

東京大学大学院新領域創成科学研究科  
人間環境学専攻

平成 28 年度  
修士論文

液圧ブロー成形のための  
大変形流体構造接触連成手法に関する検討

2017 年 2 月 3 日提出  
指導教員 橋本 学 講師

生野 達大

---

# 目次

目次	II
図目次	IV
表目次	V
第 1 章 緒言	1
1.1 本研究の背景	1
1.1.1 ブロー成形	1
1.1.2 液圧ブロー成形	2
1.1.3 液圧ブロー成形のシミュレーション	3
1.2 本研究の目的	4
第 2 章 先行研究の調査	7
2.1 広範囲にわたる接触のシミュレーション手法	7
2.2 気液二相流のシミュレーション手法	8
2.3 流体構造連成手法	9
第 3 章 支配方程式	11
3.1 問題の設定	11
3.2 構造領域	12
3.3 流体領域	14
3.4 気液二相流	16
3.4.1 レベルセット関数の移流	17
3.4.2 気液境界面の平滑化	17
3.4.3 レベルセット関数の再初期化	18
3.4.4 体積補正	19
3.5 流体構造連成	20

3.5.1	流体構造界面における境界条件 . . . . .	20
3.5.2	支配方程式の ALE 記述 . . . . .	21
3.5.3	ALE メッシュの制御 . . . . .	21
第 4 章 数値計算手法 . . . . .		23
4.1	解析領域と未知変数の離散化 . . . . .	23
4.2	支配方程式の離散化 . . . . .	26
4.2.1	構造領域 . . . . .	26
4.2.2	流体領域 . . . . .	33
4.2.3	レベルセット関数の移流 . . . . .	45
4.2.4	気液境界面の平滑化 . . . . .	46
4.2.5	レベルセット関数の再初期化 . . . . .	47
4.2.6	体積補正の離散化 . . . . .	48
4.2.7	ALE メッシュの制御 . . . . .	49
4.3	内点法による接触アルゴリズム . . . . .	49
4.4	提案する流体構造接触一体型連成手法 . . . . .	52
4.5	FrontISTR への実装 . . . . .	54
第 5 章 数値計算例 . . . . .		56
5.1	ブロー成形を模したモデルの接触解析 . . . . .	56
5.2	回転円錐 . . . . .	66
5.3	キャビティ内強制対流 . . . . .	70
5.4	ダム崩壊 . . . . .	74
5.5	回転油槽問題 . . . . .	82
第 6 章 結言 . . . . .		90
付録 A 連続体力学 . . . . .		99
A.1	現配置と参照配置 . . . . .	99
A.2	時間微分 . . . . .	100
A.3	非圧縮性 . . . . .	101
A.4	連続の式 . . . . .	101
A.5	運動量保存則 . . . . .	102
A.6	角運動量保存則 . . . . .	104

---

## 図目次

1	Process of injection stretch blow molding . . . . .	1
2	Process of liquid supported stretch blow molding . . . . .	2
3	Fluid-structure contact interaction problem . . . . .	11
4	Two phase flow analysis by the level set method: Thick curves means interfaces of two fluid. Blue and green area means interface area. . .	16
5	Re-initializing process of the level set method: Thick curves means interfaces of two fluid. Blue and green area means interface area. . .	18
6	Procedure of the proposed method . . . . .	53
7	New loop for changing solved physical fields in FrontISTR . . . . .	55
8	The dimension of the blow molding model . . . . .	56
9	Analysis mesh of a blow molding model . . . . .	57
10	Boundary conditions of the blow molding model : Additionally, dis- placement constraints for axial symmetry are set in $x$ and $y$ directions	58
11	Color contours of displacement by ASM . . . . .	61
12	Color contours of displacement by IPM: $\eta_{\text{IPM}} = 0.5$ . . . . .	61
13	Color contours of contact reaction by ASM . . . . .	62
14	Color contours of contact reaction by IPM: $\eta_{\text{IPM}} = 0.5$ . . . . .	62
15	Iteration for each loading step in the blow molding model . . . . .	65
16	Rotating cone problem. . . . .	66
17	Analysis mesh of the rotating cone problem . . . . .	68
18	Position of the rotating cone problem after one rotation: time incre- ment is $5.0 \times 10^{-3}$ s . . . . .	68
19	Rotating cone distribution along a vertical center-line after one rota- tion: time increment is $5.0 \times 10^{-3}$ s . . . . .	69
20	Lid-driven cavity flow problem . . . . .	70
21	Analysis mesh of the lid-driven cavity flow problem . . . . .	71
22	Velocity distributions of the lid-driven cavity flow problem at $t =$ 10,000 s: time increment is 10 s, mass density is 1,000 kg/m <sup>3</sup> , viscoc- ity is 0.001 Pa·s, $V_r = 0.001$ m/s and Reynolds number is 1,000 . . .	72

23	Velocity distributions of the lid-driven cavity flow problem along vertical and horizontal center-lines at $t = 10,000$ s: time increment is 10 s, mass density is $1,000 \text{ kg/m}^3$ , viscosity is $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , $V_r = 0.001 \text{ m/s}$ and Reynolds number is 1,000 . . . . .	73
24	Dam break problem . . . . .	74
25	Analysis mesh of the dambreak problem . . . . .	76
26	Initial conditions of the level sets in the dam break problem . . . . .	76
27	Level sets without re-initializing and correcting volume on $z = 0.0$ at $t = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3$ s : The interface of water and air is described as the green line . . . . .	78
28	Distance from the left wall to the tip of liquid . . . . .	79
29	Level sets with re-initializing and correcting volume on $z = 0.0$ at $t = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25$ and $0.3$ s : The interface of water and air is described as the green line . . . . .	81
30	Rotating oil tank problem . . . . .	82
31	Time history angle in the rotating tank problem . . . . .	82
32	Analysis mesh of the fluid and structural domain . . . . .	84
33	Analysis mesh of the structural domain . . . . .	84
34	Displacement of the structures in the rotating oil tank problem: the structure is deformed . . . . .	86
35	Velocity on $y = 0$ in the rotating oil tank problem . . . . .	87
36	Displacement of ALE mesh on $y = 0$ in the rotating oil tank problem . . . . .	88
37	Displacement of the structures at $t = 0.111$ s in the rotating oil tank problem: the computation is corrupted after this step . . . . .	89

---

## 表目次

1	Mesh information of the blow molding model . . . . .	57
2	Material properties of the workpiece in the blow molding model . . .	58
3	Analysis conditions of the blow molding model . . . . .	59
4	Analysis conditions of the blow molding model . . . . .	59
5	Specification of IC . . . . .	59
6	Maximum displacement magnitude in the blow molding model[mm] .	63
7	Maximum contact force magnitude in the blow molding model[N] . .	63
8	Iterations and computational time for the blow molding model . . . .	64
9	Analysis condition of rotating cone problem . . . . .	67
10	Analysis conditions for the lid-driven cavity flow problem . . . . .	71
11	Analysis condition of the dam break problem . . . . .	75
12	Specification of IC . . . . .	77
13	Analysis condition of the rotating oil tank problem . . . . .	83



## 第 1 章 緒言

### 1.1 本研究の背景

#### 1.1.1 ブロー成形

ブロー成形は，中空製品を加工するプラスチック成形加工法の一つである．その中でも，射出延伸ブロー成形の手順を，Fig. 1 に示す [1]．まず，試験管状の被加工物を中空の金型内に取り付ける．このとき，被加工物は加工しやすくするために予め加熱しておく．次に，延伸棒を延伸させて被加工物を金型の底に接触させる．最後に，延伸棒に開けられた空気穴から数百 kPa の空気圧で空気を吹き出し [2]，被加工物を膨らませて金型に接触させる．被加工物と金型の間の熱伝達により，被加工物は冷却され，金型内側の形状を維持したまま固化する．以上の手順を踏むことで，金型内側の形状を持つ中空製品が製造される．ブロー成形品の最も身近な例は PET ボトルであり [3]，このほかにも自動車のフレームや燃料タンク [4]，プレジャーボートといった大型製品 [5] にもブロー成形は利用されている．

ブロー成形による製品は，液体を充填する工程や流通過程で容器が破裂しないように，予め設けられた基準以上の強度を持つことが要求される．生産コストが無視できる場合，被加工物の初期形状における肉厚を厚くし，樹脂を長い時間をかけて冷却することで，ブロー成形品の強度を高めることが可能である．一方で，ブロー成形品は PET ボトルのよ

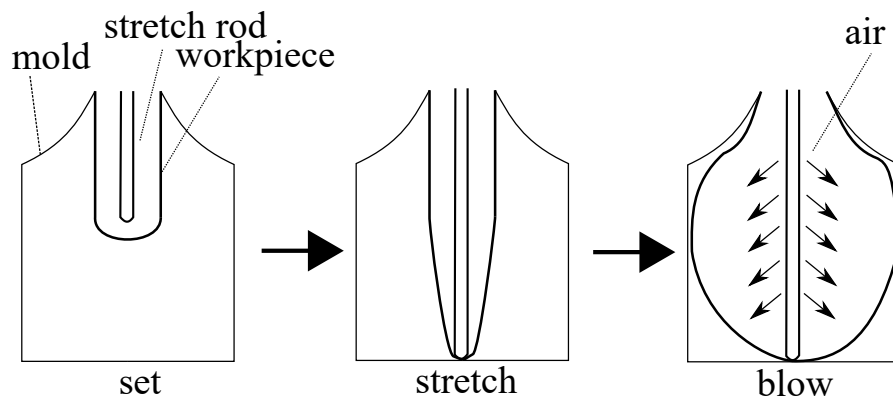


Fig. 1: Process of injection stretch blow molding



うに，液体製品を市販することを目的として大量に生産されることが多い．従って，生産コストの面からは，被加工物の初期形状における肉厚を可能な限り薄くし，速やかに樹脂を冷却することが望まれる．そのために，金型の形状や初期温度，被加工物の初期温度，空気の吹込み圧や流入速度，延伸棒の延伸速度といった成形パラメータを最適化する必要がある．

成形パラメータの調整には，試行錯誤を繰り返す必要があり，多大な時間と労力を要する．そのため，早くからシミュレーション手法について研究が始められており [6]，その後もシミュレーションに用いる物理モデルや数値シミュレーション手法について，多くの検討がなされてきた [7-14]．ブロー成形のために提案された物理モデルは，Abaqus [15] や ANSYS [16] といった市販ソフトのユーザーサブルーチンに実装されることで，実問題のシミュレーションに利用される．また，BlowView [17] のように，これらのモデルを予め組み込んだブロー成形専用のソフトウェアも開発されている．

### 1.1.2 液圧ブロー成形

近年，樹脂への吹込みに，空気ではなく充填すべき液体を用いる液圧ブロー成形法 [18] が注目されている．液圧ブロー成形の手順を Fig. 2 に示す．まず，試験管状の被加工物を中空の金型内に取り付ける．ブロー成形の場合と同様に，被加工物は予め加熱しておく．次に，延伸棒を延伸させて被加工物を金型の底に接触させる．最後に，通常のブロー成形とは異なり，ブロー成形品に充填したい液体を被加工物に流し込み，被加工物を膨ら

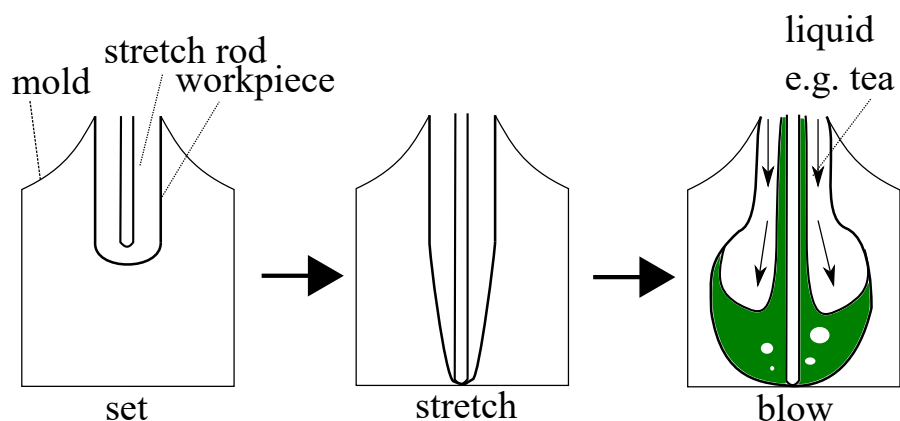


Fig. 2: Process of liquid supported stretch blow molding

ませることで金型に接触させる。被加工物と液体、被加工物と金型間の熱伝達により、被加工物は冷却され、金型内側の形状を維持したまま固化する。以上の手順を踏むことで、成形と液体の充填が同時になされることになり、時間的コスト面や衛生面に優れるという利点がある。この特徴により、充填液体の衛生面に注意が必要であり、なおかつ大量生産が必要な飲料用の PET ボトルの製造方法として注目されている。

液圧ブロー成形も、可能な限り少ない原材料で所望の強度を持つ成形品を得るため、成形パラメータを試行錯誤により調整する必要がある。従来のブロー成形と同様、液圧ブロー成形においても、シミュレーションは成形パラメータの最適化に大きく寄与するものと考えられる。一方で、液圧ブロー成形は従来の手法とは異なり、被加工物の成形に気体ではなく液体を用いるため、次項で述べるようにシミュレーションでは流体構造連成を考慮する必要がある。これにより、従来のシミュレーション手法よりも複雑なシミュレーション手法が必要になる。液圧ブロー成形のシミュレーション手法については、Zimmer [19] による研究以外の研究例はほとんど見られない。

### 1.1.3 液圧ブロー成形のシミュレーション

液圧ブロー成形のシミュレーションでは、以下の 7 点を考慮する必要がある。

1. 被加工物はひずみが 0.1 を超える大変形を伴う。従って、幾何学的非線形性と材料非線形性を考慮する必要がある。
2. 被加工物は広い範囲で金型と接触する。従来、有限要素接触解析で用いられてきた有効制約法では、特定の節点が接触と剥離を繰り返すチャタリング現象が生じて接触状態の決定に時間がかかり、収束解が得られないことがある。
3. 0.2 秒間という短時間で吹込みが行われ、液体は小さい気泡を含む。そのため、液体は気液二相流とみなす必要がある。
4. 金型にはロゴや模様などの複雑な形状が存在する。予め被加工物のメッシュを細かくするか、アダプティブメッシュが必要であるが、計算時間が増大する。また、前述のチャタリング現象が発生しやすくなる。
5. 液体と構造間の相互作用を無視できない。従来のブロー成形とは異なり、成形に液体を用いるため、被加工物が内部の流体から受ける力はその位置によって大きく変化する。そのため、被加工物内部の流体の動きを計算するような流体構造連成解析

が必要である．

6. 被加工物と金型間で熱伝導が生じる．熱構造連成解析のほか，熱接触を表すモデルが必要になる．
7. 被加工物と液体間で熱伝達が生じる．上記 6 に加え，熱流体構造連成が必要である．

Zimmer ら [19] の研究では 1, 2, 5 が考慮されている．また，流体の計算手法には SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics) 法 [20] が採用されている．しかし，この研究ではロゴなどの複雑形状については考慮がされていない．さらに，報告されている計算結果では，成形中の製品形状の予測に誤差が生じている．これは，SPH 法における粒子分布の粗密が大きいと製品形状に大きな影響を与える流体-構造界面の力が精度良く計算されていないことや，界面近くに気泡が存在するにも関わらず二相流の影響が考慮されていないことが原因であると考えられる．

また，4 を考慮すると計算時間が著しく増大するため，大規模並列計算が必要になる．従って，液圧ブロー成形のシミュレーション手法は，大規模並列計算が可能な枠組みの上で実装する必要がある．

### 1.2 本研究の目的

最終的には，上記 1～7 を全て組み込んだシミュレーション手法の構築を行い，製品の形状や強度を予測することを目指している．本研究では，その第一段階として上記 1～5 を組み込んだシミュレーション手法を構築し，製品の形状を予測することを目的とする．

まず，構築するシミュレーション手法に必要な 3 つの技術について，その精度を検証する．第一に，上記 1, 2, 4 を組み込むために，大変形と広範囲にわたる接触が生じる問題に最適な接触アルゴリズムについて検討する．有限要素解析における接触解析では，有効制約法に基づくアルゴリズムが広く使われているが，本手法は広範囲にわたる接触が生じる場合に接触状態探索の収束が困難になる，という問題が知られている．他方，近年注目されている内点法による接触アルゴリズム [21, 22] は，広範囲にわたる接触が生じる場合でも収束解が容易に得られるという利点を持つ．しかし，内点法による接触アルゴリズムは，大変形を伴う問題について未だに検証がなされていない [23]．そこで，本論文では内

点法による接触アルゴリズムをブロー成形を模したモデルに適用し、従来の有効制約法に基づくアルゴリズムに比べて、接触状態の収束性に優れているかどうかを検討する。

第二に、上記 3 を組み込むために、気液二相流のシミュレーション手法について検討する。気液二相流のシミュレーション手法については、まず単相流のシミュレーション手法について検討する必要がある。本論文では、流体は非圧縮性流体と考え、そのシミュレーション手法として SUPG/PSPG 法 [24, 25] を採用する。SUPG/PSPG 法に基づく非圧縮性流体ソルバを用いて、回転円錐問題を解くことで移流項の精度検証を行い、キャビティ内強制対流問題を解くことで他の項の精度検証を行う。また、気液二相流のシミュレーション手法として、Sussman らのレベルセット法 [26] を採用する。レベルセット法で解くべき支配方程式は、いずれも SUPG 法 [27] により定式化を行う。ダム崩壊問題を解くことで、SUPG 法に基づくレベルセット法の精度検証を行う。

第三に、上記 5 を組み込むために、流体構造連成手法について検討する。本論文では、Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) 法 [28] を採用し、流体の速度場、圧力場と構造の変位場について、一体型連成手法により連成させる。ALE メッシュは Winslow らのメッシュ生成法 [29] [30] に基づいて、Laplace 方程式に基づいて制御する。ALE メッシュが構造の大変形に追従できるかを確認するために、空気を全て油と置き換えて単相流の問題とみなした回転油槽問題 [31] [32] を解き、その結果について考察する。

以上を踏まえたうえで、上記 3 つの技術を統合した、二相流と大変形・広域に渡る接触を伴う構造の連成手法について、その枠組みを提案する。提案する手法では、構造の変位場、接触力場と流体の速度場、圧力場は一体型連成手法により同時に解かれる。一方、ALE メッシュの変位場やレベルセット関数場については、分離型連成により逐次的に解かれる。

なお、上記 4 を考慮するためにシミュレーション手法はオープンソースの並列有限要素構造解析ソフトウェア FrontISTR [33] に実装するものとする。FrontISTR は構造解析用のソフトウェアであり、流体解析用のコードは存在しない。しかし、モジュール構造が適切に構造化されているため、流体計算向けに接線剛性マトリクスや外力ベクトルを計算するルーチンを加えることで、並列流体構造連成解析を実現できる。

本論文の残りの章は以下のように構成される。まず、第 2 章にて、先行研究を調査した結果について述べる。次に、第 3 章では、本論文で取り扱う支配方程式を列挙する。第 4

## 第 1 章 緒言

---

章では，第 3 章にて述べた支配方程式を解くための数値計算手法について述べる．第 4 章の中で，本論文で提案する気液二相流と大変形・広域に渡る接触を伴う構造の連成手法も述べられる．また，本章の中で，FrontISTR への実装についても触れる．さらに，第 5 章では検証のために行った数値計算の結果とその考察について述べる．最後に，第 6 章にて，結論を述べる．

## 第 2 章 先行研究の調査

本章では，先行研究の調査結果について述べる．まず，2.1 節で，ブロー成形のシミュレーションにおいて問題となる，広範囲にわたる接触のシミュレーション手法について調査結果を述べる．次に，2.2 節で，液圧ブロー成形のシミュレーションにおいて問題となる，気液二相流のシミュレーション手法について調査結果を述べる．最後に，2.3 節で，液圧ブロー成形のシミュレーションにおいて問題となる，流体構造連成手法について調査結果を述べる．

### 2.1 広範囲にわたる接触のシミュレーション手法

有限要素法における構造物同士の接触問題は，接触に関する条件が不等式制約として加わる不等式制約付非線形最適化問題として定式化される [34]．この手法では，まず接触・非接触の状態を探索する．次に，接触している領域について，接触に関する不等式制約を等式制約に置き換える．最後に，等式制約付非線形最適化問題を，ペナルティ法や Lagrange 乗数法，拡張 Lagrange 乗数法といった手法によって処理する手法が広く利用されている [35, 36]．しかし，この有効制約法による接触アルゴリズムは，解析メッシュの自由度や接触条件の数が共に多い場合，接触状態の決定に多数の反復を要するという問題がある．ブロー成形において，プレジャーボートのような大型の製品を加工する場合や，ロゴなどの複雑形状を有する場合，解析メッシュの自由度や接触条件の数が増加するため，有効制約法による接触アルゴリズムをそのまま適用することは難しい．

このような問題に対して，有効制約法に比べて不等式制約が多数存在するような問題に対して有利であるとされている [37] 内点法による接触解析が近年注目されている．内点法による接触解析は，Christensen らによって初めて提案 [21] されて以降，線形弾性体と剛体間の摩擦無し接触 [38]，線形弾性体同士の Node to Node 接触 [39]，大変形を伴う物体同士の Node to Surface 接触 [23] と適用範囲が広げられてきた．また，収束性の改善についても，有効制約法と組み合わせることで高速に収束させる手法 [40, 41] や，warm-start 法 [42, 43] による高速化 [23] が報告されている．

この中でも，稲垣の研究 [23] では，大変形を伴う問題にも適用可能な形で，内点法によ

る接触解析が実現されている。また、稲垣の研究では、自由度と接触条件数が多い線形弾性体同士の Node to Surface 接触問題において、内点法に基づく接触アルゴリズムは、従来の有効制約法に基づく接触アルゴリズムに比べて、収束性に優れることが数値計算により定量的に示されている。しかし、稲垣の研究成果は、大変形を伴う問題にも原理上適用可能な定式化であるにも関わらず、ブロー成形のシミュレーションにおいて重要な大変形と広範囲にわたる接触を伴うような接触問題については、数値計算による議論がなされていない。

以上の調査結果に基づいて本論文では、大変形する超弾性体の被加工物と、剛体である金型との間の広範囲にわたる接触について、従来の有効制約法に基づく接触アルゴリズムと内点法に基づく接触アルゴリズムの性能差について検証する。

### 2.2 気液二相流のシミュレーション手法

気液二相流のシミュレーション手法は、気液界面をどのように表現するかによって、界面追跡法か界面捕獲法に分類される。

界面追跡法は、解析メッシュや粒子を移動させることで、移動境界を直接捉える手法であり、鋭敏に気液界面を計算できることが利点である。この手法は、さらに有限要素法などのメッシュを持つ手法か、格子を持たないメッシュレス法かに分類される。前者の手法として、内山らは ALE 法による非圧縮性二相流体の解析に取り組んでいる [44,45]。ALE メッシュを利用した界面追跡法は、気液界面が大きく変形する場合、メッシュが潰れて計算結果の破綻を招きやすい。他方、メッシュレス法の中でも、SPH 法や Moving-particle semi-implicit 法 (MPS 法) [46] といった粒子法であれば、この問題は解決できる。越塚らは、MPS 法を用いて気液二相流のベンチマーク問題として知られるダム崩壊問題を解き、良好な精度を得ている [46]。しかし、粒子法は粒子数の少なくなる気液界面や固定壁面付近で誤差が大きくなる。ブロー成形では二相流との相互作用によって被加工物は変形するため、壁面付近で誤差が大きくなる粒子法はシミュレーション手法として不向きであると考えられる。

一方、界面捕獲法は固定した解析領域中に何らかのパラメータを用いて気液界面の位置を陰的に表現する手法である。気液界面の移動は、パラメータの数値変化によって表現される。この手法では、気液界面が大きく変形する場合でも、界面追跡法に比べて計

算の破綻なしに解析を進めることが可能である．界面捕獲法の例として，Welch らによる Marker and Cell (MAC) 法 [47] が挙げられる．MAC 法は，気液界面を追跡するためのマーカー粒子が流体の渦運動によって凝集したり，界面近傍に粒子が存在しない状況が発生する．液圧ブロー成形では短時間に液体が注入されるため，複雑な渦が多数生じることにより，MAC 法では気液界面を追跡できないものと考えられる．他方，Nichols らによる Volume of Fluid (VOF) 法 [48]，矢部らによる CIP-Combined Unified Procedure(C-CUP) 法 [49,50]，金井らによる密度関数法 [51] といった手法では，このような問題は発生しない．しかし，これらの手法では気液界面がぼやけてしまい，これを正確に捕捉することができない．

これらの手法に対し，界面捕獲法的一种である Sussman らのレベルセット法 [26] は，気液界面を鋭敏に表現しつつ，気液界面の大変形を考慮できる手法として知られる．この手法では，レベルセットと呼ばれる符号付き距離関数を全領域に渡って定義する．気液界面はレベルセット 0 の等値面で，液相と気相はレベルセット関数の正負により区別することが可能である．気液二相流の計算では，レベルセットを流速により移流させることで気液界面の移動を計算できる．このとき，距離関数としての性質を保つために再初期化と呼ばれる手続き [52] が必要である．また，この再初期化処理により，液相と気相の体積比が保存されなくなる問題が知られている．そのため，液相の体積を保存する体積補正と呼ばれる処理が必要である．

以上の調査結果に基づいて，本論文では気液二相流のシミュレーション手法として，Sussman のレベルセット法について検討する．レベルセット法の再初期化は Sussman らの手法 [52] を用い，体積補正には姫野らの手法 [53,54] を用いるものとする．

## 2.3 流体構造連成手法

流体構造連成手法における課題は，その多くは気液二相流のシミュレーション手法と同じく，移動境界の取り扱いに関するものである．従って，気液二相流の場合と同様に，その手法は界面追跡法と界面捕獲法の 2 つに大別される．一方で，流体構造界面の表現能力が低い場合，構造の形状を正しく計算できないという問題がある．そのため，界面追跡法であり流体構造界面を厳密に表現できる ALE 法 [28] について盛んに研究が行われた．ALE 法は，構造のメッシュは構造変位によって変形させ，流体のメッシュは構造変



位に基づいてメッシュが破綻しない程度に変形させる手法である．ALE 法における流体のメッシュを ALE メッシュといい，Winslow らのメッシュ生成法 [29] [30] に基づいて Laplace 方程式により制御する手法がよく採用される．

近年では，流体構造連成に加え，他の物理現象を考慮したシミュレーション手法についても盛んに研究されている．Yan ら [55] は，気液界面の計算にレベルセット法，流体構造界面の計算に ALE 法を用いた連成手法を提案している [55]．また，Mayer ら [56] は剛体-弾性体同士の接触を考慮した流体構造接触連成問題について検討している．しかし，被加工物が大変形する場合や複雑形状を持つ場合，流体が二相流の場合について，流体構造接触連成を検討した研究は筆者が調査した限り存在しない．

以上の調査結果に基づいて，本論文では気液二相流と大変形・構造物同士の接触を考慮した構造物との流体構造接触連成手法を提案する．提案する手法は，接触の計算に内点法接触アルゴリズムを，気液二相流の計算にレベルセット法を用い，流体と構造は ALE 法により連成させる．構造の変位場，接触力場と流体の速度場，圧力場は一体型連成により同時に解き，ALE メッシュの変位場やレベルセット場は分離型連成により連成させる．ALE メッシュの制御法には Laplace 方程式に基づくメッシュ制御法を採用する．

本論文では，提案手法の要素技術として，接触，気液二相流，流体構造連成のシミュレーション手法についてその精度を検討する．接触については 2.1 節で，気液二相流については 2.2 節で述べた通りである．流体構造連成に関しては，Laplace 方程式に基づく ALE メッシュ制御法で，構造が大変形する場合でも計算が破綻しないかどうかを検討する．

### 第 3 章 支配方程式

本章では，構造領域，流体領域，気液二相流，流体構造界面における支配方程式について述べる．まず，本論文で取り扱う流体構造連成について問題の定義を行う．また，時間微分の記述など，支配方程式の記述に先立って必要な用語を定義する．次に各節で，各領域における支配方程式について記述する．なお，本論文で取り扱う範囲の連続体力学については，付録 A に示してあるので必要に応じて参照されたい．

#### 3.1 問題の設定

まず，構造物や流体が占める領域を定義する．今，時刻  $t$  において，2 つの構造物が占める領域をそれぞれ  ${}^t\Omega_{S1}$ ,  ${}^t\Omega_{S2}$  とし，2 種類の流体が占める領域をそれぞれ  ${}^t\Omega_{F1}$ ,  ${}^t\Omega_{F2}$  とする．左上の添え字  $t$  は時刻を表し，以降の諸量についても同様に表記する．本論文では，これらの領域は互いに貫通しないものとする．定式化における便宜のため，構造物が占める全領域と流体が占める全領域を，それぞれ次式 (1), (2) により定義する．

$${}^t\Omega_S = {}^t\Omega_{S1} \cup {}^t\Omega_{S2} \quad (1)$$

$${}^t\Omega_F = {}^t\Omega_{F1} \cup {}^t\Omega_{F2} \quad (2)$$

以降，文字の右下に添え字 S, F を示した場合，それぞれ構造領域，流体領域に関する量であることを表す．これらの領域の関係を Fig. 3 に示す．

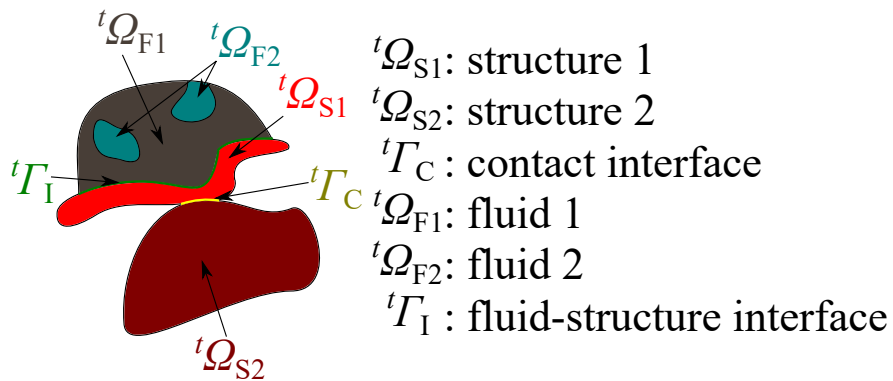


Fig. 3: Fluid-structure contact interaction problem

次に、各領域の表面領域を定義する． ${}^t\Omega_{S1}$  についてその表面が占める領域を  ${}^t\Gamma_{S1}$  と定義する．同様に、 ${}^t\Gamma_{S2}$ ,  ${}^t\Gamma_{F1}$ ,  ${}^t\Gamma_{F2}$ ,  ${}^t\Gamma_S$ ,  ${}^t\Gamma_F$  を定義する．また、Fig. 3 に示すように、構造や流体の表面領域について、構造が互いに接触している領域と、構造と流体が互いに接触している領域をそれぞれ特別に  ${}^t\Gamma_C$ ,  ${}^t\Gamma_I$  と定義する．これらは、それぞれ次式 (3), (4) のように定義される．

$${}^t\Gamma_C = {}^t\Gamma_{S1} \cap {}^t\Gamma_{S2} \quad (3)$$

$${}^t\Gamma_I = {}^t\Gamma_S \cap {}^t\Gamma_F \quad (4)$$

さらに、境界条件を指定する表面領域を定義する． $({}^t\Gamma_S)_g$ ,  $({}^t\Gamma_S)_t$  を、それぞれ  ${}^t\Gamma_S$  上で幾何学的境界条件、力学的境界条件が指定される領域と定義する．同様に、 $({}^t\Gamma_F)_g$ ,  $({}^t\Gamma_F)_t$  を定義する．このとき、 ${}^t\Gamma_S$ ,  ${}^t\Gamma_F$  はそれぞれ次式 (5), (6) のように分割される．

$${}^t\Gamma_S = ({}^t\Gamma_S)_g \cup ({}^t\Gamma_S)_t \cup {}^t\Gamma_C \cup {}^t\Gamma_I \quad (5)$$

$${}^t\Gamma_F = ({}^t\Gamma_F)_g \cup ({}^t\Gamma_F)_t \cup {}^t\Gamma_C \cup {}^t\Gamma_I \quad (6)$$

