

# 超伝導重力計における磁気浮上の有限要素法によるシミュレーション

今西祐一<sup>1)\*</sup>・高森昭光<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> 東京大学地震研究所

## Simulation of Magnetic Suspension in Superconducting Gravimeter by Finite Element Method

Yuichi Imanishi<sup>1)\*</sup> and Akiteru Takamori<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Earthquake Research Institute, The University of Tokyo

### Abstract

We performed numerical simulations of magnetic suspension in the superconducting gravimeter (SG) using the finite element method, in order to evaluate the responses of the gravity sensor in the SG CT #036 installed at Ishigakijima, Japan. The three-dimensional forces exerted on a levitating superconducting sphere were computed, from which the coefficients of sphere's potential were estimated. The results were compared with experimentally measured values for CT #036.

**Keywords:** superconducting gravimeter, magnetic suspension, coupling, nonlinearity

### 1. はじめに

超伝導重力計 (Prothero and Goodkind, 1968; Goodkind, 1999; Hinderer *et al.*, 2007) は、超伝導による磁気浮上を利用した動作原理に基づく、きわめて高い感度と安定性を有する相対重力計である。スプリング式重力計においては、テストマスとしての錘を機械的なバネに吊してバランスさせ、そのバネの伸び縮みを検出することで、重力加速度の場所による変化あるいは時間的な変化を測定する (たとえば、日本測地学会 Web テキスト, <https://geod.jpn.org/web-text/part2/2-4/index.html>)。超伝導重力計は、スプリング式重力計における機械的なバネによる弾性力を、超伝導電流が作る磁場による浮上力で置き換えたものと見なすことができる。超伝導重力計の重力センサーの内部では、上下 2 つの超伝導コイル (Upper Coil, Lower Coil) に電流が流れており、それで作る磁場によって、超伝導体からなる中空の球が浮上している。超伝導球のつり合い位置は、中心点が Upper Coil よりも少し上側にくる位置にある。スプリング式重力計におけるバネ定数にあたるものは、磁気浮上力の上下方向の勾配であり、これは 2 つのコイルに流

れる電流を調節することによって非常に小さくすることができる。これにより、きわめて弱いバネで錘を支持しているのと力学的に同等の状態が実現されている。この力学系の固有周波数は、典型的には 0.1 Hz のオーダーである (Imanishi *et al.*, 1996)。

超伝導重力計を通常のスプリング式重力計と比べたとき、動作原理の点での大きな違いの一つは、超伝導重力計ではテストマスの動きが上下方向に拘束されておらず、水平方向にも自由度があるということである。概念的には、超伝導球は、上下方向には弱いバネ、水平方向にはそれよりもはるかに強いバネで支持されていると考えることができる。地球潮汐や地球自由振動などの長周期の現象においては、超伝導球が水平方向にも自由度を持つことが問題になることはないが、より短周期の現象においてはその影響が現れる場合がある。沖縄県石垣島の国立天文台 VERA 石垣島観測所に設置されている超伝導重力計 CT #036 の場合、近傍にある 20 m VLBI アンテナが向きを変えるときに発生する地面振動の影響で、重力にステップ状のノイズが発生する。Imanishi *et al.* (2018) は、この現象を重力センサーの上下方向と水平

\*e-mail: imanishi@eri.u-tokyo.ac.jp (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

方向のカップリングという観点から詳しく分析し、その効果を定量的に説明することに成功した。また、この分析の副産物の形で、水平方向の固有周波数が約 3 Hz であることも示された。

また、同じく石垣島の超伝導重力計 CT #036 に関して、台風接近時など、地動ノイズレベルが非常に高まっているときに、たんに重力信号の振れ幅が大きくなるだけでなく、DC 成分が重力増加側にふれる傾向があることがわかっている。Imanishi *et al.* (2022) は、この現象を重力センサーの上下方向の非線形性という観点から解析し、そのような器械的な要因によるものではない（したがって真の重力変化の信号である）ことを示した。

以上のことを、Imanishi *et al.* (2018) および Imanishi *et al.* (2022) で展開された方法に基づいて記述すると、次のようになる。超伝導球のつり合い位置を座標原点とし、直交座標系を考える。鉛直上向きに  $z$  軸、水平方向に  $x, y$  軸をとる。球の感じるポテンシャル  $U$  は  $z$  軸に関して回転対称であるとする。 $U$  のテイラー展開を 3 次の項までとると、

$$U(x, y, z) = U_0 + \frac{1}{2}[\alpha_H(x^2 + y^2) + \alpha_V z^2] + \frac{1}{6}[3\beta_H(x^2 + y^2)z + \beta_V z^3] \quad (1)$$

と表される。ここで  $\alpha_H$ ,  $\alpha_V$ ,  $\beta_H$ ,  $\beta_V$  は展開係数で、

$$\alpha_H = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \quad (2)$$

$$\alpha_V = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (3)$$

$$\beta_H = \frac{\partial^3 U}{\partial r^2 \partial z} \quad (4)$$

$$\beta_V = \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} \quad (5)$$

である。ただし  $r$  は円筒座標系  $(r, \theta, z)$  における  $r$  である ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ )。このとき、球に働く力の各成分は

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\alpha_H x - \beta_H x z \quad (6)$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\alpha_H y - \beta_H y z \quad (7)$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\alpha_V z - \frac{1}{2}\beta_H(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}\beta_V z^2 \quad (8)$$

