.3 プラズマ電流の組み込み

本研究における計算では Maxwell 方程式に現れる電流項はプラズマ中電子の運動に起因する。この電流を解くには電子の運動方程式を用いるが、この運動方程式には電界が含まれているため、精度よく解くには Maxwell 方程式と電子の運動方程式を連立して離散化をする必要がある。以下に電流項を含んだ Maxwell 方程式と電子の運動方程式を時間方向に離散化した式を示す。 [41]

$$\varepsilon_0 \frac{\mathbf{E}^{n+1} - \mathbf{E}^n}{\Delta t} = -\nabla \times \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mathbf{J}^{n+1} + \mathbf{J}^n}{2} \quad (2-98)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \nu_m \frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2} = -\frac{e}{m_e} \frac{\mathbf{E}^{n+1} + \mathbf{E}^n}{2} \quad (2-99)$$

このまま計算しても良いが、電磁波を、入射波とプラズマ電流に誘起される波とに分けて計算を行った方が入射波の分布に対する対応性が良いので、以下の様に添え字*i*をつけた入射波の項と添え字*s*をつけた誘起された波の項とに分けて考える。

$$\mathbf{E}^n = \mathbf{E}_i^n + \mathbf{E}_s^n \quad (2-100)$$

$$\mathbf{H}^n = \mathbf{H}_i^n + \mathbf{H}_s^n \quad (2-101)$$

これをつかって式(2-98)を書き換えると以下の様になる。

$$\varepsilon_0 \frac{\mathbf{E}_s^{n+1} - \mathbf{E}_s^n}{\Delta t} = -\nabla \times \mathbf{H}_s^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\mathbf{J}^{n+1} + \mathbf{J}^n}{2} \quad (2-102)$$

また、式(2-99)を変形すると

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \mathbf{u}^n - \frac{e\Delta t}{m_e} \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{\mathbf{E}^{n+1} + \mathbf{E}^n}{2} \right) \\ &= \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \mathbf{u}^n - \frac{e\Delta t}{m_e} \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{\mathbf{E}_i^{n+1} + \mathbf{E}_i^n}{2} + \frac{\mathbf{E}_s^{n+1} + \mathbf{E}_s^n}{2} \right) \end{aligned} \quad (2-103)$$

ここで

$$\alpha = \frac{v_m \Delta t}{2} \quad (2-104)$$

である。電流は以下の式で表せる。

$$\mathbf{J}^n = -en_e \mathbf{u}^n \quad (2-105)$$

式(2-103)と式(2-105)より

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{n+1} + \mathbf{J}^n &= -en_e(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n) \\ &= -en_e \left(1 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \mathbf{u}^n + \frac{e^2 n_e \Delta t}{m_e} \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{\mathbf{E}_i^{n+1} + \mathbf{E}_i^n}{2} + \frac{\mathbf{E}_s^{n+1} + \mathbf{E}_s^n}{2} \right) \end{aligned} \quad (2-106)$$

この式を式(2-98)に代入して整理すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{n+1} &= \frac{1-\beta}{1+\beta} \mathbf{E}_s^n + \frac{en_e \Delta t}{\epsilon_0} \frac{1+\alpha}{1+\beta} \mathbf{u}^n \\ &\quad - \frac{\beta}{1+\beta} (\mathbf{E}_i^{n+1} + \mathbf{E}_i^n) - \frac{\Delta t}{(1+\beta)\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}_s^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2-107)$$

ここで

$$\beta = \frac{e^2 n_e}{m_e \epsilon_0} \frac{\Delta t^2}{4(1+\alpha)} \quad (2-108)$$

である。式(2-107)の空間変分の部分は FDTD 法に従って離散化する。この式(2-107)と式(2-103)を同時に解くことで精度よく電界を解くことができる。

2.10 ラグランジュ補間

電子数密度勾配のスケール長さは電子数密度の高い両極性拡散領域において最少になり、その値は大まかに以下の式で求められる。

$$l_p|_{\min} \sim \frac{D_a}{U_{\text{ion}}} \approx 10^{-6} \text{ m} \quad (2-109)$$

一方ミリ波のスケール長は波長である 10^{-3} m程度であるので、この二つには大きな隔りがある。また、電磁波を解く FDTD は数値計算コストが高いため、電子数密度を解くメッシュと電磁波を解くメッシュの大きさを変えて電磁波をより荒いメッシュで解いた方が計算コスト的に有利である。そのためには、電磁波メッシュの間の電界を補間して電子数密度メッシュ地点における電界を導出しなければならない。この補間方法として最もシンプルなのがラグランジュ補間と呼ばれる方法である [47]。この方法では、ある次数 d の精度で、 $x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}$ である任意の点 x, y における電界の二乗平均平方根 $E_{\text{rms}}(x, y)$ を求めるのに以下の式を用いればよい。

$$E_{\text{rms}}(x, y) \approx \sum_n \sum_m \left(\frac{\prod_{k \neq n}^k (x - x_k) \prod_{k \neq m}^k (y - y_k)}{\prod_{k \neq n}^k (x_n - x_k) \prod_{k \neq m}^k (y_m - y_k)} E_{\text{rms}}(x_n, y_m) \right) \quad (2-110)$$

$$n = i - d + 2, \dots, i, \dots, i + d - 2, i + d - 1$$

$$m = j - d + 2, \dots, j, \dots, j + d - 2, j + d - 1$$

2.11 FDTD の境界条件

2.11.1 Mur の一次元境界条件

放電実験は十分広い実験室で行われており、プラズマにより反射された電磁波は自由空間へと放たれる。しかし、数値計算においてこのように広い空間を計算領域とするのは数値計算コストの面から現実的ではない。そこで、計算領域を見たい領域のみに絞り、境界において電磁波を吸収するように設定することで十分広い領域がある場合と同じ電界分布を領域内に再現する。ここではこの吸収境界に用いられる数値計算法のうち最もシンプルな方法である G. Mur による境界条件 [48]について説明する。

図 2-5 のように、 $x = 0$ 面に吸収境界がありその境界に向かって z 方向に電界の振幅をもつ電磁波が x 軸に平行に伝播していることを考える。

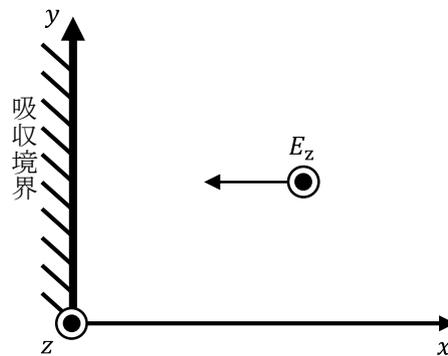


図 2-5 吸収境界へと向かう電磁波

このような波は以下のように $x + c_0 t$ の関数で表わされる。

$$E_z = E_z(x + c_0 t) \quad (2-111)$$

この式は以下の微分方程式を満足する。

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad (2-112)$$

$x = 0$ において反射がない場合、境界でも式 4-16 が成り立つはずである。 $x = 0$ 周りにおいて式 4-16 を離散化すると

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{1/2,j}^{n+1/2} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \Big|_{1/2,j}^{n+1/2} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{E_z|_{1,j}^{n+1} - E_z|_{0,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{E_z|_{1,j}^n - E_z|_{0,j}^n}{\Delta x} \right) - \frac{1}{2c_0} \left(\frac{E_z|_{1,j}^{n+1} - E_z|_{1,j}^n}{\Delta t} + \frac{E_z|_{0,j}^{n+1} - E_z|_{0,j}^n}{\Delta t} \right) = 0$$

$$E_z|_{0,j}^{n+1} = E_z|_{1,j}^n + \frac{c_0\Delta t - \Delta x}{c_0\Delta t + \Delta x} (E_z|_{1,j}^{n+1} - E_z|_{0,j}^n) \quad (2-113)$$

となる。他の方向の電界、境界についても同様の方法を用いればよい。

2.11.2 PML 境界条件

上記の方法では反射が多く、特に壁面に向かって斜めに入射するミリ波についての吸収はあまりよくない。そこでより反射の少ない境界条件として考え出されたものが Perfectly matched layer (PML)境界条件 [49]である。ここではこの PML 境界条件について説明する。

まず真空中からある媒質の表面に周波数 ω の平面波が垂直に入射する場合を考える。この媒質の電気伝導率を σ_E 、磁気伝導率 σ_M をとおくと、媒質中の波動インピーダンス Z は以下の様になる。

$$Z = \sqrt{\frac{\sigma_M + i\omega\mu_0}{\sigma_E + i\omega\varepsilon_0}} \quad i: \text{虚数単位} \quad (2-114)$$

ここで、媒質表面での反射が 0 となるには以下に示す真空の波動インピーダンス Z_0 に対してインピーダンスマッチング条件 $Z_0 = Z$ を満たせばよい。

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (2-115)$$

$Z_0 = Z$ に式(2-114)と式(2-115)を代入して式変形を行うと次のようになる。

$$\frac{\sigma_E}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_M}{\mu_0} \quad (2-116)$$

この条件を満たした媒質であれば、媒質表面での反射波なくなり、また σ_E と σ_M を十分に大きくとれば電磁波は媒質中で直ちに減衰する。このままでは斜めに入射する電磁波に対しては反射が起きてしまうが、媒質表面に対して水平な方向の電磁波に対してのみ $\sigma_E = \sigma_M = 0$ となるような特殊な(非物理的な)媒質を計算上で作ればよい。このような媒質のレイヤーで計算領域を囲んでやれば反射の起きない境界条件が出来る。これを PML 境界条件という。

2.12 離散化法まとめ

進展を解くための基礎方程式は、電子の拡散方程式、Maxwell 方程式、電子の運動方程式であるため、これらを離散化すればよい。まず電子の拡散方程式の時間変分についての離散化には、電子消滅項による計算不安定性を解消するため式(2-81)のような半陰解法が先行研究において用いられている。空間変分の離散化については式(2-83)に示すような一般的なもので十分である。Maxwell 方程式の離散化については FDTD 法を用いればよい。電子の運動方程式については、電界と連動しているので、式(2-107)に示すように Maxwell 方程式に組み込んで解くことにより精度よく解くことが可能である。拡散方程式と Maxwell 方程式では典型的な長さスケールが異なるため、異なった格子幅を用いて解くことで計算コストを抑えることが出来、この格子幅の差を埋めるためにはラグランジュ補間を用いれば十分である。また、吸収境界面において電磁波の反射を抑える計算手法としては Mur の境界条件や PML 境界条件を用いることができる。

2.13 イオン化周波数と拡散係数に依存する構造形成

本研究に先立ち、イオン化周波数 ν_i と拡散係数 D を変化させて上記の計算手法を用いた二次元数値計算を行い、臨界電界強度以上の条件において観測された $\lambda/4$ 構造についての調査を行った [50]。計算の結果、図 2-6 に示すように、この二つのパラメータの比 ν_i/D が大きい時に $\lambda/4$ 構造が現れ、小さい時には拡散的な構造となることが分かり、イオン化周波数 ν_i と拡散係数 D が構造形成の上で重要なパラメータであることが明らかとなった。

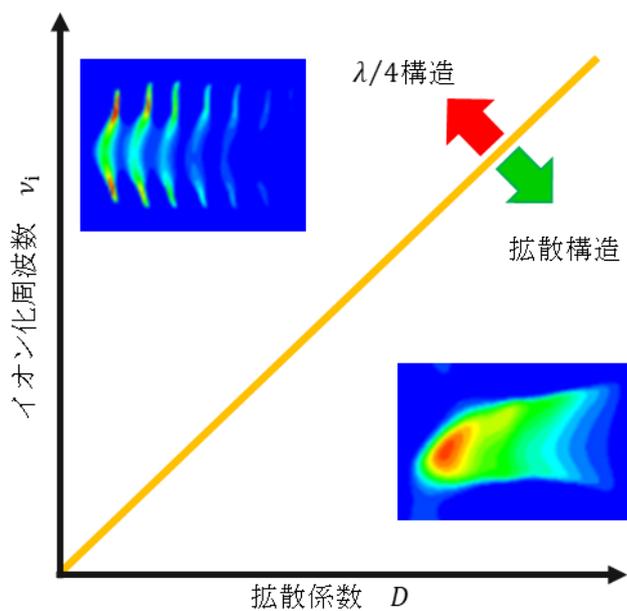


図 2-6 イオン化周波数と拡散係数によって変わる $\lambda/4$ 構造の有無 [50]

第3章

数値計算による楕状構造の解析

3.1 研究目的

先行研究における亜臨界条件のミリ波を用いた大気放電実験で、高速度カメラによって入射波の磁界方向から撮影された $E-k$ 面の写真において、進展中の電離波面に図 1-15 に示すような特徴的な構造(楕状構造)を持つことが観測されている。この構造はミリ波放電のみにおいて観測されている構造であり、どのような条件においてなぜ生じるのかは分かっていない。構造の模式図を図 3-1 に示す。プラズモイドが等間隔に並んだままビーム源方向へと進展している。隣り合うプラズモイドの中心間距離をピッチと呼ぶことにする。このピッチの実験値は入射波の波長 λ に対しておよそ 0.9λ となっている。1.6 節で述べたように亜臨界条件のミリ波における電離波面の進展原理ははまだ解明されておらず、1.4 節で説明したマイクロ波における進展の様にプラズマの構造による電界集中が進展原理に大きくかかわっている可能性もある。以上のことから本章における研究目的はこの楕状構造に対して以下の4点とする。

- (1) 数値計算による構造の再現
- (2) 構造が形成される条件の解明
- (3) 構造の形成原因の解明
- (4) 構造による電界集中の評価

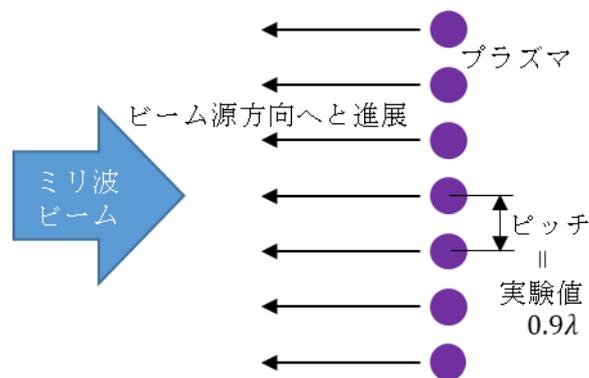


図 3-1 電離波面における楕状構造の模式図

3.2 数値計算方法

3.2.1 基礎方程式と計算手法

基礎方程式は電子の拡散方程式以外については 2.12 節と同様のものを用いた。電子の拡散方程式については有効拡散係数を用いずに以下の式を用いた。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - D\nabla^2 n_e = \nu_i n_e - r n_e^2 \quad (3-1)$$

ここで再結合係数 r の導出には式(2-69)を用いた。イオン化周波数 ν_i については、先行研究においては以下に示す有効電界強度 E_{eff} を引数として Bolsig+ [6]から求めている。

$$E_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{rms}}}{\sqrt{1 + \omega^2/\nu_m^2}} \quad (3-2)$$

しかし、亜臨界条件ではこの方法で求まる ν_i は小さすぎて進展を再現するに至らない。よってここではチューニングパラメータ α を用いて電界強度を上方修正し、 αE_{eff} を引数として Bolsig+から ν_i を求めた。また、拡散係数 D については両極性拡散係数に対して補正パラメータ β を用いて以下の様に定めた。

$$D = \beta D_a \quad (3-3)$$

こうすると、進展速度は 2.4 節より $2\sqrt{D\nu_i}$ から決まるので、ある α に対して実験の進展速度を達成する β を 1 つ見つけることが出来る。ここでは入射電界振幅 1 MV/m に対する進展速度 1 km/s を用い、これを実現する α と β のペアを数個見つけ、このペアに対して行った計算結果での構造の有無から、構造の発生条件を割り出す。

離散化については、Maxwell 方程式は 2.8 節で説明した FDTD 法(S24)、拡散方程式については式(2-83)を用いた。また、補間についても 4 次精度のものを用いた。

3.2.2 時間ステップと格子幅の決定

計算に用いる時間ステップは Maxwell 方程式を解く部分 Δt_M と拡散方程式を解く部分 Δt_d で変えており、以下の様に設定した。

$$\Delta t_M = \frac{\Delta l_M}{2c_0} \quad (3-4)$$

$$\Delta t_d = \frac{\lambda}{c_0} \quad (3-5)$$

また、Maxwell 方程式に対する格子幅 Δl_M と拡散方程式に対する格子幅 Δl_M は収束性を 1 次元計算で確認

して最適値を用いた。図 3-2 に格子幅の比を $\Delta l_d = \Delta l_M/8$ に固定し、 Δl_M を変化させて行った数値計算で得られた進展速度と、Maxwell 方程式の格子幅を $\Delta l_M = 0.04\lambda$ に固定して Δl_d を変化させて行った結果得られた進展速度を示す。これらの結果から、それぞれの格子幅を誤差が 3%以下となる $\Delta l_M = 0.04\lambda$ 、 $\Delta l_d = 0.005\lambda$ とした。

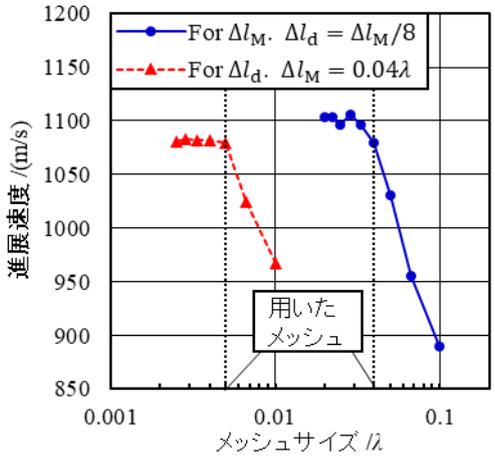


図 3-2 格子収束性の確認

3.2.3 電離周波数と電子拡散を支配するパラメータ

入射電界強度 1 MV/m に対して、進展速度が 1 km/s になるパラメータ α 、 β のセットを求めるために、 $\alpha = 2.7, 3.0, 3.3$ の 3 パターンに対して細かく β の値を振って 1D 数値計算を行った。計算から得られた進展速度を図 3-3 に示す。この計算の結果、表 3-1 に示すパラメータのペアを得た。

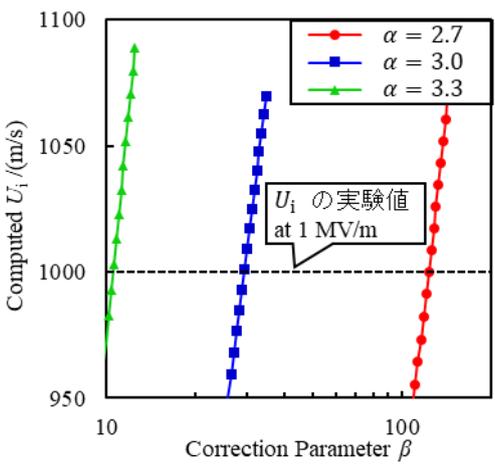


図 3-3 パラメータの値に対する進展速度の計算値

表 3-1 進展速度 1 km/s を実現するパラメータのペア

α	β	D/D_e
2.7	1.23×10^2	6.16×10^{-1}
3.0	2.94×10^1	1.47×10^{-1}
3.3	1.06×10^1	5.30×10^{-2}