本論文では、初期時刻における座標  ${}^0\mathbf{x}$  を固定した時間微分、即ち物質時間微分を  $D/Dt$  のように記述する．また、現時刻における座標  ${}^t\mathbf{x}$  を固定した時間微分は  $\partial/\partial t$  のように記述する．それ以外の時間微分は、固定した座標系を明確にしたうえで、偏微分形式で記述する．

### 3.2 構造領域

本節では、構造領域における支配方程式について述べる．構造領域  ${}^t\Omega_S$  の支配方程式は、 ${}^0\Omega_S$  を参照した Cauchy の第1法則 (A.24) をそのまま用いるものとして、次式 (25) によって与える．

$${}^0\rho_S {}^t\mathbf{a}_S = {}^0\rho_S {}^t\mathbf{b}_S + {}^0\nabla \cdot ({}^t_0\mathbf{S}_S \cdot {}^t_0\mathbf{F}_S^T) \quad \text{in } {}^0\Omega_S \quad (7)$$

ここで、 ${}^0\rho_S$  は構造の密度、 ${}^t\mathbf{a}_S$  は構造の加速度、 ${}^t\mathbf{b}_S$  は単位質量あたりの構造に働く体積力、 ${}^0\nabla$  は時刻  $t = 0$  を参照したナブラ演算子、 ${}^t_0\mathbf{S}_S$  は初期時刻を参照した構造の第二 Piola-Kirchhoff 応力テンソル、 ${}^t_0\mathbf{F}_S$  は初期時刻を参照した構造の変形勾配テンソルである．以後、左下の添え字は、物理量を定義する際に基準となる時刻を表すものとする．

また、幾何学的境界条件 (8), (9), (10) と力学的境界条件 (11) を考慮する. これらは次のように定義される.

$${}^t\mathbf{u}_S = {}^t\mathbf{\underline{u}}_S \quad \text{on } ({}^t\Gamma_S)_u \quad (8)$$

$${}^t\mathbf{v}_S = {}^t\mathbf{\underline{v}}_S \quad \text{on } ({}^t\Gamma_S)_v \quad (9)$$

$${}^t\mathbf{a}_S = {}^t\mathbf{\underline{a}}_S \quad \text{on } ({}^t\Gamma_S)_a \quad (10)$$

$${}^t\mathbf{t}_S = {}^t\mathbf{\underline{t}}_S \quad \text{on } ({}^t\Gamma_S)_t \quad (11)$$

ここで,  ${}^t\mathbf{u}_S$  は構造の変位,  ${}^t\mathbf{v}_S$  は構造の速度,  ${}^t\mathbf{a}_S$  は構造の加速度を表し,  $({}^t\Gamma_S)_u$ ,  $({}^t\Gamma_S)_v$ ,  $({}^t\Gamma_S)_a$  はそれぞれ変位, 速度, 加速度が境界条件として与えられる  $({}^t\Gamma_S)_g$  上の領域を表す. また, 下線が付いた物理量は境界条件として, 解析者が実験などによって決定する量であることを意味する. これらの領域により,  $({}^t\Gamma_S)_g$  は次式 (12) に示すように分割される.

$$({}^t\Gamma_S)_g = ({}^t\Gamma_S)_u \cup ({}^t\Gamma_S)_v \cup ({}^t\Gamma_S)_a \quad (12)$$

上記の境界条件に加え, 接触を考慮するための次の条件を考慮する.

$${}^tg_C \geq 0 \quad \text{on } {}^t\Gamma_C \quad (13)$$

$${}^tr_C \geq 0 \quad \text{on } {}^t\Gamma_C \quad (14)$$

$${}^tr_C {}^tg_C = 0 \quad \text{on } {}^t\Gamma_C \quad (15)$$

ここで,  ${}^tg_C$  は  ${}^t\Gamma_{S1}$  と  ${}^t\Gamma_{S2}$  の間の距離であり,  ${}^tr_C$  は  ${}^t\Gamma_{S1}$  と  ${}^t\Gamma_{S2}$  の間に生じる接触力で,  ${}^t\Gamma_{S1}$  上では  ${}^t\Omega_{S1}$  内部に向かう向き,  ${}^t\Gamma_{S2}$  上では  ${}^t\Omega_{S2}$  内部に向かう向きが正となるように定義する. 式 (15) を相補性条件といい, もし  ${}^t\Gamma_{S1}$  と  ${}^t\Gamma_{S2}$  の間の距離が 0 でなければ接触力は 0, 即ち接触が生じていないことを意味し, 接触力が 0 でなければ  ${}^t\Gamma_{S1}$  と  ${}^t\Gamma_{S2}$  の間の距離が 0, 即ち接触が生じていることを意味する.

本論文では, 幾何学的非線形性を考慮して次式 (16) で定義される Green-Lagrange ひずみテンソル  ${}^t_0\mathbf{E}_S$  を考える.

$${}^t_0\mathbf{E}_S = \frac{1}{2}({}^t_0\mathbf{C}_S - \mathbf{I}) \quad (16)$$

ここで,  $\mathbf{I}$  は単位テンソルであり,  ${}^t_0\mathbf{C}_S$  は右 Cauchy-Green 変形テンソルで, 次式 (17) で定義される.

$${}^t_0\mathbf{C}_S = {}^t_0\mathbf{F}^T \cdot {}^t_0\mathbf{F} \quad (17)$$

本論文では、構造は超弾性体としてモデル化する．超弾性体の構成則は、一般に次式 (18) で与えられる．

$${}^t\mathbf{S}_S = \frac{\partial W({}^t\mathbf{E}_S)}{\partial {}^t\mathbf{E}_S} \quad (18)$$

ここで、 $W({}^t\mathbf{E}_S)$  は弾性ポテンシャルである．超弾性体の構成則は多くの種類があるが、本論文では弾性ポテンシャルが次式 (19) で定義される Mooney-Rivlin モデル [57] と、弾性体の構成則でもある St. Vennant-Kirchhoff モデル (20) を取り扱う．

$$W = c_1(\hat{I}_C - 3) + c_2(\hat{II}_C - 3) + \frac{1}{d_1}(J - 1)^2 \quad (19)$$

$$W = \frac{1}{2}(\mathbf{C} : {}^t\mathbf{E}) : {}^t\mathbf{E} \quad (20)$$

ここで、 $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d_1$  はパラメータ、 $\mathbf{C}$  は弾性係数テンソル、 ${}^tJ$  は式 (A.5) で定義される体積変化率である．また、 $\hat{I}_C$  は右 Cauchy-Green 変形テンソル  ${}^t\mathbf{C}$  の低減第 1 不変量、 $\hat{II}_C$  は右 Cauchy-Green 変形テンソルの低減第 2 不変量で、式 (21)-(24) のように定義される．

$$\hat{I}_C = \text{tr}({}^t\hat{\mathbf{C}}) \quad (21)$$

$$\hat{II}_C = \frac{1}{2}(\text{tr}({}^t\hat{\mathbf{C}}^2) - (\text{tr}({}^t\hat{\mathbf{C}}))^2) \quad (22)$$

$${}^t\hat{\mathbf{C}} = {}^t\hat{\mathbf{F}}^T \cdot {}^t\hat{\mathbf{F}} \quad (23)$$

$${}^t\hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{\sqrt{3}{}^tJ} {}^t\mathbf{F} \quad (24)$$

弾性係数テンソルは、Young 率  $E$ 、Poisson 比  $\nu$  の関数になる．本研究では、構造の構成則におけるパラメータは時刻や空間座標によらず一定とする．

### 3.3 流体領域

本節では、流体領域における支配方程式について述べる．流体の支配方程式として、非圧縮性の Navier-Stokes 方程式と連続の式を考える．

最初に、非圧縮性の Navier-Stokes 方程式を導く．まず、 ${}^t\Omega_F$  を参照した Cauchy の第 1 法則 (A.21) について、各変数に流体であることを示す添え字 F をつけて、次式 (25) を得る．

$${}^t\rho_F {}^t\mathbf{a}_F = {}^t\rho_F {}^t\mathbf{b}_F + {}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{T}_F \quad \text{in } {}^t\Omega_F \quad (25)$$

ここで,  ${}^t\rho_F$  は流体の密度,  ${}^t\mathbf{a}_F$  は流体の加速度,  ${}^t\mathbf{b}_F$  は単位質量あたりの流体に働く体積力,  ${}^t\mathbf{T}_F$  は流体の Cauchy 応力テンソルである. 次に, 構成則として Newton 流体の構成則を仮定すると, 次式 (26) が得られる.

$${}^t\mathbf{T}_F = -{}^tp_F\mathbf{I} + {}^t\mathbf{T}'_F \quad (26)$$

ここで,  ${}^tp_F$  は流体の静水圧力である. また,  ${}^t\mathbf{T}'_F$  は流体の粘性応力テンソルで, 次式 (27) により定義される.

$${}^t\mathbf{T}'_F = {}^t\mu_F({}^t\nabla \otimes {}^t\mathbf{v} + ({}^t\nabla \otimes {}^t\mathbf{v})^T) \quad (27)$$

ここで,  ${}^t\mu_F$  は流体の粘度である. さらに, 構成則 (26) を Cauchy の第 1 法則 (25) に代入し, 加速度の物質時間微分を現配置での時間微分に書き換えることで, 次式 (28) を得る.

$${}^t\rho_F \frac{\partial {}^t\mathbf{v}_F}{\partial t} + {}^t\rho_F ({}^t\mathbf{v}_F \cdot {}^t\nabla) {}^t\mathbf{v}_F = {}^t\rho_F {}^t\mathbf{b}_F - {}^t\nabla {}^tp_F + {}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{T}'_F \quad \text{in } {}^t\Omega_F \quad (28)$$

式 (28) を非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式といい, 左辺第 1 項を時間項, 左辺第 2 項を移流項, 右辺第 2 項を圧力項, 右辺第 3 項を粘性項という. 最後に, 式 (28) を線形化する. 式 (28) は, 移流項が未知変数  ${}^t\mathbf{v}_F$  に関する 2 次の項となっている. そこで, 何らかの既知の速度  ${}^t\bar{\mathbf{v}}_F$  を使って, 次式 (29) のように線形化する.

$${}^t\rho_F \frac{\partial {}^t\mathbf{v}_F}{\partial t} + {}^t\rho_F ({}^t\bar{\mathbf{v}}_F \cdot {}^t\nabla) {}^t\mathbf{v}_F = {}^t\rho_F {}^t\mathbf{b}_F - {}^t\nabla {}^tp_F + {}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{T}'_F \quad \text{in } {}^t\Omega_F \quad (29)$$

式 (29) は 3 つの成分を持つが, 未知変数は速度  ${}^t\mathbf{v}_F$  と圧力  ${}^tp_F$  で合計 4 成分ある. そこで, 非圧縮性流体の連続の式 (A.17) を用いて, 次式 (30) を加え, 4 つの未知変数に対して 4 つの方程式を得る.

$${}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{v}_F = 0 \quad \text{on } {}^t\Omega_F \quad (30)$$

境界条件としては, 幾何学的境界条件 (31), (32), (33) と力学的境界条件 (34) を考慮する.

$${}^t\mathbf{u}_F = {}^t\mathbf{u}_F \quad \text{on } ({}^t\Gamma_F)_u \quad (31)$$

$${}^t\mathbf{v}_F = {}^t\mathbf{v}_F \quad \text{on } ({}^t\Gamma_F)_v \quad (32)$$

$${}^t\mathbf{a}_F = {}^t\mathbf{a}_F \quad \text{on } ({}^t\Gamma_F)_a \quad (33)$$

$${}^t\mathbf{t}_F = {}^t\mathbf{t}_F \quad \text{on } ({}^t\Gamma_F)_t \quad (34)$$

ここで,  $({}^t\Gamma_F)_u$ ,  $({}^t\Gamma_F)_v$ ,  $({}^t\Gamma_F)_a$  はそれぞれ変位, 速度, 加速度が境界条件として与えられる  $({}^t\Gamma_F)_g$  上の領域を表す. これらの領域により,  $({}^t\Gamma_F)_g$  は次式 (35) に示すように分割される.

$$({}^t\Gamma_F)_g = ({}^t\Gamma_F)_u \cup ({}^t\Gamma_F)_v \cup ({}^t\Gamma_F)_a \quad (35)$$

### 3.4 気液二相流

本節では, 流体領域における気液二相流を表現する支配方程式について述べる. まず, 本論文で気液二相流を表現するために採用したレベルセット法 [26] について概説する. 続いて, 各項でレベルセット法に必要な支配方程式について述べる.

本研究では, 気液界面はレベルセット法 [26] により表現する. レベルセット法は, 時刻  $t$  から時刻  $t' = t + \Delta t$  の間における 2 つの流体間の界面の移動を, レベルセット関数と呼ばれる関数の移流により表現する手法である. 今, 流体 1 と流体 2 は互いに混合されないものとする. このとき,  ${}^t\Omega_F$  上のスカラー場  ${}^t\phi$  を, 次式 (36) により定義する.

$${}^t\phi({}^t\mathbf{x}) = \begin{cases} d({}^t\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in \Omega_{F1}) \\ -d({}^t\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in \Omega_{F2}) \end{cases} \quad (36)$$

ここで,  $d({}^t\mathbf{x})$  は  ${}^t\mathbf{x}$  から流体 1, 流体 2 の界面  ${}^t\Gamma_{F1} \cap {}^t\Gamma_{F2}$  までの垂直距離である.  ${}^t\phi$  をレベルセット関数という. Fig. 4 に, 1 回の時間ステップにおける, レベルセット法による気液界面の移動を示す. Fig. 4 に太線で示したように, 流体 1 と流体 2 の界面は,  ${}^t\phi = 0$  の等値面で表現することができる. また, 流体 1 と流体 2 を, レベルセット関数

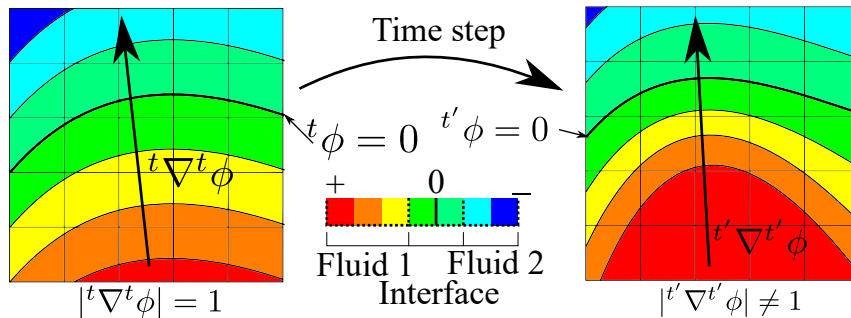


Fig. 4: Two phase flow analysis by the level set method: Thick curves means interfaces of two fluid. Blue and green area means interface area.

の正負により判別することができる。さらに、流速を移流速度としてレベルセット関数に関する移流方程式を解くことで、流体 1 と流体 2 の界面の移動を計算できる。

レベルセットは、その定義より次式 (37) を満足する必要がある。

$$|{}^t\nabla {}^t\phi| = 1 \quad (37)$$

但し、実際にはレベルセット関数に関する移流方程式の数値誤差が累積することにより、Fig. 4 に示すように式 (37) は時間ステップが進むにつれて満足されなくなる。そのため、後述する再初期化と呼ばれる計算手法を用いて、この性質を回復させる必要がある。

#### 3.4.1 レベルセット関数の移流

先述したように、レベルセット法では、レベルセット関数を流体速度により移流させる必要がある。従って、気液界面を表すレベルセットは、次式 (38) に示す移流方程式により支配される。

$$\frac{\partial {}^t\phi}{\partial t} + {}^t\mathbf{v}_F \cdot ({}^t\nabla {}^t\phi) = 0 \quad \text{in } {}^t\Omega_F \quad (38)$$

#### 3.4.2 気液境界面の平滑化

先述したように、ある空間上の点が流体 1 であるか流体 2 であるかは、その点におけるレベルセット関数の正負により判別できる。従って、レベルセット関数の正負によって、流体 1、流体 2 のどちらか一方の材料物性値を与えることが望ましい。しかし、このように材料物性値を与えると、特に気泡が多数発生する場合に、流体領域内で材料物性値が不連続かつ急激に変化する領域が多数発生することになる。これにより、流速や圧力を求めるための Navier-Stokes 方程式の数値解法において、解が発散しやすくなるという問題がある。そこで、流体領域内で、密度と粘度を次式 (39)、(40) のように平滑化して与える。

$${}^t\rho_F = \rho_{F2} + (\rho_{F1} - \rho_{F2}) {}^tH_\epsilon \quad (39)$$

$${}^t\mu_F = \mu_{F2} + (\mu_{F1} - \mu_{F2}) {}^tH_\epsilon \quad (40)$$

ここで、 $\rho_{F1}$ 、 $\rho_{F2}$  はそれぞれ流体 1、流体 2 における質量密度、 $\mu_{F1}$ 、 $\mu_{F2}$  はそれぞれ流体 1、流体 2 における粘度である。本研究では、これらの値は時刻や空間座標によらず一



定とする．また， ${}^tH_\epsilon$  は平滑化された Heaviside 関数で，次式 (41) のように定義する．

$${}^tH_\epsilon = \begin{cases} 0 & {}^t\phi < -\epsilon \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{{}^t\phi}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin(\frac{\pi {}^t\phi}{\epsilon})) & |{}^t\phi| \leq \epsilon \\ 1 & {}^t\phi > \epsilon \end{cases} \quad (41)$$

ここで， $\epsilon$  は解析者が人為的に設定するパラメータである．式 (39)-(41) により，ある空間上の点について，流体 1 と流体 2 の界面からの距離が  $\epsilon$  より上であれば，レベルセット関数の正負の値に応じて，流体 1，流体 2 の材料物性値が与えられる．流体 1 と流体 2 の界面からの距離が  $\epsilon$  以下である領域は，数値計算上定めた遷移領域であり，流体 1 と流体 2 の界面からの距離に応じて，それぞれの材料物性値を平滑化した値が材料物性値として与えられることになる．本論文では， $\epsilon$  はメッシュの最小サイズの 2 倍に設定する．

### 3.4.3 レベルセット関数の再初期化

先述したように，レベルセット関数は距離関数に正負の符号をつけた関数である．しかし，一般にレベルセット関数はレベルセット関数に関する移流方程式による誤差の累積や流れ場の急峻な物理的变化によって，計算が進むにつれて距離関数としての性質 (37) が満足されなくなる．性質 (37) が満足されなくなると，流体 1 と流体 2 の間の遷移領域の厚さが薄くなり，材料物性値の空間における急峻な変化が生じて，計算が破綻する可能性がある．このような問題を回避するため，レベルセット関数の移流を解き終わった後に，Fig. 5 に示すようにレベルセット関数を修正し，距離関数としての性質 (37) を満足させる．この数値計算上の工夫をレベルセットの再初期化という．

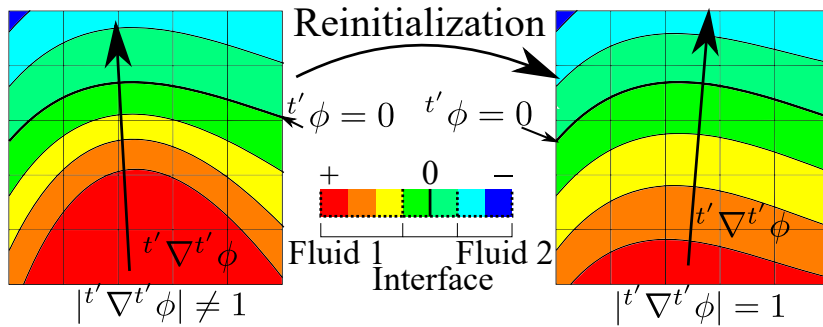


Fig. 5: Re-initializing process of the level set method: Thick curves means interfaces of two fluid. Blue and green area means interface area.

本研究では、Sussman らの再初期化手法 [52] を用いて再初期化を行う．この手法では、各時間ステップの最後に次式 (42) を解くことで、この条件が満足されるようにレベルセット関数を修正する．

$$\frac{\partial \hat{t}\phi}{\partial \hat{t}} = S_\epsilon(\phi_0)(1 - |\hat{t}\nabla \hat{t}\phi|) \quad \text{in } {}^t\Omega_F \quad (42)$$

但し、 $\hat{t}$  は現時刻  $t$  から始まる式 (42) を解くための擬似的な時間、 $\phi_0$  は再初期化開始時 ( $\hat{t} = 0$ ) の  $\hat{t}\phi$  の値である．先述したように、再初期化は単にレベルセットの距離関数としての性質を回復させるための数値計算上の工夫であり、物理的現象とは無関係であるため、支配方程式は通常の時間ステップとは異なる擬似的な時間ステップを考えることができる．また、 $S_\epsilon(\phi_0)$  は擬似的な符合関数であり、次式 (43) のように定義する．

$$S_\epsilon(\phi_0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + \epsilon^2}} \quad (43)$$

式 (42), (43) から分かるように、レベルセット関数の再初期化では、流体 1 の領域では勾配が 1 より大きい物質点ではレベルセット関数の値を減少させ、1 より小さい物質点ではレベルセット関数の値を増大させることで、勾配が 1 になるようにレベルセット関数を修正する．また、流体 1 と流体 2 の界面付近ではレベルセット関数は変化しないため、レベルセット関数で表現した界面の位置については再初期化を通して変化しないことになる．

式 (42) は、次式 (44) のように変形することで、移流方程式とみなすことができる．

$$\frac{\partial \hat{t}\phi}{\partial \hat{t}} + \hat{t}\mathbf{w} \cdot (\hat{t}\nabla \hat{t}\phi) = S_\epsilon(\phi_0) \quad \text{in } {}^t\Omega_F \quad (44)$$

ここで、 $\hat{t}\mathbf{w}$  は再初期化におけるレベルセットの移流速度を表し、次式 (45) で定義される．

$$\hat{t}\mathbf{w} = \frac{S_\epsilon(\phi_0)}{|\hat{t}\nabla \hat{t}\phi|} \hat{t}\nabla \hat{t}\phi \quad (45)$$

#### 3.4.4 体積補正

先述したレベルセット関数の再初期化により、流体 1、流体 2 の体積比は変化する．しかし、再初期化は単に数値計算上の工夫であるため、この操作により物理的な特徴である流体 1、流体 2 の体積比が変化することは好ましくない．そこで、再初期化により変化した流体 1、流体 2 の体積を元に戻す操作が必要であり、この操作を体積補正という．

本研究では、姫野らの体積補正手法 [53] [54] を採用する。姫野らの手法では、まず流体 1 の体積  ${}^tV_{F1}$  と表面積  ${}^tS_{F1}$  を求める。これらは、それぞれ次式 (46), (47) のように求められる。

$${}^tV_{F1} = \int_{{}^t\Omega_F} {}^tH_\epsilon dV \quad (46)$$

$${}^tS_{F1} = \int_{{}^t\Omega_F} \frac{d{}^tH_\epsilon}{d{}^t\phi} dV \quad (47)$$

ここで、近似 Heaviside 関数の微分は次式 (48) のように与えられる。

$$\frac{d{}^tH_\epsilon}{d{}^t\phi} = \begin{cases} 0 & |{}^t\phi| > \epsilon \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \cos(\frac{\pi {}^t\phi}{\epsilon})) & |{}^t\phi| \leq \epsilon \end{cases} \quad (48)$$

このとき、時刻  $t$  におけるレベルセットの補正量  ${}^tL_{\text{err}}$  は、次式 (49) のように与えられる。

$${}^tL_{\text{err}} = \frac{{}^tV_{F1} - {}^0V_{F1}}{{}^tS_{F1}} \quad (49)$$

${}^t\Omega_F$  上で  ${}^tL_{\text{err}}$  をレベルセット関数に足し込むことで、流体 1, 2 の体積が保存されるようにレベルセット関数が補正される。

### 3.5 流体構造連成

本節では、流体構造連成に関する支配方程式について述べる。まず、流体構造界面における境界条件について説明する。次に、上に述べた支配方程式のうち、ALE 記述が必要な支配方程式について ALE 記述に書き直す。最後に、ALE メッシュの制御に関する支配方程式について述べる。

#### 3.5.1 流体構造界面における境界条件

本項では、流体構造界面における境界条件について述べる。 ${}^t\Gamma_I$  上では、境界条件として次式 (50), (51) が指定される。

$${}^t\mathbf{v}_S = {}^t\mathbf{v}_F \quad \text{on } {}^t\Gamma_I \quad (50)$$

$${}^t\mathbf{t}_S = -{}^t\mathbf{t}_F \quad \text{on } {}^t\Gamma_I \quad (51)$$

式 (50) は、流体構造界面が剥離しないことを意味し、式 (51) は流体構造界面で、表面力ベクトルが互いに釣り合うことを意味する。

## 3.5.2 支配方程式の ALE 記述

本論文では、流体は Arbitrary Lagrangian Eulerian(ALE) メッシュによって記述する。ALE メッシュを利用する場合、流体の各支配方程式を ALE 記述に書き直す必要がある。本項では、各支配方程式の ALE 記述について説明する。

今、 ${}^0\Omega_F$  とは異なる流体の参照配置  $\tilde{\Omega}_F$  をとる。 ${}^t\Omega_F$  を参照した時間微分を  $\tilde{\Omega}_F$  を参照した時間配置に書き換えることで、ALE 記述が得られる。そこで、式 (A.9) を非圧縮性 Newton 流体の Navier-Stokes 方程式 (29) に代入することで、次式 (52) を得る。

$${}^t\rho_F \left. \frac{\partial {}^t\mathbf{v}_F}{\partial t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}} + {}^t\rho_F (({}^t\tilde{\mathbf{v}}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot {}^t\nabla) {}^t\mathbf{v}_F = {}^t\rho_F {}^t\mathbf{b}_F - {}^t\nabla {}^t p_F + {}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{T}'_F \quad \text{in } {}^t\Omega_F \quad (52)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{x}}$  は  $\tilde{\Omega}_F$  における任意点の空間座標、 $\tilde{\mathbf{v}}_F$  は  $\mathbf{x}_F$  座標系における  $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}_F$  の速度である。同様に、レベルセットの支配方程式である移流方程式 (38) について、次式 (53) が得られる。

$$\left. \frac{\partial {}^t\phi}{\partial t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}} + ({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot ({}^t\nabla {}^t\phi) = 0 \quad \text{in } {}^t\Omega_F \quad (53)$$

なお、連続の式 (30) は、時間微分項が含まれないため、そのまま用いるものとする。また、レベルセット関数の再初期化式 (44) は、物理的な時間とは別の擬似的な時間をとっているため、時間微分項をそのまま取り扱う。

## 3.5.3 ALE メッシュの制御

本項では、ALE メッシュの制御方法について、その手法と支配方程式について述べる。ALE 法では、参照配置  $\tilde{\Omega}_F$  を物質の運動によらず自由に動かすことができる。この  $\tilde{\Omega}_F$  を離散化した領域が、ALE メッシュとなる。本論文では、Winslow ら [29] [30] のメッシュ生成法に基づいて、Laplace 方程式を解くことで参照配置を移動させる。この手法では、流体領域中で次式 (54) を解くことで、参照配置を移動させる。

$$\nabla^2 {}^t\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \text{in } {}^t\Omega_F \quad (54)$$

ここで、 ${}^t\mathbf{y}$  は初期配置に対する参照配置の変位であり、 $\nabla^2$  はベクトルの各成分ごとにラプラシアン演算子として働く演算子である。

また，境界条件として，次式 (55) を課す．

$${}^t\boldsymbol{y} = \begin{cases} {}^t\boldsymbol{u}_S & \text{on } {}^t\Gamma_S \\ \mathbf{0} & \text{on } {}^t\Gamma_F / {}^t\Gamma_I \end{cases} \quad (55)$$

式 (55) により，流体構造界面では Lagrangian 表記が，流体領域の端では Eulerian 表記が得られることになる．

## 第 4 章 数値計算手法

本章では，前章で述べた支配方程式を解くための数値計算手法について述べる．まず，第 4.1 節では定式化に先立って，必要な本論文で用いる有限要素法について述べる．次に，第 4.2 節で各支配方程式の離散化式について述べる．第 4.3 節では，接触を考慮するために本論文で検討した，内点法による接触アルゴリズムについて述べる．さらに，第 4.4 節では，本論文で提案する，気液二相流と大変形・広域にわたる接触を伴う構造の連成手法について述べる．最後に，第 4.5 節で，FrontISTR への実装について述べる．

なお，第 4.1 節から第 4.2 節では，時刻  $t$  における諸量は既知として，時刻  $t' = t + \Delta t$  における未知変数を求めるものとして定式化する．ここで， $\Delta t$  は時間増分である．

### 4.1 解析領域と未知変数の離散化

本論文で提案する手法では，空間方向の離散化にはいずれの支配方程式についても有限要素法を用いる．有限要素法では，まず解析領域  $t'\Omega$  を次式 (56) のように近似する．

$$t'\Omega \approx \sum_{e=1}^{n_{\text{elem}}} t'\Omega^e \quad (56)$$

ここで， $n_{\text{elem}}$  は要素数であり， $t'\Omega^e$  ( $e \in \mathbb{N}[1, n_{\text{elem}}]$ ) は有限要素である．以降，要素番号  $e \in \mathbb{N}[1, n_{\text{elem}}]$  の有限要素を有限要素  $e$  と記述する．有限要素  $e$  は， $n_{\text{node}}^e$  個の節点を持つ多面体として定義される．また，その表面領域を  $t'\Gamma^e$  と定義する．このとき，要素番号  $e \in \mathbb{N}[1, n_e]$  の有限要素における構造 1 が占める領域  $t'\Omega_{S1}^e$  とその表面領域  $t'\Gamma_{S1}^e$  を，次式のように定義する．

$$t'\Omega_{S1}^e = t'\Omega_{S1} \cap t'\Omega^e \quad (57)$$

$$t'\Gamma_{S1}^e = t'\Gamma_{S1} \cap t'\Gamma^e \quad (58)$$

他の領域も，同様にして定義する．

次に，有限要素  $e$  において，構造変位  $t'\mathbf{u}_S$  を次式 (59) のように近似する．

$$t'\mathbf{u}_S \approx N^{(\alpha)} t'\mathbf{u}_S^{(\alpha)} \quad \text{in } t'\Omega^e \quad (59)$$