となる。 $\alpha_H$  と  $\alpha_V$  はそれぞれ、水平方向、上下方向のバ

ネ定数に相当する。水平方向、上下方向の固有角周波数はそれぞれ

$$\omega_H = \sqrt{\frac{\alpha_H}{m}} \quad (9)$$

$$\omega_V = \sqrt{\frac{\alpha_V}{m}} \quad (10)$$

で与えられ、前述のように、 $\alpha_H \gg \alpha_V$ 、したがって  $\omega_H \gg \omega_V$  である。 $\beta_H$  は水平方向と上下方向のカップリングを表す。もしこれがゼロであれば、球の水平方向、上下方向の運動は分離され、重力センサーの出力は水平加速度の入力に対して影響を受けないことになる。実際の超伝導重力計では、球が中心軸から水平方向に変位すると、球に働く浮上力が小さくなり球は下へ動く (GWR Instruments, 1985)。このことは、 $\beta_H > 0$  であることを表している。このため、通常重力計とは異なり、超伝導重力計の姿勢を鉛直方向に合わせる際には重力が最小になる（球が最も上にくる）ように調整がなされる。一方、 $\beta_V$  は上下方向の線形性からのずれを表す。もし  $\beta_H = 0$  かつ  $\beta_V = 0$  であれば、ポテンシャルは純粋に harmonic になり、球の運動方程式は水平方向、上下方向ともに理想的な線形の方程式となる。球に働く力を表す式 (6)-(8) の右辺において、 $x, y, z$  に関して線形の項および非線形の項はそれぞれポテンシャルの展開 (式 (1)) における 2 次の項および 3 次の項に由来しており、本論文ではこれらをそれぞれ低次の項および高次の項と呼ぶことにする。

Imanishi *et al.* (2018) および Imanishi *et al.* (2022) は、石垣島の CT #036 の記録に見られる上述のような特徴的な挙動を理解するため、 $\alpha_H$ ,  $\alpha_V$ ,  $\beta_H$ ,  $\beta_V$  の具体的な数値を実験的に推定した。このなかで  $\alpha_V$  はもっとも測定が容易であり、人工的な信号を重力計のフィードバック回路に入力した際の応答から推定される (Imanishi *et al.*, 1996; Van Camp *et al.*, 2000)。 $\alpha_H$  および  $\beta_H$  は、重力計の横に置かれた地震計の記録を用いて、水平加速度の入力に対する応答を分析することで推定された。これは、石垣島では、重力計の近くに VLBI アンテナがあるという特殊な事情によって可能になったもので、通常の観測点では同様の方法で推定することは難しい。 $\beta_V$  は  $\alpha_V$  と同様の方法で推定できるが、この高次の項は  $\alpha_V$  に比べると相対的に効果が小さいので、精密に測定することは容易ではない。

本研究では、これらの係数の推定という問題に対して、まったく異なるアプローチを試みる。超伝導重力計における磁気浮上は、静磁場の問題として扱うことができ、センサー内部の幾何学的な配置やコイルの電流値などを

与えれば、超伝導球に働く力は理論的に計算可能である。ここでは電磁気学の方程式を、解析的に解くのではなく、有限要素法を用いたシミュレーションによって数值的に解く。超伝導球がさまざまな位置にあるときに働く3次元の力を計算し、それを総合して解析することにより、ポテンシャルの展開係数を推定する。そうして得られた結果を、Imanishi *et al.* (2018) および Imanishi *et al.* (2022) において実験的に推定された値と比較する。これによって、実測結果の信憑性を確かめるとともに、Imanishi *et al.* (2018) および Imanishi *et al.* (2022) が超伝導重力計の特性に関して導いた結論を補強することが、本論文の主たる目的である。また、将来的に超伝導重力計とは異なる磁気浮上式重力センサーを開発することを視野に入れて、有限要素法によるシミュレーションの実効性を検証することも、本研究の目的の一つである。

## 2. 方 法

本研究で超伝導重力計における磁気浮上の数値シミュ

レーションに使用するソフトウェアは、汎用の有限要素法ソフトウェアである Ansys (<https://www.ansys.com>) である。Ansys は、構造、流体、伝熱、電磁場などの問題を、パーソナルコンピュータやワークステーション上で有限要素法により数值的に解くためのパッケージの集合体である。なかでも今回は、モデルの作成から解析条件の設定、計算の実行、結果の画面表示までを、グラフィカルなユーザー・インターフェースを通して一貫して操作できる環境である Ansys Workbench を使用した。使用したコンピュータの CPU は Intel Core i5-8400 (2.8 GHz)、メモリーは 32 GB、OS は Windows 10、Ansys のバージョンは 19.1 である。

Ansys によるシミュレーションは、次のようなステップを経て行なった。

最初のステップは、材料の物性を定義することである。球およびコイルの材料として「超伝導体」を定義し、その比透磁率を指定した。実際の超伝導体の比透磁率は厳密にゼロであるが、Ansys では材料の比透磁率として