3.2.4 計算領域と境界条件

計算領域は、入射ミリ波の波長を λ として $8\lambda \times 7\lambda$ とした(図 3-4)。境界条件は、長辺のうち片方を吸収境界、もう片方は空間対称を仮定して反射境界とした、すなわち、 7λ の二倍の、 14λ の長さの領域を解いていることになる。短辺は片方を吸収境界、もう片方に吸収境界とミリ波発生源を配置した。また、初期プラズマを、短辺の吸収境界側に配置し、そこからのプラズマ伸展を計算した。本研究においては発生源から一様に入射するミリ波を与えた。ミリ波の波長は実験 [32, 3]と同じ 1.76 mm(周波数は 170 GHz)とした。吸収境界には PML 境界条件を用いた。初期プラズマ分布についての依存性を調べるため、図 3-5 に示す 2 パターンの初期分布に対して計算を行った。

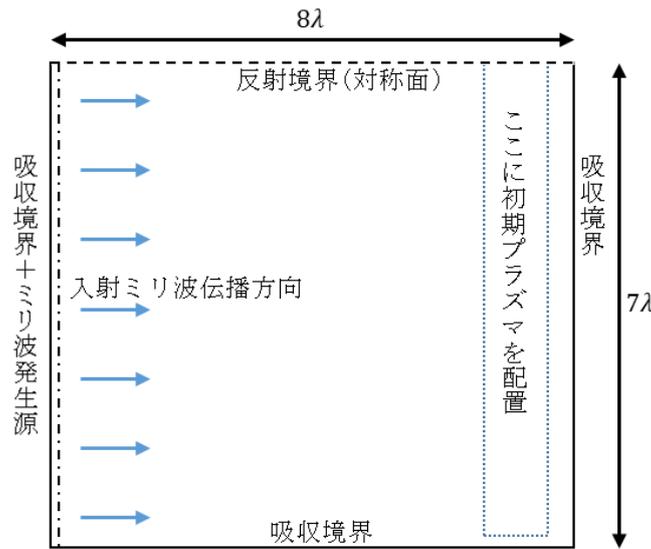


図 3-4 計算領域と境界条件

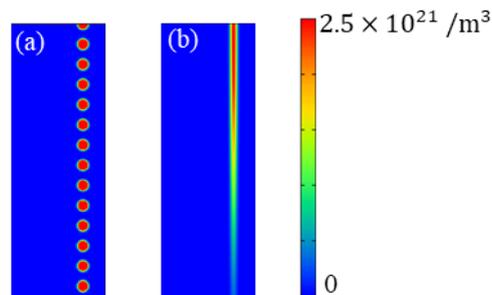


図 3-5 用いた初期電子分布のパターン

3.3 数値計算結果

表 3-1 のパラメータのペアを用いて二次元計算を行った。 $\alpha = 3.3$ 、 $\beta = 1.06 \times 10^1$ を用いたときの計算における電子数密度分布の時間発展を図 3-6 に示す。また、このときの電界の二乗平均平方根の分布を図 3-7 に示す。この条件では初期に与えた電子数密度分布から電離波面が進展するにつれて徐々に楕円構造が形成される様子が再現できた。計算開始から十分長い距離を進展した後に見られる定常進展状態における構造には初期分布に対する依存性は見られなかった。各パラメータペアを用いた場合に定常進展時に見られた構造を図 3-8 に示す。これを見ると、 $\alpha = 2.7$ のペアの時のみ構造はできず、 $\alpha = 3.0$ と $\alpha = 3.3$ の時には構造が出来ていることが分かる。表 3-2 に定常進展時における最大電子数密度と楕円構造のピッチを示す。再現されたピッチは 0.9λ 程度であり、これは実験で観測されたピッチの大きさと一致している。また、最大電子数密度は α の上昇に伴い上がっている。

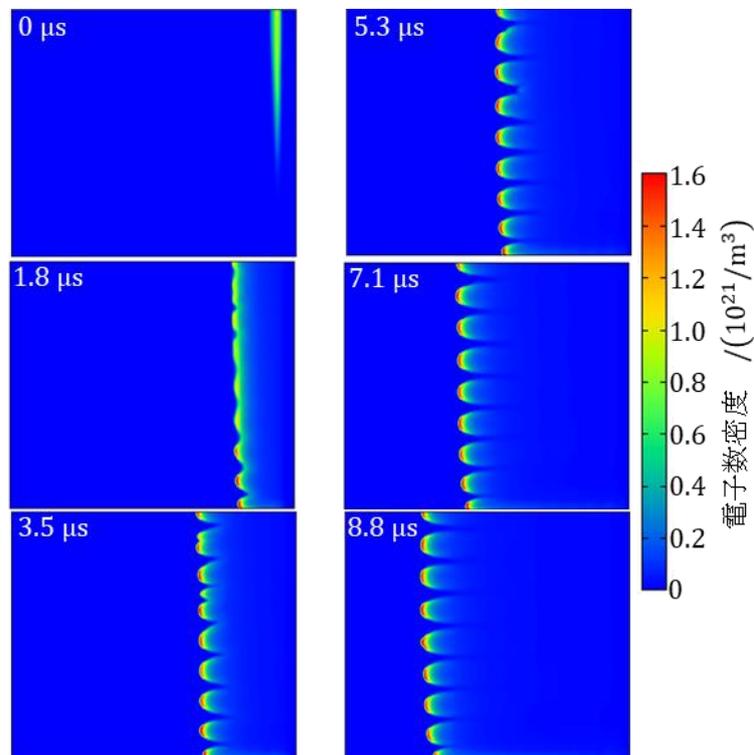


図 3-6 電子数密度分布の時間発展 $\alpha = 3.3$ 、 $\beta = 1.06 \times 10^1$

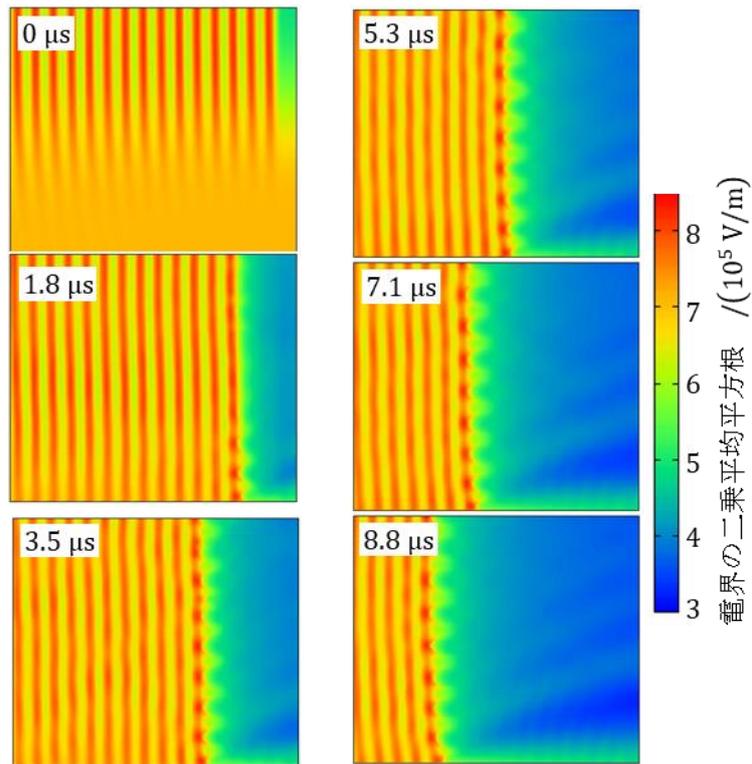


図 3-7 電界の二乗平均平方根分布の時間発展 $\alpha = 3.3$ 、 $\beta = 1.06 \times 10^4$

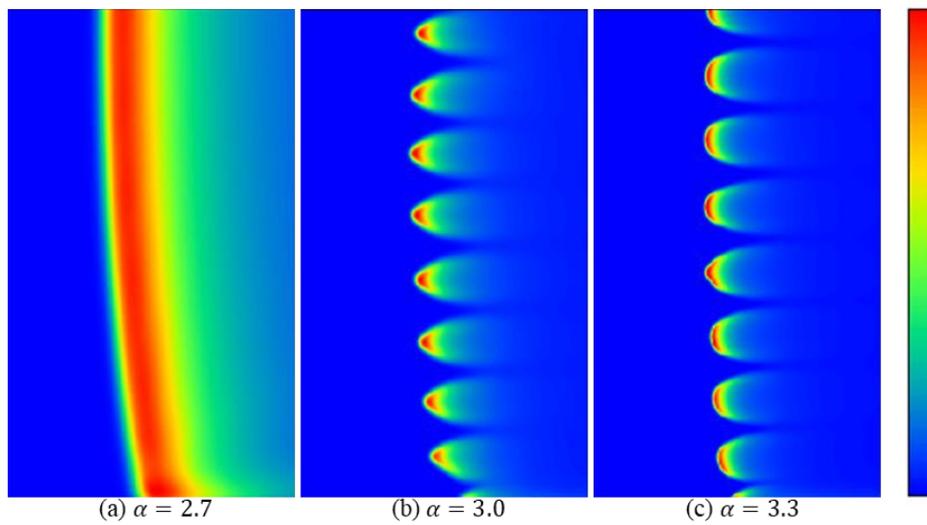


図 3-8 各パラメータを用いた計算における電離波面に見られる構造

表 3-2 数値計算で得られた最大電子数密度と構造のピッチ

α	max. $n_e / (10^{21} \text{ m}^{-3})$	Pitch/ λ
2.7	0.17	構造なし
3.0	0.98	0.85
3.3	1.85	0.89

3.4 入射ミリ波の波長に対するピッチの依存性

楯状構造におけるピッチを決めるスケール長さとして、電磁波のスケール長さすなわちミリ波の波長と、プラズマ側のスケール長さが考えられる。波長によって決まっているのであれば、波長を変えて電離波面進展の計算を行えばそれに応じてピッチも変化するはずである。これを調べるため、入射ミリ波の波長をこれまでの二倍の 3.52 mm(周波数は 85 GHz)として計算を行った。電離周波数と電子拡散のパラメータには $\alpha = 3.0$ 、 $\beta = 2.94 \times 10^1$ を用いた。この計算によって得られた初期状態から8.8 μs 後の電子数密度分布を図 3-9 に示す。この図から、図 3-6 と同様の楯状構造が現れていることが分かる。ピッチは波長 λ に対して 0.86λ となっており、表 3-2 に示す波長 17.6 mm のミリ波を用いた場合のピッチと波長の関係とほぼ一致している。このことは楯状構造におけるピッチが電磁波のスケール長さによって決まっていることを示唆している。なお、図 3-9 の分布における最大電子数密度は $7.0 \times 10^{20} / \text{m}^3$ であった。

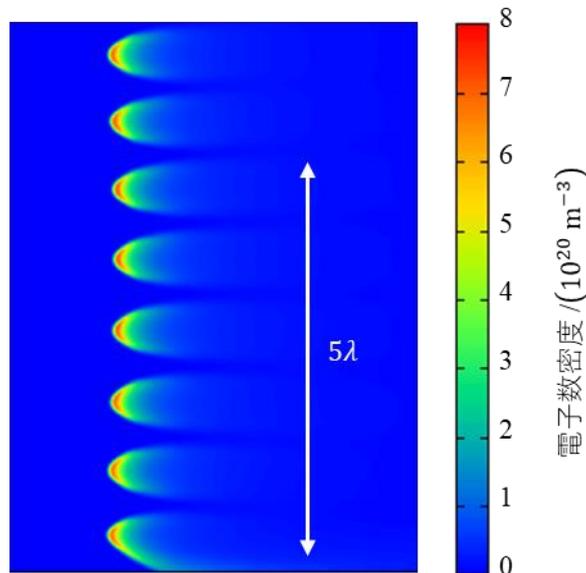


図 3-9 波長 3.48 mm を用いた計算で得られた電子数密度分布 $\alpha = 3.0$ 、 $\beta = 2.94 \times 10^1$

3.5 楕円構造を形成する物理について

楕円構造の形成は二つの問題に分けられる。一つ目はなぜ粒に分かれるかであり、二つ目は分かれた粒がなぜ等間隔に並ぶかである。

まず、一つ目の問題について考える。波長程度の領域におけるミリ波放電の先行研究 [51]において、電界方向に沿って伸びたプラズマが、プラズマ自身を作る電界の共振によってあるところで止まり、およそ 0.5λ の長さのプラズマを形成することが知られており、これが起きるには次に示す衝突優勢プラズマのカットオフ密度 n_c よりも電子数密度が大きいことが必要であるされている。

$$n_c = \frac{m_e \epsilon_0 f_{MMW} v_m}{e^2} = 2.5 \times 10^{20} / \text{m}^3 \quad (3-6)$$

これと表 3-2 の最大電子数密度を比較すると、構造が見られなかった $\alpha = 2.7$ の時のみ最大電子数密度がカットオフ密度 n_c を下回っていることが分かる。このことから粒状のプラズモイドが出来る原因は共振の影響によりプラズマの電界方向長さに制限が生まれるからであると考えられる。

二つ目の、等間隔でプラズモイドが並ぶ原因を探るため、計算結果に倣い電子数密度が $2.0 \times 10^{21} / \text{m}^3$ で径が 0.4λ の一様な円形プラズマモイド一つを二次元計算領域に配置し、そこに入射するミリ波を計算した。計算の結果得られた電界の二乗平均平方根分布を図 3-10 に示す。これをみると反射波と入射波の干渉縞がプラズモイドの作る影を中心に広がっているのが見て取れる。この図 3-10 中の白線は、ミリ波入射方向に対して垂直で粒の中心を通る線上における電界振幅の分布を示す。これを見ると、プラズモイドの中心からおよそ 0.9λ 程度の所に電界が強め合っている点があることが分かる。よってこの強め合いの点に隣のプラズモイドが来ることによって等間隔に並ぶと考えられる。

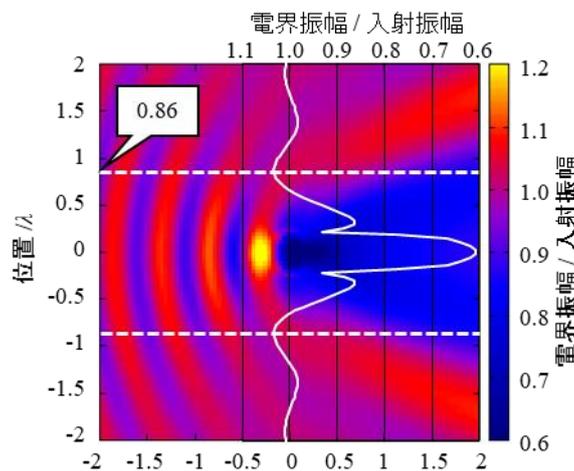


図 3-10 プラズモイド周りの電界振幅

3.6 電離波面の進展速度を決める物理について

3.6.1 二次元的な構造における電界集中

構造の形成による電界集中について考える。粒に分かれて離散的にミリ波のエネルギーを吸収しているわけであるから、何かしらのエネルギー集中は起きているはずである。図 3-7 の電界分布をみると、プラズモイドから入射方向の領域において電界振幅が最大値をとることが分かる。あるプラズモイド一つを中心を通り入射ミリ波の波数ベクトルに平行な直線上における電界振幅と電子数密度の分布を図 3-11 に示す。同じ図にプロットした 1 次元計算における結果と比較すると、最大電界振幅の違いは数%程度であり、大きな違いは見られない。一方電子数密度は二次元計算におけるものの方が二倍程度高いことが分かる。なぜこのようなことが起きるのかを調べるため、各点におけるポインティングベクトルからミリ波エネルギーの流跡線を描いた。プラズモイドの周りのエネルギー流跡線を図 3-12 に示す。これを見るとエネルギーはプラズモイドの内部に集中しており、図 3-11 から見て取れるようにプラズマ内部における電界強度を高めていることが分かる。これが、電子数密度の上昇をもたらしているものと考えられる。しかし、進展速度に関しては電離波前面の電界強度が影響するため、構造の有無が速度にもたらす影響は数%であると考えられ、実際一次元計算と二次元計算における進展速度の差は数%程度に留まった。

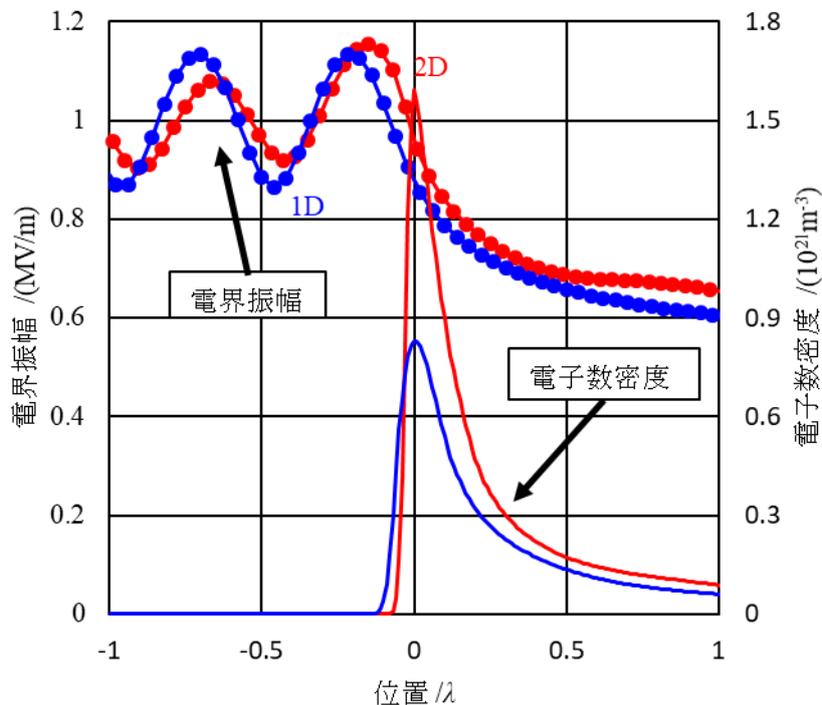


図 3-11 一次元計算と二次元計算における電界振幅と電子数密度分布の違い

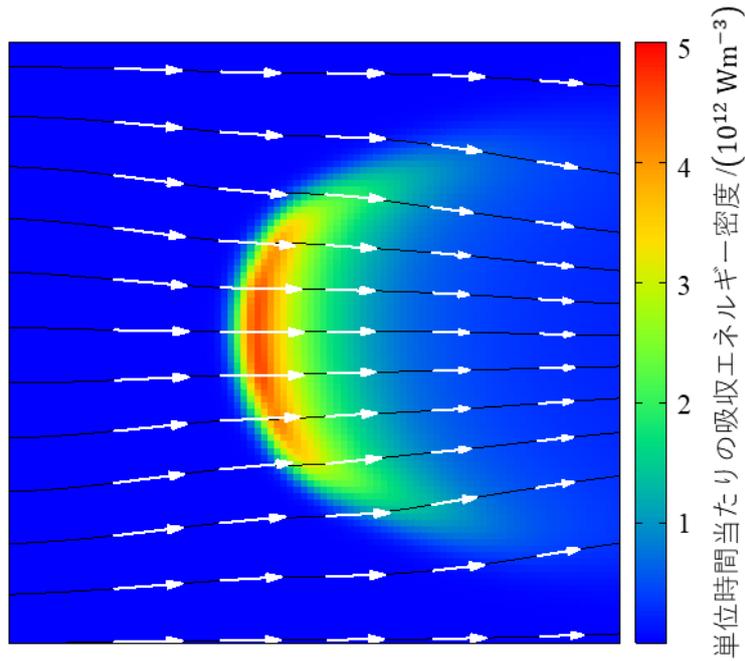


図 3-12 プラズモイド周りの電磁波のエネルギー流跡線(黒線)とポインティングベクトル(白矢印)、及びプラズマに吸収されるミリ波エネルギーの分布

3.6.2 三次元的な構造における電界集中

前の節では二次元計算を元に電界集中を議論した、しかし、図 3-13 に示す先行研究において電離波面を斜め前方から撮影された写真からは、 $H-k$ 面においても $E-k$ 面に似た構造が出来ている可能性が示唆されている。ここで $H-k$ 面にも同様の構造があった場合について考える。これを計算するため三次元計算でプラズマ周りの電界を計算した。計算領域の図を図 3-14 に示す。計算領域内に直径が 0.4λ のプラズマの球を配置し、側面を繰り返し境界として等間隔に並ぶプラズマを模擬した。このプラズマに入射するミリ波を解いて計算した $H-k$ 面におけるプラズマ周りのエネルギー流跡線を図 3-15 に示す。この図から $H-k$ 面においても $E-k$ 面と同様の分布となり、プラズマ内部にエネルギーが集中し、プラズマ前面には集中しないことがわかる。以上のことから、構造による電界集中では、ミリ波放電における進展速度を説明できないことが分かった。