ここで， $N^{(\alpha)}$  は要素  $e$  の局所節点番号  $\alpha$  における形状関数， $t'\mathbf{u}_S^{(\alpha)}$  は要素  $e$  の節点番号  $\alpha$  における構造変位を表すベクトルである．ギリシャ文字が 2 回以上同じ項に現れる場

合は、今考えている有限要素  $e$  において 1 から  $n_{\text{node}}^e$  までの総和をとるものとする．式 (59) より， ${}^{t'}\mathbf{u}_S$  をデカルト座標系で成分表示した  $\mathbb{R}^3$  上のベクトル  $\{{}^{t'}\mathbf{u}_S\}$  は，次式 (60) のように与えられる．

$$\{{}^{t'}\mathbf{u}_S\} = \left\{ \begin{pmatrix} ({}^{t'}u_S)_1 \\ ({}^{t'}u_S)_2 \\ ({}^{t'}u_S)_3 \end{pmatrix} \right\} = [N_V] \{{}^{t'}\mathbf{u}_S^e\} \quad \text{in } {}^{t'}\Omega^e \quad (60)$$

$\{{}^{t'}\mathbf{u}_S^e\} (e \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e])$  を有限要素  $e$  における局所節点構造変位ベクトルという． $[N_V]$  と  $\{{}^{t'}\mathbf{u}_S^e\} (e \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e])$  は，それぞれ次式 (61)，(62) で定義される．

$$[N_V] = \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & N^{(n_{\text{node}}^e)} & 0 & 0 \\ 0 & N^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & N^{(n_{\text{node}}^e)} & 0 \\ 0 & 0 & N^{(1)} & \cdots & 0 & 0 & N^{(n_{\text{node}}^e)} \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\{{}^{t'}\mathbf{u}_S^e\} = \left\{ ({}^{t'}u_S)_1^{(1)} \quad ({}^{t'}u_S)_2^{(1)} \quad ({}^{t'}u_S)_3^{(1)} \quad ({}^{t'}u_S)_1^{(2)} \quad \cdots \quad ({}^{t'}u_S)_3^{(n_{\text{node}}^e)} \right\}^T \quad (62)$$

以降，ベクトル量の中括弧で括った場合，元のベクトルをデカルト座標系で成分表示したベクトルした量であるものとする．また，スカラー量やベクトル量の中括弧で括り，右上に添え字  $e$  を付けた場合，元のスカラー・ベクトル量について，有限要素  $e$  において局所節点番号 1 から  $n_{\text{node}}^e$  までの節点値を並べたベクトル量であるものとする．

さらに，構造変位の場合と同様に，流体速度  ${}^{t'}\mathbf{v}_F$ ，流体圧力  ${}^{t'}p_F$ ，レベルセット関数値  ${}^{t'}\phi$ ，ALE メッシュ変位量  ${}^{t'}\mathbf{y}$  を，それぞれ次式 (63)，(64)，(65)，(66) のように近似する．

$${}^{t'}\mathbf{v}_F \approx N^{(\alpha)} {}^{t'}\mathbf{v}_F^{(\alpha)} \quad \text{in } {}^{t'}\Omega^e \quad (63)$$

$${}^{t'}p_F \approx N^{(\alpha)} {}^{t'}p_F^{(\alpha)} \quad \text{in } {}^{t'}\Omega^e \quad (64)$$

$${}^{t'}\phi \approx N^{(\alpha)} {}^{t'}\phi^{(\alpha)} \quad \text{in } {}^{t'}\Omega^e \quad (65)$$

$${}^{t'}\mathbf{y} \approx N^{(\alpha)} {}^{t'}\mathbf{y}^{(\alpha)} \quad \text{in } {}^{t'}\Omega^e \quad (66)$$

ここで， ${}^{t'}\mathbf{v}_F^{(\alpha)}$  は要素  $e$  の節点番号  $\alpha$  における流体速度ベクトル， ${}^{t'}p_F^{(\alpha)}$  は要素  $e$  の節点番号  $\alpha$  における流体圧力， ${}^{t'}\phi^{(\alpha)}$  は要素  $e$  の節点番号  $\alpha$  におけるレベルセット関数， ${}^{t'}\mathbf{y}^{(\alpha)}$  は要素  $e$  の節点番号  $\alpha$  における ALE 配置変位ベクトルである．これらの量のう

ち、ベクトル量については構造変位の場合と同様にデカルト座標系で成分表示し、スカラー量についてはベクトル同士の内積形式に書き直すと、次の関係式が得られる。

$$\{ {}^t \mathbf{v}_F \} = \begin{Bmatrix} ({}^t v_F)_1 \\ ({}^t v_F)_2 \\ ({}^t v_F)_3 \end{Bmatrix} \approx [N_V] \{ {}^t \mathbf{v}_F^e \} \quad \text{in } {}^t \Omega^e \quad (67)$$

$${}^t p \approx \{ N_S \}^T \{ {}^t p^e \} \quad \text{in } {}^t \Omega^e \quad (68)$$

$${}^t \phi \approx \{ N_S \}^T \{ {}^t \phi^e \} \quad \text{in } {}^t \Omega^e \quad (69)$$

$$\{ {}^t \mathbf{y} \} = \begin{Bmatrix} ({}^t y)_1 \\ ({}^t y)_2 \\ ({}^t y)_3 \end{Bmatrix} \approx [N_V] \{ {}^t \mathbf{y}^e \} \quad \text{in } {}^t \Omega^e \quad (70)$$

但し、節点流体速度ベクトル  $\{ {}^t \mathbf{v}_F^e \}$ 、節点流体圧力ベクトル  $\{ {}^t p^e \}$ 、節点レベルセット関数ベクトル  $\{ {}^t \phi^e \}$ 、節点 ALE 配置変位ベクトル  $\{ {}^t \mathbf{y}^e \}$  は、それぞれ次式 (71), (72), (73), (74) に示すように与えられる。

$$\{ {}^t \mathbf{v}_F^e \} = \left\{ ({}^t v_F)_1^{(1)} \quad ({}^t v_F)_2^{(1)} \quad ({}^t v_F)_3^{(1)} \quad ({}^t v_F)_1^{(2)} \quad \dots \quad ({}^t v_F)_3^{(n_{\text{node}}^e)} \right\}^T \quad (71)$$

$$\{ {}^t p^e \} = \left\{ {}^t p^{(1)} \quad {}^t p^{(2)} \quad \dots \quad {}^t p^{(n_{\text{node}}^e)} \right\}^T \quad (72)$$

$$\{ {}^t \phi^e \} = \left\{ {}^t \phi^{(1)} \quad {}^t \phi^{(2)} \quad \dots \quad {}^t \phi^{(n_{\text{node}}^e)} \right\}^T \quad (73)$$

$$\{ {}^t \mathbf{y}^e \} = \left\{ ({}^t y)_1^{(1)} \quad ({}^t y)_2^{(1)} \quad ({}^t y)_3^{(1)} \quad ({}^t y)_1^{(2)} \quad \dots \quad ({}^t y)_3^{(n_{\text{node}}^e)} \right\}^T \quad (74)$$

また、 $\{ N_S \}$  は次式 (75) のように置いた。

$$\{ N_S \} = \left\{ N^{(1)} \quad N^{(2)} \quad \dots \quad N^{(n_{\text{node}}^e)} \right\}^T \quad (75)$$

最後に、流体密度  ${}^t \rho_F$  と流体粘度  ${}^t \mu_F$  については、それぞれ次式 (76), (77) のように近似する。

$${}^t \rho_F \approx {}^t \rho_F^e \quad \text{in } {}^t \Omega^e \quad (76)$$

$${}^t \mu_F \approx {}^t \mu_F^e \quad \text{in } {}^t \Omega^e \quad (77)$$

ここで、 ${}^t \rho_F^e$  は有限要素  $e$  における流体密度、 ${}^t \mu_F^e$  は有限要素  $e$  における流体粘度である。式 (76), (77) に示したように、本論文では流体密度、粘度は要素内で一定の値をとるものとする。



本論文では，線形ソルバの求解を利用して求める未知変数は節点構造変位  ${}^t\mathbf{u}_S^{(\alpha)}$  ( $\alpha \in \mathbb{N}[1, n_n]$ )，節点流体速度  ${}^t\mathbf{u}_F^{(\alpha)}$  ( $\alpha \in \mathbb{N}[1, n_n]$ )，節点圧力  ${}^t p_F^{(\alpha)}$  ( $\alpha \in \mathbb{N}[1, n_n]$ )，節点レベルセット関数  ${}^t\phi^{(\alpha)}$  ( $\alpha \in \mathbb{N}[1, n_n]$ )，節点 ALE 配置変位量  ${}^t\mathbf{y}^{(\alpha)}$  ( $\alpha \in \mathbb{N}[1, n_n]$ ) とする．要素流体密度  ${}^t\rho_F^e$  ( $e \in \mathbb{N}[1, n_e]$ ) と要素流体粘度  ${}^t\mu_F^e$  ( $e \in \mathbb{N}[1, n_e]$ ) は，節点レベルセット関数の値から計算する．

## 4.2 支配方程式の離散化

本節では，支配方程式の離散化手法について述べる．なお，内点法による接触アルゴリズムについては，4.3 節で述べる．

### 4.2.1 構造領域

本項では，構造領域における支配方程式の離散化について述べる．

まず，支配方程式を有限要素法により離散化するため，重み付き残差法による定式化を行う．構造領域における残差  ${}^t\mathbf{r}_S$  は次式 (78) のように定義される．

$${}^t\mathbf{r}_S = {}^0\rho_S {}^t\mathbf{a}_S - {}^0\rho_S {}^t\mathbf{b}_S - {}^0\nabla \cdot ({}^t_0\mathbf{S}_S \cdot {}^t_0\mathbf{F}_S^T) \quad \text{in } {}^0\Omega_S \quad (78)$$

重み付き残差法による弱形式は，次式 (79) のようになる．

$$\int_{{}^0\Omega_S} {}^t\mathbf{r}_S \cdot \delta\mathbf{u} dV = 0 \quad (79)$$

ここで， $\delta\mathbf{u}$  は重み関数ベクトルである．重み関数は，次の性質 (80) を満たさなければならない．

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } ({}^0\Gamma_S)_g \quad (80)$$

式 (79) に式 (78) を代入すると，次式 (81) が得られる．

$$\int_{{}^0\Omega_S} \delta\mathbf{u} \cdot ({}^0\rho_S {}^t\mathbf{a}_S) dV = \int_{{}^0\Omega_S} \delta\mathbf{u} \cdot ({}^0\rho_S {}^t\mathbf{b}_S + {}^0\nabla \cdot ({}^t_0\mathbf{S}_S \cdot {}^t_0\mathbf{F}_S^T)) dV \quad (81)$$

ここで、右辺第 2 項は次式 (82) のように変形できる.

$$\begin{aligned}
& \int_{^0\Omega_S} \delta \mathbf{u} \cdot ({}^0\nabla \cdot ({}^{t'}_0 \mathbf{S}_S \cdot {}^{t'}_0 \mathbf{F}_S^T)) dV \\
&= \int_{^0\Omega_S} ({}^0\nabla \cdot ({}^{t'}_0 \mathbf{S}_S \cdot {}^{t'}_0 \mathbf{F}_S^T \cdot \delta \mathbf{u}) - ({}^{t'}_0 \mathbf{S}_S \cdot {}^{t'}_0 \mathbf{F}_S^T) : ({}^0\nabla \otimes \delta \mathbf{u})) dV \\
&= \int_{^0\Gamma_S} ({}^0\mathbf{n} \cdot {}^{t'}_0 \mathbf{S}_S \cdot {}^{t'}_0 \mathbf{F}_S^T \cdot \delta \mathbf{u}) dS - \int_{^0\Omega_S} ({}^{t'}_0 \mathbf{S}_S \cdot {}^{t'}_0 \mathbf{F}_S^T) : ({}^0\nabla \otimes \delta \mathbf{u}) dV \\
&= \int_{{}^{t'}\Gamma_S} {}^{t'}\mathbf{t}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS - \int_{^0\Omega_S} ({}^{t'}_0 \mathbf{S}_S \cdot {}^{t'}_0 \mathbf{F}_S^T) : ({}^0\nabla \otimes \delta \mathbf{u}) dV \\
&= \int_{({}^{t'}\Gamma_S)_t} {}^{t'}\mathbf{t}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{{}^{t'}\Gamma_I} {}^{t'}\mathbf{t}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{{}^{t'}\Gamma_C} {}^{t'}\mathbf{t}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS \\
&\quad - \int_{^0\Omega_S} ({}^{t'}_0 \mathbf{S}_S \cdot {}^{t'}_0 \mathbf{F}_S^T) : ({}^0\nabla \otimes \delta \mathbf{u}) dV \\
&= \int_{({}^{t'}\Gamma_S)_t} {}^{t'}\mathbf{t}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{{}^{t'}\Gamma_I} {}^{t'}\mathbf{t}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{{}^{t'}\Gamma_C} {}^{t'}\mathbf{t}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS \\
&\quad - \int_{^0\Omega_S} ({}^{t'}_0 \mathbf{S}_S) : (({}^0\nabla \otimes \delta \mathbf{u}) \cdot {}^{t'}_0 \mathbf{F}_S) dV \\
&= \int_{({}^{t'}\Gamma_S)_t} {}^{t'}\mathbf{t}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{{}^{t'}\Gamma_I} {}^{t'}\mathbf{t}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{{}^{t'}\Gamma_C} {}^{t'}\mathbf{t}_S \cdot \delta \mathbf{u} dS \\
&\quad - \int_{^0\Omega_S} {}^{t'}_0 \mathbf{S}_S : \delta {}^{t'}_0 \mathbf{E}_S dV \tag{82}
\end{aligned}$$

式 (82) について、第 1 式から第 2 式への変換には chain-rule を、第 2 式から第 3 式への変換には Gauss の発散法則を、第 3 式から第 4 式への変換には Cauchy の法則を、第 4 式から第 5 式への変換には構造領域における力学的境界条件式 (11) と重み関数の性質 (80) を用いた. また、 $\delta {}^{t'}_0 \mathbf{E}_S$  は次式 (83) のように置いた.

$$\delta {}^{t'}_0 \mathbf{E}_S = \delta {}^{t'}_0 \mathbf{E}_{SL} + \delta {}^{t'}_0 \mathbf{E}_{SNL} \tag{83}$$

ここで、 $\delta {}^{t'}_0 \mathbf{E}_{SL}$  と  $\delta {}^{t'}_0 \mathbf{E}_{SNL}$  は、それぞれ次式 (84), (85) のように置いた.

$$\delta {}^{t'}_0 \mathbf{E}_{SL} = \frac{1}{2} ({}^0\nabla \otimes \delta \mathbf{u} + ({}^0\nabla \otimes \delta \mathbf{u})^T) \tag{84}$$

$$\delta {}^{t'}_0 \mathbf{E}_{SNL} = \frac{1}{2} (({}^0\nabla \otimes \delta \mathbf{u}) \cdot ({}^0\nabla \otimes {}^{t'}\mathbf{u}_S)^T + ({}^0\nabla \otimes {}^{t'}\mathbf{u}_S) \cdot ({}^0\nabla \otimes \delta \mathbf{u})^T) \tag{85}$$

式 (82) を式 (81) に代入して、次式 (86) を得る.

$$\begin{aligned}
& \int_{^0\Omega_S} \delta \mathbf{u} \cdot ({}^0\rho_S {}^t'\mathbf{a}) dV + \int_{^0\Omega_S} {}^t'_0 \mathbf{S}_S : \delta {}^t'_0 \mathbf{E}_S dV \\
&= \int_{({}^t'\Gamma_S)_t} \delta \mathbf{u} \cdot {}^t'\underline{\mathbf{t}}_S dV + \int_{{}^t'\Gamma_I} \delta \mathbf{u} \cdot {}^t'\mathbf{t}_S dV + \int_{{}^t'\Gamma_C} \delta \mathbf{u} \cdot {}^t'\mathbf{t}_S dV \\
&+ \int_{^0\Omega_S} {}^0\rho_S \delta \mathbf{u} \cdot {}^t'\mathbf{b}_S dV
\end{aligned} \tag{86}$$

式 (86) を仮想仕事の原理式という. なお, 以後の定式化では式 (86) に式 (83) を代入し, 接触力項を削除した次式 (87) について定式化を行う.

$$\begin{aligned}
& \int_{^0\Omega_S} \delta \mathbf{u} \cdot ({}^0\rho_S {}^t'\mathbf{a}) dV + \int_{^0\Omega_S} {}^t'_0 \mathbf{S}_S : (\delta {}^t'_0 \mathbf{E}_{SL} + \delta {}^t'_0 \mathbf{E}_{SNL}) dV \\
&= \int_{({}^t'\Gamma_S)_t} \delta \mathbf{u} \cdot {}^t'\underline{\mathbf{t}}_S dV + \int_{{}^t'\Gamma_I} \delta \mathbf{u} \cdot {}^t'\mathbf{t}_S dV + \int_{^0\Omega_S} {}^0\rho_S \delta \mathbf{u} \cdot {}^t'\mathbf{b}_S dV
\end{aligned} \tag{87}$$

接触力については 4.3 節で個別に定式化する.

次に, 重み付残差式を時間方向に離散化する. 式 (87) について, 時間方向を Newmark- $\beta$  法で離散化することを考える. Newmark- $\beta$  法では,  ${}^t'\mathbf{a}_S$  は次式 (88) のように近似される.

$${}^t'\mathbf{a}_S \approx \beta_{S1}({}^t'\mathbf{u}_S - {}^t\mathbf{u}_S) - \beta_{S2} {}^t\mathbf{v}_S - \beta_{S3} {}^t\mathbf{a}_S \tag{88}$$

ここで,  $\beta_{S1}$ ,  $\beta_{S2}$ ,  $\beta_{S3}$  はそれぞれ次式 (89), (90), (91) のように置いた.

$$\beta_{S1} = \frac{1}{\beta_S \Delta t^2} \tag{89}$$

$$\beta_{S2} = \frac{1}{\beta_S \Delta t} \tag{90}$$

$$\beta_{S3} = \frac{1 - 2\beta_S}{2\beta_S} \tag{91}$$

ここで,  $\beta_S$  は Newmark- $\beta$  法に関するパラメータであり, 本研究では  $\beta_S = 0.25$  で固定する. 式 (88) を式 (87) に代入して、次式 (92) を得る.

$$\begin{aligned}
& \beta_{S1} \int_{^0\Omega_S} {}^0\rho_S \delta \mathbf{u} \cdot {}^t'\mathbf{u}_S dV + \int_{^0\Omega_S} {}^t'_0 \mathbf{S}_S : (\delta {}^t'_0 \mathbf{E}_{SL} + \delta {}^t'_0 \mathbf{E}_{SNL}) dV \\
&= \int_{^0\Omega_S} {}^0\rho_S \delta \mathbf{u} \cdot (\beta_{S1} {}^t\mathbf{u}_S + \beta_{S2} {}^t\mathbf{v}_S + \beta_{S3} {}^t\mathbf{a}_S) dV \\
&+ \int_{({}^t'\Gamma_S)_t} \delta \mathbf{u} \cdot {}^t'\underline{\mathbf{t}}_S dV + \int_{{}^t'\Gamma_I} \delta \mathbf{u} \cdot {}^t'\mathbf{t}_S dV + \int_{^0\Omega_S} {}^0\rho_S \delta \mathbf{u} \cdot {}^t'\mathbf{b}_S dV
\end{aligned} \tag{92}$$

さらに、式 (92) について、空間方向の離散化を行う。最初に、体積力ベクトル  ${}^{t'}\mathbf{b}_S$  の成分について、未知変数と同様に節点の値を用いて次式 (93) のように近似する。

$$\{{}^{t'}\mathbf{b}_S\} = [N_V]\{{}^{t'}\mathbf{b}_S^e\} \quad \text{in } {}^{t'}\Omega^e \quad (93)$$

また、表面力ベクトルについて次式 (94), (95) のように置く。

$$\{{}^{t'}\mathbf{T}_{ES}\} = \int_{({}^{t'}\Gamma_S)_t} [N_V]^T \{{}^{t'}\mathbf{t}_S\} dS \quad (94)$$

$$\{{}^{t'}\mathbf{T}_{ESI}\} = \int_{{}^{t'}\Gamma_I} [N_V]^T \{{}^{t'}\mathbf{t}_S\} dS \quad (95)$$

本論文では、構造領域は Bubnov-Galerkin 有限要素法により離散化する。この場合、重み関数の成分は次式 (96) のように近似される。

$$\{\delta \mathbf{u}\} = [N_V]\{\delta \mathbf{u}^e\} \quad \text{in } {}^{t'}\Omega^e \quad (96)$$

また、第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルと Green-Lagrange ひずみテンソルについて、それぞれ式 (97), (98) のように成分を並べたベクトルを定義する。

$$\{{}_0^t \mathbf{S}_S\} = \{({}_0^t S_S)_{11} \quad ({}_0^t S_S)_{22} \quad ({}_0^t S_S)_{33} \quad ({}_0^t S_S)_{23} \quad ({}_0^t S_S)_{13} \quad ({}_0^t S_S)_{12}\}^T \quad (97)$$

$$\{{}_0^t \mathbf{E}_S\} = \{({}_0^t E_S)_{11} \quad ({}_0^t E_S)_{22} \quad ({}_0^t E_S)_{33} \quad 2({}_0^t E_S)_{23} \quad 2({}_0^t E_S)_{13} \quad 2({}_0^t E_S)_{12}\}^T \quad (98)$$

式 (97), (98) を Voigt 表記といい、次の関係式 (99) を満足する。

$${}_0^t \mathbf{S}_S : {}_0^t \mathbf{E}_S = \{{}_0^t \mathbf{S}_S\}^T \{{}_0^t \mathbf{E}_S\} \quad (99)$$

以降、テンソル量の中括弧で括った場合、応力に関するテンソルは (97), ひずみに関するテンソルは (98) のように Voigt 表記したベクトルであると定義する。このとき、Green-Lagrange ひずみテンソルの変分量は、それぞれ次のように求まる。

$$\{\delta {}_0^t \mathbf{E}_{SL}\} = [B_{L0}]\{\delta \mathbf{u}^e\} \quad (100)$$

$$[B_{L0}] = \left[ [B_{L0}^{(1)}] \quad \dots \quad [B_{L0}^{(n_{\text{node}}^e)}] \right] \quad (101)$$

$$[B_{L0}^{(\alpha)}] = \begin{bmatrix} N_{,1}^{(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & N_{,2}^{(\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & N_{,3}^{(\alpha)} \\ 0 & N_{,3}^{(\alpha)} & N_{,2}^{(\alpha)} \\ N_{,3}^{(\alpha)} & 0 & N_{,1}^{(\alpha)} \\ N_{,2}^{(\alpha)} & N_{,1}^{(\alpha)} & 0 \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (102)$$

$$\{\delta_0^{t'} \mathbf{E}_{\text{SNL}}\} = [{}^{t'}\mathbf{B}_{\text{L1}}] \{\delta \mathbf{u}^e\} \quad (103)$$

$$[{}^{t'}\mathbf{B}_{\text{L1}}] = \begin{bmatrix} [{}^{t'}\mathbf{B}_{\text{L1}}^{(1)}] & \cdots & [{}^{t'}\mathbf{B}_{\text{L1}}^{(n_{\text{node}}^e)}] \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$[{}^{t'}\mathbf{B}_{\text{L1}}^{(\alpha)}] = \begin{bmatrix} ({}^{t'}u_{\text{S}})_{1,1}N_{,1}^{(\alpha)} & ({}^{t'}u_{\text{S}})_{2,1}N_{,1}^{(\alpha)} & ({}^{t'}u_{\text{S}})_{3,1}N_{,1}^{(\alpha)} \\ ({}^{t'}u_{\text{S}})_{1,2}N_{,2}^{(\alpha)} & ({}^{t'}u_{\text{S}})_{2,2}N_{,2}^{(\alpha)} & ({}^{t'}u_{\text{S}})_{3,2}N_{,2}^{(\alpha)} \\ ({}^{t'}u_{\text{S}})_{1,3}N_{,3}^{(\alpha)} & ({}^{t'}u_{\text{S}})_{2,3}N_{,3}^{(\alpha)} & ({}^{t'}u_{\text{S}})_{3,3}N_{,3}^{(\alpha)} \\ ({}^{t'}u_{\text{S}})_{1,2}N_{,3}^{(\alpha)} + ({}^{t'}u_{\text{S}})_{1,3}N_{,2}^{(\alpha)} & ({}^{t'}u_{\text{S}})_{2,2}N_{,3}^{(\alpha)} + ({}^{t'}u_{\text{S}})_{2,3}N_{,2}^{(\alpha)} & ({}^{t'}u_{\text{S}})_{3,2}N_{,3}^{(\alpha)} + ({}^{t'}u_{\text{S}})_{3,3}N_{,2}^{(\alpha)} \\ ({}^{t'}u_{\text{S}})_{1,1}N_{,3}^{(\alpha)} + ({}^{t'}u_{\text{S}})_{1,3}N_{,1}^{(\alpha)} & ({}^{t'}u_{\text{S}})_{2,1}N_{,3}^{(\alpha)} + ({}^{t'}u_{\text{S}})_{2,3}N_{,1}^{(\alpha)} & ({}^{t'}u_{\text{S}})_{3,1}N_{,3}^{(\alpha)} + ({}^{t'}u_{\text{S}})_{3,3}N_{,1}^{(\alpha)} \\ ({}^{t'}u_{\text{S}})_{1,1}N_{,2}^{(\alpha)} + ({}^{t'}u_{\text{S}})_{1,2}N_{,1}^{(\alpha)} & ({}^{t'}u_{\text{S}})_{2,1}N_{,2}^{(\alpha)} + ({}^{t'}u_{\text{S}})_{2,2}N_{,1}^{(\alpha)} & ({}^{t'}u_{\text{S}})_{3,1}N_{,2}^{(\alpha)} + ({}^{t'}u_{\text{S}})_{3,2}N_{,1}^{(\alpha)} \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (105)$$

以上の準備をしたうえで、時間方向に離散化された重み付残差式 (92) をベクトル、テンソルの成分形式に書き直し、さらに各成分について有限要素内の補間式を代入することで、次式 (106) が得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_e \{\delta \mathbf{u}^e\}^T (\beta_{\text{S1}} {}^0\rho_{\text{S}}^e [M_{\text{S}}] \{{}^{t'}\mathbf{u}_{\text{S}}^e\} + \int_{^0\Omega_{\text{S}}^e} ([\mathbf{B}_{\text{L0}}] + [{}^{t'}\mathbf{B}_{\text{L1}}])^T \{{}_0^{t'}\mathbf{S}_{\text{S}}\} dV) \\ &= \sum_e \{\delta \mathbf{u}^e\}^T [M_{\text{S}}] ({}^0\rho_{\text{S}}^e \beta_{\text{S1}} \{{}^t\mathbf{u}_{\text{S}}^e\} + {}^0\rho_{\text{S}}^e \beta_{\text{S2}} \{{}^t\mathbf{v}_{\text{S}}^e\} + {}^0\rho_{\text{S}}^e \beta_{\text{S3}} \{{}^t\mathbf{a}_{\text{S}}^e\} + \rho_{\text{S}}^e \{{}^t\mathbf{b}_{\text{S}}^e\}) \\ &+ \sum_e \{\delta \mathbf{u}^e\}^T (\{{}^{t'}\mathbf{T}_{\text{ES}}\} + \{{}^{t'}\mathbf{T}_{\text{ESI}}\}) \end{aligned} \quad (106)$$

ここで、 $[M_{\text{S}}]$  は次式 (107) のように置いた。

$$[M_{\text{S}}] = \int_{^0\Omega_{\text{S}}^e} \begin{bmatrix} N^{(1)}N^{(1)}[I]_{3 \times 3} & \cdots & N^{(1)}N^{(n_{\text{node}}^e)}[I]_{3 \times 3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N^{(n_{\text{node}}^e)}N^{(1)}[I]_{3 \times 3} & \cdots & N^{(n_{\text{node}}^e)}N^{(n_{\text{node}}^e)}[I]_{3 \times 3} \end{bmatrix} dV \quad (107)$$

但し、 $[I]_{3 \times 3}$  は  $3 \times 3$  の単位行列である。重み関数の節点値がどのような値を取る場合でも、式 (106) は成り立つので、最終的に節点構造変位に関する非線形方程式が次式 (108) のように得られる。

$$\begin{aligned} & \sum_e (\beta_{\text{S1}} {}^0\rho_{\text{S}}^e [M_{\text{S}}] \{{}^{t'}\mathbf{u}_{\text{S}}^e\} + \int_{^0\Omega_{\text{S}}^e} ([\mathbf{B}_{\text{L0}}] + [{}^{t'}\mathbf{B}_{\text{L1}}])^T \{{}_0^{t'}\mathbf{S}_{\text{S}}\} dV) \\ &= \sum_e [M_{\text{S}}] ({}^0\rho_{\text{S}}^e \beta_{\text{S1}} \{{}^t\mathbf{u}_{\text{S}}^e\} + {}^0\rho_{\text{S}}^e \beta_{\text{S2}} \{{}^t\mathbf{v}_{\text{S}}^e\} + {}^0\rho_{\text{S}}^e \beta_{\text{S3}} \{{}^t\mathbf{a}_{\text{S}}^e\} + \rho_{\text{S}}^e \{{}^t\mathbf{b}_{\text{S}}^e\}) \\ &+ \sum_e (\{{}^{t'}\mathbf{T}_{\text{ES}}\} + \{{}^{t'}\mathbf{T}_{\text{ESI}}\}) \end{aligned} \quad (108)$$

なお、以降では式 (108) における、流体構造連成に関する項を無視する。4.4 節で述べるように、流体場との一体型構造連成を考慮する際に、Newton-Raphson 法の反復ループを構築する前の段階で、この項は消去されるためである。

最後に、非線形方程式 (108) を解くための Newton-Raphson 法の反復ループを構築する。式 (108) において、非線形項である左辺第 2 項について、時間微分を求めると次式 (109) のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_S^e} ([B_{L0}] + [{}^t B_{L1}])^T \{{}_0^t \mathbf{S}_S\} dV \\ &= \frac{\partial}{\partial \{{}^t \mathbf{u}_S^e\}} \left( \int_{\Omega_S^e} ([B_{L0}] + [{}^t B_{L1}])^T \{{}_0^t \mathbf{S}_S\} dV \right) \{{}^t \mathbf{v}_S^e\} \end{aligned} \quad (109)$$

式 (109) より、非線形項を時間微分して、ベクトル  $\{{}^t \mathbf{v}_S^e\}$  にかかるマトリクスを括りだすことで、接線剛性マトリクスを計算できることが分かる。そこで、まず第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルが時間微分される項について、接線剛性マトリクスを求める。これは、次式 (110) のように計算される。

$$\begin{aligned} & ([B_{L0}] + [{}^t B_{L1}])^T \frac{D\{{}_0^t \mathbf{S}_S\}}{Dt} \\ &= ([B_{L0}] + [{}^t B_{L1}])^T [{}^t D] \frac{D\{{}_0^t \mathbf{E}_S\}}{Dt} \\ &= ([B_{L0}] + [{}^t B_{L1}])^T [{}^t D] ([B_{L0}] + [{}^t B_{L1}]) \{{}^t \mathbf{v}_S^e\} \end{aligned} \quad (110)$$