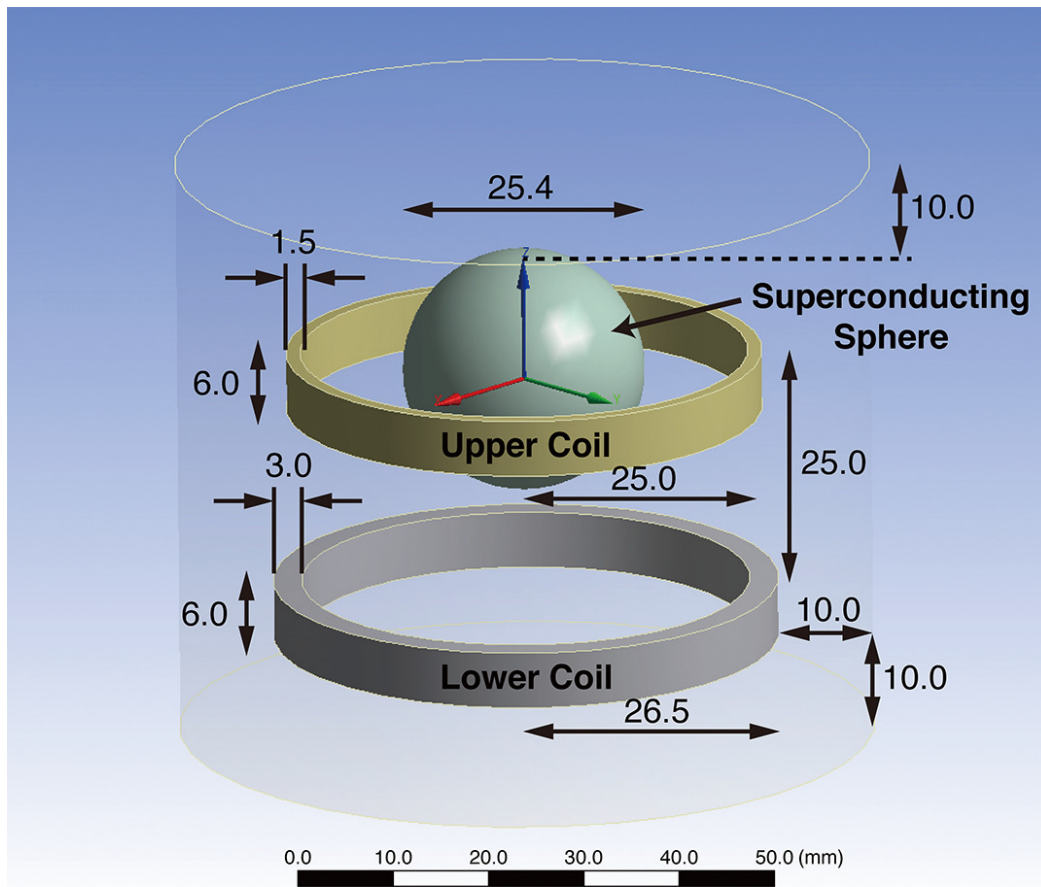


Fig. 1. Geometry of the gravity sensor in the superconducting gravimeter, used in the numerical simulation by Ansys. Units: mm.

Table 1. Parameters for the two coils used in the numerical simulation. The current values used in the superconducting gravimeter CT #036 are also listed.

	Number of Turns	Area of Cross Section ( $\text{m}^2$ )	Current (A)	Current (A) in CT #036
Upper Coil	16	$2 \times 10^{-6}$	6.880	4.9380
Lower Coil	32	$2 \times 10^{-6}$	4.112	4.7536

ゼロを指定することはできないので、十分に小さい値として  $10^{-9}$  を指定した。球およびコイル以外の領域については、Ansys で既定の材料である「空気」を用いた。この「空気」は、真空と同じ比透磁率（つまり 1）を持つ。実際の超伝導重力計の重力センサー内部は、ヘリウムガスで満たされているが、静磁場の問題に関するかぎり、その部分を真空と見なしてもさしつかえない。

第2のステップは、ジオメトリの定義である。Fig. 1 に、Ansys に入力した、超伝導重力計センサーのジオメトリを示す。各部の寸法は、実際のセンサーとは厳密には一致していない。z軸を鉛直上向きにとり、水平面内に x軸, y軸をとる。Upper Coil の上面および下面は、それぞれ  $z = +3.0 \text{ mm}$  および  $z = -3.0 \text{ mm}$  の位置にある。超伝導球は、厚さ 1mm の中空の球とした。超伝導球の位置は、その中心の座標を可変パラメーターとして扱った。コイルおよび球の材料は「超伝導体」である。コイルおよび球を囲むかたちで、円筒形の“enclosure”を設定した。コイルおよび球から enclosure の表面までの距離は 10mm とした。enclosure の材料は「空気」である。

第3のステップは、物理的な条件の設定である。超伝導球に働く浮上力は、球の表面に流れる誘導電流と磁場との相互作用によって生まれる (Goodkind, 1999)。2つのコイルに流れる電流を変えると、磁場は変化し、浮上力の大きさや勾配も変化する。ここでコイルの電流を設定するにあたって考慮すべきことは、次の2つである。一つは、CT #036 の超伝導球（質量を約 0.007 kg と仮定する）が安定して浮上するために、約 0.07 N の上向きの力が得られることである。もう一つは、浮上力の上下方向の勾配が、CT #036 における実測値に近くなることである。これらの条件を考慮に入れ、2つのコイルの電流値を試行錯誤によって決めていった。（実際の超伝導重力計の立ち上げ時においても、浮上した超伝導球を一定位置に保ちながら、上下のコイルの電流を少しずつ調整して勾配をしだいに弱めていくという操作があり、それとよく似た作業であった。）しかし、勾配が実測値とほぼ同じになるように設定すると、有限要素法の計算

精度の限界のため、浮上力の大きさが高さとともに単調減少とならないことがわかった。そこで、浮上力の勾配を実測値と同じにまで弱めることはせず、浮上力が単調減少になるような範囲で、もっとも勾配が弱くなるような電流値を探すという方法をとった。一方、Ansys における計算では、球に働く力の大きさは、コイルの電流密度に巻数を乗じたものの2乗に比例することがわかった。最終的に、2つのコイルのパラメーターとして、Table 1 に示す値を設定した。コイルの電流値は、石垣島の CT #036 で実際に設定されている値とは異なっているが、ここでの数値計算上は（巻数） $\times$ （電流）/（断面積）という量だけに意味がある。電流値以外の物理的条件としては、enclosure の表面における平行磁束の境界条件を課した。