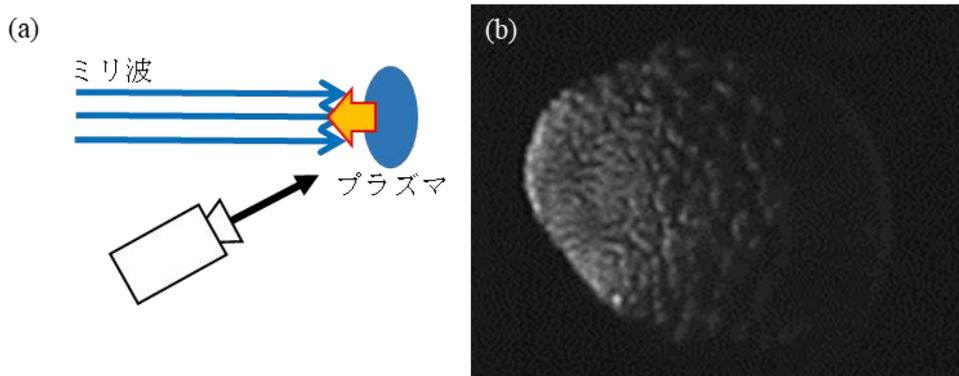


図 3-13 (a)斜めから前からの電離波面撮影 (b)高速度カメラによる電離波面の写真 [36]

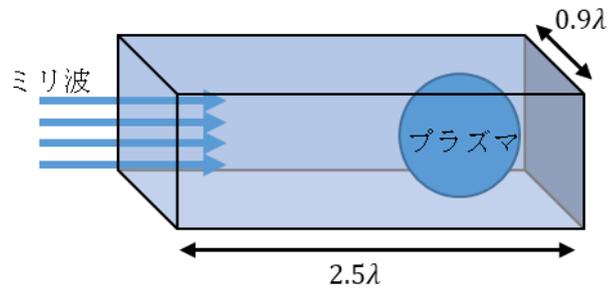


図 3-14 3次元計算における計算領域

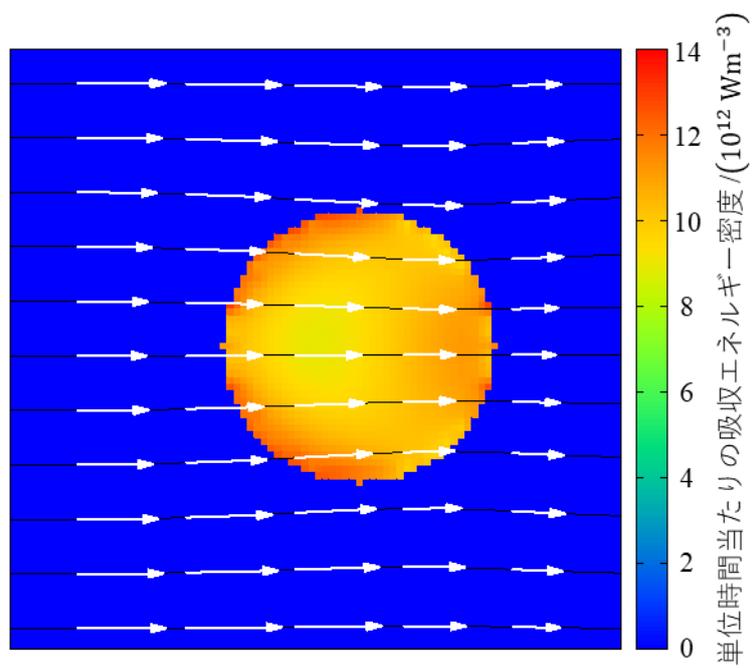


図 3-15 H-k 面でのエネルギー流跡線(黒線)とポインティングベクトル(白矢印)、及びプラズマに吸収されるミリ波エネルギーの分布

3.7 測定結果を再現するための課題

この計算において、櫛状構造を模擬するために換算電界強度 E/n_n を人工的に上昇させて計算を行った。計算の結果から、構造が形成されるには換算電界強度が三倍程度以上になることが必要であることが分かったが、図 3-11 の結果は電界の上昇によるここまでの換算電界上昇が実際に起きる可能性は低いことを示唆している。このことから、実際に起きている高いイオン化周波数を得るには、これまで考慮されてこなかった新たな影響を加えて考える必要がある。

3.8 まとめ

先行研究における亜臨界条件のミリ波を用いた大気放電実験で櫛状構造が観測されているが、この構造の形成原理は分かっておらず、電離波面の進展に影響を及ぼす可能性もある。本研究において、この構造の形成条件、形成原理、進展に対する影響を調べることを目的として二次元数値計算による構造の再現を行った。計算の結果、ピッチが 0.9λ の櫛状構造の再現に成功し、実験結果と良い一致を見せた。形成条件としては、電子数密度がカットオフ密度 $n_c (= 2.5 \times 10^{20} / \text{m}^3)$ を超えたときに構造が現れることが分かった。また、形成原理に対する考察から、まず、プラズマが作る電界の共振によって粒状のプラズモイドが形成され、このプラズモイドからの反射波と入射波が作る電界の強め合いの点に隣り合うプラズマが来ることで櫛状構造が形成されることが分かった。一次元計算との比較を行った結果、構造による電離波面前面での電界集中は高々数%程度であり、一方電子数密度については2倍程度にまで上がりうることが分かった。電界集中については、三次元的な集中についても考察を行ったが、同様に電界の集中は数%に留まることが分かった。このことから、今回用いた進展モデルにおいては、構造が進展速度にもたらす影響は数%程度であると考えられる。

一方、進展速度と構造を再現するには入射電界振幅が 1 MV/m の条件下では換算電界に3倍以上の補正をかける必要があることが分かった。このため、補正なしで電離波面の進展を模擬するには中性粒子密度の減少による換算電界強度の上昇か、あるいはここで考慮されていない電離過程の影響を加える必要がある。

第4章

電離波面進展における累積電離効果

4.1 電子励起中性粒子による電離

イオン化周波数が上昇する原因について考える。前章で考えていた正味のイオン化周波数 f_i は以下の式で表される。

$$f_i = n_n K_{\text{ion}} - n_e r_{2B} \quad (4-1)$$

右辺の第一項は電子と中性粒子との衝突による電離の項で第二項は二体再結合の項である。現在考えられているエネルギーフローは逆制動放射により電子がミリ波のエネルギーを吸収し、そのエネルギーが電子と中性粒子の衝突により中性粒子に行き、その一部が電離に行くという過程である。電離が従来のモデルでは低く見積もられているとすると、実際起こっている状況は逆制動放射による電子の吸収エネルギーが大きいか、あるいは吸収したエネルギーの行き先の見積もりが異なるかのどちらかである。前者については換算電界強度が大きくなることが考えられるが、このような過程は先ほど述べたように考えにくい。とすると後者が主な要因であることが考えられる。衝突によるエネルギーの行き先には、電子が衝突する相手、すなわち中性粒子の状態が大きく関係していると考えられる。中性粒子がもともと励起エネルギーを持っていれば、そこから電離までに必要になるエネルギーは小さくなるため電離は起こりやすくなる。これまでのモデルでは励起中性粒子は考慮されておらず、この影響を加えれば十分な電離が可能になる可能性がある。式(4-1)に励起中性粒子からの電離の項を加えたものを以下に示す。

$$f_i = n_{n,0}^* K_{0,\text{ion}} + \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* K_{i,\text{ion}} - n_e r_{2B} \quad (4-2)$$

右辺の第一項は基底状態にある中性粒子からの電離を表し、第二項はある励起準位 i にある中性粒子からの電離の合計を表す。

4.2 電離波面を駆動するプリカーサ

2.4 節で述べたように電離波面の進展速度は $2\sqrt{Df_i}$ のピーク値で決まる。従来の理論であれば、拡散係数 D は、電子数密度が十分に小さい電離波面前方で最大値である電子自由拡散係数を取り、正味のイオン化周波数についても電離波面前方のミリ波のエネルギー吸収がまだ起こっていない領域で最大値をとるため、 $2\sqrt{Df_i}$ はこの領域でピーク値をとることになる。別の言い方をすれば、電離波面前方領域における放電が電離波面を駆動しているということが出来る。しかし、励起中性粒子を介した電離が主体となる場合、励起中性粒子は電子との衝突によって生成されるため電子数密度が高いバルクに多く存在しており、よってバルク付近で f_i が高くなる領域が存在することになる。このため、必ずしも電離波面前方の低電子密度領域が電離波面を駆動するとは言いきれない。ではまず、バルクに存在する励起中性粒子が電離波面を駆動できるかどうかを簡単に見積もってみよう。入射パワー密度が 2.5 GW/m^2 の場合について考える。このとき実験値から予測される電離波面の進展速度は 1.0 km/s である。バルクにおける電子の拡散係数は電子数密度が十分高いため両極性拡散係数 $D_a \cong 1 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ となるため、理論進展速度は $2\sqrt{D_a f_i}$ となる。よって実験値を再現するのに必要な正味のイオン化周波数は $f_i \cong 3 \times 10^8 /\text{s}$ となる。このイオン化周波数は現実的な値かどうかを考える。このとき、電子一つ当たり単位時間当たりにイオン化に行くエネルギーは、イオン化エネルギーを窒素分子のイオン化エネルギー $\varepsilon_i = 15.6 \text{ eV}$ として計算すると $\varepsilon_i f_i \cong 5 \times 10^9 \text{ eV/s}$ となる。一方、電子一つが逆制動放射で単位時間当たりに吸収するエネルギーはパワー密度 $S_{\text{MMW}} = 2.5 \text{ GW/m}^2$ における最大電界振幅 $E_0 = 1.4 \text{ MV/m}$ に対して

$$\frac{e^2 E_0^2 v_m}{2m_e(\omega^2 + v_m^2)} = 6 \times 10^{10} \text{ eV/s} \quad (4-3)$$

となる。ここで衝突周波数は $v_m = 2 \times 10^{12} /\text{s}$ を用いた。以上よりこの地点において正味のイオン化に用いられたエネルギーは吸収量の8%程度であることが分かる。これはミリ波のエネルギー吸収の大部分が起きるバルク付近であることから、全ミリ波エネルギーの配分にも適用できるとすると、最大電子数密度は以下の様に求められる。

$$\frac{0.08 \times S_{\text{MMW}}}{U_{\text{ion}} \varepsilon_i} = 8 \times 10^{22} /\text{m}^3 \quad (4-4)$$

しかし、この値は前章で計算した衝突優勢のカットオフ密度 $n_c = 2.5 \times 10^{20} /\text{m}^3$ の350倍程度であり、これほど高い電子数密度では入射ミリ波エネルギーのほとんどがプラズマ表面で反射してしまうが、過去の実験結果はこのようなエネルギー散逸が起きていないことを示唆しており、事実と矛盾する。このことから $f_i \cong 3 \times 10^8 /\text{s}$ という高い正味のイオン化周波数は現実的な値に比べて二桁ほど高い値となってしまっていることが考えられる。この結果は電離波面を駆動している領域が電子数密度の高いバルクではなく、電離波面前方の低電子数密度領域であることを示唆する。この領域であれば電子の拡散係数は最大で電子の自由拡散係数 $D_e \cong 1 \times 10^{-1} \text{ m}^2/\text{s}$ まで大きな値をとりえるため、理論進展速度 $2\sqrt{Df_i}$ が実験値となるのに必要な f_i は $10^6 /\text{s}$ 程度で済み、現実的な値に収まる。この前方領域をプリカーサと呼ぶことにする。このプリカーサの模式図を図4-1に示す。しかし、励起中性粒子は前述の通り電子数密度の高いバ

バルクで生成され、プリカーサではほとんど生成されない。よってプリカーサにおいて励起中性粒子を介した電離が起きるにはバルクからプリカーサへ励起中性粒子が運ばれる過程が存在しなければならない。

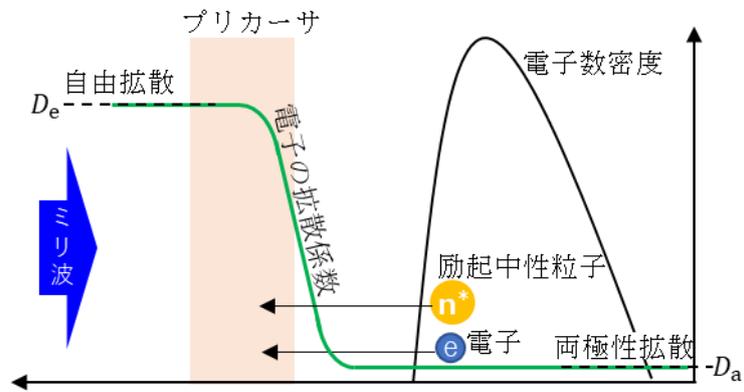


図 4-1 プリカーサの模式図

4.3 輻射を介した励起中性粒子輸送モデル

4.3.1 光子を介した励起中性粒子の伝達

どのような過程による励起中性粒子の伝達であれば電離波面の進展に寄与できるかについて考える。まず考えられるのは励起中性粒子自体が動いてプリカーサ領域へと到達することであるが、このような重粒子の移動が進展に寄与しているとすると、第一章で説明したように弱いデトネーションが起っていることの説明がつかない。重粒子の移動でないと考えられるのは電子の移動と光子の移動であるが、電子についてはプリカーサ領域において数密度が低いいため考えにくい。とすると残るのは光子のみである。そこで、本研究で提唱したいのは、光脱励起によって生じた光子による励起中性粒子の伝達モデルである。このモデルの模式図を図 4-2 に示す。高エネルギーの電子励起中性粒子は寿命の短いもので 10^{-10} s 程度のタイムスケールで基底状態へと光脱励起を起こす。ここで生成された光子は 10^{-5} m 程度の平均自由行程で基底状態の中性粒子に吸収され新たに励起中性粒子ができる。この過程を繰り返すことで励起中性粒子をプリカーサ領域まで伝達することが出来ると考えられる。

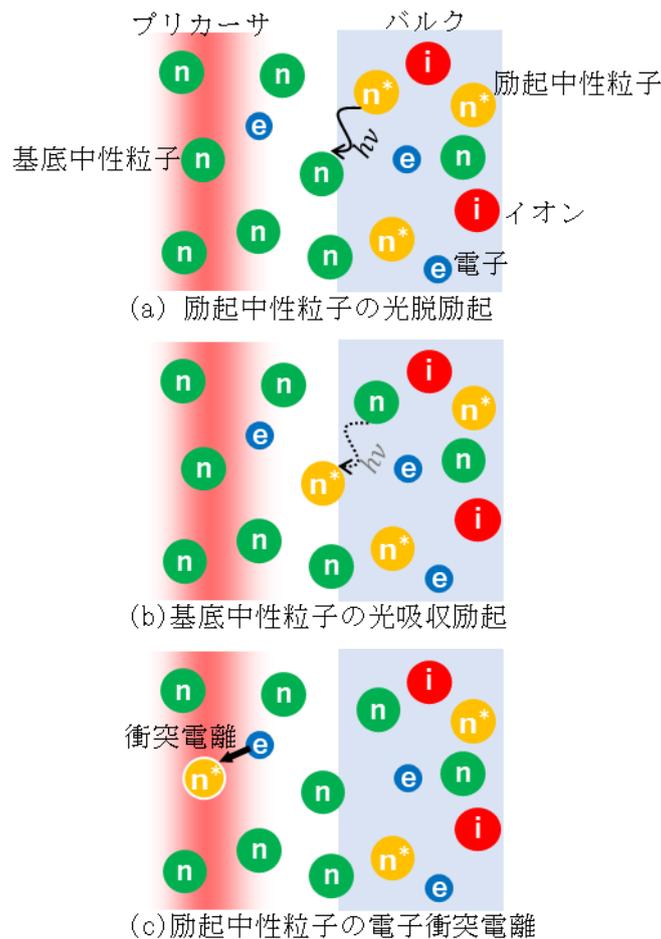


図 4-2 輻射による励起中性粒子の輸送 (a)励起中性粒子が光脱励起を起こし(b)できた光子が別の基底中性粒子に再吸収されて励起が起きる (c)この過程を繰り返してプリカーサに到達した励起中性粒子が電子と衝突して電離する

4.3.2 モデル化に用いる仮定

ここまで新しい進展原理の提唱を行ったが、各励起準位からの発光の吸収長やクエンチングの係数など未知のパラメータが多く存在し、評価は難しい。本研究において数値計算によりこの原理による進展を模擬し、これらの未知パラメータに対してどのような依存性を持つかの解析を行った。このモデルにおいて重要なのは、バルクにおけるプラズマの状態、プリカーサに輸送される高エネルギー励起種、プリカーサにおける累積電離の3つであり、これらを正確に見積もることが重要となる。この部分の正確さを損なわずにできるだけシンプルな計算を行うため以下の仮定を置いた。