ここで、 $[{}^t D]$  は超弾性体のポテンシャルの定義より、次式 (111) で与えられる

$$[{}^t D] = \begin{bmatrix} {}^t W_{E;1111} & {}^t W_{E;1122} & {}^t W_{E;1133} & {}^t W_{E;1123} & {}^t W_{E;1113} & {}^t W_{E;1112} \\ {}^t W_{E;2211} & {}^t W_{E;2222} & {}^t W_{E;2233} & {}^t W_{E;2223} & {}^t W_{E;2213} & {}^t W_{E;2212} \\ {}^t W_{E;3311} & {}^t W_{E;3322} & {}^t W_{E;3333} & {}^t W_{E;3323} & {}^t W_{E;3313} & {}^t W_{E;3312} \\ {}^t W_{E;2311} & {}^t W_{E;2322} & {}^t W_{E;2333} & {}^t W_{E;2323} & {}^t W_{E;2313} & {}^t W_{E;2312} \\ {}^t W_{E;1311} & {}^t W_{E;1322} & {}^t W_{E;1333} & {}^t W_{E;1323} & {}^t W_{E;1313} & {}^t W_{E;1312} \\ {}^t W_{E;1211} & {}^t W_{E;1222} & {}^t W_{E;1233} & {}^t W_{E;1223} & {}^t W_{E;1213} & {}^t W_{E;1212} \end{bmatrix} \quad (111)$$

但し、 ${}^t W_{E;ijkl}$  は次式 (112) のように置いた。

$${}^t W_{E;ijkl} = \frac{\partial {}^t W}{\partial ({}_0^t E_S)_{ij} \partial ({}_0^t E_S)_{kl}} \quad (i, j, k, l \in \mathbb{N}[1, 3]) \quad (112)$$

従って、この項に関する接線剛性マトリクス  $[{}^{t'}K_{SL}]$  は、次式 (113) のように求まる。

$$[{}^{t'}K_{SL}] = ([B_{L0}] + [{}^{t'}B_{L1}])^T [{}^{t'}D] ([B_{L0}] + [{}^{t'}B_{L1}]) \quad (113)$$

他方、 $[{}^{t'}B_{L1}]^T$  が時間微分される項については、次式 (114) のように求まる。

$$\frac{D[{}^{t'}B_{L1}]^T}{Dt} \{{}_0^{t'}\mathbf{S}_S\} = [{}^{t'}B_{NL}]^T [{}_0^{t'}\mathbf{S}_S] [{}^{t'}B_{NL}] \{{}^{t'}\mathbf{v}_S^e\} \quad (114)$$

ここで、各マトリクスは次のように定義した。

$$[{}^{t'}B_{NL}] = \begin{bmatrix} [{}^{t'}B_{NL}^{(1)}] & \cdots & [{}^{t'}B_{NL}^{(n_{\text{node}}^e)}] \end{bmatrix} \quad (115)$$

$$[{}^{t'}B_{NL}^{(\alpha)}] = \begin{bmatrix} N_{,1}^{(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & N_{,1}^{(\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & N_{,1}^{(\alpha)} \\ N_{,2}^{(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & N_{,2}^{(\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & N_{,2}^{(\alpha)} \\ N_{,3}^{(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & N_{,3}^{(\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & N_{,3}^{(\alpha)} \end{bmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (116)$$

$$[{}_0^{t'}\mathbf{S}_S] = \begin{bmatrix} ({}_0^{t'}S_S)_{11}[I_{3 \times 3}] & ({}_0^{t'}S_S)_{12}[I_{3 \times 3}] & ({}_0^{t'}S_S)_{13}[I_{3 \times 3}] \\ ({}_0^{t'}S_S)_{21}[I_{3 \times 3}] & ({}_0^{t'}S_S)_{22}[I_{3 \times 3}] & ({}_0^{t'}S_S)_{23}[I_{3 \times 3}] \\ ({}_0^{t'}S_S)_{31}[I_{3 \times 3}] & ({}_0^{t'}S_S)_{32}[I_{3 \times 3}] & ({}_0^{t'}S_S)_{33}[I_{3 \times 3}] \end{bmatrix} \quad (117)$$

但し、 $[I_{3 \times 3}]$  は  $3 \times 3$  の単位マトリクスである。従って、この項に関する接線剛性マトリクス  $[{}^{t'}K_{SNL}]$  は、次式 (118) のように求まる。

$$[{}^{t'}K_{SNL}] = [{}^{t'}B_{NL}]^T [{}_0^{t'}\mathbf{S}_S] [{}^{t'}B_{NL}] \quad (118)$$

以上より、節点構造変位場を解くための Newton-Raphson 法の第  $n$  回目の反復ループは、次の 3 式により与えられる。

$$\{{}^{t'}\mathbf{u}_S^e\}^{(0)} = \{{}^t\mathbf{u}_S^e\} \quad (119)$$

$$\sum_e [{}^{t'}K_S]^{(n)} \{\Delta \mathbf{u}_S^e\}^{(n+1)} = \sum_e (\{{}^{t'}F_S\} - \{{}^{t'}Q_S\}^{(n)}) \quad (120)$$

$$\{{}^{t'}\mathbf{u}_S^e\}^{(n+1)} = \{{}^{t'}\mathbf{u}_S^e\}^{(n)} + \{\Delta \mathbf{u}_S^e\}^{(n+1)} \quad (121)$$

ここで、中括弧、角括弧で表したベクトル、マトリクスの右上に括弧付きで付けた添え字は、Newton-Raphson 方の反復ループにおけるループ回数を表し、 $\Delta$  を付けた量は増分であることを意味する。局所接線剛性マトリクス  $[{}^{t'}K_S]$ 、外力ベクトル  $\{{}^{t'}F_S\}$  と内力ベクトル  $\{{}^{t'}Q_S\}$  は、それぞれ次式 (123), (124) のように置いた。

$$[{}^{t'}K_S] = \beta_{S1} {}^0\rho_S^e [M_S] + [{}^{t'}K_{SNL}] + [{}^{t'}K_{SNL}] \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \{{}^{t'}F_S\} = & [M_S]({}^0\rho_S^e \beta_{S2} \{{}^t\mathbf{u}_S^e\} + {}^0\rho_S^e \beta_{S2} \{{}^t\mathbf{v}_S^e\} + {}^0\rho_S^e \beta_{S3} \{{}^t\mathbf{a}_S^e\} + \rho_S^e \{{}^t\mathbf{b}_S^e\}) \\ & + \{{}^{t'}\mathbf{T}_{ES}\} \end{aligned} \quad (123)$$

$$\{{}^{t'}Q_S\} = \beta_{S1} {}^0\rho_S^e [M_S] \{{}^t\mathbf{u}_S^e\} + \int_{\Omega_S^e} ([B_{L0}] + [{}^{t'}B_{L1}])^T \{{}^t_0\mathbf{S}_S\} dV \quad (124)$$

#### 4.2.2 流体領域

非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式 (29) を Bubnov-Galerkin 法で解くと、数値振動が発生することが知られている。そこで、SUPG/PSPG 法 [24, 25] によって流速場、圧力場を解くものとする。本論文では、有限要素の次数は一次に限定している。そのため、Galerkin 最小二乗法により定式化を行えば、SUPG/PSPG 法による定式化が得られることになる。

まず、支配方程式である連続の式 (30)、Navier-Stokes 方程式 (52) の残差  ${}^{t'}r_{\text{conti}}$ ,  ${}^{t'}r_{\text{NS}}$  は、それぞれ次式 (125), (126) のように与えられる。

$${}^{t'}r_{\text{conti}} = {}^{t'}\nabla \cdot {}^{t'}\mathbf{v}_F \quad \text{in } {}^{t'}\Omega_F \quad (125)$$

$$\begin{aligned} {}^{t'}r_{\text{NS}} = & {}^t\rho_F \frac{\partial {}^{t'}\mathbf{v}_F}{\partial t} \bigg|_{\tilde{\mathbf{x}}} + {}^t\rho_F (({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot {}^{t'}\nabla) {}^{t'}\mathbf{v}_F \\ & - {}^t\rho_F {}^{t'}\mathbf{b}_F + {}^{t'}\nabla {}^t p_F - {}^t\mu_F {}^{t'}\nabla \cdot \mathbf{T}'_F \quad \text{in } {}^{t'}\Omega_F \end{aligned} \quad (126)$$

但し、式 (52) における速度  ${}^{t'}\mathbf{v}_F$  は、既知の量である前の時刻における速度  ${}^t\mathbf{v}_F$  で置き換えた。また、ALE メッシュの移動速度  ${}^t\tilde{\mathbf{v}}_F$  や密度  ${}^t\rho_F$ ,  ${}^t\mu_F$  も、前の時刻における値  ${}^t\tilde{\mathbf{v}}_F$ ,  ${}^t\rho_F$ ,  ${}^t\mu_F$  でそれぞれ近似した。Galerkin 最小二乗法では、次式 (127) で定義される二乗残差  ${}^{t'}R$  について、節点流体速度と節点圧力を変化させた場合の最小値を求める必要がある。

$${}^{t'}R = \frac{1}{2} \int_{{}^{t'}\Omega_F} {}^{t'}r_{\text{NS}} \cdot {}^{t'}r_{\text{NS}} dV \quad (127)$$



今,  $I \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}]$  は全体節点番号とする. ここで,  $n_{\text{node}}$  は全節点数である. このとき,  ${}^t R$  について, 節点  $I$  における一次の最適性条件は次式 (128), (129) で与えられる.

$$\frac{\partial {}^t R}{\partial {}^t \mathbf{v}_F^{(I)}} = 0 \quad (I \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}]) \quad (128)$$

$$\frac{\partial {}^t R}{\partial {}^t p_F^{(I)}} = 0 \quad (I \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}]) \quad (129)$$

今, 有限要素  $E_I$  は節点番号  $I$  の節点を含む要素の集合,  $\chi_I^e$  は  $E_I$  に含まれる要素  $e$  における全体節点番号  $I$  に相当する節点の局所節点番号とする.  $I$  は全節点番号を漏れなく動くため, 式 (128) の左辺を有限要素法により離散化する場合,  ${}^t \mathbf{v}_F^{(I)}$  による偏微分は, 要素  $e \in E_I$  における  ${}^t \mathbf{v}_F^{(\chi_I^e)}$  の偏微分に置き換えればよい. 従って, 式 (128) の左辺は次式 (130) のように書き下すことができる.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial {}^t R}{\partial {}^t \mathbf{v}_F^{(I)}} \\ &= \int_{{}^t \Omega_F} {}^t {}^t \mathbf{r}_{\text{NS}} \cdot \frac{\partial {}^t \mathbf{r}_{\text{NS}}}{\partial {}^t \mathbf{v}_F^{(I)}} dV \\ &= \sum_{e \in E_I} \int_{{}^t \Omega_F^e} {}^t \mathbf{r}_{\text{NS}} \cdot \frac{\partial {}^t \mathbf{r}_{\text{NS}}}{\partial {}^t \mathbf{v}_F^{(\chi_I^e)}} dV \\ &= \sum_{e \in E_I} \int_{{}^t \Omega_F^e} {}^t \mathbf{r}_{\text{NS}} \cdot ({}^t \rho_F ({}^t \mathbf{v}_F - {}^t \tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot ({}^t \nabla N^{(\chi_I^e)}) \mathbf{I}) dV \\ &= \sum_{e \in E_I} \int_{{}^t \Omega_F^e} {}^t \rho_F ({}^t \mathbf{v}_F - {}^t \tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot ({}^t \nabla N^{(\chi_I^e)}) {}^t \mathbf{r}_{\text{NS}} dV \end{aligned} \quad (130)$$

ここで, 3 行目から 4 行目への変形では, 要素  $e$  において次式 (131) が成り立つことを用いた.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^{t'} \mathbf{r}_{\text{NS}}}{\partial^{t'} \mathbf{v}_{\text{F}}^{(\chi_{\text{I}}^e)}} \\
&= \frac{\partial}{\partial^{t'} \mathbf{v}_{\text{F}}^{(\chi_{\text{I}}^e)}} \left( {}^t \rho_{\text{F}} \frac{\partial^{t'} \mathbf{v}_{\text{F}}}{\partial t'} \right) \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} + {}^t \rho_{\text{F}} (({}^t \mathbf{v}_{\text{F}} - {}^t \tilde{\mathbf{v}}_{\text{F}}) \cdot {}^{t'} \nabla) {}^{t'} \mathbf{v}_{\text{F}} \\
&\quad - {}^t \rho_{\text{F}} {}^{t'} \mathbf{b}_{\text{F}} + {}^{t'} \nabla {}^{t'} p_{\text{F}} - {}^t \mu_{\text{F}} {}^{t'} \nabla \cdot \mathbf{T}'_{\text{F}}) \\
&= {}^t \rho_{\text{F}} \frac{\partial N(\chi_{\text{I}}^e)}{\partial t'} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{I} + {}^t \rho_{\text{F}} ({}^t \mathbf{v}_{\text{F}} - {}^t \tilde{\mathbf{v}}_{\text{F}}) \cdot ({}^{t'} \nabla N(\chi_{\text{I}}^e)) \mathbf{I} - {}^t \mu_{\text{F}} \frac{\partial {}^{t'} \nabla \cdot \mathbf{T}'_{\text{F}}}{\partial^{t'} \mathbf{v}_{\text{F}}^{(\chi_{\text{I}}^e)}} \\
&= {}^t \rho_{\text{F}} \frac{\partial N(\chi_{\text{I}}^e)}{\partial t'} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{I} + {}^t \rho_{\text{F}} ({}^t \mathbf{v}_{\text{F}} - {}^t \tilde{\mathbf{v}}_{\text{F}}) \cdot ({}^{t'} \nabla N(\chi_{\text{I}}^e)) \mathbf{I} \\
&= {}^t \rho_{\text{F}} ({}^t \mathbf{v}_{\text{F}} - {}^t \tilde{\mathbf{v}}_{\text{F}}) \cdot ({}^{t'} \nabla N(\chi_{\text{I}}^e)) \mathbf{I}
\end{aligned} \tag{131}$$

但し、3 行目から 4 行目の変形では形状関数は一次であることを、4 行目から 5 行目の変形では形状関数は時間に依存しないことを用いた。同様にして、式 (129) の左辺は次式 (132) のように書き下すことができる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{t'} R}{\partial^{t'} p_{\text{F}}^{(I)}} &= \int_{{}^{t'} \Omega_{\text{F}}} {}^{t'} \mathbf{r}_{\text{NS}} \cdot \frac{\partial^{t'} \mathbf{r}_{\text{NS}}}{\partial^{t'} p_{\text{F}}^{(I)}} dV \\
&= \sum_{e \in E_{\text{I}}} \int_{{}^{t'} \Omega_{\text{F}}^e} {}^{t'} \mathbf{r}_{\text{NS}} \cdot \frac{\partial^{t'} \mathbf{r}_{\text{NS}}}{\partial^{t'} p_{\text{F}}^{(\chi_{\text{I}}^e)}} dV \\
&= \sum_{e \in E_{\text{I}}} \int_{{}^{t'} \Omega_{\text{F}}^e} {}^{t'} \mathbf{r}_{\text{NS}} \cdot ({}^{t'} \nabla N(\chi_{\text{I}}^e)) dV
\end{aligned} \tag{132}$$

ここで、2 行目から 3 行目への変形では、要素  $e$  において次式 (133) が成り立つことを用いた。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{t'} \mathbf{r}_{\text{NS}}}{\partial^{t'} p_{\text{F}}^{(\chi_{\text{I}}^e)}} &= \frac{\partial}{\partial^{t'} p_{\text{F}}^{(\chi_{\text{I}}^e)}} \left( {}^t \rho_{\text{F}} \frac{\partial^{t'} \mathbf{v}_{\text{F}}}{\partial t'} \right) \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} + {}^t \rho_{\text{F}} (({}^t \mathbf{v}_{\text{F}} - {}^t \tilde{\mathbf{v}}_{\text{F}}) \cdot {}^{t'} \nabla) {}^{t'} \mathbf{v}_{\text{F}} \\
&\quad - {}^t \rho_{\text{F}} {}^{t'} \mathbf{b}_{\text{F}} + {}^{t'} \nabla {}^{t'} p_{\text{F}} - {}^t \mu_{\text{F}} {}^{t'} \nabla \cdot \mathbf{T}'_{\text{F}}) \\
&= {}^{t'} \nabla N(\chi_{\text{I}}^e)
\end{aligned} \tag{133}$$

次に、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式について、Galerkin 最小二乗法による有限要素方

程式を求める．まず，次式 (134) を満たす重み関数  $\delta \mathbf{v}$  を定義する．

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{on } ({}^t\Gamma_F)_g \quad (134)$$

重み関数の成分は，Bubnov-Galerkin 法と同様に次式 (135) のように近似する．

$$\{\delta \mathbf{v}\} = [N_V]\{\delta \mathbf{v}^e\} \quad \text{in } {}^t\Omega^e \quad (135)$$

Galerkin 最小二乗法では，残差  ${}^t\mathbf{r}_{NS}$  に加え，各節点において式 (130) が各有限要素内で重み  $\delta \mathbf{v}$  に関する重み付き残差法の意味で成り立つように定式化する．従って，解くべき方程式は次式 (136) のように与えられる．

$$\sum_e \int_{{}^t\Omega_F^e} {}^t\mathbf{r}_{NS} \cdot (\delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v}^{(\alpha)} {}^t\tau_{NS}^e {}^t\rho_F ({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot ({}^t\nabla N^{(\alpha)})) dV = 0 \quad (136)$$

ここで， ${}^t\tau_{NS}^e$  は安定化係数と呼ばれるパラメータであり，次式 (137) のように定義される．

$${}^t\tau_{NS}^e = \sqrt{{}^t\tau_{NS1}^2 + {}^t\tau_{NS2}^2 + {}^t\tau_{NS3}^2} \quad (137)$$

ここで， ${}^t\tau_{NS1}$ ， ${}^t\tau_{NS2}$ ， ${}^t\tau_{NS3}$  はそれぞれ次式 (138)，(139)，(140) のように定義される．

$${}^t\tau_{NS1} = \frac{2}{\Delta t} \quad (138)$$

$${}^t\tau_{NS2} = |{}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{v}_F| \quad (139)$$

$${}^t\tau_{NS3} = \frac{{}^t\mu_F {}^t\tau_{NS2}^2}{{}^t\rho_F {}^t\mathbf{v}_F \cdot {}^t\mathbf{v}_F} \quad (140)$$

式 (137) をそのまま使って  ${}^t\tau_{NS}^e$  を計算すると，計算時間が増大する．そこで， ${}^t\tau_{NS}^e$  は要素内で一定となるように， ${}^t\hat{\mathbf{v}}_F^e$  を要素中心における流体速度として，次のように置く．

$$\overline{{}^t\nabla N^{(\alpha)}} = \int_{{}^t\Omega^e} {}^t\nabla N^{(\alpha)} dV \quad (\alpha \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (141)$$

$${}^t\tau_{NS2} = \left\| \sum_{\alpha=1}^{n_{\text{node}}^e} \overline{{}^t\nabla N^{(\alpha)}} \cdot {}^t\hat{\mathbf{v}}_F^e \right\|_1 \quad (142)$$

$${}^t\tau_{NS3} = \begin{cases} \frac{4 {}^t\mu_F}{{}^t\rho_F \sqrt[3]{({}^tV^e)^2}} & {}^t\hat{\mathbf{v}}_F^e \cdot {}^t\hat{\mathbf{v}}_F^e < 1.0 \times 10^{-16} \\ \frac{{}^t\mu_F {}^t\tau_{NS2}^2}{{}^t\rho_F {}^t\hat{\mathbf{v}}_F^e \cdot {}^t\hat{\mathbf{v}}_F^e} & {}^t\hat{\mathbf{v}}_F^e \cdot {}^t\hat{\mathbf{v}}_F^e \geq 1.0 \times 10^{-16} \end{cases} \quad (143)$$

ここで,  ${}^tV^e$  は要素  $e$  の体積である. 式 (136) から有限要素方程式を得るため, 各項を計算していくと, 各項や各項中で定義される成分は次式 (144)-(159) のように得られる.

$$\sum_e \int_{{}^t\Omega_F^e} {}^t\rho_F \delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial {}^t\mathbf{v}_F}{\partial t} \bigg|_{\tilde{\mathbf{x}}} dV = \sum_e {}^t\rho_F M_F^{(\alpha)(\beta)} \delta \mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot \frac{\partial {}^t\mathbf{v}_F^{(\beta)}}{\partial t} \bigg|_{\tilde{\mathbf{x}}} dV \quad (144)$$

$$M_F^{(\alpha)(\beta)} = \int_{{}^t\Omega_F^e} N^{(\alpha)} N^{(\beta)} dV \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (145)$$

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{{}^t\Omega_F^e} {}^t\rho_F (\delta \mathbf{v} \cdot (({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot {}^{t'}\nabla) {}^{t'}\mathbf{v}_F) dV \\ &= \sum_e {}^t\rho_F (({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot \mathbf{A}_F^{(\alpha)(\beta)}) (\delta \mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot {}^{t'}\mathbf{v}_F^{(\beta)}) \end{aligned} \quad (146)$$

$$\mathbf{A}_F^{(\alpha)(\beta)} = \int_{{}^t\Omega_F^e} N^{(\alpha)} ({}^{t'}\nabla N^{(\beta)}) dV \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (147)$$

$$- \sum_e \int_{{}^t\Omega_F^e} {}^t\rho_F \delta \mathbf{v} \cdot {}^{t'}\mathbf{b}_F dV = - \sum_e {}^t\rho_F M_F^{(\alpha)(\beta)} \delta \mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot {}^{t'}\mathbf{b}_F^{(\beta)} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} & \sum_e \left( - \int_{{}^t\Omega_F^e} \delta \mathbf{v} \cdot {}^{t'}\nabla {}^{t'}p_F dV - \int_{{}^t\Omega_F^e} {}^t\mu_F \delta \mathbf{v} \cdot {}^{t'}\nabla \cdot \mathbf{T}'_F dV \right) \\ &= \sum_e \left( - \int_{({}^{t'}\Gamma_F^e)_t} \delta \mathbf{v} \cdot {}^{t'}\underline{\mathbf{t}}_F dS - \int_{{}^{t'}\Gamma_I^e} \delta \mathbf{v} \cdot {}^{t'}\mathbf{t}_F dS \right. \\ & \quad \left. + \int_{{}^t\Omega_F^e} (({}^{t'}\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) {}^{t'}p_F + {}^t\mu_F \mathbf{T}'_F : ({}^{t'}\nabla \otimes \delta \mathbf{v})) dV \right) \\ &= \sum_e \delta \mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot ({}^{t'}\underline{\mathbf{T}}_{\text{EF}}^{(\alpha)} + {}^{t'}\mathbf{T}_{\text{EFI}}^{(\alpha)} \\ & \quad + \mathbf{C}_F^{(\alpha)(\beta)} {}^{t'}p_F^{(\beta)} + ((\text{tr} \mathbf{D}_F^{(\alpha)(\beta)}) \mathbf{I} + \mathbf{D}_F^{(\alpha)(\beta)}) \cdot {}^{t'}\mathbf{v}_F^{(\beta)}) \end{aligned} \quad (149)$$

$${}^{t'}\overline{\mathbf{T}}_{\text{EF}}^{(\alpha)} = \int_{({}^{t'}\Gamma_F^e)_t} N^{(\alpha)} {}^{t'}\underline{\mathbf{t}}_F dS \quad (\alpha \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (150)$$

$${}^{t'}\mathbf{T}_{\text{EFI}}^{(\alpha)} = \int_{{}^{t'}\Gamma_I^e} N^{(\alpha)} {}^{t'}\mathbf{t}_F dS \quad (\alpha \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (151)$$

$$\mathbf{C}_F^{(\alpha)(\beta)} = \int_{{}^t\Omega_F^e} ({}^{t'}\nabla N^{(\alpha)}) N^{(\beta)} dV \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (152)$$

$$\mathbf{D}_F^{(\alpha)(\beta)} = \int_{t'\Omega_F^e} ({}^{t'}\nabla N^{(\alpha)}) \otimes ({}^{t'}\nabla N^{(\beta)}) dV \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (153)$$

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{t'\Omega_F^e} {}^t\rho_F {}^t\tau_{\text{NS}}^e ({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot ({}^{t'}\nabla N^{(\alpha)}) (\delta\mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot \left. \frac{\partial {}^{t'}\mathbf{v}_F}{\partial t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}}) dV \\ &= \sum_e {}^t\rho_F {}^t\tau_{\text{NS}}^e (({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot \mathbf{A}_F^{(\beta)(\alpha)}) (\delta\mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot \left. \frac{\partial {}^{t'}\mathbf{v}_F^{(\beta)}}{\partial t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}}) dV \end{aligned} \quad (154)$$

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{t'\Omega_F^e} {}^t\rho_F {}^t\tau_{\text{NS}}^e ({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot ({}^{t'}\nabla N^{(\alpha)}) \delta\mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot (({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot {}^{t'}\nabla) {}^{t'}\mathbf{v}_F dV \\ &= \sum_e {}^t\rho_F {}^{t'}\tau_{\text{NS}}^e (({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \otimes ({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) : \mathbf{D}_F^{(\alpha)(\beta)}) \delta\mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot {}^{t'}\mathbf{v}_F^{(\beta)} \end{aligned} \quad (155)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_e \int_{t'\Omega_F^e} {}^t\rho_F {}^{t'}\tau_{\text{NS}}^e ({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot ({}^{t'}\nabla N^{(\alpha)}) \delta\mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot {}^{t'}\mathbf{b}_F dV \\ &= - \sum_e {}^t\rho_F {}^t\tau_{\text{NS}}^e (({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot \mathbf{A}_F^{(\beta)(\alpha)}) (\delta\mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot {}^{t'}\mathbf{b}_F^{(\beta)}) \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_e \int_{t'\Omega_F^e} {}^t\tau_{\text{NS}}^e (({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot ({}^{t'}\nabla N^{(\alpha)})) (\delta\mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot ({}^{t'}\nabla {}^{t'}p_F)) dV \\ &= \sum_e {}^t\tau_{\text{NS}}^e \delta\mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot (({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot \mathbf{C}_{Fv}^{(\alpha)(\beta)}) {}^{t'}p_F^{(\beta)} dV \end{aligned} \quad (157)$$

$$\mathbf{C}_{Fv}^{(\alpha)(\beta)} = \int_{t'\Omega_F^e} ({}^{t'}\nabla N^{(\alpha)}) \otimes ({}^{t'}\nabla N^{(\beta)}) dV \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (158)$$

$$- \sum_e \int_{t'\Omega_F^e} {}^t\mu_F {}^t\tau_{\text{NS}}^e ({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot ({}^{t'}\nabla N^{(\alpha)}) (\delta\mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot ({}^{t'}\nabla \cdot {}^{t'}\mathbf{T}'_F)) dV = 0 \quad (159)$$

但し、式 (159) では有限要素が一次であるという仮定を用いた。以上より、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式について、 $\delta\mathbf{v}^{(\alpha)}$  は任意の値を取りうることを考慮すれば、次式

(160) のように空間方向に離散化した有限要素方程式が得られる.

$$\begin{aligned}
 & \sum_e \left( {}^t\rho_F(M_F^{(\alpha)(\beta)} + {}^t\tau_{NS}^e({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot \mathbf{A}_F^{(\beta)(\alpha)}) \right) \frac{\partial {}^{t'}\mathbf{v}_F^{(\beta)}}{\partial t} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} \\
 & + {}^t\rho_F({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot \mathbf{A}^{(\alpha)(\beta)} {}^{t'}\mathbf{v}_F^{(\beta)} \\
 & + ({}^t\tau_{NS}^e({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \otimes ({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) : \mathbf{D}_F^{(\alpha)(\beta)}) {}^{t'}\mathbf{v}_F^{(\beta)} \\
 & + ((\text{tr} \mathbf{D}_F^{(\alpha)(\beta)}) \mathbf{I} + \mathbf{D}_F^{(\alpha)(\beta)}) \cdot {}^{t'}\mathbf{v}_F^{(\beta)} \\
 & + (\mathbf{C}_F^{(\alpha)(\beta)} + {}^t\tau_{NS}^e({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot \mathbf{C}_{Fv}^{(\alpha)(\beta)}) {}^{t'}p_F^{(\beta)} \\
 & = \sum_e \left( ({}^t\rho_F M_F^{(\alpha)(\beta)} + {}^t\rho_F {}^t\tau_{NS}^e({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot \mathbf{A}_F^{(\beta)(\alpha)}) {}^{t'}\mathbf{b}_F^{(\beta)} \right. \\
 & \quad \left. {}^{t'}\underline{\mathbf{T}}_{EF}^{(\alpha)} + {}^{t'}\mathbf{T}_{EFI}^{(\alpha)} \quad (\alpha \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \right) \quad (160)
 \end{aligned}$$

後の便宜のため, 式 (160) を次式 (161) のように書き直す.

$$\begin{aligned}
 & \sum_e \left( {}^t\rho_F([M_F] + {}^t\tau_{NS}^e[{}^tM_{FSUPG}]) \frac{\partial \{{}^{t'}\mathbf{v}_F^{(e)}\}}{\partial t'} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} \right. \\
 & + ({}^t\rho_F([{}^tA_F] + {}^t\tau_{NS}^e[{}^tA_{FSUPG}]) + {}^t\mu_F[D_F]) \{{}^{t'}\mathbf{v}_F^{(e)}\} \\
 & + ([C_F] + {}^t\tau_{NS}^e[{}^tC_{FSUPG}]) \{{}^{t'}p_F^{(e)}\} \Big) \\
 & = \sum_e \left( {}^t\rho_F([M_F] + {}^t\tau_{NS}^e[{}^tM_{FSUPG}]) \{{}^{t'}\mathbf{b}_F^e\} + \{{}^{t'}\underline{\mathbf{T}}_{EF}\} + \{{}^{t'}\mathbf{T}_{EFI}\} \right) \quad (161)
 \end{aligned}$$

但し, 各マトリクスは次のように置いた.

