審 査 の 結 果 の 要 旨

氏　　名　　　岩政　勇仁

値付き制約充足問題（Valued Constraint Satisfaction Problem，以下，ＶＣＳＰと略す）は，変数の個数が少ない「小さな」関数の和でかける目的関数の離散最適化問題で，彩色問題や最小カット問題，画像処理におけるエネルギー最小化問題等，実社会にも現れる数多くの重要な問題を含んでいる．ＶＣＳＰの多くはＮＰ困難であるが，２分性──ＮＰ困難である，または，多項式時間アルゴリズムを持つ──を軸とする計算複雑度分類の様々な試みがなされてきた．本論文は，そうしたＶＣＳＰの多項式時間可解性の解明に対して離散凸解析の手法によってアプローチするものである．離散凸解析は，マトロイドや劣モジュラ関数が関わる離散最適化問題を「整数格子上の凸解析」の視点により理解する離散最適化の枠組みである．M凸関数とM_2凸関数（２つのM凸関数の和）は，基本的な離散凸関数のクラスであり，効率的な最小化アルゴリズムを有する．本論文は，２次M_2凸関数を用いてバイナリＶＣＳＰ（目的関数が２変数関数の和でかけるＶＣＳＰ）の既存の多項式時間可解なクラスに対する新しい理解とアルゴリズムを与え，そして，新たなクラスを導入している．

本論文は，「Discrete Convexity in Valued Constraint Satisfaction Problems: An Approach by Quadratic M-Convexity」（値付き制約充足問題における離散凸性：２次M凸性によるアプローチ）と題し，９章からなる．

第１章「Introduction」（序論）では，バックグラウンドであるＶＣＳＰと離散凸解析について述べている．特にＶＣＳＰの多項式時間可解性分類の研究の歴史を詳しく述べている．そして，本論文の位置付け，構成，主要な成果について解説している．

第２章「Preliminaries」（準備）では，ＶＣＳＰやM凸関数，M_2凸関数といった基本的概念を導入し，本論文の鍵となるアイデアであるＶＣＳＰを整数格子上の最適化問題に埋め込む手法を導入している．そして，２次M凸性と系統学で重要な木距離との関連も説明している．

第３章「Quadratic M-Convexity」（２次M凸性）では，２次関数がM凸関数であるかどうかの判定問題を考察し，一般にはＮＰ困難であること，一方，自然な状況においては，多項式時間可解であることを証明している．これは，離散凸解析においても見逃されていた部分であった．そして，そのアルゴリズムと以降の章で必要となる２次M凸関数のいくつかの性質を示している．

第４章「M_2-Representability in Joint Winner Property」（ジョイントウィナー性におけるM_2表現可能性）　では，CooperとŽivnýによって導入されたジョイントウィナ

一性をもつバイナリＶＣＳＰが，２次M_2凸関数最小化問題に帰着できることを示し，それを利用して離散凸解析にもとづく新しい最小化アルゴリズムを提案している．このアルゴリズムはいくつかの自然な設定のもとで既存のものに比べて高速である．

第５章「Testing Quadratic M_2-Representability」（２次M_2表現可能性判定）では，前章の結果のさらなる拡張を目指し，バイナリＶＣＳＰが２次M_2凸関数によって表現できるかどうかを問う２次M_2表現可能性判定問題を導入している．そして，本論文の主結果でもある「２次M_2表現可能性判定問題は多項式時間で解ける」を述べている．２次M_2表現可能なバイナリＶＣＳＰは，ジョイントウィナー性をもつＶＣＳＰを含む広大なクラスであり，この結果は多項式時間可解なバイナリＶＣＳＰのクラスを大きく広げるものである．そして，証明の基礎となるバイナリＶＣＳＰから得られる２次M_2凸関数の表現定理を確立し，第６章，第７章で展開される残りの証明のアウトラインを説明している．

第６章「Decomposition Algorithm」（分解アルゴリズム）では，前章で確立した表現定理において，実際に分解表現を構成する多項式時間アルゴリズムを与えている．

第７章「Laminarization Algorithm」（ラミナー化アルゴリズム）は，証明の後半パートであり，上述の分解表現から２つのM凸関数を具体的に構成する部分を扱っている．この部分は，与えられた集合族に対しある操作を繰り返すことでラミナー族にできるかどうかを判定し，出来るならそのラミナー族を構成する問題（ラミナー化問題）に帰着する．ラミナー化問題は，これまでにないタイプの興味深い組合せ問題で，この章で，ラミナー化問題に対する構造理論を展開し，その帰結として多項式時間アルゴリズムを与えている．これにより主結果の証明が完了する．

第８章「Application: Phylogenetic Tree Reconstruction」（応用：系統樹再構成）では，２章に述べた木距離とM凸性との関連を用いて，系統学における基本的な問題である４点木族からの系統樹再構成問題への応用を論じている．この系統樹構成問題は，一般にＮＰ困難であるが，ある部分クラスは，上述の２次M_2表現可能性判定問題から数値情報をとり除いたものともみなせ，ラミナー化アルゴリズムを利用することで，多項式時間アルゴリズムを与えている．このクラスは，制限された測定環境において自然に生じるものである．

第９章「Conclusion」(結論)では，本論文の成果を簡潔に纏めるとともに，未解決問題と今後の研究の方向性について論じている．

以上を要するに，本論文は，ＶＣＳＰの理論に離散凸解析の手法をはじめて導入し，そして，理論的に深い結果を示している．これは，これまで独立に研究されてきたＶＣＳＰと離散凸解析を結びつける意義のある貢献である．さらに，系統学への応用をみるに，それは離散最適化理論にとどまらないもので，数理情報学の発展にも寄与している．よって本論文は博士（情報理工学）の学位請求論文として合格と認められる．