- (1) 大気の構成分子は窒素分子のみとする。
- (2) 中性粒子は静止しているものとする。
- (3) 電子のエネルギー分布は電子温度 T_e で決まるボルツマン分布に従う。
- (4) 振動励起のエネルギー分布は振動励起温度 T_v で決まるボルツマン分布に従う。具体的にはある励起エネルギー ϵ_i^v を持つ振動励起準位 i にある中性粒子の数密度 $n_{n,i}^v$ は以下の式に従う。

$$n_{n,i}^v = \frac{n_n}{Z_v} \exp\left(-\frac{\epsilon_i^v}{T_v}\right) \quad Z_v \equiv \sum_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i^v}{T_v}\right) \quad (4-5)$$

- (5) 電子励起種は基底準位を除き、バルクの電子温度 $(T_e)_B$ で決まるボルツマン分布に従う。具体的にはある励起エネルギー ϵ_i をもつ電子励起準位 i にある中性粒子の数密度 $n_{n,i}^*$ は、電子励起中性粒子の総密度

$$n_n^* \equiv \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \quad (4-6)$$

に対して以下の式に従う。

$$n_{n,i}^* = \frac{n_n^*}{Z} \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{(T_e)_B}\right) \quad Z_{ex} \equiv \sum_{i \neq 0} \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{(T_e)_B}\right) \quad (4-7)$$

なおバルク電子温度 $(T_e)_B$ は電子数密度のピーク位置における電子温度とした。

これらの仮定について説明する。まず仮定(1)については先行研究 [34]において窒素と大気で進展速度に大きな違いがないことが実験的に示されているため、簡単のため窒素のみとした。仮定(2)については第一章で述べたようにミリ波放電進展は中性粒子の圧縮性流体的な挙動では説明できず、中性粒子の運動による影響が薄いと考えられるためこのような仮定をおいた。仮定(3)については、実際は特にプリカーサ部においてボルツマン分布からずれる可能性があり先行研究ではこのずれが考慮されているが、オーダーが変わるほどの影響にはならないと考えられるため今回は簡単のためにこのようにおいた。仮定(4)について、振動励起はバルクでの電子温度を求めるために計算しているためバルクでの状態がある程度正確に模擬できれば十分でありこの領域では平衡状態になっていると考えているためこのようにおいた。

仮定(5)については、まず、このようにおくことで励起準位間のボルツマン分布が成り立っていると考えられるバルク部における励起中性粒子の分布をある程度正確に解くことが出来、さらに主にバルクで生成された励起中性粒子が光子によりプリカーサへと運ばれることから励起中性粒子の密度はバルクにおける分布に依存すると考えられるためこのようにおいた。

4.3.3 輻射を介した電子励起種輸送の拡散近似

本研究において提唱している進展原理において最も重要な要素は励起中性粒子の光子を介した伝達である。光子によるエネルギー輸送を計算している多くの論文では拡散近似が用いられているが、本研究において考えている励起中性粒子の伝達についても励起中性粒子の数は保存しており拡散的な挙動を示すため、同様の近似により簡単に解くことが可能なはずである。ここでは、この拡散近似を用いた励起中性粒子数保存の式の導出を行う。まず、ある地点 \mathbf{r} からの単位体積あたりに放射される光子の数 $A_{\text{Ei}}n_n^*(\mathbf{r})$ が別のある地点 \mathbf{r}' の単位体積で吸収される量を考える。ここで、 \mathbf{r} から \mathbf{r}' を見たときの角度を (θ, φ) としたとき、地点 \mathbf{r} からその方向への単位立体角あたりの光子の量 $R_{\theta, \varphi}(\mathbf{r})$ は、対称性を仮定すると

$$R_{\theta, \varphi}(\mathbf{r}) = \frac{A_{\text{Ei}}n_n^*(\mathbf{r})}{4\pi} \quad (4-8)$$

となる。

放射光子 $A_{\text{Ei}}n_n^*(\mathbf{r})$ はある距離 l 進むと吸収による減衰で、 $A_{\text{Ei}}n_n^*(\mathbf{r})\exp(-\kappa l)$ となる。ここで κ は吸収係数である。これと式(1)より、地点 \mathbf{r}' の単位体積で吸収される光子の量 $S_r(\mathbf{r}')$ は

$$\begin{aligned} S_r(\mathbf{r}') &= -\frac{1}{4\pi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2} \frac{d}{dl_{\theta, \varphi}} \{A_{\text{Ei}}n_n^*(\mathbf{r})\exp(-\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\} \\ &= \frac{\kappa A_{\text{Ei}}n_n^*(\mathbf{r})\exp(-\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2} \end{aligned} \quad (4-9)$$

となる。よってある地点 \mathbf{r}' での輻射エネルギー輸送による励起中性粒子の増加量 $S(\mathbf{r}')$ を解くにはこれを \mathbf{r} について全空間で積分してやればよい。

$$S(\mathbf{r}') = \iiint \frac{\kappa A_{\text{Ei}}n_n^*(\mathbf{r})\exp(-\kappa|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2} dV \quad (4-10)$$

となる。

これが1次元問題でどうなるかを考える。ここで $n_n^*(\mathbf{r})$ は z 方向の一次元分布をしており $N_n(z)$ と書けるとする。ある地点 z における平面からの輻射がある地点 z' における平面へと輸送する励起中性粒子の量 $S_{1D,z}(z')$ は式(3)を z における平面で積分すると求められる。

$$S_{1D,z}(z') = \iint \frac{\kappa A_{\text{Ei}} n_n^*(z) \exp(-\kappa |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} dS \quad (4-11)$$

ここで $l_{z,z'} = |z - z'|$ と $r^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 - l_{z,z'}^2$ となる r を導入すると、

$$S_{1D,z}(z') = \int_0^\infty \frac{\kappa A_{\text{Ei}} n_n^*(z) \exp\left(-\kappa \sqrt{r^2 + l_{z,z'}^2}\right)}{4\pi(r^2 + l_{z,z'}^2)} 2\pi r dr \quad (4-12)$$

となる。よってある地点 z' で光子により増加する励起中性粒子の量は以下の様になる。

$$S_{1D}(z') = \kappa A_{\text{Ei}} \int_{z=-\infty}^{z=\infty} n_n^*(z) \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{\exp\left(-\kappa \sqrt{r^2 + l_{z,z'}^2}\right)}{4\pi(r^2 + l_{z,z'}^2)} 2\pi r dr dz \quad (4-13)$$

これを扱いやすい拡散方程式の形にすることを考える。 z の全領域での積分となっているが、光子は距離 $1/\kappa$ で減衰するため $1/\kappa$ の数倍程度の領域で積分すればよい。一方電子励起中性粒子分布の典型長 l_p が $1/\kappa$ よりも大きかった場合 $n_n^*(z)$ をテーラー展開し高次の項を微小とみなすことが出来る。

$$n_n^*(z) = n_n^*(z') + \left. \frac{dn_n^*}{dz} \right|_{z'} (z - z') + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 n_n^*}{dz^2} \right|_{z'} (z - z')^2 + O\left(\left(\frac{z - z'}{l_p}\right)^3\right) \quad (4-14)$$

3次以降の項を無視して、2次までの項を式(4-13)に代入すると

$$\begin{aligned} S_{1D}(z') &= \kappa A_{\text{Ei}} n_n^*(z') \int \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{\exp\left(-\kappa \sqrt{r^2 + l_{z,z'}^2}\right)}{r^2 + l_{z,z'}^2} r dr dz \\ &+ \kappa A_{\text{Ei}} \frac{dn_n^*}{dz} \int (z - z') \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{\exp\left(-\kappa \sqrt{r^2 + l_{z,z'}^2}\right)}{r^2 + l_{z,z'}^2} r dr dz \\ &+ \frac{\kappa A_{\text{Ei}}}{2} \frac{d^2 n_n^*}{dz^2} \int (z - z')^2 \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{\exp\left(-\kappa \sqrt{r^2 + l_{z,z'}^2}\right)}{r^2 + l_{z,z'}^2} r dr dz \end{aligned} \quad (4-15)$$

これらの積分を計算すると

$$S_{1D}(z') = A_{\text{Ei}} n_n^*(z') + \frac{A_{\text{Ei}}}{3\kappa^2} \frac{d^2 n_n^*}{dz^2} \quad (4-16)$$

ここである点 z' において光脱励起により抜けていく励起中性粒子の量は $A_{\text{Ei}}N(z')$ であるので励起中性粒子の時間変化の方程式は以下の様になる。

$$\frac{\partial n_n^*}{\partial t} = A_n n_n^*(z') + \frac{A_{\text{Ei}}}{3\kappa^2} \frac{d^2 n_n^*}{dz^2} - A_n n_n^*(z') + S_{\text{ex}} \quad (4-17)$$

ここで S_{ex} は電子衝突励起による励起中性粒子の生成量である。よって以下の拡散方程式の形で書き表せる。

$$\frac{\partial n_n^*}{\partial t} - \frac{A_{\text{Ei}}}{3\kappa^2} \frac{d^2 n_n^*}{dz^2} = S_{\text{ex}} \quad (4-18)$$

励起中性粒子の拡散係数 D_{ex} を以下で定義することとする。

$$D_{\text{ex}} \equiv \frac{A_{\text{Ei}}}{3\kappa^2} \quad (4-19)$$

4.3.4 励起中性粒子の拡散係数

励起拡散係数 D_{ex} を求めるには A_n と κ が必要であるがこれらは励起種によって異なる。電離過程において最も重要なのは電離エネルギーに近い高エネルギー励起種なので、これらの A_{Ei} と κ を知る必要がある。励起蛍光における先行研究 [52]や吸収係数に関する先行研究 [53]から、13 eV を超えるような励起エネルギー帯における典型値は $A_{\text{Ei}} \sim 10^{10}$ /s、 $\kappa \sim 10^5$ /mであるので、 $D_{\text{ex}} \sim 1$ m²/sであると考えられる。しかしながら、これら高エネルギー励起種のパラメータについてすべてを網羅するようなデータベースは私の知る限り存在しないため、正確な値を用いて計算することは不可能である。そこで本研究では、この D_{ex} が全励起種で同じであると仮定した上で、この D_{ex} を変化させて計算を行い、電離波面進展の D_{ex} に対する依存性を調べた。実際は低エネルギー励起種についての拡散係数は高エネルギー励起種よりも小さいため拡散係数を高エネルギー励起種に合わせて一定とするとプリカーサにおける低エネルギー励起中性粒子の密度が過剰に見積もられることになるが、プリカーサでの電離はほとんどが高エネルギー励起種からの電離であるため、この電離についてはある程度正確に見積もることが出来ると考えられる。

4.3.5 励起中性粒子の生成項

励起中性粒子の生成項には以下を用いた。

$$S_{\text{ex}} = n_e n_{n,0}^* \sum_{i \neq 0} K_{0,i} - n_e \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* K_{i,0} - n_e \sum_i n_{n,i}^* K_{n,\text{ion}} + n_e^3 \sum_i r_i - \frac{n_n^*}{\tau_q} \quad (4-20)$$

左辺について説明すると、第一項は基底から電子衝突で新たに励起種になる中性粒子、第二項は励起種から電子衝突により基底に脱励起される中性粒子、第三項は電離する励起中性粒子、第四項は三体再結合によるイオンから励起中性粒子への変化、第五項はクエンチング等の影響による励起中性粒子の減少をそれぞれ表す。クエンチング等による減少については4.7節で電離波面の進展に及ぼす影響を調べた。

4.3.6 基礎方程式

基礎方程式にはまず、2.12 節と同様の以下に示す 4 式を用い、

- Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_e \quad (4-21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4-22)$$

- 電子の運動方程式

$$\frac{d\mathbf{J}_e}{dt} = \frac{e^2 n_e}{m_e} \mathbf{E} - \nu_m \mathbf{J}_e \quad (4-23)$$

- 電子の拡散方程式

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - D_{\text{eff}} \nabla^2 n_e = f_1 n_e \quad (4-24)$$

これに以下に示す新たな 4 式を加えて計算した。

- 電子励起中性粒子の拡散方程式

$$\frac{\partial n_n^*}{\partial t} - D_{\text{ex}} \nabla^2 n_n^* = S_{\text{ex}} \quad (4-25)$$

- 振動励起のエネルギー保存式

$$n_n \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = Q_v \quad (4-26)$$

- 電子のエネルギー保存則

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial n_e k T_e}{\partial t} = & \frac{3}{2} D_{\text{en}} \nabla^2 (n_e k T_e) + S_{\text{IB}} n_e - n_e n_{n,0}^* \sum_{i \neq 0} \varepsilon_i K_{0,i} + n_e \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \varepsilon_i K_{i,0} \\ & - n_e \sum_i n_{n,i}^* (\varepsilon_{\text{ion}} - \varepsilon_i) K_{i,\text{ion}} - \frac{3}{2} k T_e n_e^2 r_{2B} \\ & + n_e^3 \sum_i (\varepsilon_{\text{ion}} - \varepsilon_i) r_i - n_e n_{n,0}^v \sum_{i \neq 0} \varepsilon_i^v K_{0,i}^v + n_e \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^v \varepsilon_i^v K_{i,0}^v \\ & - n_e \sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} (\varepsilon_i - \varepsilon_j) n_{n,i}^v K_{i,j} - \frac{m_e}{m_h} \frac{3}{2} n_e k T_e \nu_m n_n \end{aligned} \quad (4-27)$$

- 電子励起のエネルギー保存則

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \varepsilon_i = & D_{\text{ex}} \nabla^2 \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \varepsilon_i + n_e \sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} (\varepsilon_i - \varepsilon_j) n_{n,i}^* K_{i,j} \\ & + \left\{ n_e n_{n,0}^* \sum_{i \neq 0} \varepsilon_i K_{0,i} - n_e \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \varepsilon_i K_{i,0} - n_e \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \varepsilon_i K_{i,\text{ion}} \right. \\ & \left. + n_e^3 \sum_{i \neq 0} \varepsilon_i r_i \right\} - \frac{1}{\tau_q} \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \varepsilon_i \end{aligned} \quad (4-28)$$

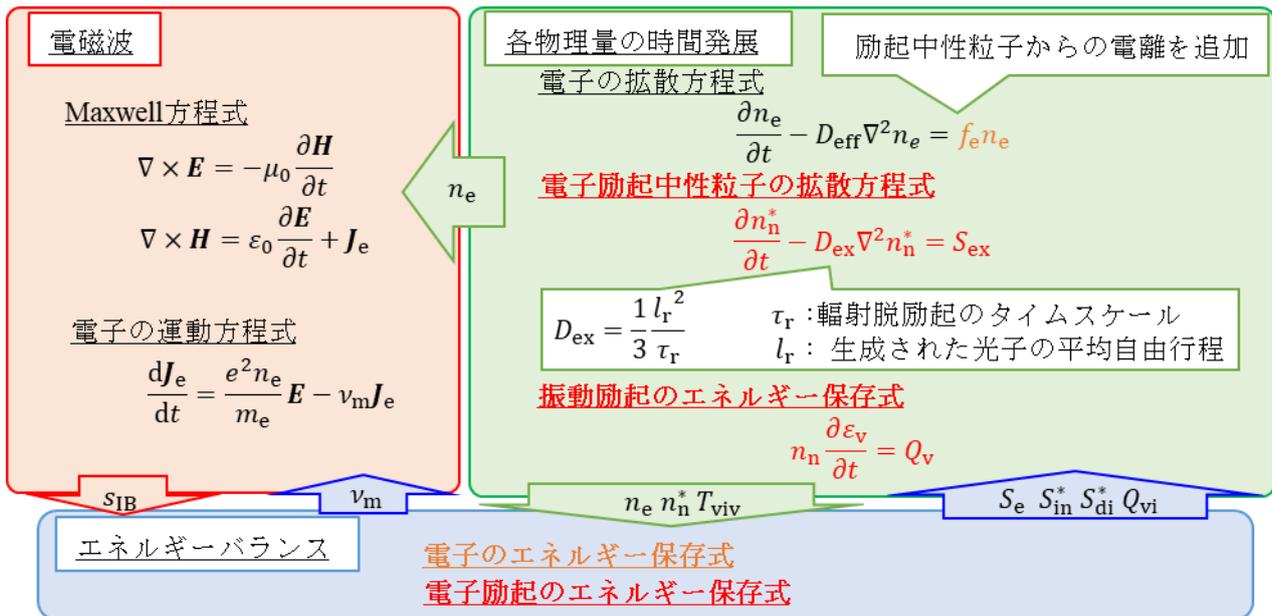
イオン化周波数については式(4-2)に三体再結合の式を加えた以下の式を用いた。

$$f_i = n_{n,0}^* K_{0,\text{ion}} + \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* K_{i,\text{ion}} - n_e r_{2B} - n_e^2 \sum_i r_i \quad (4-29)$$

また、振動励起エネルギーのソースタームには以下の式を用いた。

$$Q_v = n_e N_0^v \sum_{n \neq 0} \epsilon_n^v K_{0,n}^v - n_e \sum_{n \neq 0} N_n^v \epsilon_n^v K_{n,0}^v \quad (4-30)$$

電子のエネルギー保存則と、電子励起のエネルギー保存則については、これらが定常状態に達するまでのタイムスケールが 10^{-10} s程度と、電離波面のタイムスケール 10^{-10} sに比べて非常に小さいため、時間発展は直接解かず、1.2.2 項で説明したようなエネルギーバランスを解き、電子温度を求めた。以上をまとめたものを図 4-3 に示す。



※第2章の式からの変更点 赤：追加した式 橙：変更を加えた式

図 4-3 本研究で提唱するモデルで用いる基礎方程式

4.3.7 電子温度の導出法

上記の生成項を解くには反応係数を求める必要がある。これらの反応係数は先述の通り先行研究ではBolsig+を用いて計算されているが、これは励起中性粒子には対応していないため今回は用いることが出来ない。そこで、本研究では電子温度分布がボルツマン分布であることを仮定して電子温度を求め、その関数として各反応係数を求めた。ここではこの電子温度の求め方について説明する。まず、式(4-27)の左辺は以下の様に分解できる

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e k T_e}{\partial t} &= n_e \frac{\partial k T_e}{\partial t} + k T_e \frac{\partial n_e}{\partial t} = n_e \frac{\partial k T_e}{\partial t} + k T_e \{S_e + D_{\text{eff}} \nabla^2 n_e\} \\ &= n_e \frac{\partial k T_e}{\partial t} + k T_e \left\{ n_e \sum_i n_{n,i}^* K_{i,\text{ion}} - n_e^2 r_{2B} - n_e^3 \sum_n r_n + D_{\text{eff}} \nabla^2 n_e \right\} \end{aligned} \quad (4-31)$$

また式(4-28)は

$$\begin{aligned} &n_e \sum_{i \neq 0} \sum_{j \neq 0} (\epsilon_i - \epsilon_j) n_{n,i}^* K_{i,j} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \epsilon_i - D_{\text{ex}} \nabla^2 \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \epsilon_i - \frac{1}{\tau_q} \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \epsilon_i \\ &\quad - \left\{ n_e n_{n,0}^* \sum_{i \neq 0} \epsilon_i K_{0,i} - n_e \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \epsilon_i K_{i,0} - n_e \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \epsilon_i K_{i,\text{ion}} + n_e^3 \sum_{i \neq 0} \epsilon_i r_i \right\} \end{aligned} \quad (4-32)$$