$$[M_F] = \begin{bmatrix} M_F^{(1)(1)}[I]_{3 \times 3} & \cdots & M_F^{(1)(n_{\text{node}}^e)}[I]_{3 \times 3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_F^{(n_{\text{node}}^e)(1)}[I]_{3 \times 3} & \cdots & M_F^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)}[I]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (162)$$

$$[{}^tM_{FSUPG}] = \begin{bmatrix} {}^tM_{FSUPG}^{(1)(1)}[I]_{3 \times 3} & \cdots & {}^tM_{FSUPG}^{(1)(n_{\text{node}}^e)}[I]_{3 \times 3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^tM_{FSUPG}^{(n_{\text{node}}^e)(1)}[I]_{3 \times 3}[I]_{3 \times 3} & \cdots & {}^tM_{FSUPG}^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)}[I]_{3 \times 3}[I]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (163)$$

$${}^tM_{FSUPG}^{(\alpha)(\beta)} = ({}^t\mathbf{v}_F - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot {}^{t'}\mathbf{A}_F^{(\alpha)(\beta)} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (164)$$

$$[{}^tA_F] = [{}^tM_{FSUPG}]^T \quad (165)$$

$$[{}^tA_{FSUPG}] = \begin{bmatrix} {}^tA_{FSUPG}^{(1)(1)}[I]_{3 \times 3} & \cdots & {}^tA_{FSUPG}^{(1)(n_{\text{node}}^e)}[I]_{3 \times 3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^tA_{FSUPG}^{(n_{\text{node}}^e)(1)}[I]_{3 \times 3} & \cdots & {}^tA_{FSUPG}^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)}[I]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (166)$$

$${}^t A_{\text{FSUPG}}^{(\alpha)(\beta)} = ({}^t \mathbf{v}_F - {}^t \tilde{\mathbf{v}}_F) \otimes ({}^t \mathbf{v}_F - {}^t \tilde{\mathbf{v}}_F) : \mathbf{D}_F^{(\alpha)(\beta)} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (167)$$

$$[D_F] = \begin{bmatrix} [D_F^{(1)(1)}]_{3 \times 3} & \cdots & [D_F^{(1)(n_{\text{node}}^e)}]_{3 \times 3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [D_F^{(n_{\text{node}}^e)(1)}]_{3 \times 3} [I]_{3 \times 3} & \cdots & [D_F^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)}]_{3 \times 3} [I]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (168)$$

$$[D_F^{(\alpha)(\beta)}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} (D_F^{(\alpha)(\beta)})_{11} + (D_F^{(\alpha)(\beta)})_{ii} & (D_F^{(\alpha)(\beta)})_{12} & (D_F^{(\alpha)(\beta)})_{13} \\ (D_F^{(\alpha)(\beta)})_{21} & (D_F^{(\alpha)(\beta)})_{22} + (D_F^{(\alpha)(\beta)})_{ii} & (D_F^{(\alpha)(\beta)})_{23} \\ (D_F^{(\alpha)(\beta)})_{31} & (D_F^{(\alpha)(\beta)})_{32} & (D_F^{(\alpha)(\beta)})_{33} + (D_F^{(\alpha)(\beta)})_{ii} \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (169)$$

$$[C_F] = \begin{bmatrix} \{C_F^{(1)(1)}\}_3 & \cdots & \{C_F^{(1)(n_{\text{node}}^e)}\}_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{C_F^{(n_{\text{node}}^e)(1)}\}_3 & \cdots & \{C_F^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)}\}_3 \end{bmatrix} \quad (170)$$

$$\{C_F^{(\alpha)(\beta)}\}_3 = \begin{Bmatrix} (C_F^{(\alpha)(\beta)})_1 \\ (C_F^{(\alpha)(\beta)})_2 \\ (C_F^{(\alpha)(\beta)})_3 \end{Bmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (171)$$

$$[{}^t C_{\text{FSUPG}}] = \begin{bmatrix} \{{}^t C_{\text{FSUPG}}^{(1)(1)}\}_3 & \cdots & \{{}^t C_{\text{FSUPG}}^{(1)(n_{\text{node}}^e)}\}_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{{}^t C_{\text{FSUPG}}^{(n_{\text{node}}^e)(1)}\}_3 & \cdots & \{{}^t C_{\text{FSUPG}}^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)}\}_3 \end{bmatrix} \quad (172)$$

$$\{{}^t C_{\text{FSUPG}}^{(\alpha)(\beta)}\}_3 = \begin{Bmatrix} (({}^t v_F)_j - ({}^t \tilde{v}_F)_j)({}^{t'} C_{F_v}^{(\alpha)(\beta)})_{j1} \\ (({}^t v_F)_j - ({}^t \tilde{v}_F)_j)({}^{t'} C_{F_v}^{(\alpha)(\beta)})_{j2} \\ (({}^t v_F)_j - ({}^t \tilde{v}_F)_j)({}^{t'} C_{F_v}^{(\alpha)(\beta)})_{j3} \end{Bmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (173)$$

$$\{{}^{t'} \mathbf{T}_{\text{EF}}\} = \left\{ ({}^{t'} T_{\text{EF}}^{(1)})_1 \quad ({}^{t'} T_{\text{EF}}^{(1)})_2 \quad ({}^{t'} T_{\text{EF}}^{(1)})_3 \quad \cdots \quad ({}^{t'} T_{\text{EF}}^{(n_{\text{node}}^e)})_3 \right\} \quad (174)$$

$$\{{}^{t'} \mathbf{T}_{\text{EFI}}\} = \left\{ ({}^{t'} T_{\text{EFI}}^{(1)})_1 \quad ({}^{t'} T_{\text{EFI}}^{(1)})_2 \quad ({}^{t'} T_{\text{EFI}}^{(1)})_3 \quad \cdots \quad ({}^{t'} T_{\text{EFI}}^{(n_{\text{node}}^e)})_3 \right\} \quad (175)$$

最後に、時間方向に離散化を行う。まず、速度の ALE 配置に基づく速度の時間微分を差

分法により離散化して、次式 (176) を得る.

$$\begin{aligned}
 & \sum_e ({}^t\rho_F([M_F] + {}^t\tau_{NS}^e[{}^tM_{FSUPG}]) \frac{\{{}^{t'}\mathbf{v}_F^{(e)}\} - \{{}^t\mathbf{v}_F^{(e)}\}}{\Delta t} \\
 & \quad + ({}^t\rho_F([{}^tA_F] + {}^t\tau_{NS}^e[{}^tA_{FSUPG}]) + {}^t\mu_F[D_F])(\gamma_F\{{}^{t'}\mathbf{v}_F^{(e)}\} + (1 - \gamma_F)\{{}^t\mathbf{v}_F^{(e)}\}) \\
 & \quad + ([C_F] + {}^t\tau_{NS}^e[{}^tC_{FSUPG}])\{{}^{t'}p_F^{(e)}\}) \\
 & = \sum_e ({}^t\rho_F([M_F] + {}^t\tau_{NS}^e[M_{FSUPG}])\{{}^{t'}\mathbf{b}_F^e\} + \{{}^{t'}\overline{\mathbf{T}}_{EF}\} + \{{}^{t'}\mathbf{T}_{EFI}\}) \quad (176)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\gamma_F$  は差分法に関するパラメータである．次に、式 (176) について、速度について Newmark- $\beta$  法を適用する．Newmark- $\beta$  法のパラメータは、構造のものに一致させる．このとき、速度は次式 (177) のように近似される．

$${}^{t'}\mathbf{v}_F \approx \beta_{S4}({}^{t'}\mathbf{u}_F - {}^t\mathbf{u}_F) - \beta_{S5}{}^t\mathbf{v}_F - \beta_{S6}{}^t\mathbf{a}_F \quad (177)$$

ここで、 $\beta_{S4}$ ,  $\beta_{S5}$ ,  $\beta_{S6}$  はそれぞれ次式 (178), (179), (180) のように置いた．

$$\beta_{S4} = \frac{\gamma_S}{\beta_S \Delta t} \quad (178)$$

$$\beta_{S5} = \frac{\gamma_S - \beta_S}{\beta_S} \quad (179)$$

$$\beta_{S6} = \Delta t \frac{\gamma_S - 2\beta_S}{2\beta_S} \quad (180)$$

ここで、 $\gamma_S$  は Newmark- $\beta$  法に関するパラメータであり、本研究では  $\gamma_S = 0.5$  で固定する．式 (177) を式 (176) に代入して、次式 (181) を得る．

$$\sum_e ([{}^tK_{FVV}]\{{}^{t'}\mathbf{u}_F^e\} + [{}^tK_{FVP}]\{{}^{t'}p_F^e\}) = \sum_e \{{}^{t'}F_V\} \quad (181)$$

但し、 $[{}^tK_{FVV}]$ ,  $[{}^tK_{FVP}]$ ,  $\{{}^{t'}F_{FV}\}$  はそれぞれ次式 (182), (183), (184) のように置いた．

$$\begin{aligned}
 [{}^tK_{FVV}] &= \beta_{S4} \left( \frac{{}^t\rho_F}{\Delta t} ([M_F] + {}^t\tau_{NS}^e[{}^tM_{FSUPG}]) \right. \\
 & \quad \left. + \gamma_F ({}^t\rho_F([{}^tA_F] + {}^t\tau_{NS}^e[{}^tA_{FSUPG}]) + {}^t\mu_F[D_F]) \right) \quad (182)
 \end{aligned}$$

$$[{}^tK_{FVP}] = [C_F] + {}^t\tau_{NS}^e[{}^tC_{FSUPG}] \quad (183)$$



$$\begin{aligned}
& \{ {}^{t'}F_{\text{FV}} \} \\
&= {}^{t'}\rho_{\text{F}}([M_{\text{F}}] + {}^{t'}\tau_{\text{NS}}^e[M_{\text{FSUPG}}])\{ {}^{t'}\mathbf{b}_{\text{F}}^e \} + \{ {}^{t'}\underline{\mathbf{T}}_{\text{EF}} \} + \{ {}^{t'}\mathbf{T}_{\text{EFI}} \} \\
&+ \frac{{}^{t'}\rho_{\text{F}}}{\Delta t}([M_{\text{F}}] + {}^{t'}\tau_{\text{NS}}^e[M_{\text{FSUPG}}])(\beta_{\text{S4}}\{ {}^t\mathbf{u}_{\text{F}}^{(e)} \} + (1 + \beta_{\text{S5}})\{ {}^t\mathbf{v}_{\text{F}}^{(e)} \} + \beta_{\text{S6}}\{ {}^t\mathbf{a}_{\text{F}}^{(e)} \}) \\
&+ ({}^t\rho_{\text{rho}}([A_{\text{F}}] + {}^{t'}\tau_{\text{NS}}^e[A_{\text{FSUPG}}]) + {}^{t'}\mu_{\text{F}}[D_{\text{F}}]) \\
&\quad (\beta_{\text{S4}}\gamma_{\text{F}}\{ {}^t\mathbf{u}_{\text{F}}^{(e)} \} + (1 - \gamma_{\text{F}} + \beta_{\text{S5}}\gamma_{\text{F}})\{ {}^t\mathbf{v}_{\text{F}}^{(e)} \}) + \beta_{\text{S6}}\gamma_{\text{F}}\{ {}^t\mathbf{a}_{\text{F}}^{(e)} \}
\end{aligned} \tag{184}$$

続いて、非圧縮性流体の連続の式について、Galerkin 最小二乗法による有限要素方程式を求める。この場合、残差  ${}^{t'}\mathbf{r}_{\text{conti}}$  に加え、各節点において式 (132) が各有限要素内で重み付き残差法の意味で成り立つように定式化する。従って、解くべき方程式は次式 (185) のように与えられる。

$$\sum_e \int_{{}^{t'}\Omega_{\text{F}}^e} ({}^{t'}r_{\text{conti}}\delta p + \frac{1}{{}^{t'}\rho_{\text{F}}^e}\delta p^{(\alpha)} {}^{t'}\tau_{\text{conti}}^e {}^{t'}r_{\text{NS}}({}^{t'}\nabla N^{(\alpha)}))dV = 0 \tag{185}$$

ここで、 $\delta p$  は重み関数である。また、 ${}^{t'}\tau_{\text{conti}}^e$  は安定化係数と呼ばれるパラメータで、次式 (186) のように定義される。

$${}^{t'}\tau_{\text{conti}}^e = {}^t\tau_{\text{NS}}^e \tag{186}$$

式 (185) から有限要素方程式を得るため、各項を計算していくと、各項や各項中で定義されるマトリクスは次式 (187)-(194) のように得られる。

$$\sum_e \int_{{}^{t'}\Omega_{\text{F}}^e} \delta p {}^{t'}\nabla \cdot {}^{t'}\mathbf{v}_{\text{F}}dV = \sum_e \delta p^{(\alpha)} \mathbf{C}^{(\beta)(\alpha)} \cdot {}^{t'}\mathbf{v}_{\text{F}}^{(\beta)} \tag{187}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_e \int_{{}^{t'}\Omega^e} \delta p^{(\alpha)} {}^{t'}\tau_{\text{conti}}({}^{t'}\nabla N^{(\alpha)}) \cdot \frac{\partial {}^{t'}\mathbf{v}_{\text{F}}}{\partial t'} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} dV \\
&= \sum_e \delta p^{(\alpha)} {}^{t'}\tau_{\text{conti}} \mathbf{M}_{\text{Fp}}^{(\alpha)(\beta)} \cdot \frac{\partial {}^{t'}\mathbf{v}_{\text{F}}^{(\beta)}}{\partial t'} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}}
\end{aligned} \tag{188}$$

$$\mathbf{M}_{\text{Fp}}^{(\alpha)(\beta)} = \int_{{}^{t'}\Omega_{\text{F}}^e} ({}^{t'}\nabla N^{(\alpha)})N^{(\beta)}dV \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \tag{189}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_e \int_{{}^{t'}\Omega_{\text{F}}^e} \delta p^{(\alpha)} {}^{t'}\tau_{\text{conti}}({}^{t'}\nabla N^{(\alpha)}) \cdot ((({}^t\mathbf{v}_{\text{F}} - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_{\text{F}}) \cdot {}^{t'}\nabla) {}^{t'}\mathbf{v}_{\text{F}})dV \\
&= \sum_e \delta p^{(\alpha)} {}^{t'}\tau_{\text{conti}}({}^t\mathbf{v}_{\text{F}} - {}^t\tilde{\mathbf{v}}_{\text{F}}) \cdot \mathbf{C}_{\text{Fv}}^{(\beta)(\alpha)} \cdot {}^{t'}\mathbf{v}_{\text{F}}^{(\beta)}
\end{aligned} \tag{190}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_e \int_{t' \Omega_F^e} \delta p^{(\alpha)} t \tau_{\text{conti}} t \rho_F (t' \nabla N^{(\alpha)}) \cdot t' \mathbf{b}_F dV \\
 & = - \sum_e \delta p^{(\alpha)} t \tau_{\text{conti}} \mathbf{M}_{\text{Fp}}^{(\alpha)(\beta)} \cdot t \rho_F t' \mathbf{b}_F^{(\beta)}
 \end{aligned} \tag{191}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_e \int_{t' \Omega_F^e} \delta p^{(\alpha)} \frac{t \tau_{\text{conti}}}{t \rho_F^e} (t' \nabla N^{(\alpha)}) \cdot t' \nabla t p_F dV \\
 & = \sum_e \delta p^{(\alpha)} \frac{t \tau_{\text{conti}}}{t \rho_F^e} C_{\text{Fp}}^{(\alpha)(\beta)} t p_F^{(\beta)}
 \end{aligned} \tag{192}$$

$$C_{\text{Fp}}^{(\alpha)(\beta)} = \int_{t' \Omega_F^e} (t' \nabla N^{(\alpha)}) \cdot (t' \nabla N^{(\beta)}) dV \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \tag{193}$$

$$- \sum_e \int_{t' \Omega_F^e} \delta p^{(\alpha)} \frac{t \mu_F t \tau_{\text{conti}}}{t \rho_F^e} (t' \nabla N^{(\alpha)}) \cdot (t' \nabla \cdot \mathbf{T}'_F) dV = 0 \tag{194}$$

但し、式 (194) では有限要素が一次であるという仮定を用いた。以上より、非圧縮性流体の連続の式について、 $\delta p^{(\alpha)}$  は任意の値を取りうることを考慮すれば、解くべき有限要素方程式が次式 (201) のように得られる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_e \left( t \tau_{\text{conti}} \mathbf{M}_{\text{Fp}}^{(\alpha)(\beta)} \cdot \frac{\partial t' \mathbf{v}_F^{(\beta)}}{\partial t'} \right) \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} + (C^{(\beta)(\alpha)} + t \tau_{\text{conti}} (t \mathbf{v}_F - t \tilde{\mathbf{v}}_F) \cdot C_{\text{Fv}}^{(\beta)(\alpha)}) \cdot t' \mathbf{v}_F^{(\beta)} \\
 & + \frac{t \tau_{\text{conti}}}{t \rho_F^e} C_{\text{Fp}}^{(\alpha)(\beta)} t p_F^{(\beta)}) = \sum_e \delta p^{(\alpha)} t \tau_{\text{conti}} t \rho_F \mathbf{M}_{\text{Fp}}^{(\alpha)(\beta)} \cdot t' \mathbf{b}_F^{(\beta)} \\
 & (\alpha \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e])
 \end{aligned} \tag{195}$$

後の便宜のため、式 (195) を次式 (196) のように書き直す。

$$\begin{aligned}
 & \sum_e \left( t \tau_{\text{conti}} [M_{\text{FPSPG}}] \cdot \frac{\partial \{t' \mathbf{v}_F^{(e)}\}}{\partial t'} \right) \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} + ([C_F]^T + t \tau_{\text{conti}} [t C_{\text{FSUPG}}]^T) \{t' \mathbf{v}_F^{(e)}\} \\
 & + \frac{t \tau_{\text{conti}}}{t \rho_F^e} [C_P] \{t p_F^{(e)}\}) = \sum_e t \tau_{\text{conti}} [M_{\text{FPSPG}}] \{t' \mathbf{b}_F^{(e)}\}
 \end{aligned} \tag{196}$$

但し、各マトリクスを次のように置いた。

$$[M_{\text{FPSPG}}] = \begin{bmatrix} \{M_{\text{FPSPG}}^{(1)(1)}\}_3^T & \cdots & \{M_{\text{FPSPG}}^{(1)(n_{\text{node}}^e)}\}_3^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{M_{\text{FPSPG}}^{(n_{\text{node}}^e)(1)}\}_3^T & \cdots & \{M_{\text{FPSPG}}^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)}\}_3^T \end{bmatrix} \tag{197}$$

$$\{M_{\text{FPSPG}}^{(\alpha)(\beta)}\}_3 = \begin{Bmatrix} (M_{\text{FP}}^{(\alpha)(\beta)})_1 \\ (M_{\text{FP}}^{(\alpha)(\beta)})_2 \\ (M_{\text{FP}}^{(\alpha)(\beta)})_3 \end{Bmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (198)$$

$$[C_P] = \begin{bmatrix} C_{\text{FP}}^{(1)(1)} & \cdots & C_{\text{FP}}^{(1)(n_{\text{node}}^e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{\text{FP}}^{(n_{\text{node}}^e)(1)} & \cdots & C_{\text{FP}}^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)} \end{bmatrix} \quad (199)$$

最後に、時間方向に離散化を行う。まず、速度の ALE 配置に基づく速度の時間微分を差分法により離散化して、次式 (200) を得る。

$$\begin{aligned} \sum_e ({}^t\tau_{\text{conti}}[M_{\text{FPSPG}}] \frac{\{ {}^t\mathbf{v}_F^{(e)} \} - \{ {}^t\mathbf{v}_F^{(e)} \}}{\Delta t} \\ + ([C_F]^T + {}^t\tau_{\text{conti}}[{}^tC_{\text{FSUPG}}]^T)(\gamma_F \{ {}^t\mathbf{v}_F^{(e)} \} + (1 - \gamma_F) \{ {}^t\mathbf{v}_F^{(e)} \}) \\ + \frac{{}^t\tau_{\text{conti}}}{{}^t\rho_F^e} [C_P] \{ {}^t\mathbf{p}_F^{(e)} \}) = \sum_e {}^t\tau_{\text{conti}}[M_{\text{FPSPG}}] \{ {}^t\mathbf{b}_F^{(e)} \} \end{aligned} \quad (200)$$

次に、式 (200) について、速度について Newmark- $\beta$  法を適用する。Newmark- $\beta$  法のパラメータは、構造のものに一致させる。式 (177) を式 (200) に代入して、次式 (201) を得る。

$$\sum_e ([{}^tK_{\text{FPV}}] \{ {}^t\mathbf{u}_F^e \} + [{}^tK_{\text{FPP}}] \{ {}^t\mathbf{p}_F^e \}) = \sum_e \{ {}^tF_{\text{FP}} \} \quad (201)$$

但し、 $[{}^tK_{\text{FPV}}]$ ,  $[{}^tK_{\text{FPP}}]$ ,  $\{ {}^tF_{\text{FP}} \}$  はそれぞれ次式 (202), (203), (204) のように置いた。

$$[K_{\text{FPV}}] = \beta_{S4} \left( \frac{{}^t\tau_{\text{conti}}}{\Delta t} [M_{\text{FPSPG}}] + ([C_F]^T + {}^t\tau_{\text{conti}}[{}^tC_{\text{FSUPG}}]^T) \right) \quad (202)$$

$$[K_{\text{FPP}}] = \frac{{}^t\tau_{\text{conti}}}{{}^t\rho_F^e} [C_P] \quad (203)$$

$$\begin{aligned} & \{ {}^tF_{\text{FP}} \} \\ = & \sum_e \left( \frac{{}^t\tau_{\text{conti}}}{\Delta t} [M_{\text{FPSPG}}] (\beta_{S4} \{ {}^t\mathbf{u}_F^{(e)} \} + (1 + \beta_{S5}) \{ {}^t\mathbf{v}_F^{(e)} \} + \beta_{S6} \{ {}^t\mathbf{v}_F^{(e)} \}) \right. \\ & + ([C_F]^T + {}^t\tau_{\text{conti}}[{}^tC_{\text{FSUPG}}]^T) \\ & \quad (\beta_{S4}\gamma_F \{ {}^t\mathbf{u}_F^{(e)} \} + (1 - \gamma_F + \beta_{S5}\gamma_F) \{ {}^t\mathbf{v}_F^{(e)} \} + \beta_{S6}\gamma_F \{ {}^t\mathbf{v}_F^{(e)} \}) \\ & \left. + {}^t\tau_{\text{conti}}[M_{\text{FPSPG}}] \{ {}^t\mathbf{b}_F^{(e)} \} \right) \end{aligned} \quad (204)$$

以上より、流体領域の有限要素方程式は、次式 (205) のように得られる。

$$\begin{bmatrix} [{}^t K_{FVV}] & [{}^t K_{FVP}] \\ [{}^t K_{FPV}] & [{}^t K_{FPP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ {}^t \mathbf{u}_F^e \} \\ \{ {}^t p_F^e \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ {}^t F_{FV} \} \\ \{ {}^t F_{FP} \} \end{Bmatrix} \quad (205)$$

式 (205) は未知変数について線形なので、Newton-Raphson 法の反復ループは次のように求まる。また、この Newton-Raphson 法の反復ループは一回で収束する。

$$\begin{Bmatrix} \{ {}^t \mathbf{u}_F^e \}^{(0)} \\ \{ {}^t p_F^e \}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ {}^t \mathbf{u}_F^e \} \\ \{ {}^t p_F^e \} \end{Bmatrix} \quad (206)$$

$$\begin{bmatrix} [{}^t K_{FVV}] & [{}^t K_{FVP}] \\ [{}^t K_{FPV}] & [{}^t K_{FPP}] \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \{ {}^t \Delta \mathbf{u}_F^e \} \\ \{ {}^t \Delta p_F^e \} \end{Bmatrix}^{(n+1)} = \begin{Bmatrix} \{ {}^t F_{FV} \} \\ \{ {}^t F_{FP} \} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{ {}^t Q_{FV} \} \\ \{ {}^t Q_{FP} \} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (207)$$

$$\begin{Bmatrix} \{ {}^t \mathbf{u}_{FV} \} \\ \{ {}^t p_{FP} \} \end{Bmatrix}^{(n+1)} = \begin{Bmatrix} \{ {}^t \mathbf{u}_{FV} \} \\ \{ {}^t p_{FP} \} \end{Bmatrix}^{(n)} + \begin{Bmatrix} \{ {}^t \Delta \mathbf{u}_{FV} \} \\ \{ {}^t \Delta p_{FP} \} \end{Bmatrix}^{(n+1)} \quad (208)$$

但し、内力項に関しては次式 (209) のように置いた。

$$\begin{Bmatrix} \{ {}^t Q_{FV} \} \\ \{ {}^t Q_{FP} \} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [{}^t K_{FVV}] & [{}^t K_{FVP}] \\ [{}^t K_{FPV}] & [{}^t K_{FPP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ {}^t \mathbf{u}_F^e \} \\ \{ {}^t p_F^e \} \end{Bmatrix} \quad (209)$$

#### 4.2.3 レベルセット関数の移流

移流方程式は、移流項が数値振動の原因となるため、特別な取り扱いが必要になる。本論文では、SUPG 法 [27] により移流方程式の定式化を行う。有限要素が一次要素である場合は、Galerkin 最小二乗法による定式化によって、SUPG 法に相当する式が得られる。移流速度には、先述の SUPG/PSPG 法に基づく非圧縮性 Newton 流体のソルバを用いて計算した現時刻での流速  ${}^t \mathbf{v}$  を既知の値として用いる。また、ALE メッシュの移動速度も、 ${}^t \tilde{\mathbf{v}}$  を既知の値として用いる。

詳細な手続きについては、4.2.2 節で述べてあるので省略する。最終的に得られる Newton-Raphson 法の反復ループは、次のようになる。この Newton-Raphson 法の反復ループは、一回で収束する。

$$\{ {}^t \phi^e \}^{(0)} = \{ {}^t \phi^e \} \quad (210)$$

$$\sum_e [{}^t K_L]^{(n)} \{ {}^t \Delta \phi^e \}^{(n+1)} = \sum_e (\{ {}^t F_L \} - \{ {}^t Q_L \}^{(n)}) \quad (211)$$

$$\{ {}^t \phi^e \}^{(n+1)} = \{ {}^t \phi^e \}^{(n)} + \{ {}^t \Delta \phi^e \}^{(n+1)} \quad (212)$$

ここで、各マトリクス、ベクトルは次のように与えられる.

$$[{}^t K_L] = \frac{{}^t \rho_F}{\Delta t} ([M_L] + {}^t \tau_{NS}^e [{}^t M_{LSUPG}]) + \gamma_F ([{}^t A_L] + {}^t \tau_{NS}^e [{}^t A_{LSUPG}]) \quad (213)$$

$$[M_L] = \begin{bmatrix} M_F^{(1)(1)} & \cdots & M_F^{(1)(n_{\text{node}}^e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_F^{(n_{\text{node}}^e)(1)} & \cdots & M_F^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)} \end{bmatrix} \quad (214)$$

$$[{}^t M_{LSUPG}] = \begin{bmatrix} {}^t M_{FSUPG}^{(1)(1)} & \cdots & {}^t M_{FSUPG}^{(1)(n_{\text{node}}^e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t M_{FSUPG}^{(n_{\text{node}}^e)(1)} & \cdots & {}^t M_{FSUPG}^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)} \end{bmatrix} \quad (215)$$

$$[{}^t A_L] = [{}^t M_{LSUPG}]^T \quad (216)$$

$$[{}^t A_{LSUPG}] = \begin{bmatrix} {}^t A_{FSUPG}^{(1)(1)} & \cdots & {}^t A_{FSUPG}^{(1)(n_{\text{node}}^e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^t A_{FSUPG}^{(n_{\text{node}}^e)(1)} & \cdots & {}^t A_{FSUPG}^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)} \end{bmatrix} \quad (217)$$

$$\{{}^t F_L\} = \left( \frac{{}^t \rho_F}{\Delta t} ([M_L] + {}^t \tau_{NS}^e [{}^t M_{LSUPG}]) - (1 - \gamma_F) ([{}^t A_L] + {}^t \tau_{NS}^e [{}^t A_{LSUPG}]) \right) \{{}^t \phi^e\} \quad (218)$$

$$\{{}^t Q_L\} = [{}^t K_L] \{{}^t Q_L\} \quad (219)$$

#### 4.2.4 気液境界面の平滑化

本論文では、流体領域における有限要素  $\Omega^e$  内で密度  ${}^t \rho^e$ 、粘度  ${}^t \mu^e$  はいずれも要素内の局所座標に依存しないものとして定式化する.  ${}^t \rho^e$ 、と  ${}^t \mu^e$  は、式 (39), (40) に基づいた有限要素内の平均値として、それぞれ次式 (220), (221) で定義される要素平均値を用いる.

$${}^t \rho^e = \frac{1}{V} \int_{{}^t \Omega^e} (\rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) {}^t H_\epsilon^e) dV \quad (220)$$

$${}^t \mu^e = \frac{1}{V} \int_{{}^t \Omega^e} (\mu_2 + (\mu_1 - \mu_2) {}^t H_\epsilon^e) dV \quad (221)$$

ここで、 ${}^t H_\epsilon^e$  は要素  $e$  における Heaviside 関数であり、式 (222) 次式 (222) により計算する.

$${}^t H_\epsilon^e = \begin{cases} 0 & N^{(\alpha)} {}^t \phi^{(\alpha)} < -\epsilon \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{N^{(\alpha)} {}^t \phi^{(\alpha)}}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin \left( \frac{\pi N^{(\alpha)} {}^t \phi^{(\alpha)}}{\epsilon} \right) \right) & |N^{(\alpha)} {}^t \phi^{(\alpha)}| \leq \epsilon \\ 1 & N^{(\alpha)} {}^t \phi^{(\alpha)} > \epsilon \end{cases} \quad (222)$$

なお、式 (222) は局所座標に関する無理関数であるため、式 (220), (221) を Gauss 求積で計算する際は、本来多くの積分点数をとる必要がある。本論文では、計算時間の観点から積分点数は各軸方向に 2 とした。

#### 4.2.5 レベルセット関数の再初期化

本論文では、レベルセット関数の再初期化についても、線形な移流方程式に変形したうえで SUPG 法 [27] により定式化を行う。有限要素が一次要素である場合は、Galerkin 最小二乗法による定式化によって、SUPG 法に相当する式が得られる。移流速度は、前の時刻における再初期化式の移流速度  $\hat{t}\mathbf{w}$  を用いる。

詳細な手続きについては、4.2.2 節で述べてあるので省略する。最終的に得られる Newton-Raphson 法の反復ループは、次のようになる。この Newton-Raphson 法の反復ループは、一回で収束する。

$$\{\hat{t}'\phi^e\}^{(0)} = \{\hat{t}\phi^e\} \quad (223)$$

$$\sum_e [\hat{t}'K_R]^{(n)} \{\hat{t}'\Delta\phi^e\}^{(n+1)} = \sum_e \{\hat{t}'F_R\} - \{\hat{t}'Q_R\}^{(n)} \quad (224)$$

$$\{\hat{t}'\phi^e\}^{(n+1)} = \{\hat{t}'\phi^e\}^{(n)} + \{\hat{t}'\Delta\phi^e\}^{(n+1)} \quad (225)$$