最後のステップは、計算の実行である。有限要素法では、系を要素に分割して方程式を数値的に解くことになるが、そのサイズや個数の選択が重要になる。ここでは、コンピューターに搭載されたメモリーの容量や計算に要する時間を考慮して、メッシュのサイズを 0.0005 m（超伝導球のみ 0.0003 m）とした。このとき、節点の数は約 300 万、要素の数は約 200 万である。超伝導球の中心の3次元的な位置を変更しながら、計算を繰り返した。超伝導球に対して働く力は、球の表面上における磁場のマックスウェル応力から求められる。それぞれの位置において、x, y, z の各方向に働く力を計算し、結果を保存した。一回の計算に要する時間は、約 7 分であった。

計算結果の一例として、ある配置における、全磁束密度のベクトルプロット（x-z 平面での断面）を Fig. 2 に示す。ここでは真空部分だけを表示している。コイルの電流が生み出す磁場が超伝導球の内部に入ることができず、球の表面に沿って磁束が伸びている様子が再現されている。

### 3. 結 果

以下では、Ansys によるシミュレーションの結果について、低次の効果から高次の効果へという順序で、段階を踏んで分析を行う。

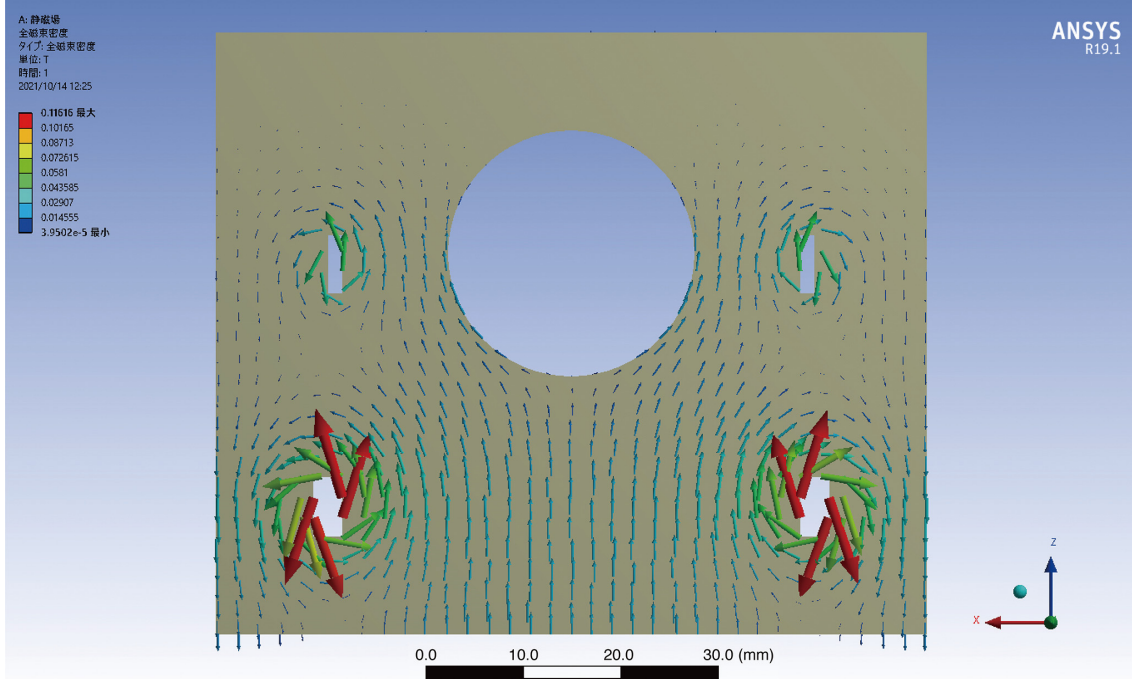


Fig. 2. Cross section of the gravity sensor in the superconducting gravimeter, showing the total magnetic flux density computed by Ansys.

シミュレーションの結果を、球が感じるポテンシャルと対照させて解釈する際には、式 (1)–(8) における  $z$  はつり合い位置からの上下変位を表すことに注意が必要である。また、式(8)の上下方向の力は、球に働く重力とつり合う浮上力を含む形で

$$F_z = mg - \alpha_V z - \frac{1}{2}\beta_H(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}\beta_V z^2 \quad (11)$$

と読み直すことが必要である。ここで  $m$  は球の質量、 $g$  は重力加速度である。

### 3.1 上下方向の勾配

最初に、超伝導球を浮上させている力とその勾配について調べる。超伝導球が中心軸上 ( $x = y = 0$ ) にあるとき、系の対称性から水平方向の合力はゼロであり、上下方向には浮上力が働く。Fig. 3 (a) の黒丸は、球の中心の  $z$  座標を 0.0000 m から 0.0030 m まで 0.0001 m きざみで変えたときの、それぞれの位置での上向きの合力の大きさを示す。前述のように、超伝導球の質量を約 0.007 kg と仮定しているため、重力加速度を約  $10 \text{ ms}^{-2}$  として、およそ 0.07 N の浮上力が発生するようにパラメーターが設定されている。横軸の上下位置 ( $z$ ) は、Upper Coil の平面 ( $x$ - $y$  平面) からの距離である。球に働く浮上力は、中心が Upper Coil の平面内にあるときに最大となるが、上方にいくにしたがって小さくなる。Ansys によるシミュレーション結果は、 $z$  が 0.0010 m か