式(4-32)の右辺第一項と第二項を T_{ex} が一定であるとして展開すると

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \epsilon_i - D_{\text{ex}} \nabla^2 \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \epsilon_i \\ &= \frac{1}{Z_{\text{ex}}} \sum_{i \neq 0} \epsilon_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{k T_{\text{ex}}}\right) \frac{\partial}{\partial t} n_n^* - \frac{D_{\text{ex}}}{Z} \sum_{i \neq 0} \epsilon_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{k T_{\text{ex}}}\right) \nabla^2 n_n^* \\ &= \frac{1}{Z_{\text{ex}}} \sum_{i \neq 0} \epsilon_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{k T_{\text{ex}}}\right) (S_{\text{ex}} + D_{\text{ex}} \nabla^2 n_n^*) - \frac{D_{\text{ex}}}{Z} \sum_{i \neq 0} \epsilon_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{k T_{\text{ex}}}\right) \nabla^2 n_n^* \\ &= \frac{1}{Z_{\text{ex}}} \sum_{i \neq 0} \epsilon_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{k T_{\text{ex}}}\right) S_{\text{ex}} \end{aligned} \quad (4-33)$$

ここで Z は

$$Z_{\text{ex}} = \sum_{i \neq 0} \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{k T_{\text{ex}}}\right) \quad (4-34)$$

である。

式(2-27)に式(2-20)、式(2-24)、式(2-29)を代入して変形すると

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}n_e \frac{dkT_e}{dt} &= \frac{1}{Z_{\text{ex}}} \sum_{i \neq 0} \epsilon_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT_e}\right) S_{\text{ex}} + \frac{1}{\tau_q} \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \epsilon_i + \frac{3}{2} D_{\text{en}} \nabla^2(n_e kT_e) \\
&\quad - \frac{3}{2} D_{\text{eff}} kT_e \nabla^2 n_e + s_{\text{IB}} n_e - 2n_e n_{n,0}^* \sum_{i \neq 0} \epsilon_i K_{0,i} \\
&\quad + 2n_e \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \epsilon_i K_{i,0} - n_e \sum_i n_{n,i}^* \left(\epsilon_{\text{ion}} - 2\epsilon_i + \frac{3}{2} kT_e \right) K_{i,\text{ion}} \quad (4-35) \\
&\quad + n_e^3 \sum_i \left(\epsilon_{\text{ion}} - 2\epsilon_i + \frac{3}{2} kT_e \right) r_i - n_e n_{n,0}^v \sum_{i \neq 0} \epsilon_i^v K_{0,i}^v \\
&\quad + n_e \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^v \epsilon_i^v K_{i,0}^v - \frac{m_e}{m_h} \frac{3}{2} n_e kT_e v_m N_h
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{3}{2} D_{\text{en}} \nabla^2(n_e kT_e) - \frac{3}{2} D_{\text{eff}} kT_e \nabla^2 n_e \cong 0 \quad (4-36)$$

であるとする

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \frac{dkT_e}{dt} &= \frac{1}{Z_{\text{ex}}} \sum_{i \neq 0} \epsilon_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT_e}\right) \frac{S_{\text{ex}}}{n_e} + \frac{1}{\tau_q n_e} \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \epsilon_i + s_{\text{IB}} - 2n_{n,0}^* \sum_{i \neq 0} \epsilon_i K_{0,i} \\
&\quad + 2 \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \epsilon_i K_{i,0} - \sum_i n_{n,i}^* \left(\epsilon_{\text{ion}} - 2\epsilon_i + \frac{3}{2} kT_e \right) K_{i,\text{ion}} \quad (4-37) \\
&\quad + n_e^2 \sum_i \left(\epsilon_{\text{ion}} - 2\epsilon_i + \frac{3}{2} kT_e \right) r_i - n_{n,0}^v \sum_{i \neq 0} \epsilon_i^v K_{0,i}^v \\
&\quad + \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^v \epsilon_i^v K_{i,0}^v - \frac{m_e}{m_h} \frac{3}{2} kT_e v_m n_n
\end{aligned}$$

となる。電子の熱容量は電離度が低いいためほかに比べて小さく、励起種や振動温度の増減よりも短いタイムスケールで定常に落ち着くため

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{Z_{\text{ex}}} \sum_{i \neq 0} \epsilon_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT_e}\right) \frac{S_{\text{ex}}}{n_e} + \frac{1}{\tau_q n_e} \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \epsilon_i + s_{\text{IB}} - 2n_{n,0}^* \sum_{i \neq 0} \epsilon_i K_{0,i} \\
& + 2 \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^* \epsilon_i K_{i,0} - \sum_i n_{n,i}^* \left(\epsilon_{\text{ion}} - 2\epsilon_i + \frac{3}{2}kT_e\right) K_{i,\text{ion}} \\
& + n_e^2 \sum_i \left(\epsilon_{\text{ion}} - 2\epsilon_i + \frac{3}{2}kT_e\right) r_i - n_{n,0}^v \sum_{i \neq 0} \epsilon_i^v K_{0,i}^v \\
& + \sum_{i \neq 0} n_{n,i}^v \epsilon_i^v K_{i,0}^v - \frac{m_e}{m_h} \frac{3}{2} kT_e v_m n_n
\end{aligned} \tag{4-38}$$

となるような T_e を求めればよい。

図 4-4 にこのモデルにおいて考慮しているエネルギーフローを示す。第三章や先行研究において用いられている Bolsig+ を利用したモデルと比較すると、電離エネルギー、電子励起エネルギー、振動励起エネルギーから電子に帰ってくるエネルギーが加わり、更に累積電離によって励起中性粒子から電離に行く際のエネルギーのやり取りが加わっていることが分かる。電子に帰ってくるエネルギーについては、振動励起温度が大きいバルクにおいて特に大きくなると考えられ、この影響を加えることでこれまで考慮されてこなかったバルクにおける電子温度上昇を解くことが可能になると考えられる。

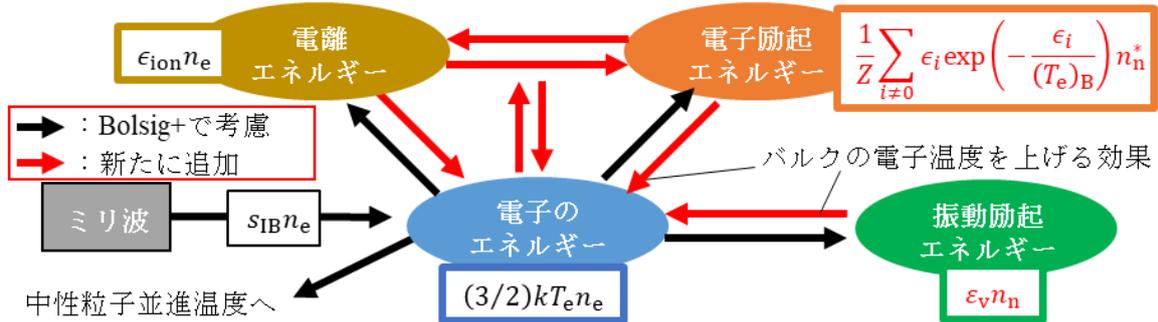


図 4-4 本研究で提唱するモデルにおける電子周りのエネルギーフロー

4.3.8 反応係数

本研究では各反応の係数を電子温度の関数として求めている。ここではその求め方について説明する。まず、基底中性粒子と電子衝突反応の断面積についてはデータベース [54] の値を用いて反応係数を以下の式から求めた。

$$K_{0,i} = \int_0^{\infty} \sigma_{0,i}(v_e) v_e f(v_e) dv_e \tag{4-39}$$

$$f(v_e) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v_e^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T_e}\right) \tag{4-40}$$

また、電子と励起中性粒子との衝突により基底に脱励起される反応係数は平衡状態でボルツマン分布に

なることを考慮すると以下の様に求められる。

$$K_{i,0}(T_e) = K_{i,0}(T_e) \frac{n_{n,0}^*}{n_{n,i}^*} \Big|_{\text{eq}} \quad (4-41)$$

$$\frac{n_{n,0}^*}{n_{n,i}^*} \Big|_{\text{eq}} = \frac{g_0}{g_i} \exp\left(-\frac{\epsilon_0 - \epsilon_i}{kT_e}\right) \quad (4-42)$$

本研究では縮退度 g_i は簡単のためすべて1とした。上記の式と同様のものを振動励起中性粒子の計算にも用いた。

励起中性粒子からの電離の係数についてはデータベースが乏しいため、次に示す古典近似の式 [42]を用いた。

$$K_{i,\text{ion}} = \pi \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(\epsilon_{\text{ion}} - \epsilon_i)} \right)^2 \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \left(1 + \frac{2kT_e}{(\epsilon_{\text{ion}} - \epsilon_i)} \right) \exp\left(-\frac{(\epsilon_{\text{ion}} - \epsilon_i)}{kT_e}\right) \quad (4-43)$$

三体再結合の係数については、平衡状態でサハが成り立つことを考慮して以下の式から求めた。

$$r_i(T_e) = K_{i,\text{ion}}(T_e) \frac{n_{n,i}^*}{n_e^2} \Big|_{\text{eq}} \quad (4-44)$$

$$\frac{n_e^2}{n_{n,i}^*} \Big|_{\text{eq}} = 2 \left(\frac{2\pi m_e kT_e}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\epsilon_{\text{ion}} - \epsilon_i}{kT_e}\right) \quad (4-45)$$

4.3.9 各方程式の離散化

Maxwell 方程式、電子の運動方程式、電子の拡散方程式については第3章における数値計算と同様の方法を用いた。励起中性粒子の拡散方程式と振動励起エネルギー保存則については以下の式を用いて離散化した。

$$n_n^{*n+1} = (1 + f_i \Delta t) n_n^{*n} + D_{\text{ex}} \Delta t \nabla^2 n_n^{*n} \quad (4-46)$$

$$\epsilon_v^{n+1} = \epsilon_v^n + Q_v \Delta t \quad (4-47)$$

なお、式(4-47)の空間微分項については式(2-83)と同様の4次精度差分を用いた。格子幅と時間ステップは Maxwell 方程式に対して

$$\Delta l_M = 0.02\lambda \quad \Delta t_M = \frac{\Delta l_M}{2c_0} \quad (4-48)$$

とし、電子の拡散方程式、励起中性粒子の拡散方程式、振動励起エネルギー保存の式については以下のものを用いた。

$$\Delta l_d = 0.005\lambda \quad \Delta t_d = \frac{\lambda}{c_0} \quad (4-49)$$

この拡散方程式の時間ステップごとに式(4-38)を計算して電子温度を求め、これを用いて各係数を求めた。

4.3.10 計算領域と境界条件の設定

計算領域は一次元とし、領域の長さは 8λ に設定した。計算領域の模式図を図 4-5 に示す。境界条件は吸収境界とし、PML 境界条件を用いた。初期プラズマとして初期電子数密度と初期振動励起エネルギーをピーク位置がミリ波入射方向と反対側の境界から 0.5λ に来るようなガウス分布で与え、そこからミリ波源へと進展するプラズマを計算した。

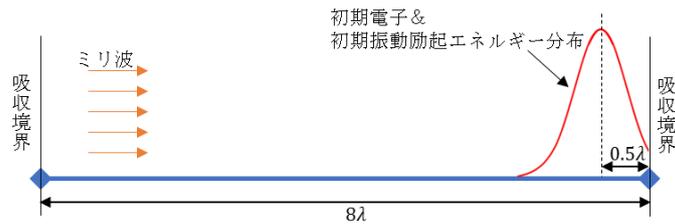


図 4-5 計算領域の模式図

4.4 数値計算結果

4.4.1 計算条件の設定

励起中性粒子の拡散係数 D_{ex} を $0.2 \text{ m}^2/\text{s}$ から $2.6 \text{ m}^2/\text{s}$ まで $0.2 \text{ m}^2/\text{s}$ ずつ変化させ、それぞれに対して入射ミリ波強度を $1.0, 1.4, 1.8, 2.2, 2.6 \text{ GW}/\text{m}^2$ とした時の電離波面の進展を計算した。ここでは、クエンチング等による減少の影響がないことを仮定した。

4.4.2 進展の模擬

計算の結果、すべての計算条件において初期プラズマがミリ波のエネルギーを吸収して成長し、進展する電離波面を形成する様子が再現できた。 D_{ex} を $2.0 \text{ m}^2/\text{s}$ とした時の進展速度を図 4-6 に示す。得られた進展速度は、パワーによらず実験値の 50%程度であり、先行研究に比べて良い一致を見せている。また指数関数近似曲線の乗数も実験値が 0.99 であるのに対し計算値は 0.98 であり非常に高い一致を見せている。入射ミリ波の強度を $2.2 \text{ GW}/\text{m}^2$ として計算された電子数密度分布、電子温度分布、励起中性粒子数密度分布、振動励起温度分布、電界の二乗平均平方根分布の時間発展をそれぞれ図 4-7、図 4-8、図 4-9、図 4-10、図 4-11 に示す。

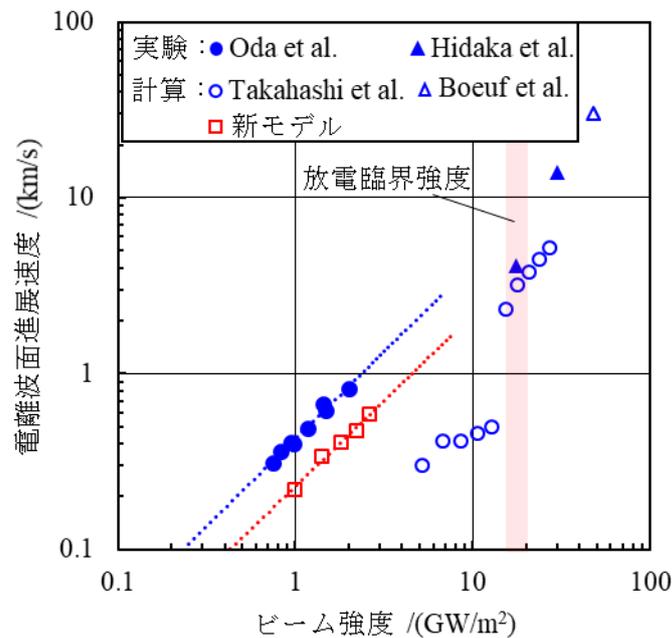


図 4-6 新モデルの計算による電離波面進展速度と先行研究における実験値、計算値の比較

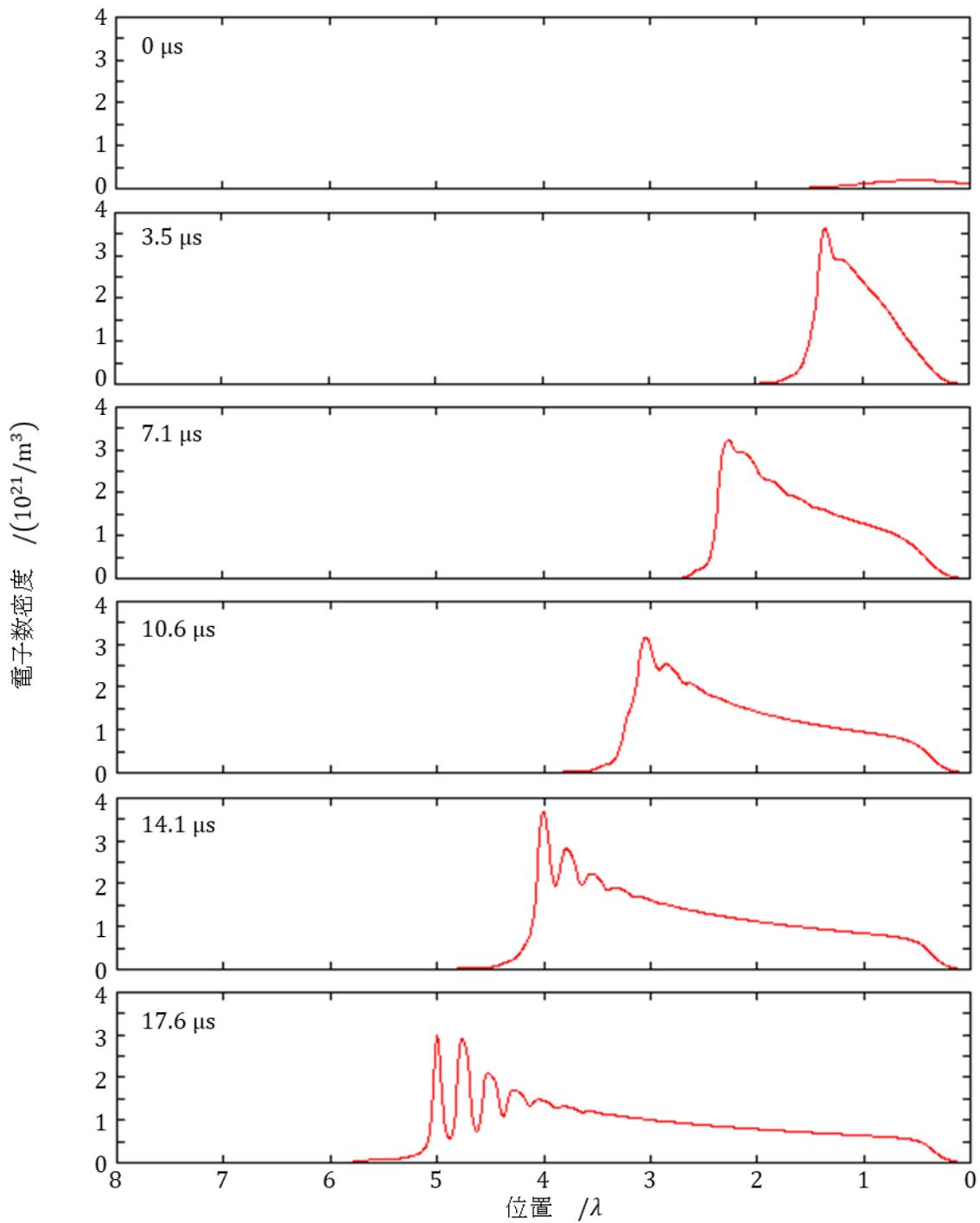


図 4-7 計算により得られた電子数密度分布の時間発展 $D_{ex}=2 \text{ m}^2/\text{s}$ 、入射ミリ波強度は $2.2 \text{ GW}/\text{m}^2$