ここで、各マトリクス、ベクトルは次のように与えられる。

$$[\hat{t}'K_R] = \frac{\hat{t}\rho_F}{\Delta t} ([M_R] + \hat{t}\tau_{NS}^e [M_{RSUPG}]) + \gamma_F ([\hat{t}A_R] + \hat{t}\tau_{NS}^e [\hat{t}A_{RSUPG}]) \quad (226)$$

$$[M_R] = \begin{bmatrix} M_F^{(1)(1)} & \cdots & M_F^{(1)(n_{\text{node}}^e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_F^{(n_{\text{node}}^e)(1)} & \cdots & M_F^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)} \end{bmatrix} \quad (227)$$

$$[\hat{t}M_{RSUPG}] = \begin{bmatrix} \hat{t}M_{RSUPG}^{(1)(1)} & \cdots & \hat{t}M_{RSUPG}^{(1)(n_{\text{node}}^e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{t}M_{RSUPG}^{(n_{\text{node}}^e)(1)} & \cdots & \hat{t}M_{RSUPG}^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)} \end{bmatrix} \quad (228)$$

$$\hat{t}M_{RSUPG}^{(\alpha)(\beta)} = \hat{t}\mathbf{w} \cdot \mathbf{A}_F^{(\alpha)(\beta)} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (229)$$

$$[\hat{t}A_R] = [\hat{t}M_{RSUPG}]^T \quad (230)$$

$$[\hat{t}A_{\text{RSUPG}}] = \begin{bmatrix} \hat{t}A_{\text{RSUPG}}^{(1)(1)} & \cdots & \hat{t}A_{\text{RSUPG}}^{(1)(n_{\text{node}}^e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{t}A_{\text{RSUPG}}^{(n_{\text{node}}^e)(1)} & \cdots & \hat{t}A_{\text{RSUPG}}^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)} \end{bmatrix} \quad (231)$$

$$\hat{t}A_{\text{RSUPG}}^{(\alpha)(\beta)} = \hat{t}\mathbf{w} \otimes \hat{t}\mathbf{w} : \mathbf{D}_{\text{F}}^{(\alpha)(\beta)} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (232)$$

$$\begin{aligned} \{\hat{t}'F_{\text{R}}\} = & \left( \frac{\hat{t}\rho_{\text{F}}}{\Delta t} ([M_{\text{L}}] + \hat{t}\tau_{\text{NS}}^e [\hat{t}M_{\text{LSUPG}}]) \right. \\ & \left. - (1 - \gamma_{\text{F}})([\hat{t}A_{\text{L}}] + \hat{t}\tau_{\text{NS}}^e [\hat{t}A_{\text{LSUPG}}]) \right) \{\hat{t}\phi^e\} + \\ & S_{\epsilon}(\phi_0)(\{N\} + \hat{t}\tau_{\text{NS}}^e \{N_{\text{RSUPG}}\}) \end{aligned} \quad (233)$$

$$\{N\} = \{N^{(1)} \quad \cdots \quad N^{(n_{\text{node}}^e)}\}^{\text{T}} \quad (234)$$

$$\{N_{\text{RSUPG}}\} = \left\{ \hat{t}\mathbf{w} \cdot (\hat{t}\nabla N^{(1)}) \quad \cdots \quad \hat{t}\mathbf{w} \cdot (\hat{t}\nabla N^{(n_{\text{node}}^e)}) \right\}^{\text{T}} \quad (235)$$

$$\{\hat{t}'Q_{\text{R}}\} = [\hat{t}K_{\text{R}}]\{\hat{t}'\phi^e\} \quad (236)$$

#### 4.2.6 体積補正の離散化

要素  $\Omega^e$  における流体 1 の体積と面積は、式 (46), (47) に基づいて、それぞれ次式 (237), (238) のように計算される。

$${}^{t'}V_{\text{F1}}^e = \int_{\Omega^e} {}^{t'}H_{\epsilon}^e dV \quad (237)$$

$${}^{t'}S_{\text{F1}}^e = \int_{\Omega^e} \frac{d{}^{t'}H_{\epsilon}^e}{d{}^{t'}\phi} dV \quad (238)$$

ここで、 ${}^{t'}H_{\epsilon}^e / {}^{t'}\phi$  は式 (48) に基づいて、次式 (239) のように計算する。

$$\frac{d{}^{t'}H_{\epsilon}^e}{d{}^{t'}\phi} = \begin{cases} 0 & |N^{(\alpha)} {}^{t'}\phi^{(\alpha)}| > \epsilon \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \cos\left(\frac{\pi N^{(\alpha)} {}^{t'}\phi^{(\alpha)}}{\epsilon}\right) \right) & |N^{(\alpha)} {}^{t'}\phi^{(\alpha)}| \leq \epsilon \end{cases} \quad (239)$$

このとき、時刻  $t'$  でのレベルセットの補正量  ${}^{t'}\hat{L}_{\text{err}}$  は、次式 (240) のように与えられる。

$${}^{t'}\hat{L}_{\text{err}} = \frac{\sum_{e=1}^{n_e} {}^{t'}V_{\text{F1}}^e - \sum_{e=1}^{n_e} {}^0V_{\text{F1}}^e}{\sum_e {}^{t'}S_{\text{F1}}^e} \quad (240)$$

再初期化した後の全節点レベルセット値に  ${}^{t'}\hat{L}_{\text{err}}$  を加えることで、体積補正がなされる。

## 4.2.7 ALE メッシュの制御

ALE メッシュの制御に関する支配方程式は、Galerkin 法で定式化する．最終的な Newton-Raphson 法の反復ループは、次のように得られる．なお、この反復ループは 1 回で収束する．

$$\{ {}^t \mathbf{y}^e \}^{(0)} = \{ {}^t \mathbf{y}^e \} \quad (241)$$

$$\sum_e [{}^t K_{\text{ALE}}]^{(n)} \{ {}^t \Delta \mathbf{y}^e \}^{(n+1)} = \sum_e (\{ {}^t F_{\text{ALE}} \} - \{ {}^t Q_{\text{ALE}} \}^{(n)}) \quad (242)$$

$$\{ {}^t \mathbf{y}^e \}^{(n+1)} = \{ {}^t \mathbf{y}^e \}^{(n)} + \{ {}^t \Delta \mathbf{y}^e \}^{(n+1)} \quad (243)$$

ここで、各マトリクス、ベクトルは次のように与えられる．

$$[{}^t K_{\text{ALE}}] = \left\{ \begin{array}{ccc} D_{\text{ALE}}^{(1)(1)} [I]_{3 \times 3} & \cdots & D_{\text{ALE}}^{(1)(n_{\text{node}}^e)} [I]_{3 \times 3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{\text{ALE}}^{(n_{\text{node}}^e)(1)} [I]_{3 \times 3} & \cdots & D_{\text{ALE}}^{(n_{\text{node}}^e)(n_{\text{node}}^e)} [I]_{3 \times 3} \end{array} \right\} \quad (244)$$

$$D_{\text{ALE}}^{(\alpha)(\beta)} = ({}^t \nabla N^{(\alpha)}) \cdot ({}^t \nabla N^{(\beta)}) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^e]) \quad (245)$$

$$\{ {}^t Q_{\text{ALE}} \} = [{}^t K_{\text{ALE}}] \{ {}^t \mathbf{y}^e \} \quad (246)$$

## 4.3 内点法による接触アルゴリズム

今、接触法線方向は時刻  $t$  における方向に固定するものとする．このとき、node-to-surface 型の定式化により、次式 (247) のように接触力項は離散化される．

$$\sum_{i \in NG_C} {}^t r_C^{(i)} \{ {}^t T_C^{(i)} \} = \{ \mathbf{0} \} \quad (247)$$

ここで、 ${}^t r_{C;i}$  は全体節点番号  $i$  の節点における接触力を表す未知変数、 $NG_C$  は接触を指定した面に対して接触している節点の集合である．接触を指定した面を master 面といい、master 面に対して接触しうる節点を slave 節点という．本節では、一部物理量について、節点番号の表示を文字右上に括弧付きで添え字するのではなく、装飾なしで右下に添え字する．物理量について、どの文字が節点番号に対応しているかはその都度述べる．ま



た,  $\{t' T_C\}$  は次式のように定義される.

$$\{t' T_{C;i}\} = \begin{Bmatrix} t n_1^{(i)} t N^{(i)} \\ t n_2^{(i)} t N^{(i)} \\ t n_3^{(i)} t N^{(i)} \\ t n_1^{(i)} t N^{(i;1)} \\ t n_2^{(i)} t N^{(i;1)} \\ t n_3^{(i)} t N^{(i;1)} \\ t n_1^{(i)} t N^{(i;1)} \\ \vdots \\ t n_3^{(i)} t N^{(i;n_{\text{node}}^{s;i})} \end{Bmatrix} \quad (i \in NG_C) \quad (248)$$

ここで,  $t n_j^{(i)}$  ( $i \in NG_C, j \in \mathbb{N}[1, 3]$ ) は全体節点番号  $i$  の節点に対する master 面の法線ベクトル,  $t N^{(i;n_{\text{node}}^{s;j})}$  ( $i \in NG_C, j \in \mathbb{N}[1, n_{\text{node}}^s]$ ) は全体節点番号  $i$  の節点に対する master 面  $s$  における局所節点番号 ( $j$ ) の節点を持つ形状関数,  $n_{\text{node}}^s$  は全体面番号  $s$  の面要素を持つ節点数である. 形状関数が時間の変数になっているのは, 節点  $i$  に対する slave 節点が時間により変化しうするためである.

warm-start 付き内点法接触では, 式 (247) に加えて, 次の 3 式を解く [23].

$$t' \varphi_i (b_i - \{t' T_{C;i}\}^T \{t' \mathbf{u}_{C;i}\} - t' h_i) = \mu \quad (i \in NG_C) \quad (249)$$

$$(t' r_{C;i} + t' \varphi_i) (\{t' T_{C;i}\}^T \{t' \mathbf{u}_{C;i}\} + t' h_i + t' \xi_i) = \mu_{\text{IPM}} \quad (i \in NG_C) \quad (250)$$

$$t' \xi_i (c_i - t' r_{C;i} - t' \varphi_i) = \mu_{\text{IPM}} \quad (i \in NG_C) \quad (251)$$

ここで,  $t' \varphi_i, t' \xi_i$  ( $i \in NG_C$ ) は全体節点番号  $i$  の節点における warm-start 付内点法で加わる新しい未知変数,  $t' h_i$  ( $i \in NG_C$ ) は全体節点番号  $i$  の節点における初期ギャップ,  $\{t' \mathbf{u}_{C;i}\}$  は全体節点番号  $i$  の節点における slave 節点と master 面における節点における節点変位を順に並べたベクトルである.

$\mu_{\text{IPM}}$  は内点法のためのパラメータであり, 後述する Newton-Raphson 法の  $n$  回目の反復において, 次式のように減少させる [23].

$$\mu_{\text{IPM}}^{(n+1)} = \mu_{\text{IPM}}^{(n)} (\sigma_{\text{IPM}} \eta_{\text{IPM}} + (1 - \sigma_{\text{IPM}})) \quad (252)$$

ここで,  $\eta_{\text{IPM}}$  は  $\mu_{\text{IPM}}$  の減衰率を制御するパラメータであり,  $\sigma_{\text{IPM}}$  は内点法により得られた解が接触反力は正かつギャップは正という条件を満たすように決定される減速パラメータである. 内点法接触アルゴリズムでは,  $\mu_{\text{IPM}}$  を初期値  $\mu_{\text{IPM}}^{(0)}$  から小さくしていく

ことで、未知変数を接触問題の解に収束していく．一方で、 $\mu_{\text{IPM}}$  の初期値が小さすぎる場合や減少が早すぎる場合、正しい解が得られない．そのため、試行錯誤的にこれらの値を決定する必要がある．

さらに、 $b_i, c_i$  ( $i \in NG_C$ ) は warm-start 付内点法のためのパラメータである．これらは Newton-Raphson 法の反復が終了する時点で十分大きな値を取る必要があるため、Newton-Raphson 法の  $n+1$  回目の反復の最初に次のように更新する [23].

$$\text{If } \{ {}^t T_{C;i} \}^T \{ {}^t \mathbf{u}_{C;i} \}^{(n)} > 0.9b_i^{(n)}, \quad \text{then } b_i^{(n+1)} = 10b_i^{(n)} \quad (i \in NG_C) \quad (253)$$

$$\text{If } {}^t r_{C;i}^{(n)} + {}^t \varphi_i^{(n)} > 0.9c_i^{(n)}, \quad \text{then } c_i^{(n+1)} = 10c_i^{(n)} \quad (i \in NG_C) \quad (254)$$

また、その初期値は次のように定める．

$$b_i^{(0)} = 10(\{ {}^t T_{C;i} \}^T \{ {}^t \mathbf{u}_{C;i} \}^{(0)} + 1) \quad (i \in NG_C) \quad (255)$$

$$b_i^{(0)} = (1 + \beta_{\text{IPM}})({}^t r_i^0 + {}^t \varphi_i^0) \quad (i \in NG_C) \quad (256)$$

Newton-Raphson 法の  $n$  回目の反復における接線剛性方程式は、次のように与えられる [23].

$$\sum_{i \in NG_C}^{n_C} \Delta r_{C;i}^{(n+1)} \{ {}^t T_{C;i} \}^{(n)} = \sum_{i \in NG_C}^{n_C} {}^t r_{C;i}^{(n)} \{ {}^t T_{C;i} \}^{(n)} \quad (257)$$

$$\begin{aligned} & {}^t K_{\text{IP1}\varphi;i}^{(n)} \Delta \varphi_i^{(n+1)} + (\{ {}^t K_{\text{IP1u};i} \}^{(n)})^T \{ {}^t \Delta \mathbf{u}_{C;i} \}^{(n+1)} \\ & = \mu_{\text{IPM}}^{(n)} - {}^t Q_{\text{IP1};i}^{(n)} \quad (i \in NG_C) \end{aligned} \quad (258)$$

$$\begin{aligned} & {}^t K_{\text{IP2r};i}^{(n)} \Delta r_{C;i}^{(n+1)} + (\{ {}^t K_{\text{IP2u};i} \}^{(n)})^T \{ {}^t \Delta \mathbf{u}_{C;i} \}^{(n+1)} \\ & + {}^t K_{\text{IP2}\varphi;i}^{(n)} \Delta \varphi_i^{(n+1)} + {}^t K_{\text{IP2}\xi;i}^{(n)} \Delta \xi_i^{(n+1)} = \mu_{\text{IPM}}^{(n)} - {}^t Q_{\text{IP2};i}^{(n)} \quad (i \in NG_C) \end{aligned} \quad (259)$$

$${}^t K_{\text{IP3r};i}^{(n)} \Delta r_{C;i}^{(n+1)} + {}^t K_{\text{IP3}\varphi;i}^{(n)} \Delta \varphi_i^{(n+1)} + {}^t K_{\text{IP3}\xi;i}^{(n)} \Delta \xi_i^{(n+1)} \quad (260)$$

$$= \mu_{\text{IPM}}^{(n)} - {}^t Q_{\text{IP3};i}^{(n)} \quad (i \in NG_C) \quad (261)$$

但し、各係数、ベクトルは次のように置いた．

$${}^t K_{\text{IP1}\varphi;i} = b_i - \{ {}^t T_{C;i} \}^T \{ {}^t \mathbf{u}_{C;i} \} - {}^t h_i \quad (i \in NG_C) \quad (262)$$

$$\{ {}^t K_{IP1u;i} \} = - {}^t \varphi_i \{ {}^t T_{C;i} \} \quad (i \in NG_C) \quad (263)$$

$${}^t Q_{IP1;i} = {}^t \varphi_i (b_i - \{ {}^t T_{C;i} \}^T \{ {}^t \mathbf{u}_{C;i} \} - h_i) \quad (i \in NG_C) \quad (264)$$

$$K_{IP2r;i} = \{ {}^t T_{C;i} \}^T \{ {}^t \mathbf{u}_{C;i} \} - {}^t h_i + {}^t \xi_i \quad (265)$$

$$K_{IP2\varphi;i} = \{ {}^t T_{C;i} \}^T \{ {}^t \mathbf{u}_{C;i} \} - {}^t h_i + {}^t \xi_i \quad (266)$$

$$\{ {}^t K_{IP2u;i} \} = ({}^t r_{C;i} + {}^t \varphi_i) \{ {}^t T_{C;i} \} \quad (267)$$

$${}^t K_{IP2\xi;i} = {}^t r_{C;i} + {}^t \varphi_i \quad (268)$$

$${}^t Q_{IP2;i} = ({}^t r_{C;i} + {}^t \varphi_i) (\{ {}^t T_{C;i} \}^T \{ {}^t \mathbf{u}_{C;i} \} - {}^t h_i + {}^t \xi_i) \quad (269)$$

$${}^t K_{IP3r;i} = - {}^t \xi_i \quad (270)$$

$${}^t K_{IP3\varphi;i} = - {}^t \xi_i \quad (271)$$

$${}^t K_{IP3\xi;i} = c_i - {}^t r_{C;i} - {}^t \varphi_i \quad (272)$$

$${}^t Q_{IP3;i} = {}^t \xi_i (c_i - {}^t r_{C;i} - {}^t \varphi_i) \quad (273)$$

#### 4.4 提案する流体構造接触一体型連成手法

本節では、本論文で提案する流体構造接触一体型連成手法について説明する。

本手法における計算の流れを、Fig. 6 に示す。Fig. 6 に示すように、構造変位場と流体速度場、接触力については、一体型連成手法により連成させ、一度にまとめて解く。その後、ALE メッシュの更新、レベルセットの更新を逐次行っていく。レベルセット関数の再初期化については、各有限要素ごとに Courant 数が 0.1 となるように時間増分を計算し、全要素中最小の時間増分の値  $\Delta \hat{t}$  を時間増分とする。また、擬似的な時間ループにおける時間ステップ数は 3 回とする。

本手法では、構造の変位場、接触力場と流体の速度場、圧力場は一体型連成手法により、一つの剛性方程式によって解く。まず、4.2.2 節で述べたように、流体速度場を Newmark- $\beta$  法により全て流体変位に変換する。次に、流体構造界面で、流体メッシュと構造メッシュの節点は共有されているものとする。流体速度は構造の Newmark- $\beta$  法を用いて定式化したため、これにより構造変位と流体変位を区別する必要がなくなる。よって、以降は構造変位に関して右下の添え字を省略する。さらに、構造変位場の形状関数、

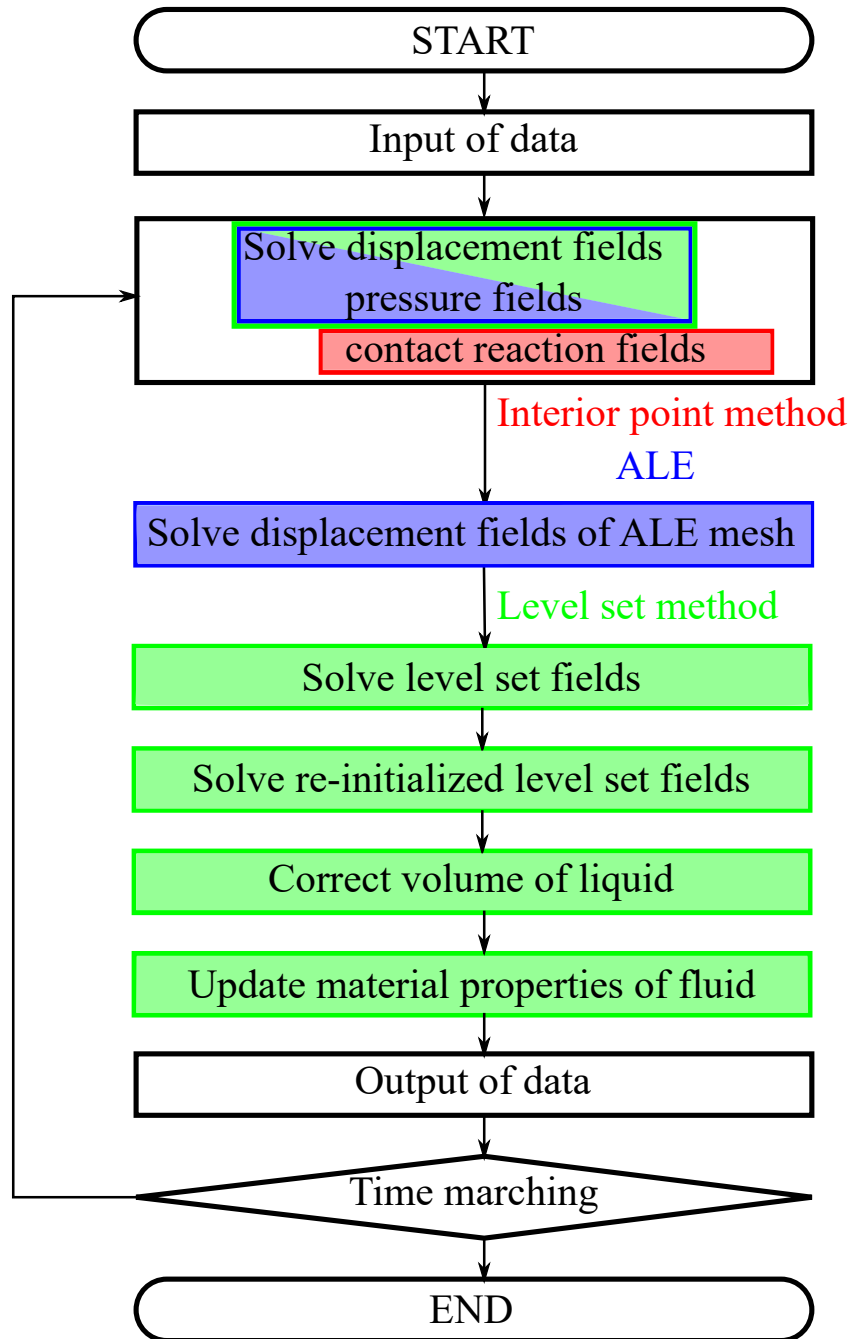


Fig. 6: Procedure of the proposed method

流体速度場の形状関数は互いに一致するものとする．このとき，構造の有限要素非線形方程式と流体の有限要素線形方程式について，流体構造界面で応力ベクトルが釣り合うという条件から，次式 (274) の関係が成り立つ．

$$\{{}^t\mathbf{T}_{\text{ESI}}\} = -\{{}^t\mathbf{T}_{\text{EFI}}\} \quad (274)$$

従って，構造，流体領域の有限要素方程式を導出する過程で出てきた流体構造連成項は，一体型流体構造連成を考えることで消去される．

よって，4.2.1 節と 4.2.2 節で述べた定式化より，接触を考慮しない場合の流体構造連成非線形有限要素方程式を解くための Newton-Raphson 反復ループは，次式のように与えられる．

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [{}^tK_S] + [{}^tK_{FVV}] & [{}^tK_{VP}] \\ [{}^tK_{PV}] & [{}^tK_{PP}] \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \{{}^t\Delta \mathbf{u}^e\} \\ \{{}^t\Delta p^e\} \end{Bmatrix}^{(n+1)} \\ &= \begin{Bmatrix} \{{}^tF_S\} + \{{}^tF_V\} \\ \{{}^tF_P\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{{}^tQ_S\} + \{{}^tQ_V\} \\ \{{}^tQ_P\} \end{Bmatrix}^{(n)} \end{aligned} \quad (275)$$

上式を，内点法アルゴリズムに関する Newton-Raphson 法反復でまとめて解くことで，流体構造接触連成が実現される．

## 4.5 FrontISTR への実装

提案した流体構造接触一体型連成手法は，オープンソースの並列有限要素構造解析ソフトウェアである FrontISTR [33] に実装した．FrontISTR は，構造解析に関しては多くのベンチマークを解くことによって，十分検証がなされている．そこで，提案する流体構造一体型連成手法のうち，構造部に関する計算については，既存のコードをそのまま流用した．

他方，FrontISTR は現時点では流体解析に対応していない．そこで本論文では，FrontISTR を流体解析に適用できるように機能の拡張を行ったうえで，提案した流体構造一体型連成手法を非線形陰的解法のルーチン内に実装した．まず，一つの節点に 4 つの自由度を持つ四面体一次要素を新たに定義した．この要素は，流体計算では第 1～第 3 自由度が流体変位，第 4 自由度が圧力となる．また，レベルセット法に関する計算では，第 1 自由度がレベルセットを表し，残りの 3 自由度は境界条件で固定される．さらに，流体構造

計算では、第 1～第 3 自由度が構造変位となり、第 4 自由度は境界条件で固定される。このような実装をとった理由は、現在の FrontISTR の実装では、要素の自由度は要素ごとに固定であり、変化させることができないためである。レベルセット法の計算など 1 自由度しかない場合の計算でも、4 自由度ある場合と同様の計算時間がかかるが、この点については今後さらに検討していく。

次に、本章で述べた有限要素方程式を計算するモジュールを実装した。FrontISTR は適切に構造化がなされており、接線剛性マトリクス、外力項、内力項を計算するルーチンにおいて、上記要素の場合に実装したモジュールを呼び出すようにすることで、有限要素方程式を並列計算するルーチンを容易に実装することができる。

最後に、Fig. 7 に示すように、時間ステップのループの中に、解くべき物理場を変更するためのループを加えた。これにより、Fig. 6 に示すような分離型連成手法の実現が可能となる。

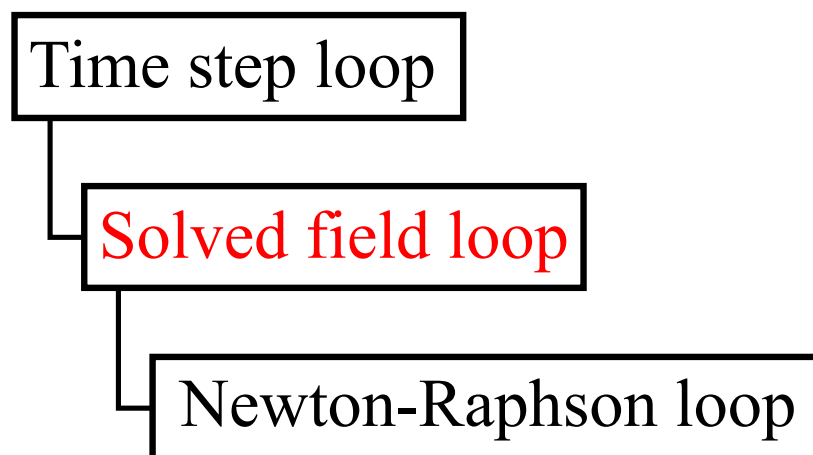


Fig. 7: New loop for changing solved physical fields in FrontISTR

## 第 5 章 数値計算例

### 5.1 ブロー成形を模したモデルの接触解析

提案する流体構造連成手法の構造ソルバ部分である内点法接触アルゴリズムの性能を検証するため、ブロー成形によるボトル成形を模した解析モデルについて、有効制約法に基づく接触アルゴリズム、内点法に基づく接触アルゴリズムで数値計算を行い、接触状態の収束性について比較する。

Fig.8 に、PET ボトルモデルの寸法を示す。Fig.8 において、赤い領域は被加工物、灰色の領域は金型であることを意味する。解析モデルは、軸対称性を考慮して、全体の 1/4 のみモデル化している。この寸法に基づいて作成した有限要素メッシュを、Fig. 9 に示す。また、メッシュの情報を、Table 1 に示す。被加工物は大きく変形するため、有限要素に六面体一次 B-bar 要素 [58] を用いている。

被加工物の構成則として、式 (19) で表される高次 Mooney-Rivlin 体の構成則を用い

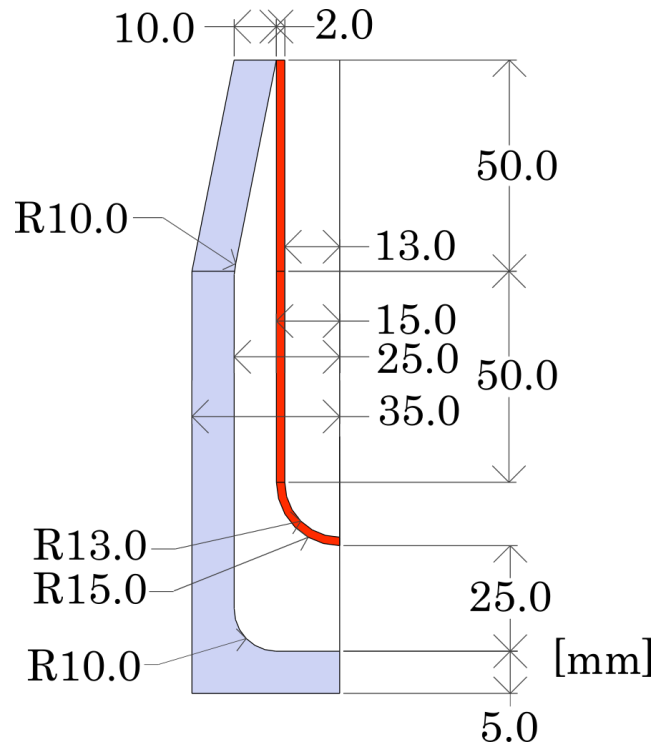


Fig. 8: The dimension of the blow molding model

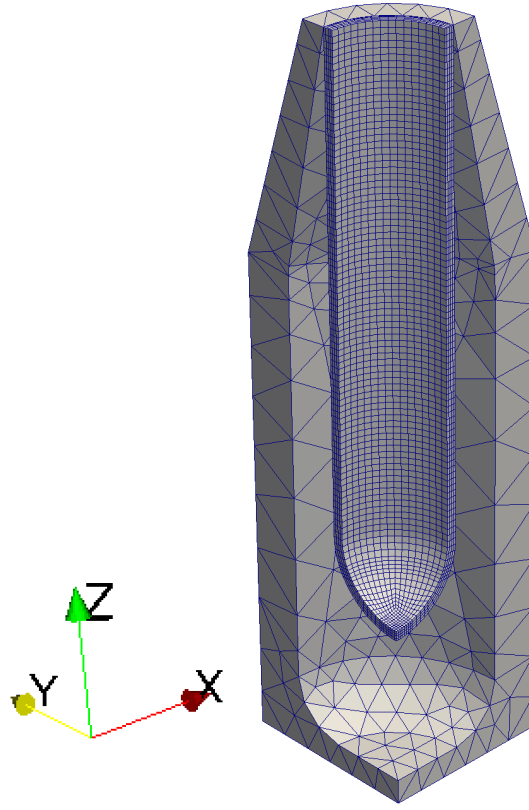


Fig. 9: Analysis mesh of a blow molding model

Table 1: Mesh information of the blow molding model

	Workpiece	Mold
The number of nodes	8,571	315
The number of elements	6,400	791
the number of DOFs	25,713	935
Element type	1st order hexahedral B-bar element	1st order tetrahedral element

る [57]. また, 材料定数は Schmidt らによる耐衝撃性ポリスチレンの膜を膨張させたときの挙動を模したモデルを参考に, Table 2 のように決定した [57].