ら 0.0020 m の間で、浮上力がほぼ一定になる領域が存在することを再現している。0.0000 m から 0.0030 m までの全領域にわたって、浮上力の大きさは  $z$  の 3 次多項式でよく近似できるような分布となった。黒丸のデータに最小二乗法により 3 次多項式をあてはめた結果が、赤色の曲線である。黒丸のデータはとどこころで赤線から外れており、有限要素法による合力の評価にはこの程度のばらつきが現れることがわかる。

このようにして得られた 3 次多項式を  $z$  で微分したものが、Fig. 3 (b) の曲線である。縦軸は力の勾配であり、ポテンシャルの係数  $\alpha_V$  の符号を変えたものに相当する。力の勾配はいたるところで負になっており、この範囲では球は安定浮上することがわかる。このようなモデルに基づいたとき、力の勾配 (の絶対値) が最小となる  $z$  は 0.0015 m と 0.0016 m の間にある。数値的には、 $z = 0.00156 \text{ m}$  において、 $\alpha_V$  は最小値 ( $9.46 \times 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$ ) をとる。

このような浮上力の分布が与えられたとき、超伝導球がどこでつり合うかは、球の質量とその場所の重力加速度とで決まる。実際の超伝導重力計においても、力の勾配が弱い領域で超伝導球が浮上しているはずであるが、その正確な位置はわからない。計算を実行した格子点の中で  $z = 0.00156 \text{ m}$  にもっとも近いのは、 $z = 0.0016 \text{ m}$  である。前述の多項式モデルによれば、この位置での勾

配は  $\alpha_V = 9.59 \times 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$  となる。

### 3.2 水平方向の勾配

次に、超伝導球に働く水平方向の復元力について調べる。Fig. 4 は、球の位置  $z = 0.0016 \text{ m}$  における、力の分布の計算結果をベクトルの的に表したものである。ここでは、 $x$  と  $y$  のそれぞれについて、 $-0.0001 \text{ m}$  から  $+0.0001 \text{ m}$  まで  $0.00005 \text{ m}$  きざみで変化させた。系の対称性の観点からは、理論的にはここに示した 25 点のうち 6 点だけが独立と考えられるが、数値計算結果にばらつきがあることを考慮して、すべての点についての計算を実行した。

Fig. 4 からわかるように、Ansys によるシミュレーションは、球が水平方向に復元力を受け、中心軸に押しつけられている様子を再現することに成功している。また、復元力の大きさは、中心軸からの水平変位にほぼ比例していることがわかる。ここで計算された力は、式 (6), (7) の  $F_x, F_y$  に対応している。いま、 $z = 0.0016 \text{ m}$  がつり合い位置だと仮定すると、つり合い位置を含む水平面内では、式 (6), (7) の右辺において  $z = 0$  であり、 $\beta_H$  のかかる項は消える。この条件のもとで、25 点のデータに対して最小二乗法により式 (6), (7) をあてはめた結果、 $\alpha_H = 2.042 \pm 0.002 \text{ Nm}^{-1}$  が得られた。この値が、3.1 節

で述べた  $\alpha_V$  と比較して 2 けた以上大きいことは、前述の「上下方向には弱いバネ、水平方向には強いバネ」というアナロジーと結びついている。

### 3.3 上下方向と水平方向のカップリング

上下および水平方向の力について見てきたので、次に高次の項の係数である  $\beta_H$  について調べる。これは式 (11) からわかるように、球がある平面内にあるときの、上下方向の力の  $x, y$  依存性を調べることで推定することができる。その際に、仮定したつり合い位置において超伝導球に働く重力も、未知数として同時に推定が必要になる。ここでは 3.2 節と同様に、つり合い位置を含む水平面内におけるデータを使った 2 次元的な解析にとどめるが、後の 3.4 節において、上下方向の非線形性も考慮に入れた 3 次元的な解析によって評価をやり直す。

Table 2 は、 $z = 0.0016 \text{ m}$  において、球の水平位置を変えたときに上下方向の力がどう変わるかを示したものである。理論的には、力は中心軸上 ( $x = y = 0$ ) において最大となり、それから離れるほど小さくなるべきである。しかし、ここでの計算結果は、全体的にはそのような傾向を示しているものの、部分的にはそれから逸脱している。また、 $x, y$  の正負についての対称性も必ずしも成り立っていない。個々のケースにおける数値計算の誤差はこの程度にはあると考えられ、高次の効果を数値的にシミュレーションで再現することの難しさがこの結果に表れている。

超伝導球のつり合い位置を  $z = 0.0016 \text{ m}$  と仮定する。3.2 節と同様、つり合い位置を含む水平面内を考えるので、式 (11) の右辺において  $z = 0$  である。Table 2 の結