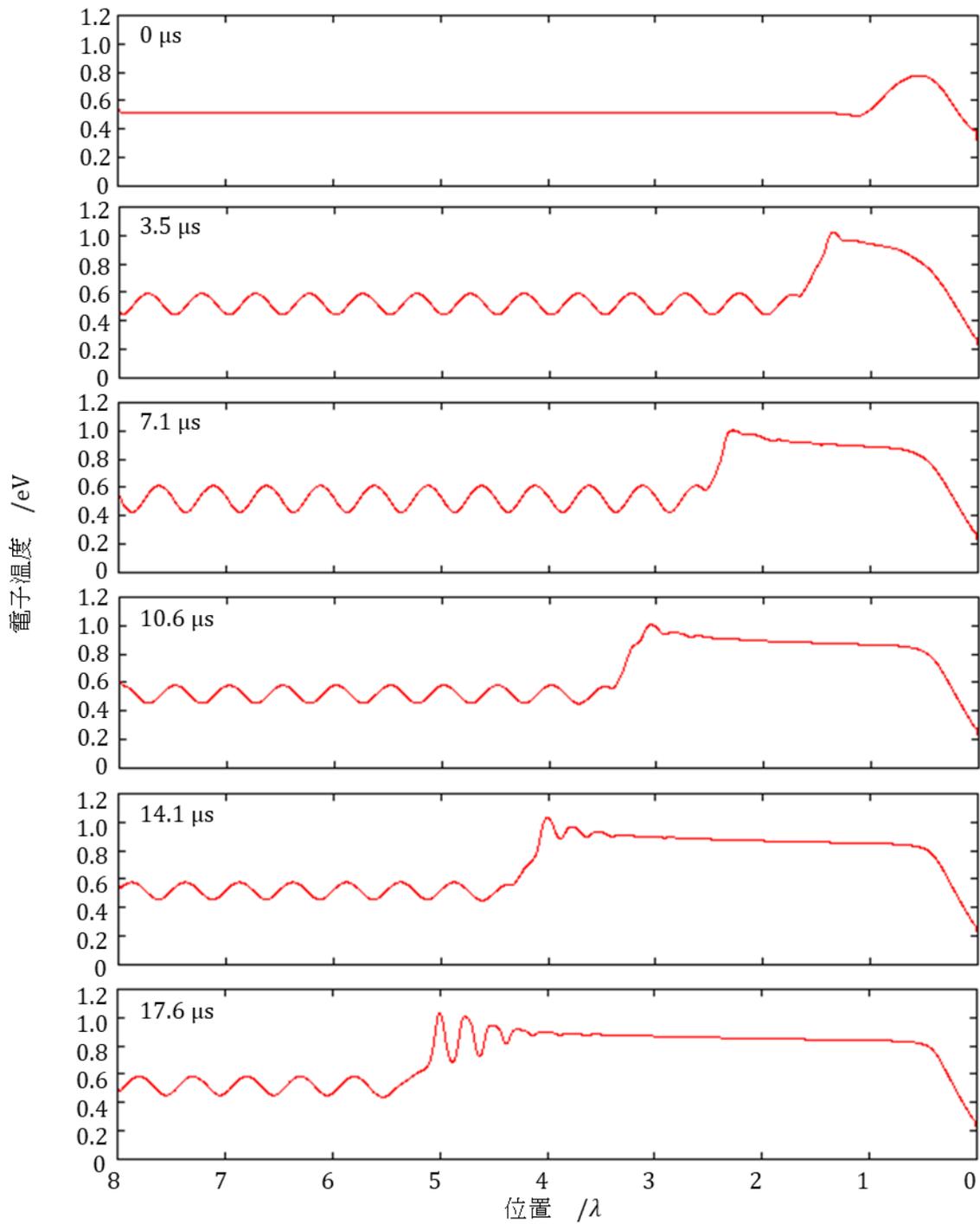


図 4-8 計算により得られた電子温度分布の時間発展 $D_{ex}=2 \text{ m}^2/\text{s}$ 、入射ミリ波強度は $2.2 \text{ GW}/\text{m}^2$

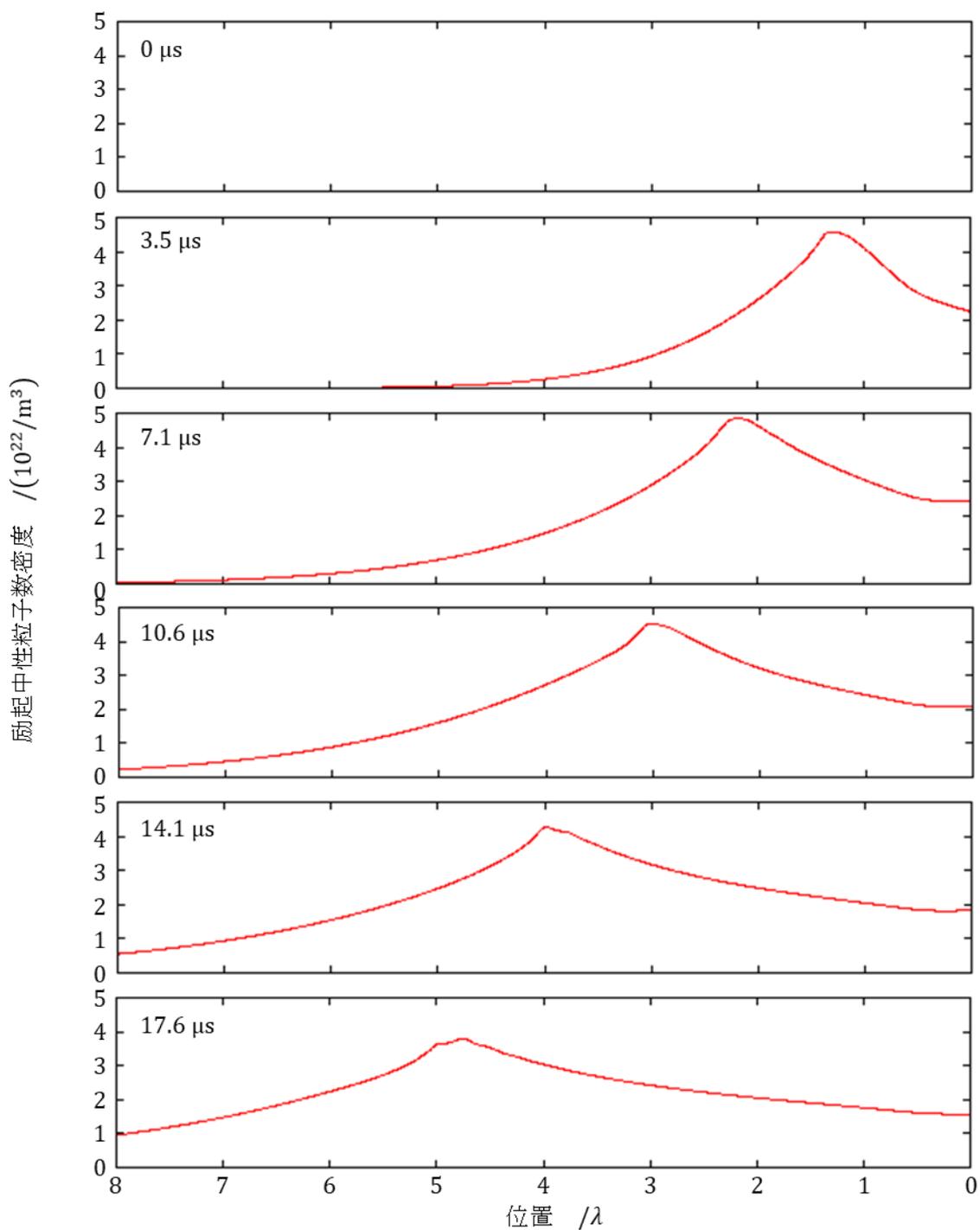


図 4-9 計算により得られた励起中性粒子数密度分布の時間発展 $D_{\text{ex}}=2 \text{ m}^2/\text{s}$ 、入射ミリ波強度は $2.2 \text{ GW}/\text{m}^2$

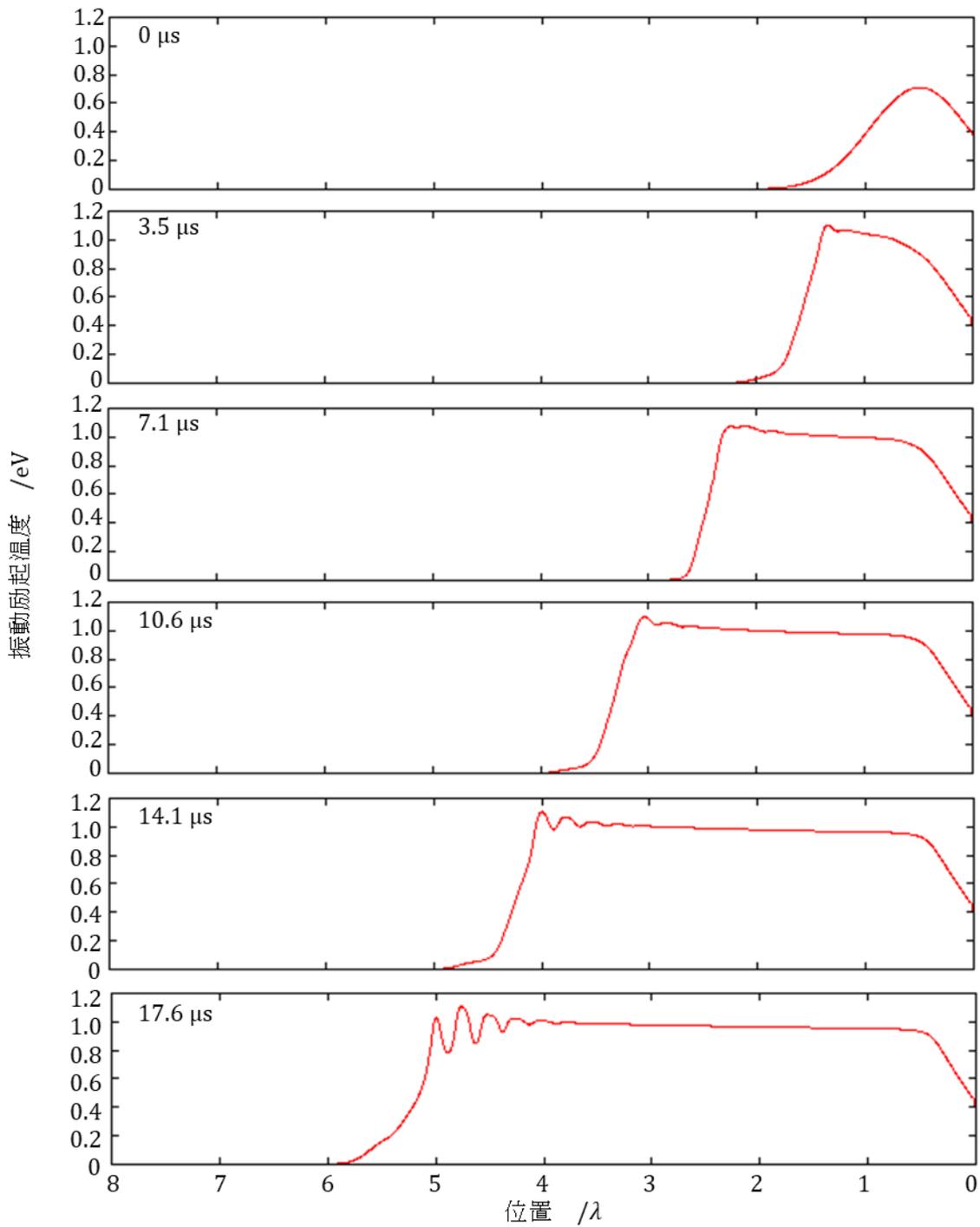


図 4-10 計算により得られた振動励起温度分布の時間発展 $D_{\text{ex}}=2 \text{ m}^2/\text{s}$ 、入射ミリ波強度は $2.2 \text{ GW}/\text{m}^2$

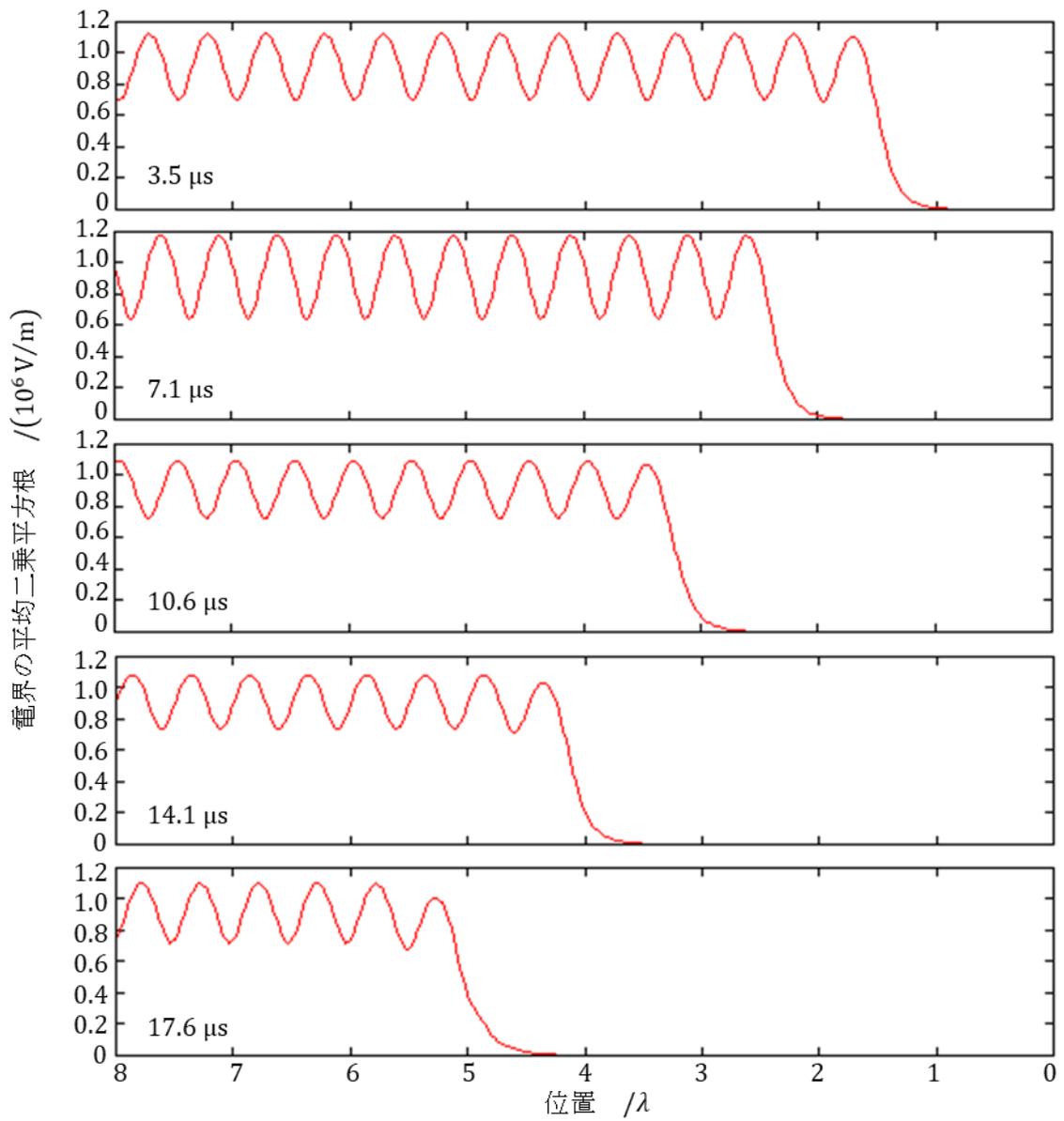


図 4-11 計算により得られた電界の平均二乗平方根分布の時間発展 $D_{ex}=2 \text{ m}^2/\text{s}$ 、入射ミリ波強度は $2.2 \text{ GW}/\text{m}^2$

4.4.3 励起中性粒子の拡散係数への依存性

縦軸に計算で得られた電離波面進展速度、横軸に励起中性粒子の拡散係数 D_{ex} をとり、進展速度の D_{ex} に対する依存性を示した図を図 4-12 に示す。これを見ると D_{ex} が十倍以上変わっても進展速度の変化量は20%程度に留まることが見て取れる。一方、プラズマの構造には D_{ex} の値によって変化が見られた。 $D_{ex} = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ で入射ミリ波強度を $2.2 \text{ GW}/\text{m}^2$ とした計算結果において、初期分布から $1.7 \mu\text{s}$ 後の電子数密度分布を図 4-13 に示す。この図から定在波の位置にプラズマがつく $\lambda/4$ 構造が顕著に表れていることが分かる。また図 4-14 に示す振動励起温度分布をみると、電子数密度の分布と同じように波打っており、これによって進展に必要なエネルギーが下がっている可能性があり、図 4-12 の $D_{ex} = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ 付近の領域において進展速度が20%程度上がっている原因であると考えられる。

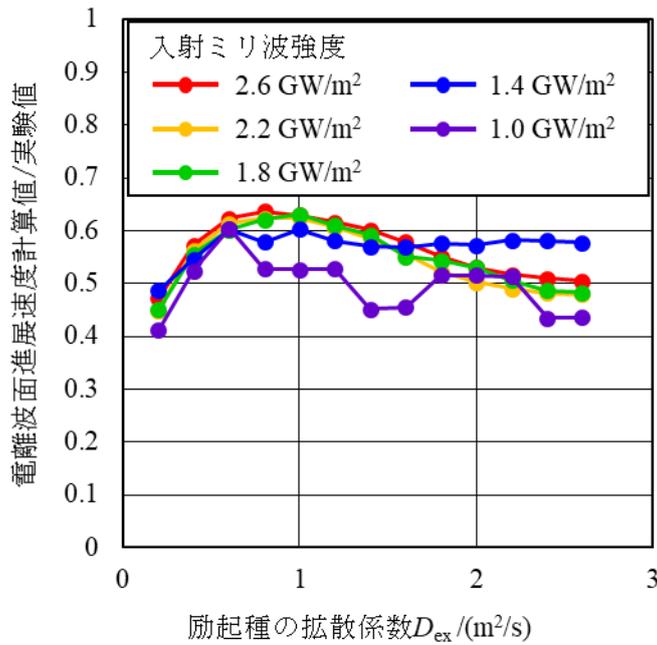


図 4-12 励起中性粒子の拡散係数に対する進展速度の依存性 縦軸の進展速度は実験による測定値で規格化して示した

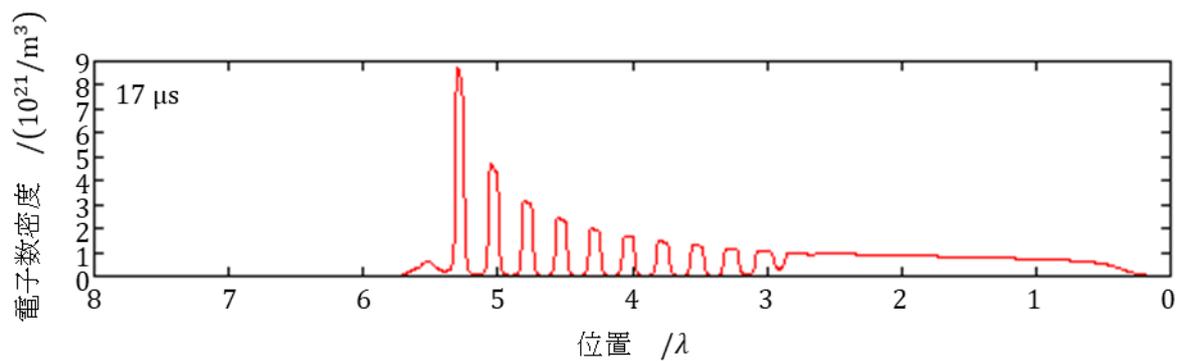


図 4-13 電子数密度分布に見られる $\lambda/4$ 構造 $D_{ex}=1 \text{ m}^2/\text{s}$ 、入射ミリ波強度は $2.2 \text{ GW}/\text{m}^2$

