

東京大学 大学院新領域創成科学研究科  
基盤科学研究系 先端エネルギー工学専攻  
2021年9月修了 修士論文要旨

## Characterization of self-organized structures by the topological constraints

自己組織化における構造決定に係わるトポロジー束縛

学生証番号 47196118 氏名 相原 寛人  
(指導委託教員 吉田 善章 教授  
指導教員 齋藤 晴彦 准教授)

Key Words : self-organization, topological constraint, zonal flow, magnetospheric plasma

物理システムにおける自己組織化とは「要素の集団運動により引き起こされる自発的な構造形成のプロセス」である。自己組織化を解析するためには、個々の要素だけでなく集団としての振る舞いを正しく定式化する必要があるが、集団としての振る舞いは、個々の要素がマクロな系のもつ保存量によって縮退された自由度の下で運動していると考えることにより定式化することができる。

本研究では、帯状流(part I) [1], 磁気圏型プラズマ(part II)[2]という2つの自己組織化現象に着目し、自己組織化においてその構造がどのように決定されるのかという問題に取り組んだ。そしてその解決の糸口となるのが、自己組織化における構造が系のもつ保存則によるトポロジー束縛によりどのように特徴づけられるかを明らかにすることである。

まずpart I では、帯状流の自己組織化状態を評価するために、系が持つ保存量の拘束条件の下でenstrophyの帯状流成分(zonal enstrophy)の数学的な下限を評価する変分原理を定式化した。保存量としてはtotal-enstrophy, energy, circulation, impulseの4つを考慮し、これらの拘束条件の下でのzonal enstrophyの下限値をラグランジュ未定乗数法により求めた。得られた下限の値は拘束条件として課した4つの保存量のうちcirculationとimpulseのみによって決まり、total enstrophyとenergyの値には依存しない。その一方でenergyは拘束条件としてEuler-Lagrange方程式の解の構造を根本的に変化させるという数学的に興味深い構造を持つことが明らかになった。

次にpart II では磁気圏型プラズマにおける自己組織化に着目し、運動論と非等方圧力 Grad-Shafranov方程式両者に対してconsistentな平衡状態を記述するモデルを構築した。プラズマを閉じ込める磁場は非等方圧力 Grad-Shafranov 方程式[3]により記述されるが、方程式を解くためには圧力を磁束関数と磁場強度の関数として与える必要がある。その関数形を決めるためには運動論にさかのぼって議論しなければならないが、運動論とマクロなモデルを矛盾なく関係づけるためにはCasimir 不変量による束縛が生み出すマクロな構造を考慮する必要がある。言い換えるとプラズマの非自明な (熱的死) ではない平衡状態はCasimir不変量による葉層構造を定式化することではじめて導くことができる[4]。そこで本研究ではCasimir 不変量による葉層上でVlasov方程式の定常解となる分布関数を構築し、磁気面ごとの圧力分布を求めた。さらにそれを非等方圧力GS方程式に適用することにより、運動論とGS方程式両者に対してconsistentな平衡状態を記述するモデルが構築されることを示した。

### 参考文献

- [1] H. Aibara and Z. Yoshida. Lower bounds on zonal enstrophy. *Journal of Fluid Mechanics*, 919, 2021.
- [2] H. Aibara, Z. Yoshida and K. Shirahata. Kinetic construction of the high-beta anisotropic-pressure equilibrium. arXiv preprint arXiv:2108.12968, 2021.
- [3] H. Grad, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* (1967).
- [4] Z. Yoshida and S. M. Mahajan, "Self-organization in foliated phase space: Construction of a scale hierarchy by adiabatic invariants of magnetized particles," *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2014, 073J01(2014).