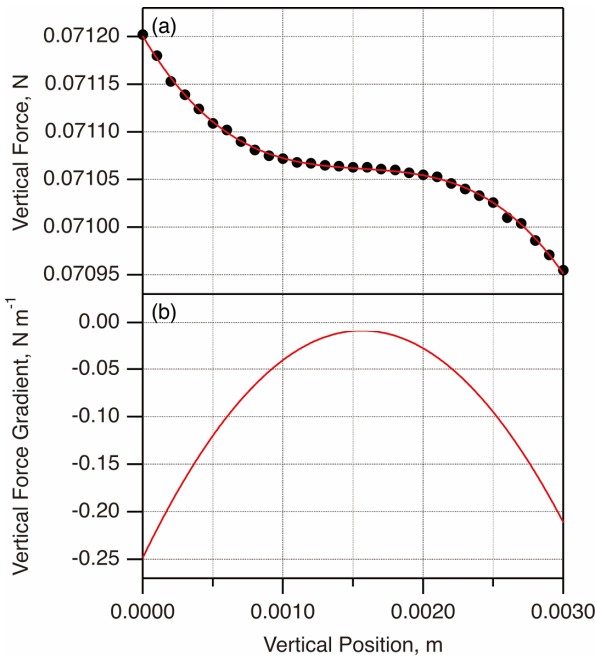


Fig. 3. Vertical force exerted on the superconducting sphere as a function of the vertical position ( $z$ ). (a) Vertical force. Dots are the computation results by Ansys. Red curve is the third-order polynomial of  $z$  that gives the best fit to the computation results. (b) Vertical force gradient, derived by differentiation of the best-fit third-order polynomial by  $z$ .

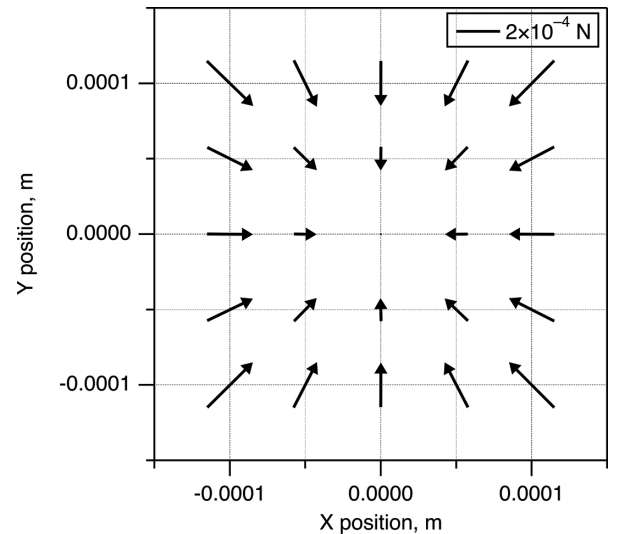


Fig. 4. Distribution of horizontal forces in the plane at  $z = 0.0016 \text{ m}$ .

Table 2. Vertical force exerted on the superconducting sphere in the plane at  $z = 0.0016\text{ m}$ , computed by the finite element method with Ansys. Units:  $10^{-2}\text{ N}$ .

		x (m)				
		-0.00010	-0.00005	0	+0.00005	+0.00010
y (m)	-0.00010	7.1060	7.1065	7.1063	7.1060	7.1058
	-0.00005	7.1060	7.1064	7.1058	7.1058	7.1065
	0	7.1059	7.1059	7.1063	7.1064	7.1061
	+0.00005	7.1059	7.1060	7.1061	7.1063	7.1061
	+0.00010	7.1058	7.1062	7.1063	7.1060	7.1057

果に対して式 (11) を最小二乗法によりあてはめた結果、 $\beta_H = (2.49 \pm 1.56) \times 10^2 \text{ Nm}^{-2}$  および  $mg = (7.1062 \pm 0.0001) \times 10^{-2} \text{ N}$  が得られた。

### 3.4 上下方向の非線形性

もう一つの高次の項の係数である  $\beta_V$  は、上下方向の復元力の非線形性を表しており、実測においてもシミュレーションにおいてももっとも評価の難しいパラメータである。浮上力が 3.1 節で述べたような分布をしているとすると、ある点において浮上力の  $z$  による 2 回微分がゼロになり、その点の上側では曲線が上に凸、下側では下に凸になると考えられる。そうすると、その点を境に  $\beta_V$  が符号を変える（上側では正、下側では負）ことになり、球のつり合い位置によって  $\beta_V$  の値が大きく変わることが予想される。

ここでは、次のような方法で  $\beta_V$  を評価した。まず、超伝導球のつり合い位置の  $z$  を仮定する。球の中心位置を、上下方向についてはつり合い位置の上下  $0.0002\text{ m}$  の範囲 ( $0.0001\text{ m}$  きざみ)、 $x$  および  $y$  については中心軸の周囲  $0.0001\text{ m}$  の範囲 ( $0.00005\text{ m}$  きざみ) でそれぞれ変化させ、各位置に対して合力 3 成分を計算する。 $x$ ,  $y$ ,  $z$  についてそれぞれ 5 点、合計して 125 点、力の成分 375 個のデータを用意し、それに対して式 (6), (7), (11) を最小二乗法であてはめる。推定すべき未知パラメータは、 $\alpha_H$ ,  $\alpha_V$ ,  $\beta_H$ ,  $\beta_V$ , および  $mg$  の 5 つである。これらのうち、 $\beta_V$  以外の 4 つについては、3.1 節から 3.3 節までの方法により予備的な推定値が得られるので、それを最小二乗推定における初期値として用いる。以上の手続きを、超伝導球のつり合い位置を  $z = 0.0013\text{ m}$  から  $z = 0.0018\text{ m}$  まで  $0.0001\text{ m}$  きざみで変えることにより、6 通りの推定結果を得た。

このようにして得られたパラメータの推定結果を Fig. 5 に示す。3.1 節から 3.3 節においては、一つの軸上あるいは一つの平面上において計算された力の分布について、 $z$  依存性あるいは  $x$ ,  $y$  依存性のいずれかに着目