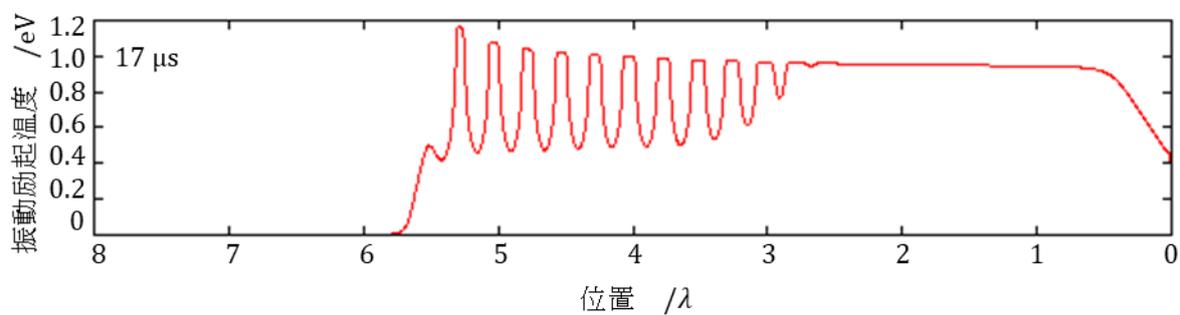


図 4-14 振動励起温度分布に見られる $\lambda/4$ 構造 $D_{ex}=1 \text{ m}^2/\text{s}$ 、入射ミリ波強度は $2.2 \text{ GW}/\text{m}^2$

4.5 プリカーサによる電離波面の駆動

図 4-15 に入射ミリ波強度を 2.2 GW/m^2 とした時の電離波面周りにおける有効拡散係数 D_{eff} と正味のイオン化周波数 f_i の分布を示す。 f_i はバルクから 0.9λ 程度の位置でピークを持っており、それよりもバルクから離れると減る傾向を示している。これはバルクから離れると励起中性粒子の密度が減ることに起因するもので、第3章で用いたモデルでは見られない傾向である。また f_i はバルク付近で $2 \times 10^6 / \text{s}$ となっており、これを電界集中のみで達成するには2倍程度の集中が必要である。これは第3章のパラメータにおける $\alpha = 2$ に相当する。この値は楕状構造の形成に十分な電子数密度を得るには小さすぎるようにも思えるが、実際はバルク付近での正味のイオン化周波数が第3章のモデルにおけるものに比べて高くなるため最大電子数密度はカットオフ密度以上となっている。電離波面の進展がプリカーサにおける電離によって駆動されているのかを確認するため、各点における $2\sqrt{D_{\text{eff}}f_i}$ を計算した。2.4 節の議論からこの値のピーク値をとる位置が進展速度を決めていると考えられる。入射ミリ波強度が 2.2 GW/m^2 の時の電離波面周りでの $2\sqrt{D_{\text{eff}}f_i}$ の分布を図 4-15 に示す。これを見ると、 D_{eff} がおよそ自由拡散 D_e となる領域において $2\sqrt{D_{\text{eff}}f_i}$ がピーク値をとっており、4.2 節で説明したプリカーサ領域が電離波面の速度を決めていることが分かる。

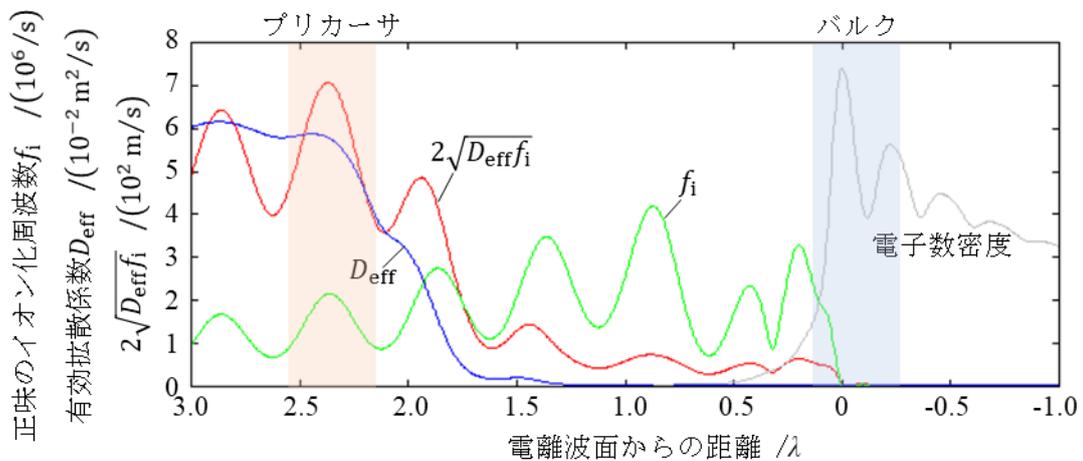


図 4-15 進展速度に関わるパラメータの分布 $D_{\text{ex}}=2 \text{ m}^2/\text{s}$ 、入射ミリ波強度は 2.2 GW/m^2

4.6 入射エネルギーの配分

入射エネルギーがどこに行っているかを調べるため、 $D_{ex} = 2 \text{ m}^2/\text{s}$ 、入射ミリ波強度 $2.2 \text{ GW}/\text{m}^2$ の条件下の計算において、エネルギーの収支を計算した。計算結果におけるエネルギーの行き先の模式図を示す。入射波のエネルギーを 100%とした時、反射波のエネルギーは 4%、透過についてはほとんどしておらず $10^{-4}\%$ 以下であった。残りの 96%のエネルギーは逆制動放射によって吸収されており、吸収されたエネルギーの行き先は 86%が振動励起のエネルギー、残りの 10%が電子励起とイオン化であった。なお、電子励起とイオン化については、今回累積電離を考えているため切り分けが出来ない。励起中性粒子からの輻射エネルギーフラックスは最大で 2.4%であった。また、エネルギー保存は誤差 1%以下で成り立っていた。

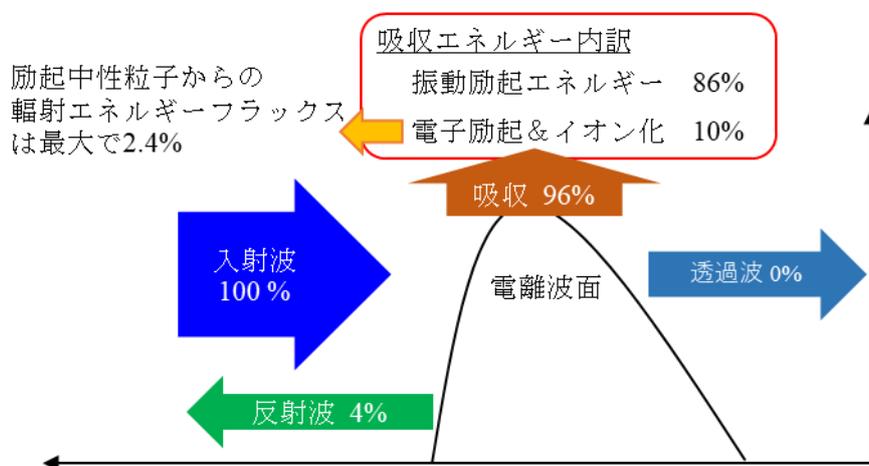


図 4-16 入射エネルギーの行き先

4.7 クエンチング等による励起中性子減少の影響

4.7.1 励起中性粒子を減少させる化学反応

励起中性粒子を考慮する場合、数多くの反応を考慮して計算することが多い。Popov [55]はプラズマによるガスの加熱に励起中性粒子が別の中性粒子と衝突し励起エネルギーの一部がガスの並進温度へと渡るクエンチングの効果が効くとしている。この論文において考慮されているクエンチング反応のうち、我々の状況におけるプリカーサ部で影響が大きいと考えられるものを表 4-1 に示す。これらの反応のタイムスケールはものによっては 10^{-10} s程度と非常に小さい。高エネルギー励起中性粒子の光脱励起のタイムスケールは 10^{-10} s程度であるが、光子が再吸収されるまでの平均自由行程は 10^{-5} mであるためバルクから数 mm のところにあるプリカーサに到達するまでに 100 回程度のオーダーで光脱励起と再吸収を繰り返すことになる。そのため、到達までのタイムスケールは 10^{-6} 程度となり、クエンチング反応が影響を及ぼす可能性が無視できない。しかし、これらの反応は励起種 $A^3\Sigma_u^+$ 、 $B^3\Pi_g$ 、 $a'^1\Sigma_u^-$ 、 $C^3\Pi_u$ に対する反応であり、いずれも我々が考えたい高エネルギー励起種ではないことから大きな影響がない可能性も考えられる。クエンチングによる影響を正確に評価するには高エネルギー励起種のクエンチング反応について評価すべきであるが、その領域におけるデータベースは不十分であり現状では評価することが出来ない。

解離エネルギーよりも高いエネルギーの励起種は自己解離を起こすことがある。自己解離にはいったん解離可能な励起状態へと光を伴って遷移(前期解離)し、そこから解離する必要がある。このタイムスケールは振動励起状態や回転励起状態によって異なることが知られている [56, 57, 58]が、完全なデータベースはまだできていない。回転振動励起状態によっては光脱励起のタイムスケールよりも速い速度で減衰するといわれており、このような自己解離速度の速い励起状態についてはプリカーサ領域における電離に寄与できない可能性がある。ただし、窒素分子の高エネルギー励起種からの発光による酸素の光電離を扱った論文では自己解離は考慮されていない [59]。

表 4-1 代表的なクエンチング反応の係数 [55]

Reaction	$K / (m^3s^{-1})$	Time scale /s
$N_2(A^3\Sigma_u^+) + O_2 \rightarrow N_2(v) + 2 \cdot O(3P) + \varepsilon$	1.7×10^{-18}	1.0×10^{-7}
$N_2(A^3\Sigma_u^+) + O_2 \rightarrow N_2(v) + O_2(b\Sigma_g^+)$	7.5×10^{-19}	2.4×10^{-7}
$N_2(B^3\Pi_g) + O_2 \rightarrow N_2(v) + 2 \cdot O(3P) + \varepsilon$	3.0×10^{-16}	5.9×10^{-10}
$N_2(B^3\Pi_g, v=0) + N_2 \rightarrow N_2(A^3\Sigma_u^+, v) + N_2(v)$	1.0×10^{-17}	4.7×10^{-9}
$N_2(a'^1\Sigma_u^-) + O_2 \rightarrow N_2(v) + O(3P) + O(1D) + \varepsilon$	2.8×10^{-17}	6.3×10^{-9}
$N_2(a'^1\Sigma_u^-) + N_2 \rightarrow N_2(B^3\Pi_g) + N_2(v)$	2.0×10^{-19}	2.4×10^{-7}
$N_2(C^3\Pi_u) + O_2 \rightarrow N_2 + O(3P) + O(3P, 1D) + \varepsilon$	2.5×10^{-16}	7.1×10^{-10}
$N_2(C^3\Pi_u) + N_2 \rightarrow N_2(B^3\Pi_g) + N_2(v)$	1.0×10^{-17}	4.7×10^{-9}

4.7.2 クエンチング等の影響への依存性

クエンチング等による脱励起に対する依存性を調べるため、脱励起の周波数 $1/\tau_q$ を様々に変化させて計算を行った。結果を図 4-17 に示す。この図から、脱励起周波数 $1/\tau_q$ が 10^6 /sまでであれば進展速度は実験値の 50 から 60%程度に留まり、あまり遅くならないが、 10^7 /sになると進展が阻害され、遅くなることが分かった。

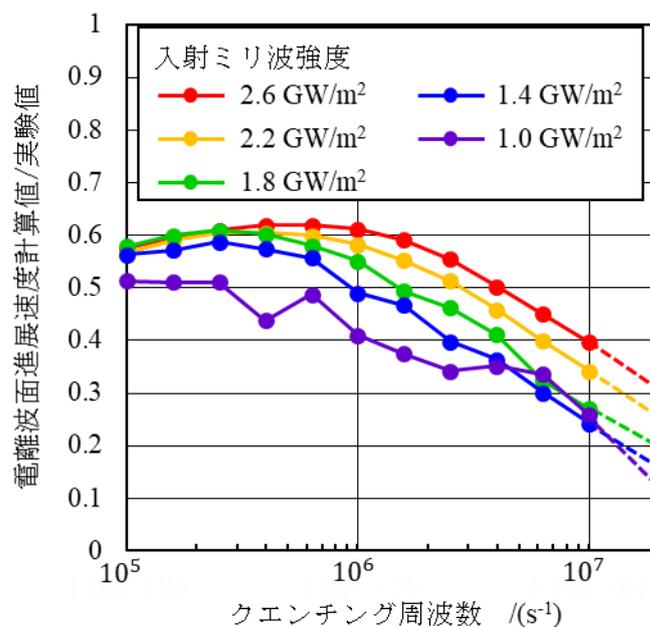


図 4-17 電離波面進展速度の脱励起周波数に対する依存性 縦軸の進展速度は実験による測定値で規格化して示した

4.8 まとめ

電離波面における電離を誘起する他の要素として本研究では励起中性粒子による電離誘起の可能性に注目した。高エネルギー励起中性粒子は基底状態の中性粒子に比べ、低いエネルギーの電子との衝突でも電離が可能であり、これが十分存在すれば電離を誘起することが可能である。しかし、このような励起中性粒子は電子と中性粒子の衝突によって生まれるため、電子数密度の高いバルク領域においてのみ生成され、電離波面を駆動しているプリカーサ領域では電子数密度が低く、電離に影響を及ぼせるほど十分な量の生成は起きない。そこで本研究において光脱励起で生じる光子がバルクからプリカーサ領域に励起中性粒子が供給することで駆動する電離波面の進展モデルを新たに提案した。この光子による輸送を拡散近似により定式化し、さらに中性粒子の励起状態についてもシンプルな仮定を導入して定式化することで、このモデルによる電子波面の進展を数値的に模擬した。また、光子による輸送の拡散係数に対する進展速度依存性や、クエンチング等による脱励起反応による影響も調査した。この結果、拡散係数に対する進展速度の依存性は低く、脱励起の周波数が 10^6 /s 程度以下であれば進展速度が入射ミリ波強度によらず実験値の 50%程度となり、入射強度に対する進展速度の依存性も含めて先行研究に比べて非常に良い一致をみせた。

第5章

結論

ミリ波による大気放電実験において電離波面にミリ波特有の楕状構造が形成されていることが観測されている。この構造がなぜ生成されるのかは分かっておらず、構造による電界集中が電離波面の進展を支持している可能性も考えられる。そのため、本研究ではこの楕状構造を数値計算により再現し、この構造に関する形成条件、形成原理、電界に与える影響の調査を行った。計算の結果、実験結果と一致するピッチが 0.9λ の楕状構造を再現することに成功し、以下のことが分かった。

- (1) 電離波面における電離数密度がミリ波のカットオフ密度 $n_c (= 2.5 \times 10^{20} / \text{m}^3)$ を上回るとき楕状構造が形成される。
- (2) プラズマが作る電界の共振によって粒状のプラズモイドが形成され、出来た粒による反射波と入射波の強め合いの点に隣り合う粒が来ることによって粒同士が等間隔のピッチ 0.9λ に並ぶ。
- (3) 楕状構造によるエネルギー集中は電離波面内部で起こり、電離波面前面の電界集中は数%程度に留まる。

一方、入射振幅が 1 MV/m 場合、構造と進展速度を再現するためには換算電界強度に 3 倍以上の補正をかける必要があり、これは構造による電界集中だけでは説明が出来ない。このことから、ミリ波放電における電離波面の進展を説明するには、電離を誘起する他の要素を考慮する必要であると考えられる。

この他の影響として励起中性粒子による累積電離が考えられるが、これが電離波面の進展に関わるにはバルクからプリカーサまで励起中性粒子が供給される過程が存在しなければならない。そこで本研究において新しく輻射によって励起中性粒子がプリカーサへと輸送されるモデルを提案し、これによって電離波面が進展する様子を次元計算によって模擬した。計算の結果、励起中性粒子の輸送に関わるパラメータによっては実験で得られた進展速度の 50%ほどの速度での進展が可能であることが分かり、先行研究と比べて良い一致を見せた。しかしながら、このモデルによる進展において重要な役割を担う高エネルギー励起種についてはクエンチング等に関するパラメータのデータベースが存在せず、モデルの正誤を判断するにはこれらパラメータに対する更なる知見が必要となる。

参考文献

- [1] T. Nakagawa, Y. Mihara and K. Komurasaki, "Propulsive Impulse Measurement of a Microwave-Boosted Vehicle in the Atmosphere," *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 41, no. 1, p. 151, 2004.
- [2] M. Fukunari, A. Arnault, T. Yamaguchi and K. Komurasaki, "Replacement of chemical rocket launchers by beamed energy propulsion," *Applied Optics*, vol. 53, no. 31, p. 16, 2014.
- [3] Y. Oda, K. Kajiwara, K. Takahashi, A. Kasugai, K. Sakamoto and K. Komurasaki, "In-Tube Shock Wave Driven by Atmospheric Millimeter-Wave Plasma," *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 48, 116001, 2009.
- [4] T. Endo and T. Fujiwara, "A Simplified Analysis on a Pulse Detonation Engine Model," *The Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, vol. 44, no. 146, p. 217, 2001.
- [5] 八坂保能, 放電プラズマ工学, 森北出版, 2007.
- [6] G. J. Hagelaar and L. C. Pitchford, "Solving the Boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models," *Plasma Sources Science and Technology*, vol. 14, p. 722, 2005.
- [7] H. J. Leiter, R. Killinger, H. Bassner, J. Muller, R. Kukies and T. Frohlich, "Evaluation of the Performance of the Advanced 200mN Radio Frequency Ion Thruster RIT-XT," *38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, AIAA2002-3836, 2002.
- [8] A. D. MacDonald, *Microwave Breakdown in Gases*, Wiley, 1966.
- [9] H. Kuninaka, K. Nishiyama, I. Funaki, T. Yamada, Y. Shimizu and J. Kawaguchi, "Powered Flight of Electron Cyclotron Resonance Ion Engines on Hayabusa Explorer," *Journal of Propulsion and Power*, vol. 23, no. 3, p. 544, 2007.
- [10] H. J. Leiter, R. Killinger, R. Kukies and T. Frohlich, "Extended Performance Evaluation of Astrium's 200mN Radio Frequency Ion Thruster RIT-XT," *39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, AIAA2003-5010, 2003.
- [11] 井上多加志, 坂本慶司, "プラズマを高温にする加熱装置," *日本原子力学会誌*, vol. 47, no. 2, p. 120, 2005.
- [12] K. V. Khodataev, "Microwave Discharges and Possible Applications," *Journal of Propulsion and Power*, vol. 24, no. 5, p. 962, 2008.
- [13] I. I. Esakov, L. P. Grachev and K. V. Khodataev, "Microwave Discharge in Quasi-optical Wave Beam," *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting Exhibition*, AIAA2007-433, 2007.
- [14] K. V. Aleksandrov, L. P. Grachev, I. I. Esakov, V. V. Fedorov and K. V. Khodataev, "Domains of Existence of Various Types of Microwave Discharge in Quasi-Optical Electromagnetic Beams," *Technical Physics*, vol. 51, no. 11, p. 1448, 2006.
- [15] K. V. Khodataev, "Factors Defining Propagation of Microwave Subcritical Streamer Discharge Against Radiation," *7th Workshop on Magneto-Plasma Aero Dynamics*, 2007.