解析モデルに対して設定した境界条件を, Fig. 10 に示す. Fig. 10 に示すように, 被加工物の上部について, Z 方向の変位が拘束され, また被加工物上部の外周部は全方向の



Table 2: Material properties of the workpiece in the blow molding model

$c_1$ in Schmidt model [57] [MPa]	1.43
$c_2$ in Schmidt model [57] [MPa]	0.222
$d_1$ in Schmidt model [57] [ $\text{Pa}^{-1}$ ]	$1.0 \times 10^{-6}$

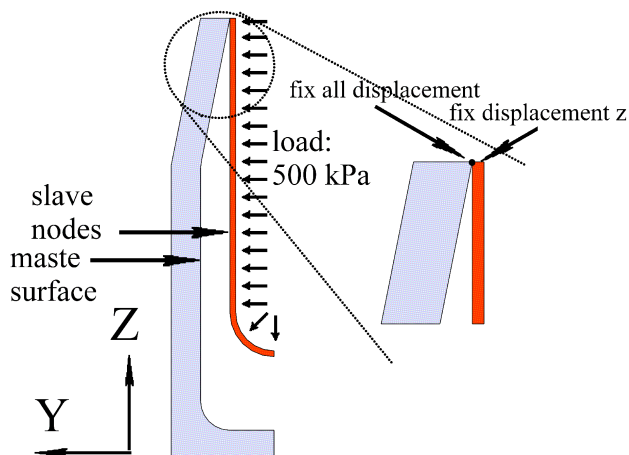


Fig. 10: Boundary conditions of the blow molding model : Additionally, displacement constraints for axial symmetry are set in  $x$  and  $y$  directions

変位が拘束される．被加工物の内側には，500 kPa の圧力が負荷される．また，金型は全方向の変位を拘束する．これにより，金型は剛体としてモデル化される．接触条件として，被加工物表面と金型内部に接触を指定する．slave 面は被加工物表面であり，接触 slave 節点の数は 1,696 である．master 面は金型内部であり，接触 master 面の数は 263 である．このほかに，モデルの対称性を考慮するために変位拘束条件を課している．

以上に述べた解析モデルについて，被加工物内側にかかる圧力を 50 のサブステップに分割して負荷をかける静解析を実施する．解析条件を Table 4 に示す．本論文では Table 4 に示すように， $\eta_{\text{IPM}}$  のみ，0.7, 0.5, 0.1, 0.05 と変化させて，数値計算を行った．なお，有効制約法の場合チャタリングが発生すると計算が進まなくなるため，接触条件の探索を 50 回しても接触状態が収束しない場合，求解を打切って次の荷重ステップに進むものとした．

以上に述べる計算を，東京大学奥田・橋本研究室の IC と呼ばれる計算機上で逐次計算により実行する．その諸元を Table 5 に示す．

Table 3: Analysis conditions of the blow molding model

Convergence residual of NR	$1.0 \times 10^{-6}$
Initial $\mu_{\text{IPM}}$	$1.0 \times 10^{-3}$
$\eta_{\text{IPM}}$	0.05, 0.1, 0.5, 0.7
Initial $\beta_{\text{IPMWS}}$	10
Convergence tolerance of Newton-Raphson	$1.0 \times 10^{-8}$
Convergence tolerance of $\mu_{\text{IPM}}$	$1.0 \times 10^{-8}$
Total step	50

Table 4: Analysis conditions of the blow molding model

Convergence residual of NR	$1.0 \times 10^{-6}$
Initial $\mu_{\text{IPM}}$	$1.0 \times 10^{-3}$
$\eta_{\text{IPM}}$	0.05, 0.1, 0.5, 0.7
Initial $\beta_{\text{IPMWS}}$	10
Convergence tolerance of Newton-Raphson	$1.0 \times 10^{-8}$
Convergence tolerance of $\mu_{\text{IPM}}$	$1.0 \times 10^{-8}$
Total step	50

Table 5: Specification of IC

Component	Configuration
CPU	Xeon ES-2650 v3
Memory	768GM RAM

まず，従来手法による計算結果と内点法による計算結果は定性的に一致することを確認する．従来手法と内点法による解析終了時の被加工物におけるの変位強度のカラーコンターを，それぞれ Fig. 11 と Fig. 12 に示す．2つの図より，内点法による接触アルゴリズムでは，従来手法で計算した場合と同様の変位強度分布が得られていることが確認できる．また，従来手法と内点法による解析終了時の被加工物における接触力のカラーコンターを，それぞれ Fig. 13 と Fig. 14 に示す．2つの図より，内点法による接触アルゴリズムでは，従来手法で計算した場合と同様の接触力分布が得られていることが確認でき

る．なお，Fig. 13 と Fig. 14 に示したのは， $\eta = 0.5$  の場合の計算結果であるが，他の  $\eta$  の値についても，同様のカラーコンター図が得られることを確認している．以上より，内点法による計算結果は，従来手法による計算結果と定性的に一致することが確認できる．

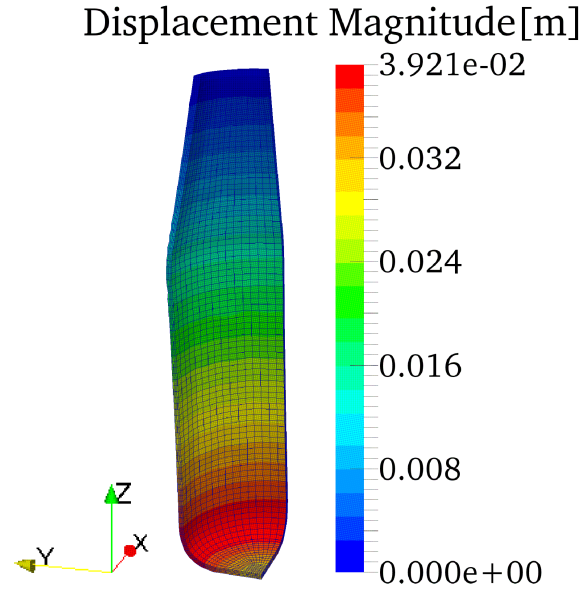


Fig. 11: Color contours of displacement by ASM

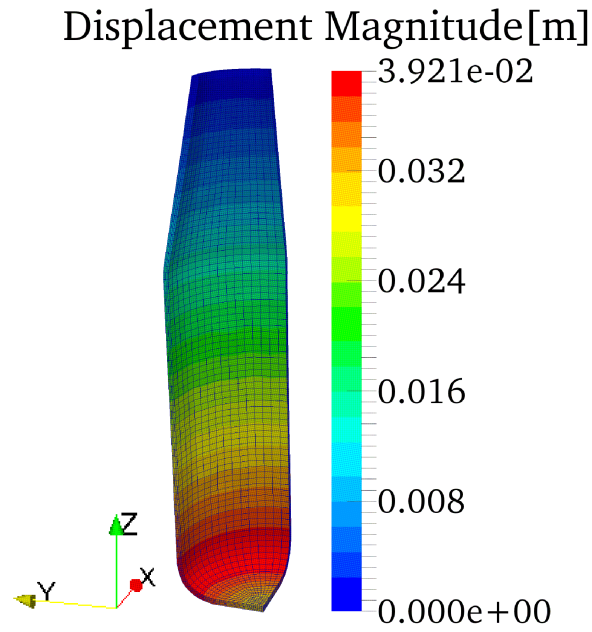


Fig. 12: Color contours of displacement by IPM:  $\eta_{IPM} = 0.5$

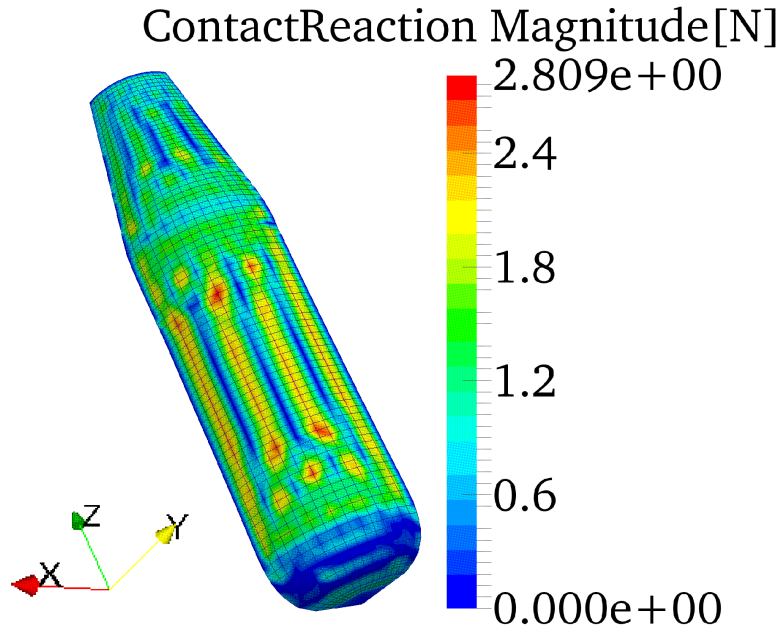


Fig. 13: Color contours of contact reaction by ASM

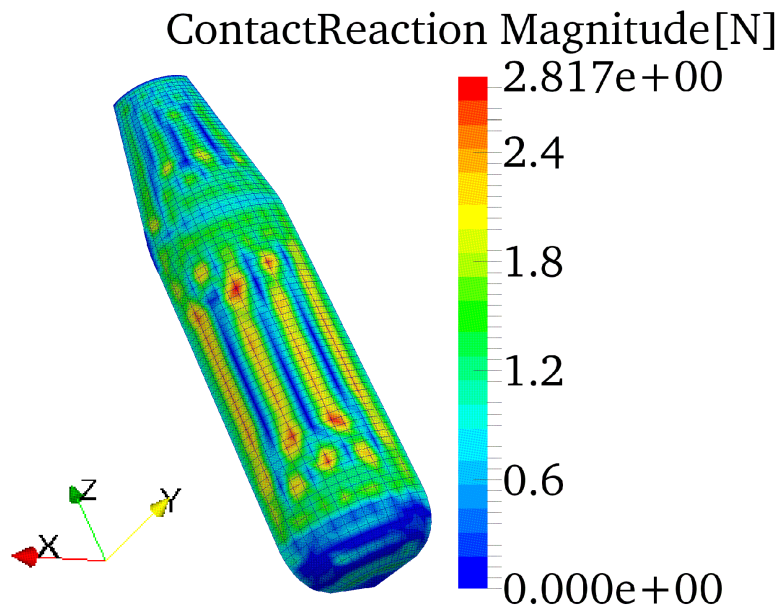


Fig. 14: Color contours of contact reaction by IPM:  $\eta_{IPM} = 0.5$

次に、従来手法による計算結果と内点法による計算結果は、定量的にも一致することを確認する．各サブステップにおける最大節点変位と最大接触力を、それぞれ Table 6, Table 7 に示す．Table 6, Table 7 について、全サブステップを通して見ると、従来手法による計算結果と内点法による計算結果は、定量的にも一致することが確認できる．また、 $\eta$  の値を変化させても最大節点変位と最大接触の計算結果に影響がないことが確認できる．一方で、サブステップが 10 の場合における最大接触力について、内点法による計算結果と従来手法による計算結果との間には、0.1 N ほどの誤差が生じている．これは、今回の計算で変化させていないパラメータの設定について、試行錯誤が足りなかったことが原因と考えられる．種々の接触問題に対して、適切なパラメータを自動的に設定する方法については、今後検討していく必要がある．

Table 6: Maximum displacement magnitude in the blow molding model[mm]

sub step	ASM	IPM				
		$\eta_{\text{IPM}}$	0.7	0.5	0.1	0.05
10	5.724		5.723	5.723	5.723	5.723
20	18.81		18.81	18.81	18.81	18.81
30	37.26		37.23	37.23	37.23	37.23
40	38.99		38.99	38.99	38.99	38.99
50	39.23		39.23	39.23	39.23	39.23

Table 7: Maximum contact force magnitude in the blow molding model[N]

sub step	ASM	IPM				
		$\eta_{\text{IPM}}$	0.7	0.5	0.1	0.05
10	0.4574		0.4421	0.4421	0.4421	0.4421
20	0.804		0.8044	0.8044	0.8044	0.8044
30	1.789		1.781	1.781	1.781	1.781
40	2.458		2.455	2.455	2.455	2.455
50	2.962		2.958	2.958	2.958	2.958

Table 8: Iterations and computational time for the blow molding model

	ASM		IPM		
	$\eta$				
		0.7	0.5	0.1	0.05
Iteration	4270	1815	1062	785	783
Computational time[s]	101400	3586	2112	1573	1569

最後に、従来手法と内点法による手法について、本解析モデルに対する収束性の違いについて検証する。ここでは、従来手法と内点法による手法共に、線形ソルバーによって接線剛性方程式が求解された回数を反復回数として、その回数を評価する。Fig. 15 に、各荷重ステップにおける反復回数を示す。Fig. 15 より、従来手法では、荷重ステップが 10 を超えてから、反復回数の著しい増加が発生している。また、サブステップ数が増えるにつれて、この現象が発生しやすくなっている。このとき、特定の slave 節点の組についてチャタリングが発生していた。

他方、内点法による計算結果では、従来法によって収束解が得られた場合に比べ、収束にはやや反復回数を要するものの、チャタリングが一切発生せず、安定に計算できていることが確認できる。Table 8 に、各計算ごとの合計反復回数と総計算時間を示す。チャタリングが発生しているため、有効制約法では反復回数が 4,270 であるのに対し、内点法では最大で 18.3% 程度にまで反復回数を減らすことに成功している。また、計算時間も最大で 1.55% 程度まで減少させることができる。

チャタリングは接触条件の多い問題によく見られる現象である。液圧ブロー成形の実問題のような複雑な形状を持つモデルの場合、メッシュ数が細かくなるとメッシュの解像度が増加し、結果的には接触条件数も増える。従って、液圧ブロー成形のシミュレーションに従来手法をそのまま適用するのは困難であることが示された。また、一方で内点法接触アルゴリズムは、このような問題に対して有効であることが確認された。

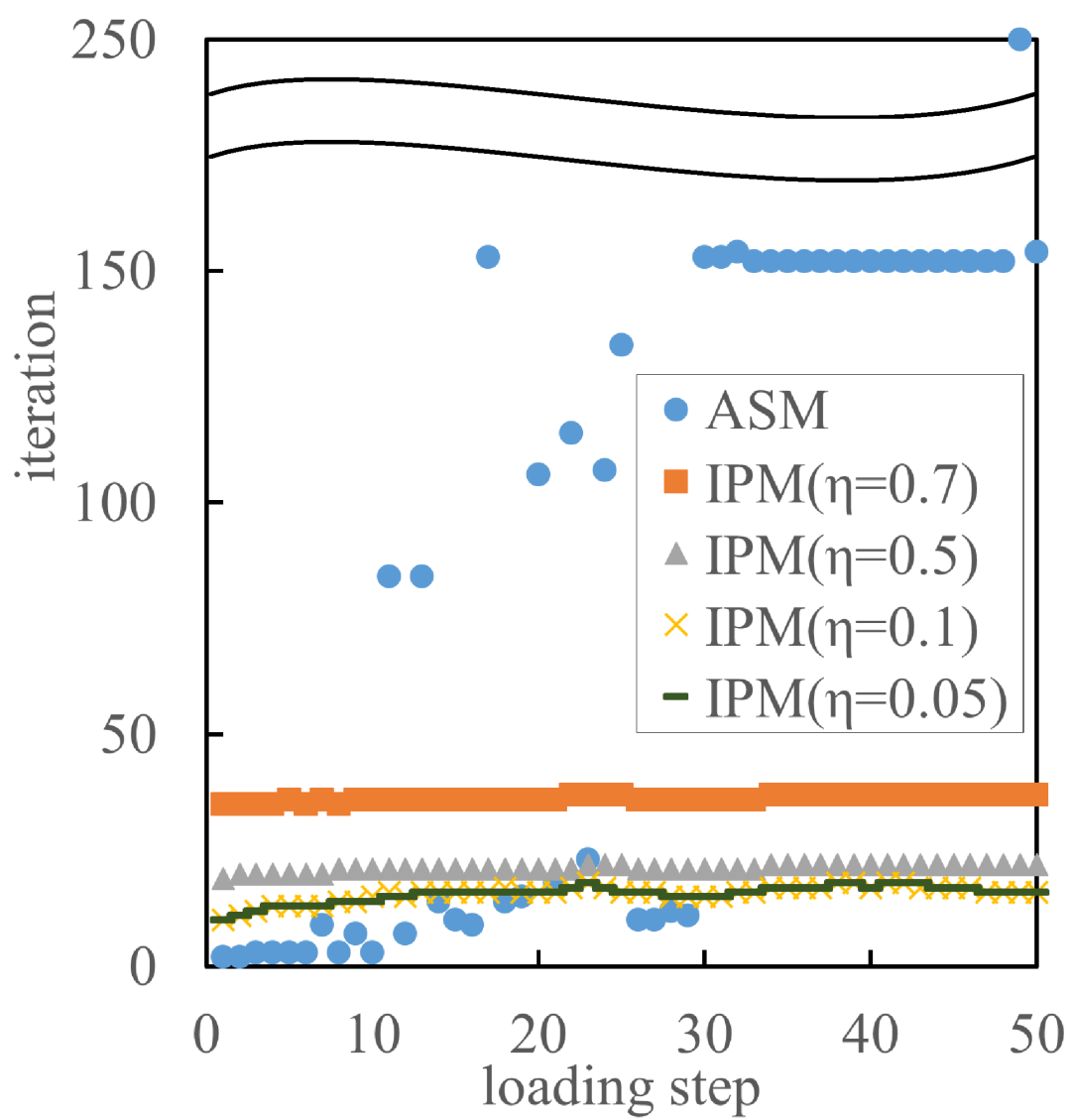


Fig. 15: Iteration for each loading step in the blow molding model



## 5.2 回転円錐

提案する流体構造連成手法の流体ソルバ部分で移流計算に使用する SUPG 法の精度検証を行うため、Fig. 16 に示す回転円錐問題の数値計算を行った。この問題では、まず Fig. 16 に示すように、正方形の解析領域を設定し、解析領域全体に次式 (276) のような速度分布を与える。

$$\{^t\mathbf{v}\} = \{-y \quad x \quad 0\}^T \quad (276)$$

式 (276) により、解析領域中心を中心とする、反時計回りの渦状の流速場が発生する。次に、レベルセット関数のように、移流方程式に支配される物理量  $^t\phi$  について、その初期値  $\phi_0$  を次式 (277) のように与える。

$$\phi_0(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(\frac{10}{3}\pi r) + \frac{1}{2} & (0 \leq r \leq 0.3) \\ 0 & (r > 0.3) \end{cases} \quad (277)$$

但し、 $r$  は点  $(0, -0.5, 0)$  からの距離で、次式 (278) により与えられる。

$$r = \sqrt{x^2 + (y + \frac{1}{2})^2} \quad (278)$$

式 (277) は、中心点  $(0, -0.5)$  では 1 をとり、放射状に値が小さくなる半径 0.3 の円状の領域に、移流方程式に支配される物理量  $^t\phi$  を与えることを意味する。 $^t\phi$  の値に応じて  $z$

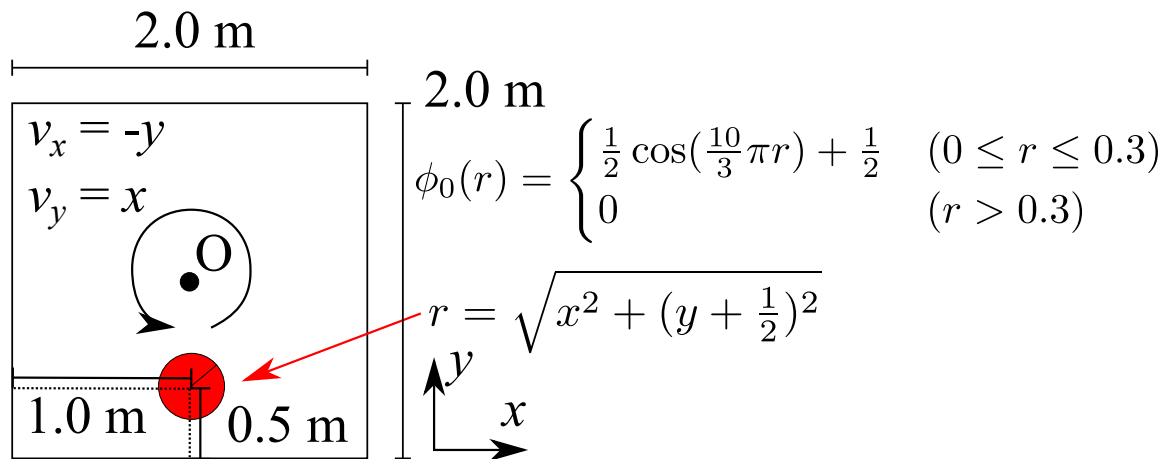


Fig. 16: Rotating cone problem.

Table 9: Analysis condition of rotating cone problem

The number of nodes	50,503
The number of elements	162,000
The number of DOFs	50,503
Element type [-]	1st order tetrahedral element
Convergence tolerance of Newton-Raphson [-]	$1.0 \times 10^{-12}$
Time increment $\Delta t$ [s]	$5.0 \times 10^{-3}$
Total time [s]	6.285

方向に変位を与えたとき、 ${}^t\phi$  の分布は円錐状になり、これが先の渦状の速度場に乗って解析領域を中心に回転していくため、回転円錐問題と呼ばれる。

Table 9 に、今回適用した計算条件を示す。Table 9 中に示したように、解析メッシュにおける有限要素はいずれも四面体一次要素であり、解析領域を各軸方向に 39 分割し、要素数は 162,000、節点数は 50,503、自由度数は 50,503 である。解析メッシュは解析領域を  $x$ ,  $y$  方向に 100 分割、 $z$  軸方向に 2 分割し、各六面体を 12 個の四面体に分割することで作成している。数値計算に使用したメッシュを、Fig. 17 に示す。また、数値計算は IC 上で逐次計算で行う。

実装したソルバにより、円錐が一回転 (約 6.285 s) した段階における  ${}^t\phi$  の分布をカラーコンターにより表示した図を、Fig. 18 に示す。Fig. 18 では、数値振動などの影響を受けて円錐の形が変形していないかを調べるために、 ${}^t\phi$  の値に応じて  $z$  軸方向に変形を与えている。Fig. 18 より、実装したソルバでは、円錐の形状を崩さずに移流方程式が求解出来ることが定性的に確認できる。また、 ${}^t\phi$  の最大値についても、理論値 1.0 に対し計算結果では 0.9967 と、良好な精度が得られていることが確認できる。

円錐の形状が崩れていないかを定量的に調べるために、同時刻の直線  $x = z = 0$  上の  ${}^t\phi$  の値について、理論値を計算値を比較したグラフを、Fig. 19 に示す。Fig. 19 より、両者の値はほぼ一致しており、定量的に見ても円錐の形状が崩れていないことが確認できる。

以上より、SUPG 法によって移流方程式が精度良く解かれることが示された。

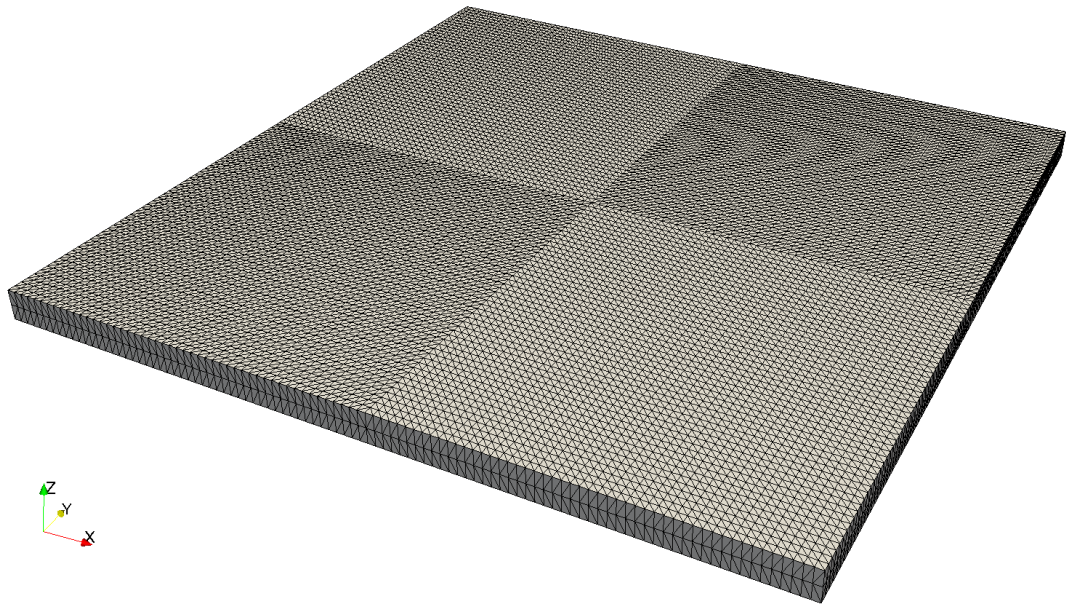


Fig. 17: Analysis mesh of the rotating cone problem

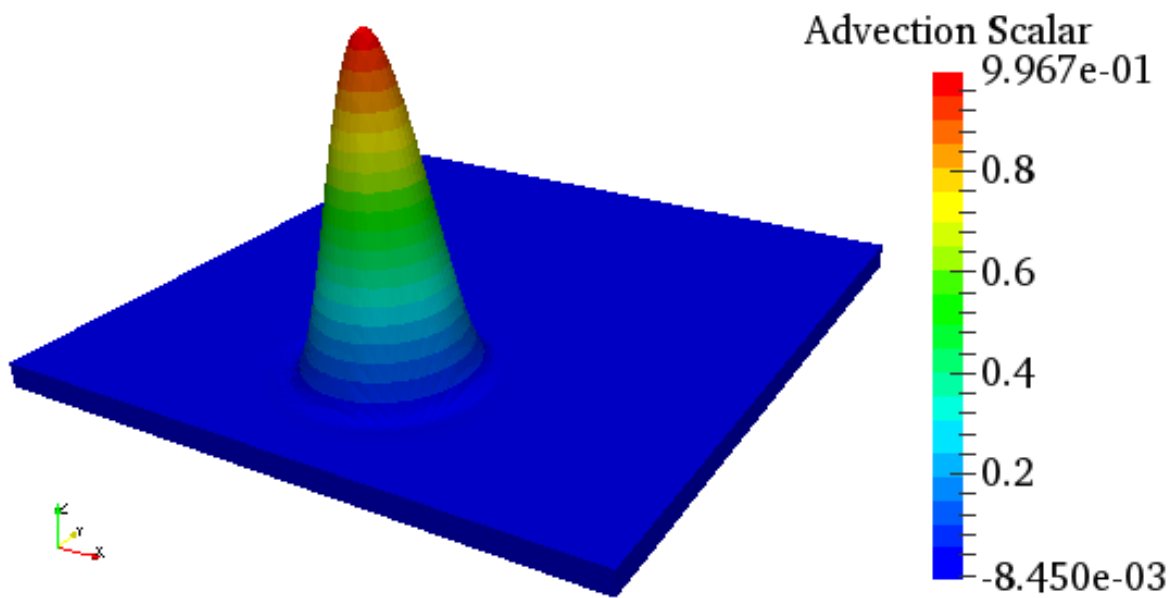


Fig. 18: Position of the rotating cone problem after one rotation: time increment is  $5.0 \times 10^{-3}$  s

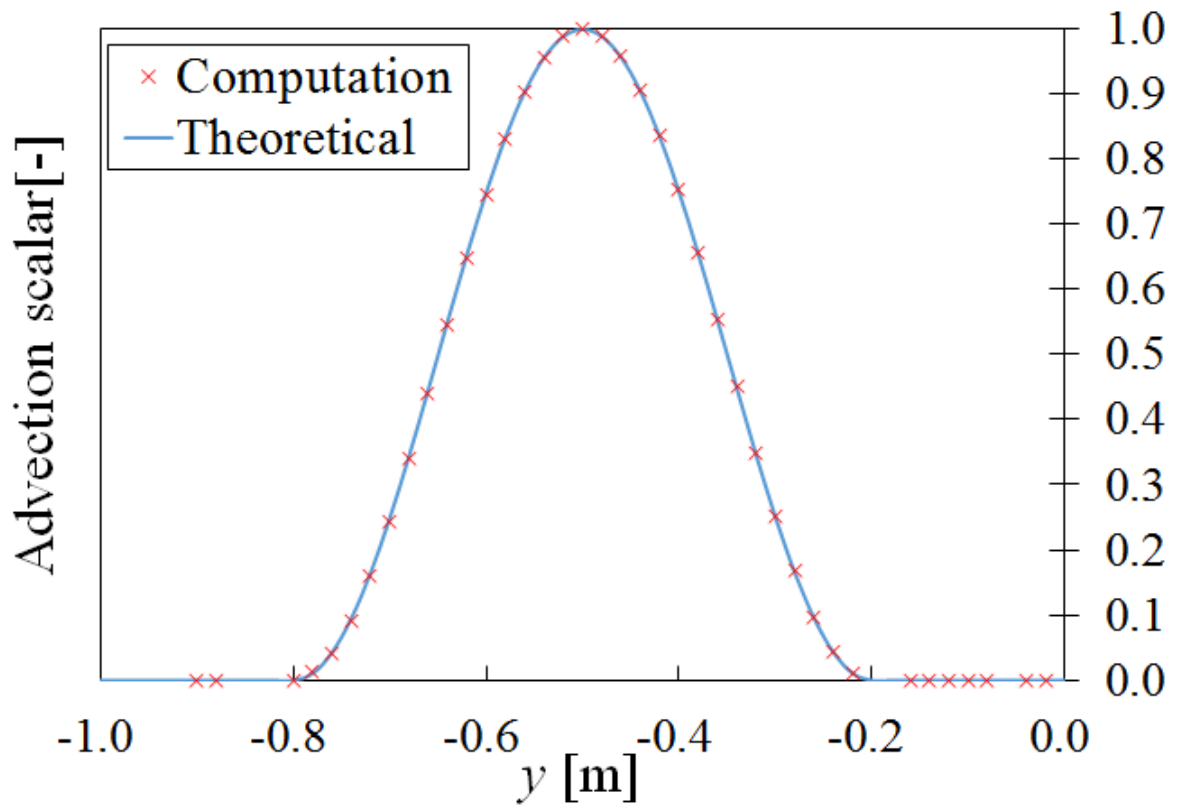


Fig. 19: Rotating cone distribution along a vertical center-line after one rotation: time increment is  $5.0 \times 10^{-3}$  s

### 5.3 キャビティ内強制対流

提案する流体構造連成手法の流体ソルバ部分である SUPG/PSPG 法の精度検証を行うため、Fig. 20 に示すキャビティ内強制対流問題の数値計算を行う。この問題は、Fig. 20 に示すように、立方体状の解析領域を設定し、立方体上面に滑り速度を与え、他の面に滑り無し境界条件を設定することで、解析領域内に生じる渦状の流れを解く問題である。Ku ら [59] は、このキャビティ内強制対流問題について、定常状態における直線  $y = z = 0$  上の  $z$  方向速度、及び直線  $x, y = 0$  上の  $x$  方向速度を差分法により数値計算している。本研究では、この計算結果と比較することで、既存の手法と同程度の計算精度が得られているかどうかを確認する。

Table 10 に、今回適用した計算条件を示す。Table 10 中に示したように、解析メッシュにおける有限要素はいずれも四面体一次要素であり、解析領域を各軸方向に 39 分割し、要素数は 162,000、節点数は 29,791、自由度数は 119,164 である。解析メッシュは解析領域を各軸方向に 30 分割し、各六面体を 6 つの四面体に分割することで作成している。数値計算に使用したメッシュを、Fig. 21 に示す。また、数値計算は IC 上で 8 並列で行う。