した解析を行ってきた。それに対して本節においては、3 次元的な点の分布について、 $x$ ,  $y$ ,  $z$  依存性のすべてを同時に考慮に入れて解析している。解析に用いるデータ数も多いので、本節で得られたものが本研究におけるパラメータ推定の最終結果であり、3.1 節から 3.3 節における結果を置き換えるべきものである。

具体的な数値としては、つり合い位置  $z = 0.0016\text{ m}$  に対して、 $\alpha_H = 2.039 \pm 0.002 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $\alpha_V = (1.22 \pm 0.13) \times 10^{-2} \text{ Nm}^{-1}$ ,  $\beta_H = (2.08 \pm 0.13) \times 10^2 \text{ Nm}^{-2}$ ,  $\beta_V = (2.3 \pm 2.4) \times 10^1 \text{ Nm}^{-2}$ ,  $mg = (7.10618 \pm 0.00003) \times 10^{-2} \text{ N}$  という結果が得られた。 $\alpha_H$  については、3.2 節における結果と誤差の範囲で一致した。 $\alpha_V$  については、3.1 節で得た結果と比べて、約 30 % 大きい値となった。 $\beta_H$  については、3.3 節における結果と整合的だが、推定誤差が大幅に小さくなった。ここで新たに得られた  $\beta_V$  については、推定誤差が大きいものの、 $10^1 \text{ Nm}^{-2}$  のオーダーの値であるらしいことがわかる。つり合い位置を変えた場合の推定結果の変化については、次節で議論する。

## 4. 議 論

有限要素法によるシミュレーションの結果について、Fig. 5 に示された係数の推定値を石垣島の CT #036 の実測値と比較し、考察を加える。

まず、Fig. 5 (a) に示す  $\alpha_H$  は、シミュレーション結果の分析から精度よく決まり、球のつり合い位置を変えてもあまり変化しないことがわかった ( $z = 0.0013\text{ m}$  から  $z = 0.0018\text{ m}$  までで約 5% の変化)。超伝導球に働く水平方向の復元力は、ほとんどが Upper Coil が作る磁場によってもたらされており (GWR Instruments, 1985)、ここでの計算範囲においては、水平方向の力の勾配はほとんど一定であることを示している。一方、Imanishi *et al.* (2018) および Imanishi *et al.* (2022) では、CT #036 の実測値として  $\alpha_H = 2.1 \text{ Nm}^{-1}$  を得ている。この係数に関しては、実測とシミュレーションとの一致は非常に良

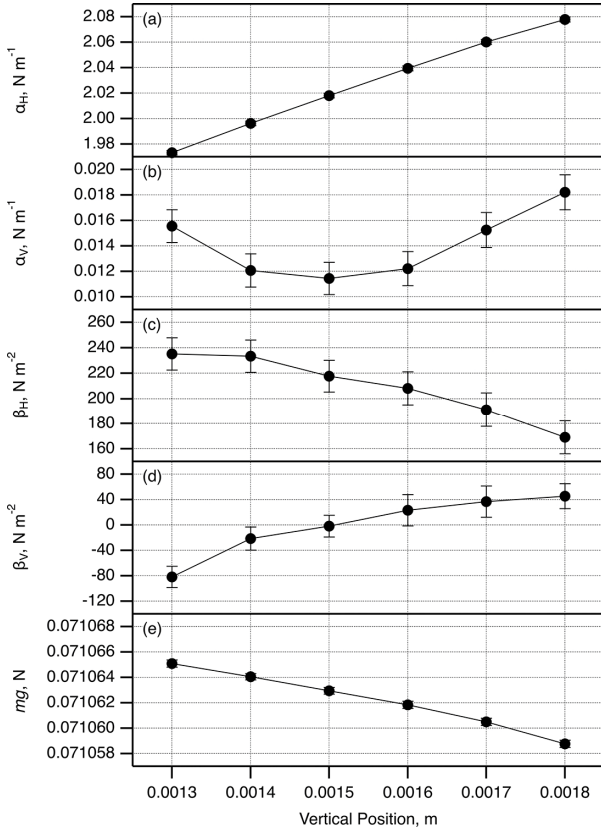


Fig. 5. Estimation results for the unknown coefficients for variable vertical position, obtained from numerical simulation by Ansys. (a)  $\alpha_H$ , (b)  $\alpha_V$ , (c)  $\beta_H$ , (d)  $\beta_V$ , (e)  $mg$ .

いと言えるだろう。

次に, Fig. 5 (b) に示す  $\alpha_V$  については,  $z = 0.0014\text{m}$  から  $z = 0.0016\text{m}$  の範囲で最小値をとるという結果になった。この範囲から上下いずれに離れても, 勾配は急速に大きくなっていく。つり合い位置  $z = 0.0016\text{m}$  のときの推定値は前述のように  $(1.22 \pm 0.13) \times 10^{-2} \text{Nm}^{-1}$  であるが, これは CT #036 の実測値  $4.8 \times 10^{-3} \text{Nm}^{-1}$  と比べて約 2 倍大きい。この原因は, 第 2 節で述べたように, 有限要素法によるシミュレーションのなかで, 浮上力の勾配を十分に弱めることが困難だったためである。

Fig. 5 (c) に示す  $\beta_H$  については, 仮定するつり合い位置が高くなるほど, 推定値が小さくなる傾向が見られた。 $\beta_H$  の符号が正であることは, 球が中心軸から水平方向に変位したとき, 浮上力が小さくなることを意味している。その結果, 球は下方へも動くので, 上下方向と水平方向のカップリングが生じる。Fig. 5 (c) の結果は,  $\beta_H$  の絶対値を小さくする目的だけであれば, つり合い位置が高いほうが有利だということを示している。しかし, Fig. 5 (b) からわかるように, その場合には浮