- [16] K. V. Khodataev, "Investigation of nudercritical microwave discharge ability to propagate limitlessly by continuous branching of the streamer," *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting Exhibition*, AIAA2016-789, 2016.
- [17] I. I. Esakov, L. P. Grachev and V. L. Bychkov, "Experimental Determination Of Microwave Undercritical Discharge Transition To Deeply Undercritical at Different Wavelengths," *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA2005-597, 2005.
- [18] S. A. Ramsden and W. E. R. Davies, "Radiation Scattered from the Plasma Produced by a Focused Ruby Laser Beam," *Physical Review Letters*, vol. 13, no. 7, p. 227, 1964.
- [19] W. E. Maher, "Experimental study of ignition and propagation of laser-supported detonation waves," *Journal of Applied Physics*, vol. 45, no. 5, p. 2138, 1974.
- [20] P. Bournot, P. A. Pincosy, G. Inglesakis, M. Autric, D. Dufresne and J. P. Caressa, "Propagation of a laser-supported detonation wave," *Acta Astronautica*, vol. 6, no. 3-4, p. 257, 1979.
- [21] I. A. Bufetov, A. M. Prokhorov, V. B. Fedorov and V. K. Fomin, "Optical discharge accompanying a restriction imposed on lateral expansion of gas and a reduction in the threshold of light-induced detonation," *JETP Letters*, vol. 39, p. 258, 1984.
- [22] K. Matsui, T. Shimano, J. A. Ofosu, K. Komurasaki, T. Schoenherr and H. Koizumi, "Accurate propagation velocity measurement of laser supported detonation waves," *Vacuum*, vol. 136, p. 171, 2016.
- [23] S. A. Ramsden and P. Savic, "A Radiative Detonation Model for the Development of a Laser-induced Spark in Air," *Nature*, vol. 201, no. 4951, p. 1217, 1964.
- [24] Y. P. Raizer, "Heating of a Gas by a Powerful Light Pulse," *Soviet Physics JETP*, vol. 21, no. 5, p. 1009, 1965.
- [25] K. Shimamura, K. Komurasaki, J. A. Ofosu and H. Koizumi, "Precursor Ionization and Propagation Velocity of a Laser-Absorption Wave in 1.053 and 10.6 μm Wavelengths Laser Radiation," *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 42, no. 10, p. 3121, 2014.
- [26] 森浩一, 原部伸之, 小紫公也 and 荒川義博, "大気吸込式 RP レーザー推進機における爆風波エネルギー変換過程," *日本航空宇宙学会論文集*, vol. 51, no. 588, p. 23, 2003.
- [27] M. Ushio, K. Komurasaki, K. Kawamura and Y. Arakawa, "Effect of laser supported detonation wave confinement on termination conditions," *Shock Waves*, vol. 18, p. 35, 2008.
- [28] J. P. Jakson and P. E. Nielsen, "Role of Radiative Transport in the Propagation of Laser Supported Combustion Wave," *AIAA Journal*, vol. 12, no. 11, p. 1498, 1974.
- [29] C. Chen, B. Wang, B. Li, Z. Shen, X. Ni and J. Lu, "Energy transport of laser-driven moving," *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 46, 195202, 2013.
- [30] K. Sakamoto, A. Kasugai, K. Takahashi, R. Minami, N. Kobayashi and K. Kajiwara, "Achievement of robust high-efficiency 1 MW oscillation in the hard-self-excitation region by a 170 GHz continuous-wave gyrotron," *Nature Physics*, vol. 3, p. 411, 2007.
- [31] 高橋聖幸, "ミリ波放電の物理とマイクロ波ロケットへの応用," *プラズマ・核融合学会誌*, vol. 93, no. 10, p. 478, 2017.

- [32] Y. Oda, K. Komurasaki, K. Takahashi, A. Kasugai and K. Sahamoto, "Plasma generation using high-power millimeter-wave beam and its application for thrust generation," *Journal of Applied Physics*, vol. 100, 113307, 2006.
- [33] Y. Hidaka, E. M. Choi, I. Mastovsky, M. A. Shapiro, J. R. Sirigiri and R. J. Temkin, "Observation of Large Arrays of Plasma Filaments in Air Breakdown by 1.5-MW 110-GHz Gyrotron Pulses," *Physical Review Letters*, vol. 100, 035003, 2008.
- [34] Y. Hidaka, E. M. Choi, I. Mastovsky, M. A. Shapiro, J. R. Sirigiri, R. J. Temkin, G. F. Edmiston, A. A. Neuber and Y. Oda, "Plasma structure observed in gas breakdown using a 1.5 MW, 110 GHz pulsed gyrotron," *Physics of Plasmas*, vol. 16, 055702, 2009.
- [35] 小田靖久, 小紫公也 and 坂本慶司, "マイクロ波による気中放電のダイナミクスと構造形成," *プラズマ・核融合学会誌*, vol. 84, no. 6, p. 343, 2008.
- [36] T. Yamaguchi, M. Fukunari, Y. Nakamura, Y. Oda, K. Sakamoto and K. Komurasaki, "Fast-Framing Observation of Filamentary Plasma in Atmospheric Millimeter-Wave Breakdown," *Frontier of Applied Plasma Technology*, vol. 9, no. 2, p. 79, 2016.
- [37] Y. P. Raizer, *Laser Induced Discharge Phenomena*, Springer, 1977.
- [38] J. P. Boeuf, B. Chaudhury and G. Q. Zhu, "Theory and Modeling of Self-Organization and Propagation of Filamentary Plasma Arrays in Microwave Breakdown at Atmospheric Pressure," *Physical Review Letters*, vol. 104, 015002, 2010.
- [39] K. Kourtzanidis, J. P. Boeuf and F. Rogier, "Three dimensional simulations of pattern formation during high-pressure, freely localized microwave breakdown in air," *Physics of Plasmas*, vol. 21, 123513, 2014.
- [40] M. Takahashi, Y. Kageyama and N. Ohnishi, "Joule-heating-supported plasma filamentation and branching during subcritical microwave irradiation," *AIP Advances*, vol. 7, no. 5, 055206, 2017.
- [41] G. Q. Zhu, "Modeling of plasma dynamics and pattern formation during high pressure microwave breakdown in air," Universit  de Toulouse, Doctor thesis, 2011.
- [42] M. A. Lieberman and A. J. Lichtenberg, *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*, Wiley, 2005.
- [43] U. Ebert, W. v. Saarloos and C. Caroli, "Propagation and structure of planar streamer front," *Physical Review E*, vol. 55, no. 2, p. 1530, 1997.
- [44] K. Yee, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problem Involving Maxwell's Equation in Isotropic Media," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 14, no. 3, p. 302, 1966.
- [45] K. S. Kunz and R. J. Luebbers, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*, CRC Press, 1993.
- [46] M. F. Hadi and M. Picket-May, "A modified FDTD (2, 4) scheme for modeling electrically large structures with high-phase accuracy," *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 45, no. 2, p. 254, 1997.
- [47] E. Waring, "Problems concerning Interpolations," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*,

vol. 69, p. 59, 1779.

- [48] G. Mur, "Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of Time-Domain Electromagnetic-Field Equations," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vols. EMC-23, no. 4, p. 377, 1981.
- [49] J. P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *Journal of Computational Physics*, vol. 114, p. 185, 1994.
- [50] Y. Nakamura, T. Yamaguchi, K. Komurasaki, T. Shoenherr and H. Koizumi, "Filamentary Structure of Millimeter-Wave Discharge Plasma at Low Beam Power Density," *Frontier of Applied Plasma Technology*, vol. 8, no. 1, p. 7, 2015.
- [51] B. Chaudhury, J. P. Boeuf, G. Q. Zhu and O. Pascal, "Physics and modelling of microwave streamers at atmospheric pressure," *Journal of Applied Physics*, vol. 110, 11306, 2011.
- [52] C. Y. R. Wu, H. Fung, K. Chang, T. S. Singh, X. Mu, J. B. Nee, S. Chiang and D. L. Judge, "Fluorescence excitation spectra of the $b^1\Pi_u$, $b^1\Sigma_u^+$, $c_n^1\Pi_u$, and $c_n^1\Sigma_u^+$ states of in the 80 - 100 nm region," *The Journal of Chemical Physics*, vol. 127, 084314, 2007.
- [53] R. E. Huffman, Y. Tanaka and J. C. Larrabee, "Absorption Coefficients of Nitrogen in the 1000-580 A Wavelength Region," *The Journal of Chemical Physics*, vol. 39, p. 910, 1963.
- [54] S. Pancheshnyi, S. Biagi, M. C. Bordage, G. J. M. Hagelaar, W. L. Morgan, A. V. Phelps and L. C. Pitchford, "The LXCat project: Electron scattering cross sections and swarm parameters for low temperature plasma modeling," *Chemical Physics*, vol. 398, p. 148, 2012.
- [55] N. A. Popof, "Fast gas heating in a nitrogen–oxygen discharge plasma: I. Kinetic mechanism," *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 44, 285201, 2011.
- [56] H. Helm, I. Hazell and N. Bjerre, "Lifetimes and Rydberg-valence state mixing of the $c^1\Sigma_g^+$ ($v=4$) and $c^1\Pi_u$ ($v=4$) states of N_2 ," *Physical Review A*, vol. 48, no. 4, p. 2762, 1993.
- [57] C. W. Walter, P. C. Cosby and H. Helm, "Predissociation quantum yields of singlet nitrogen," *Physical Review A*, vol. 40, no. 4, p. 2930, 1994.
- [58] J. Stephens, M. Abide, A. Fierro and A. Neuber, "Practical considerations for modeling streamer discharges in air with radiation transport," *Plasma Sources Science and Technology*, vol. 27, 075007, 2018.
- [59] S. Pancheshnyi, "Photoionization produced by low-current discharges in O_2 , air, N_2 and CO_2 ," *Plasma Sources Science and Technology*, vol. 24, 015023, 2015.

業績一覧

(1) 論文賞、学会賞などの受賞歴

- 1) Plasma Conference 2017 若手優秀発表賞受賞 2017
- 2) 平成 29 年度採用分 日本学術振興会特別研究員(DC2) 採用
- 3) 日本航空宇宙学会 47 期年会講演会 優秀発表賞受賞 2016
- 4) 平成 26 年度東京大学総長賞受賞 (超小型深宇宙探査機 PROCYON プロジェクトチーム)

(2) 学術雑誌での発表論文及び著書

・英文論文 (査読有)

- 1) Yusuke NAKAMURA, Kimiya KOMURASAKI, Masafumi FUKUNARI, Hiroyuki KOIZUMI, "Numerical Analysis of Plasma Structure Observed in Atmospheric Millimeter-Wave Discharge at Under-Critical Intensity," *Journal of Applied Physics*, Vol.124, pp.033303, July 2018
- 2) Masafumi FUKUNARI, Toshikazu YAMAGUCHI, Yusuke NAKAMURA, Kimiya KOMURASAKI, Yasuhisa ODA, Ken KAJIWARA, Koji TAKAHASHI, Keishi SAKAMOTO, "Thrust generation experiments on microwave rocket with a beam concentrator for long distance wireless power feeding," *Acta Astronautica*, Vol. 145, pp. 263-267, Apr. 2018
- 3) Yuki HARADA, Yusuke NAKAMURA, Kimiya KOMURASAKI, Ryutaro MINAMI, Tsuyoshi KARIYA, Tsuyoshi IMAI, Kohei SHIMAMURA, Masafumi FUKUNARI, "Structural Change of Plasma at Various Ambient Pressures in 28 GHz Millimeter-Wave Discharges," *Frontier of Applied Plasma Technology*, Vol. 10, No.1, pp.7-10, Jan 2017
- 4) Masafumi FUKUNARI, Kimiya KOMURASAKI, Yusuke NAKAMURA, Yasuhisa ODA, Keishi SAKAMOTO, "Rocket Propulsion Powered using a Gyrotron," *Journal of Energy and Power Engineering*, Vol. 11, No.6, pp. 363-371, 2017. (Review paper)
- 5) Masafumi FUKUNARI, Nat WONGSURYRAT, Toshikazu YAMAGUCHI, Yusuke NAKAMURA, Kimiya KOMURASAKI, Hiroyuki KOIZUMI, "Design of a Millimeter-wave Concentrator for Beam Reception in High-power Wireless Power Transfer," *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*, Springer, Vol.38, Issue 2, pp.176-190,2017
- 6) Kaoru KAKINUMA, Masafumi FUKUNARI, Toshikazu YAMAGUCHI, Yusuke NAKAMURA, Hiroyuki KOIZUMI, Kimiya KOMURASAKI, Kevin PARKIN, "Two-Stage-to-Orbit Transporting System Combining Microwave Rocket and Microwave Thermal Rocket for Small Satellite Launch," The 30 ISTS Special Issue of Transaction of JSASS, *Aerospace Technology Japan*, Vol.14, No.30, pp.99-103, 2016
- 7) Hiroyuki KOIZUMI, Hiroki KAWAHARA, Kazuya YAGINUMA, Jun ASAKAWA, Yuichi NAKAGAWA, Yusuke NAKAMURA, Shunichi KOJIMA, Toshihiro MATSUGUMA, Ryu FUNASE, Junichi NAKATSUKA and Kimiya KOMURASAKI, "Initial Flight Operations of the Miniature Propulsion System installed on Small Space Probe: PROCYON", *Transactions of Japan Soc. for Aeronautical and Space Sci., Aerospace Technology Japan*, Vol. 14, Pb_13-Pb_22, 2016
- 8) Yusuke NAKAMURA, Toshikazu YAMAGUCHI, Kimiya KOMURASAKI, Tony SHOENHERR and Hiroyuki KOIZUMI, "Filamentary Structure of Millimeter-Wave Discharge Plasma at Low Beam Power Density", *Frontier of Applied Plasma Technology*, Vol. 8, No.1, pp. 7-12, Jan. 2015

・和文論文 (査読有)

- 1) 田畑邦佳, エンギョイエン フロリアン, 原田祐貴, 福成雅史, 柿沼薫, 小紫公也, 中村友祐, 小泉宏之, "マイクロ波ロケットの空気吸い込み機構設計に関する数値計算," 日本航空宇宙学会論文集、66 巻、5 号、pp. 128-134、2018
- 2) 山口敏和、中村友祐、福成雅史、小紫公也、南龍太郎、假屋 強、今井 剛、"28GHz ジャイロトロンを用いた大気圧ミリ波放電実験," プラズマ応用科学, Vol. 23, No. 1, pp. 42-45, Jun. 2015

・学位論文

- 1) 中村友祐, "大気圧ミリ波放電プラズマに見られる櫛状構造におけるピッチサイズの解析," 平成 27 年度修士論文, 2016 年 2 月

(3) 国際会議等における発表

- 1) ○ Yusuke NAKAMURA, Kimiya KOMURASAKI, Hiroyuki KOIZUMI, “Modeling of Millimeter-Wave Discharge at Under-Critical Intensity Considering Excitation on Ionization Front,” 2nd Asia-Pacific Conference on Plasma Physics, Kanazawa, Nov. 2018
- 2) ○ Yusuke NAKAMURA, Kimiya KOMURASAKI, Hiroyuki KOIZUMI, “Modeling of Under-Critical Millimeter-Wave Discharge Induced by High Excitation Temperature,” 43rd International Conference on Infrared, Millimeter and Terahertz Wave, Nagoya, Sep. 2018
- 3) ○ Yusuke NAKAMURA, Kimiya KOMURASAKI, Hiroyuki KOIZUMI, “Mechanism of Comb-Shape Plasma Filament Formation in Atmospheric Millimeter-Wave Discharge,” International High Power Laser Ablation Symposium, Santa Fe, Mar. 2018
- 4) Kimiya KOMURASAKI, ○ Yusuke NAKAMURA, “Microwave Rocket Development Status at the University of Tokyo,” International High Power Laser Ablation Symposium, Next Generation Beamed Energy Propulsion, Santa Fe, Mar. 2018
- 5) ○ Yusuke NAKAMURA, Masafumi FUKUNARI, Toshikazu YAMAGUCHI, Kimiya KOMURASAKI, Hiroyuki KOIZUMI, "Numerical Analysis of Comb Shaped Plasma Front Propagation in Millimeter- Wave Discharge under Atmospheric Pressure", the 47th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference, AIAA Aviation and Aeronautics Forum and Exposition, Washington, D.C., Jun. 2016
他 7 報

(4) 国内会議等における発表

- 1) ○ 中村友祐, 小紫公也, 小泉宏之, 「マイクロ波ロケット内部におけるミリ波放電進展現象の物理モデル」, 第 62 回宇宙科学技術連合講演会, 3N04, 久留米, 2018 年 10 月
- 2) ○ 中村友祐, 小紫公也, 小泉宏之, 「亜臨界強度のミリ波電界中での放電進展シミュレーション」, Plasma Conference 2017, 21Ep-04, 姫路, 2017 年 11 月
- 3) ○ 中村友祐, 高橋聖幸, 小紫公也, 福成雅史, 山口敏和, 小泉宏之, 「マイクロ波ロケット内部の電界強度分布と楕状プラズマ構造」, 第 60 回宇宙科学技術連合講演会, 4I09, 函館, 2016 年 9 月
- 4) ○ 中村友祐, 福成雅史, 山口敏和, 小紫公也, 小泉宏之, 「ミリ波放電伸展時における粒状プラズマの数値解析」, 日本航空宇宙学会 47 期年会講演会, 2D3, 東京, 2016 年 4 月
- 5) ○ 中村友祐, 福成雅史, 山口敏和, 小紫公也, 小泉宏之, 「大気圧ミリ波放電の伸展モデルとその数値解析」, 第 32 回プラズマ・核融合学会年会, 26pC08, 名古屋, 2015 年 11 月
- 6) ○ 中村友祐, 山口敏和, 福成雅史, 小紫公也, 小泉宏之, 「ミリ波放電プラズマ構造の波長依存性数値解析」, 第 59 回宇宙科学技術連合講演会, P09, 鹿児島, 2015 年 10 月
他 10 報