上力の勾配が大きくなってしまふ。勾配を弱めることとカップリングを小さくすることを両立させた磁気浮上式センサーを開発することは, 将来的な課題である。計算と実測との比較に関しては, つり合い位置  $z = 0.0016\text{m}$  のときのシミュレーションによる推定値が  $(2.08 \pm 0.13) \times 10^2 \text{Nm}^{-2}$  であるのに対して, 実測値は  $1.2 \times 10^2 \text{Nm}^{-2}$  である。これも  $\alpha_V$  と同様, シミュレーションによる推定値が実測値の約 2 倍となった。このことの原因は現時点では不明だが,  $\alpha_V$  と同様, シミュレーションにおける浮上力の勾配が実際より強いことと関係があるかもしれない。

Fig. 5 (d) に示す  $\beta_V$  については, つり合い位置によって符号が変わり, 値が大きく変わることがわかった。つり合い位置が  $z = 0.0015\text{m}$  のときにほぼゼロとなり, それより上側では正の値, 下側では負の値となった。 $z = 0.0015\text{m}$  は  $\alpha_V$  の最小値とも対応しており, 3.1 節, 3.4 節で議論した 3 次多項式のモデルがよくあてはまっていることがわかる。一方, Imanishi *et al.* (2022) では, CT #036 の実測値として  $\beta_V = (1.5 \pm 0.3) \times 10^1 \text{Nm}^{-2}$  を得ている。この  $\beta_V$  についても,  $\alpha_V$  および  $\beta_H$  と同様に, シミュレーションによる推定値は過大評価になっている可能性がある。また, つり合い位置による値の相対的な変化が大きいのので, 計算値と実測値とを比較して一致の度合いを議論することは適当ではない。その上で, 少なくとも  $\beta_V$  の実測値の符号が正であることは, 本研究のシミュレーション結果に照らせば, CT #036 の球のつり合い位置は勾配最小の点よりも上側にあることを表していると考えられる。

最後に, Fig. 5 (e) に示す  $mg$  は, 球のつり合い位置が上へいくほど小さくなっている。上方ほど浮上力が小さくなることに对应して, つり合うべき球の質量が小さくなるのが, 結果に正しく反映されている。

## 5. おわりに

本研究では, 石垣島の超伝導重力計 CT #036 を念頭に置いて, 実際に観察される重力計のレスポンスを理解するために, 重力センサーにおける磁気浮上の有限要素法シミュレーションを行った。シミュレーションによってセンサー内部の配置を正確にモデル化することは不可能であり, また極度に弱い力の勾配を数値計算上で再現することには技術的な困難があった。したがって, 本研究の計算結果は, 超伝導重力計センサーにおける磁気浮上を非常に正確に再現したものというわけではない。しかし, シミュレーション結果に基づいて推定されたポテンシャルの係数は, CT #036 での実測値と比較して,

符号やオーダーの点でよい一致をみた。このことは、本研究のモデルの有効性を示すだけでなく、これまで CT #036 に対して行われてきた特性測定の結果が正しいことも意味していると言えるだろう。

本研究で採用したような有限要素法によるシミュレーションは、解析的な解が得られない系について、実機にあたって測定することなく物理特性を推定することを可能にする。私たちは、(超伝導ではない) 一般の反磁性体を用いた磁気浮上式加速度センサーの開発を計画しているが、装置のデザインを最適化する局面において、本研究のようなシミュレーションに基づくアプローチは、開発スピードの向上という点において多くのメリットがあると考えられる。

## 謝 辞

有益なコメントをいただいた査読者の方に感謝いたします。本研究は、JSPS 科学研究費 JP19K04012, JP26289350, JP21K18644 の助成を受けたものです。

## 参考文献

Goodkind, J.M., 1999, The superconducting gravimeter, *Rev.*

- Sci. Instrum.*, **70**, 4131–4152. doi:10.1063/1.1150092.  
 GWR Instruments, 1985, Superconducting gravity meter model TT70 operating manual, GWR Instruments, San Diego, CA, USA.  
 Hinderer, J., D. Crossley and R.J. Warburton, 2015, Superconducting gravimetry, in “*Treatise of Geophysics*”, 2nd edition, edited by G. Schubert, 59–115.  
 Imanishi, Y., T. Sato and K. Asari, 1996, Measurement of mechanical responses of superconducting gravimeters, *J. Geod. Soc. Japan*, **42**, 115–117. doi:10.11366/sokuchi1954.42.115.  
 Imanishi, Y., K. Nawa, Y. Tamura and H. Ikeda, 2018, Effects of horizontal acceleration on the superconducting gravimeter CT #036 at Ishigakijima, Japan, *Earth Planets Space*, **70**, 9. doi:10.1186/s40623-018-0777-9.  
 Imanishi, Y., K. Nawa, Y. Tamura and H. Ikeda, 2022, Effects of vertical nonlinearity on the superconducting gravimeter CT #036 at Ishigakijima, Japan, submitted.  
 Prothero, W.A. and J.M. Goodkind, 1968, A superconducting gravimeter, *Rev. Sci. Instrum.*, **39**, 1257–1262. doi:10.1063/1.1683645.  
 Van Camp, M., H.-G. Wenzel, P. Schott, P. Vauterin and O. Francis, 2000, Accurate transfer function determination for superconducting gravimeters, *Geophys. Res. Lett.*, **27**, 37–40. doi:10.1029/1999GL010495.

(Received November 5, 2021)

(Accepted January 4, 2022)