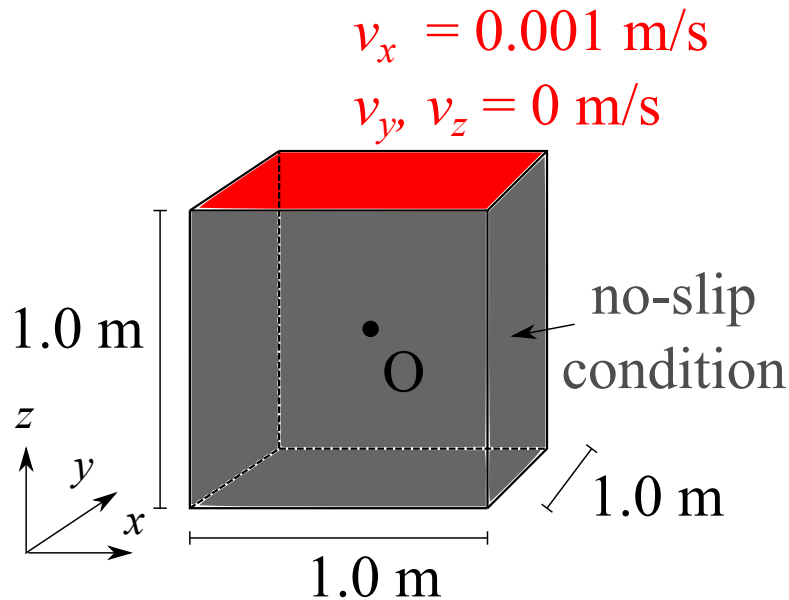


Fig. 20: Lid-driven cavity flow problem

Table 10: Analysis conditions for the lid-driven cavity flow problem

Mass Density [kg/m <sup>3</sup> ]	1,000
Viscosity [Pa·s]	0.001
Representative velocity $V_r$ [m/s]	0.001
The number of nodes	29,791
The number of elements	162,000
The number of DOFs	119,164
Element type	1st order tetrahedral
Convergence tolerance of NR	$1.0 \times 10^{-12}$
Time increment $\Delta t$ [s]	10
Total time [s]	$1.0 \times 10^5$

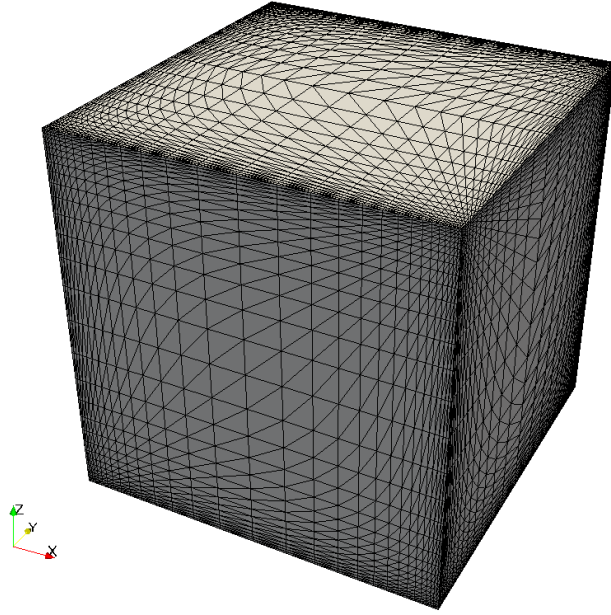


Fig. 21: Analysis mesh of the lid-driven cavity flow problem

SUPG/PSPG 法により得られた定常状態 (時刻  $t = 1.0 \times 10^5$  s) における流速分布を, Fig. 22 に示す. Fig. 22 より, SUPG/PSPG 法では定常状態において渦状の速度分布が得られていることが確認できる. また, SUPG/PSPG 法により得られた定常状態 (時刻  $t = 1.0 \times 10^5$  s) における直線  $y = z = 0$  上の  $z$  方向速度と, 直線  $x = y = 0$  上の  $x$  方

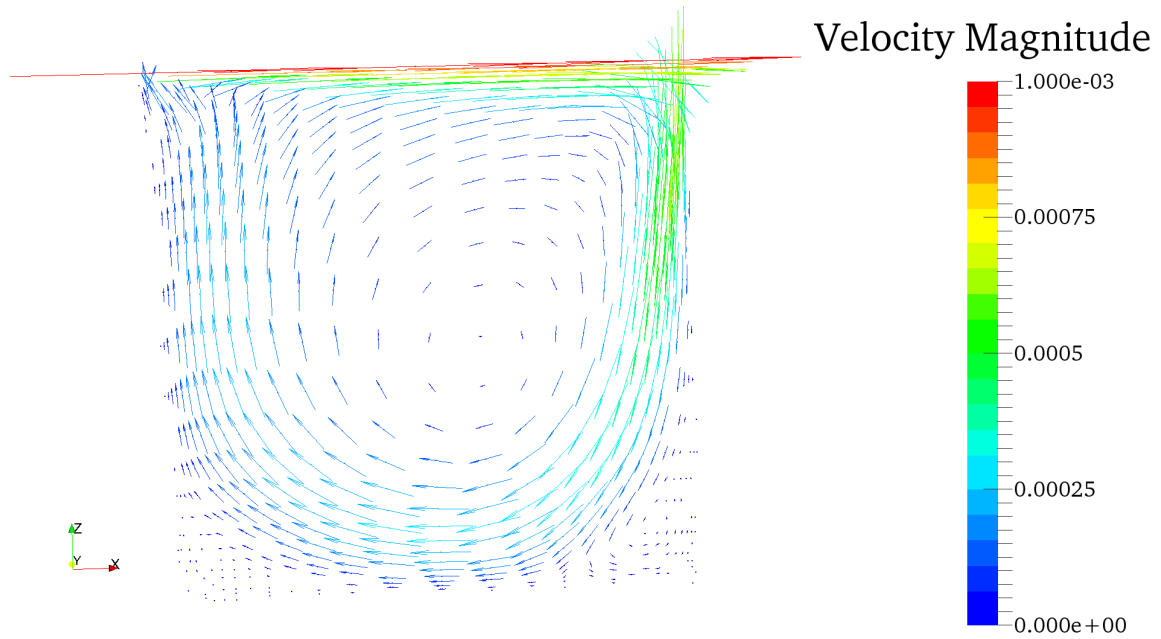


Fig. 22: Velocity distributions of the lid-driven cavity flow problem at  $t = 10,000$  s: time increment is 10 s, mass density is  $1,000 \text{ kg/m}^3$ , viscosity is  $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $V_r = 0.001 \text{ m/s}$  and Reynolds number is 1,000

向速度の計算結果を, Fig. 23 に示す. なお, Fig. 23 には, Ku らの差分法による計算結果 [59] も同時に示してある. Fig. 23 より, SUPG/PSPG 法による計算結果は, Ku らの計算結果とよく一致している.

以上により, SUPG/PSPG 法によって, 従来の計算と同程度の計算結果が得られることが示された.

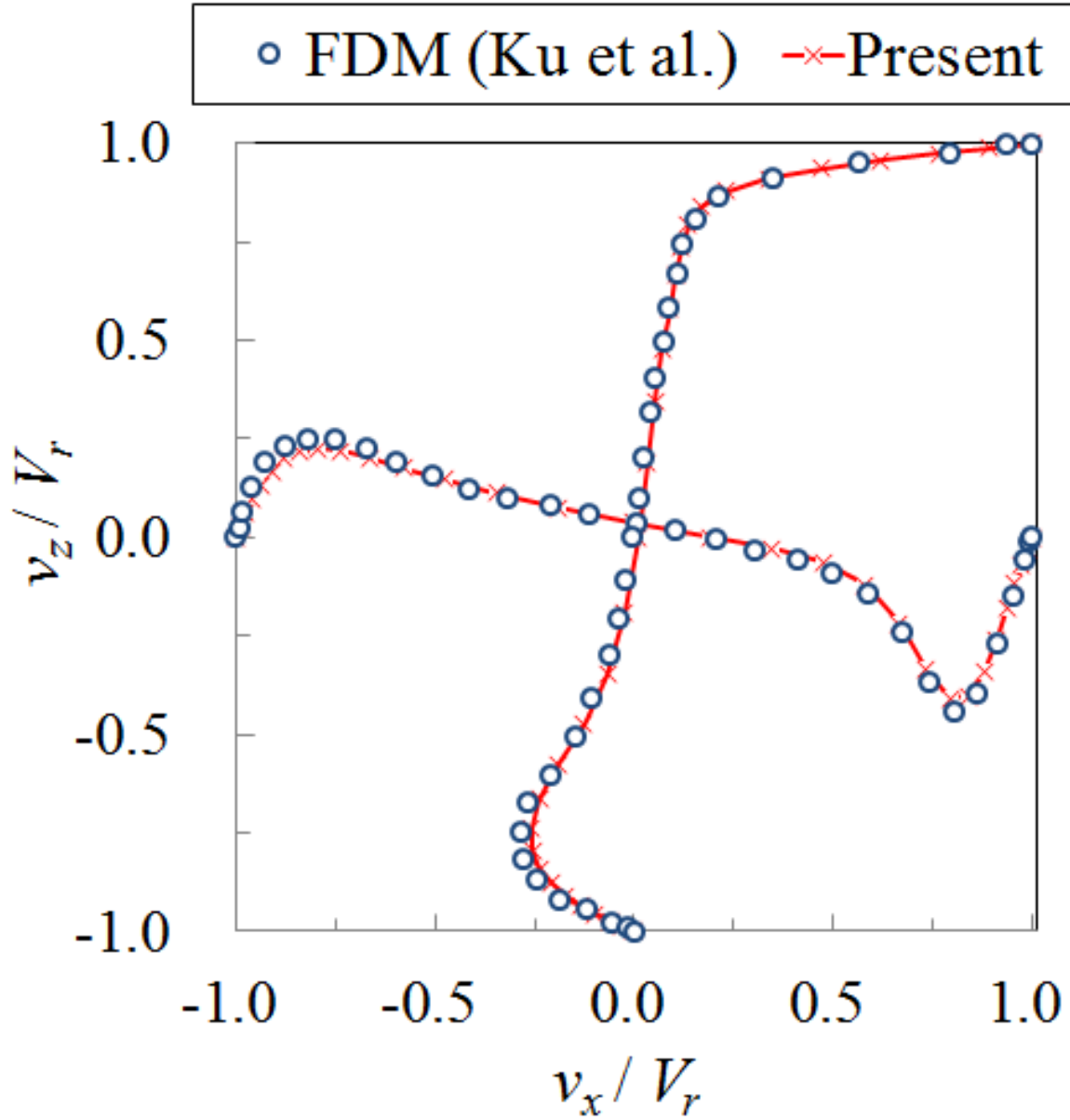


Fig. 23: Velocity distributions of the lid-driven cavity flow problem along vertical and horizontal center-lines at  $t = 10,000$  s: time increment is 10 s, mass density is  $1,000 \text{ kg/m}^3$ , viscosity is  $0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $V_r = 0.001 \text{ m/s}$  and Reynolds number is 1,000



## 5.4 ダム崩壊

提案した流体構造連成手法の流体ソルバの二相流計算に使用するレベルセット法の精度検証を行うため、Fig. 24 に示すダム崩壊問題の数値計算を行った。この問題は、Fig. 24 に示すように、解析領域左端に液柱を配置し、全領域に重力をかけることで液柱が崩れていく様子を解析するものである。全ての壁面には滑りあり境界条件を付与する。

越塚ら [46] は、このダム崩壊問題における解析領域左端からの液柱先端距離  $L_{\text{tip}}$  について、実験値と粒子法による計算結果を示している。本研究では、この計算結果と比較することで、既存の手法と同程度の計算精度が得られているかどうかを確認した。

Table 11 に、今回適用した計算条件を示す。解析メッシュにおける有限要素はいずれも四面体一次要素で、解析領域は、 $x$  軸方向に 80,  $y$  軸方向に 56,  $z$  軸方向に 2 で等分割し、各六面体を 12 個の四面体に分割することで作成している。要素数は 107,520、節点数は 22,821 であり、自由度数は最大で 91,284 である。数値計算に使用したメッシュを、Fig. 25 に示す。また、Fig. 24 に示した液柱を表現するためのレベルセットの初期分布を、Fig. 26 に示す。

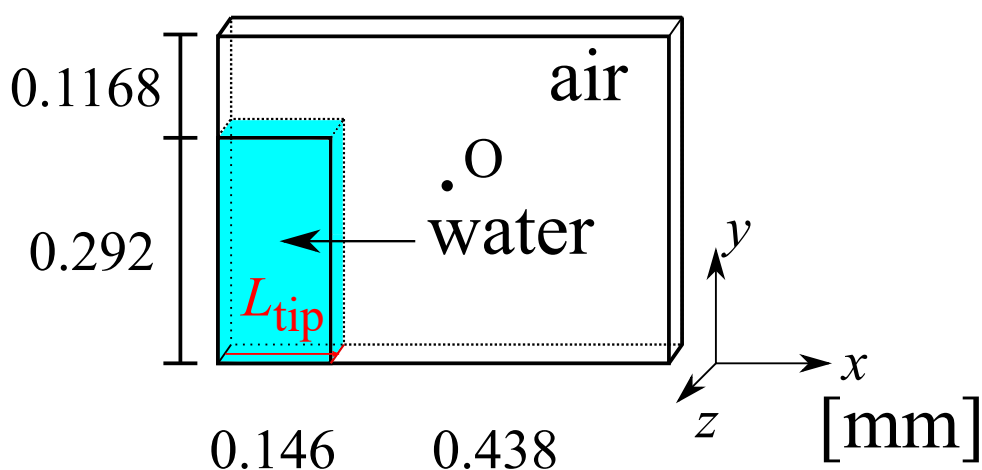


Fig. 24: Dam break problem

Table 11: Analysis condition of the dam break problem

Mass Density of water [kg/m <sup>3</sup> ]	998.24
Viscosity of water [Pa·s]	$8.544 \times 10^{-4}$
Mass Density of air [kg/m <sup>3</sup> ]	1.1763
Viscosity of air [Pa·s]	$1.862 \times 10^{-5}$
$\epsilon$ in level set method [m]	0.0292
Courant number [-]	0.3
The number of nodes	22,821
The number of elements	107,520
The number of DOFs	91,284
Element type	1st order tetrahedral element
Convergence tolerance of Newton-Raphson [-]	$1.0 \times 10^{-12}$
Time increment $\Delta t$ [s]	$1.0 \times 10^{-3}$
Total time [s]	0.3

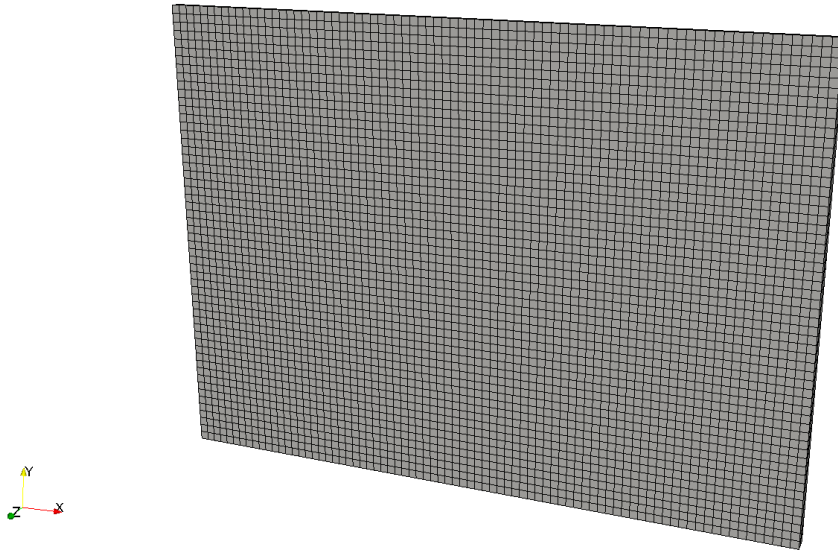


Fig. 25: Analysis mesh of the dambreak problem

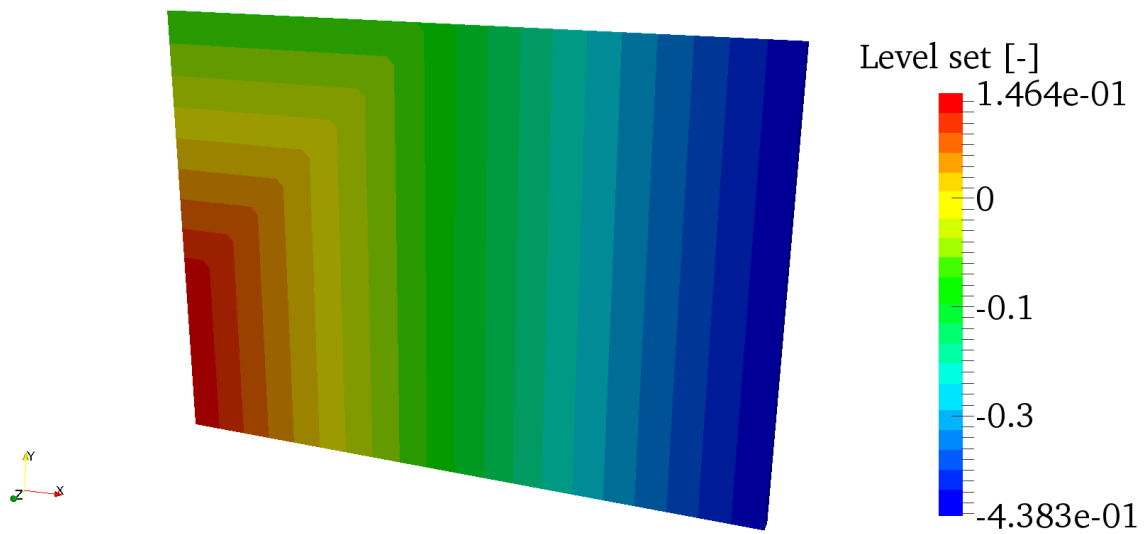


Fig. 26: Initial conditions of the level sets in the dam break problem

数値計算は，東京大学情報基盤センター内の Fujitsu HPC Prime FX10 上で，16 並列で行う．Table 12 に計算機環境を示す．

再初期化なしの場合について，レベルセット法により得られた時刻  $t = 0.1$  s,  $t = 0.2$  s,  $t = 0.3$  s におけるレベルセットの分布を，Fig. 27 に示す．Fig. 27 より，実装したソルバでレベルセット関数で表現された液柱が崩れていく様子が表現できていること

Table 12: Specification of IC

Component	Configuration
CPU	SPARC64 IXfx (16cores/node, 1.85GHz)
Memory	32GB
Network	Tofu Interconnect

が定性的に確認できる．他方，レベルセット関数のカラーコンターが等間隔でなくなっており，レベルセット関数の勾配が 1 という条件が崩れていることが確認できる．特に， $t = 0.15$  s から液柱先端が液柱本体と分離されていることがわかる．また，再初期化なしの場合について，液柱の解析領域左端からの距離の時刻歴を Fig. 28 に示す．Fig. 28 には，越塚からの実験値，及び粒子法 (Moving Particle Semi-implicit 法) による計算結果も付記してある．Fig. 28 に示したように，液柱左端からの距離の時刻歴は，越塚らの計算結果とよく一致する．

越塚らの実験値と異なる原因として，次の理由が考えられる．まず，本論文では濡れ性の影響が考慮されていない．濡れ性の影響があると，液柱の移動は遅くなるものと考えられ，実際に越塚の実験値は，本計算結果や越塚らの計算結果に比べ液柱距離がやや小さくなっている．

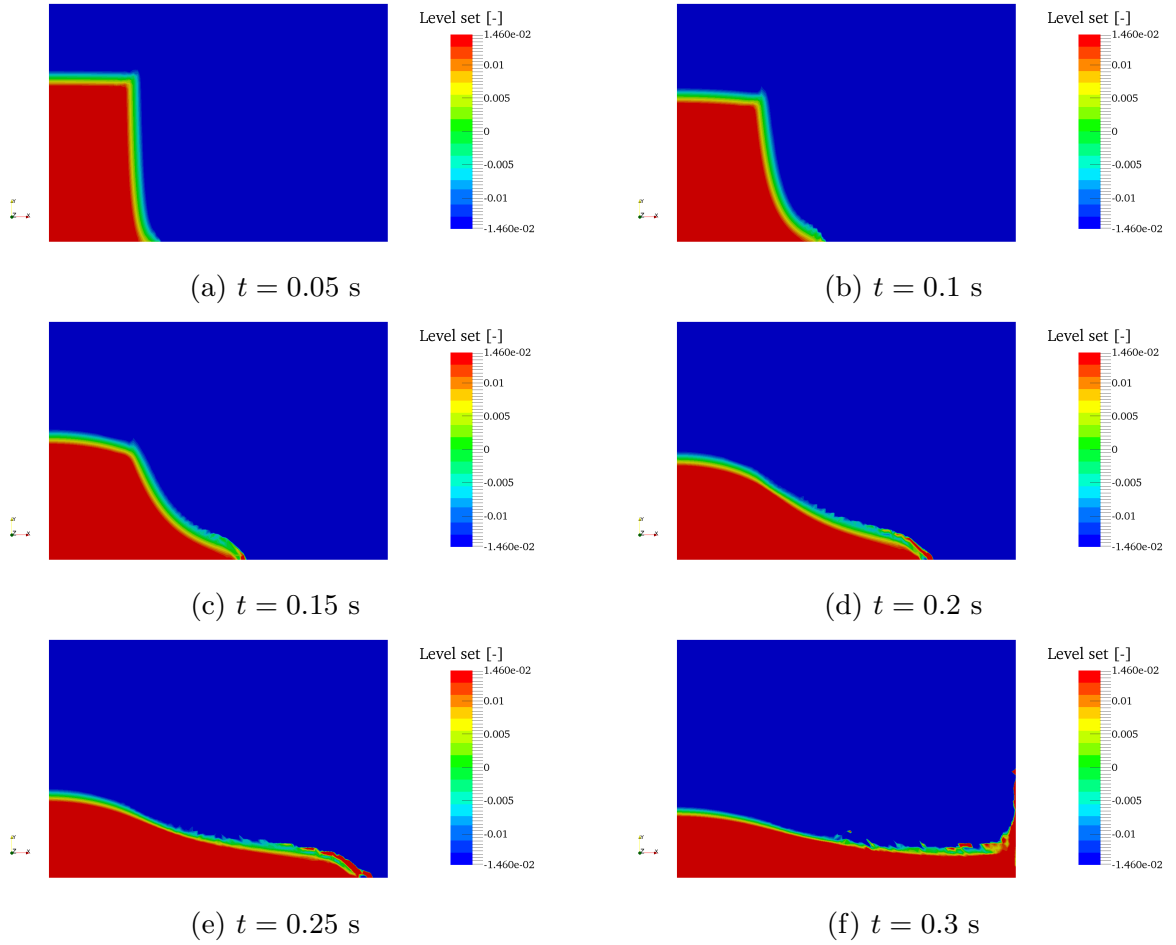


Fig. 27: Level sets without re-initializing and correcting volume on  $z = 0.0$  at  $t = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3$  s : The interface of water and air is described as the green line

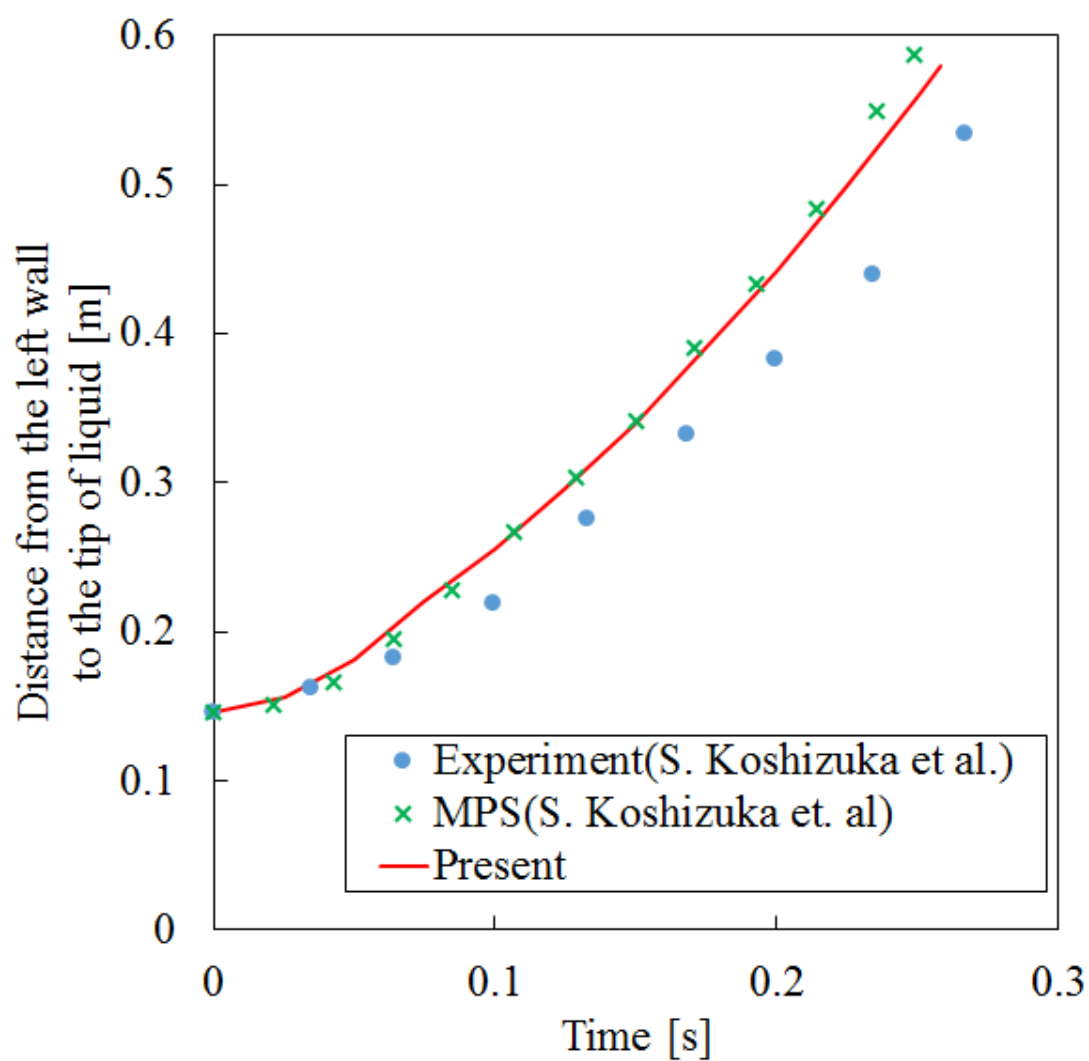


Fig. 28: Distance from the left wall to the tip of liquid

次に、再初期化を考慮した場合の計算結果について述べる。再初期化なしの場合と同様のメッシュ、解析条件に加え、レベルセットの再初期化、体積補正を加えた場合の計算結果を Fig. 29 に示す。Fig. 29 に示すように、レベルセットの再初期化処理によって数値振動が発生していることが分かる。また、Fig. 27 と Fig. 29 を比較すると、再初期化をかけると液柱先端の分離は生じず、またこの部分に関して勾配が 1 に保たれていることが確認できる。

数値振動が発生する原因については 2 つ考えられる。まず、レベルセットの再初期化式の線形化が挙げられる。レベルセットの再初期化式は移流方程式と同等に扱われるが、移流速度は未知変数  ${}^t\phi$  の無理関数として定義されている。この移流速度は、液柱エッジ部など、レベルセット勾配の向きが急峻に変わる領域で急激に変化する。Fig. 29 を見ると、数値振動は液柱右上端から生じており、移流速度の線形化が原因である可能性がある。次に、移流方程式の安定化スキームの問題が考えられる。SUPG 法は移流する物理量が急激に変化する場合、オーバーシュートを生じることが知られており、先述の移流速度の非線形性と併せて、安定化が不十分な可能性がある。

以上より、レベルセットの再初期化式については、今後非線形な移流速度を考慮した Newton-Raphson 法による反復ループの構築や、別の安定化スキームの採用などを検討する必要がある。

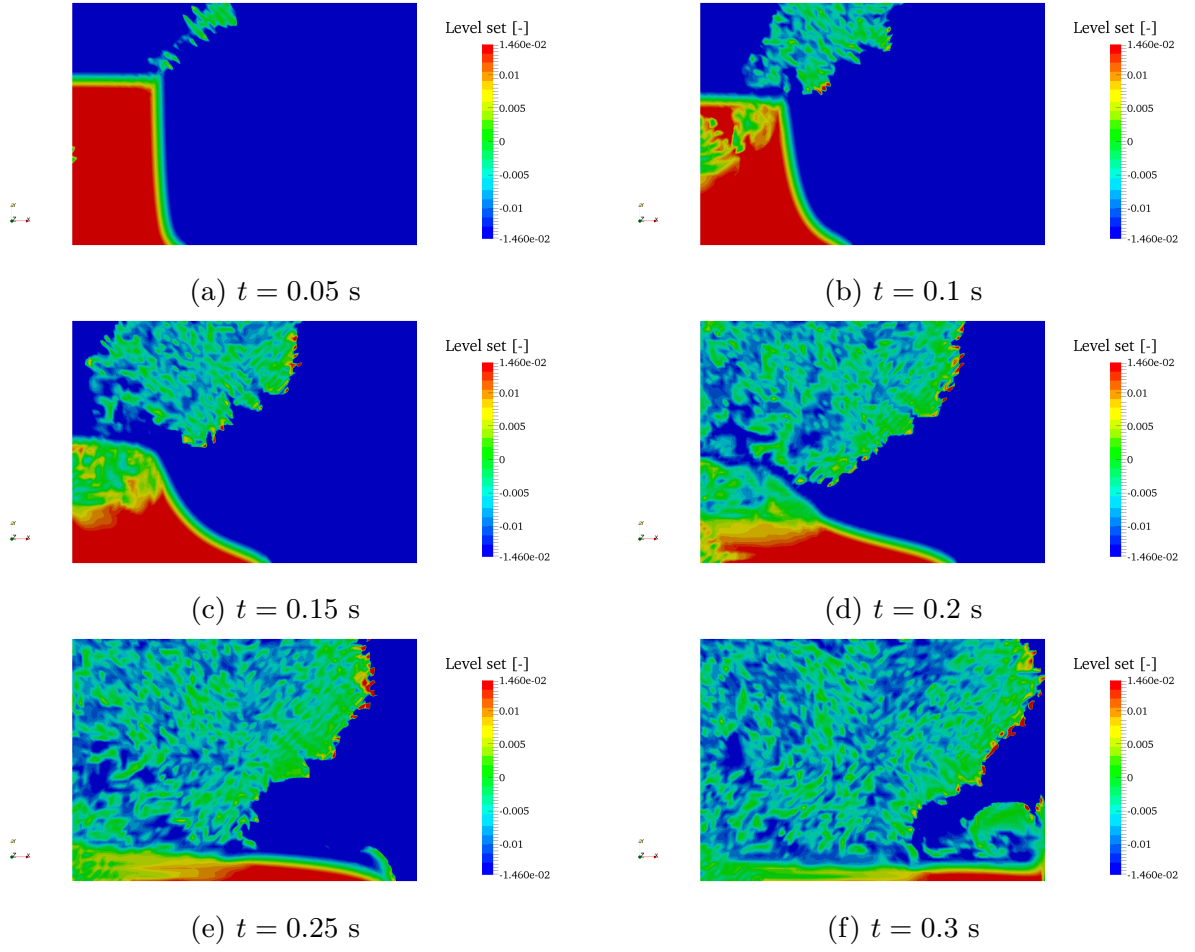


Fig. 29: Level sets with re-initializing and correcting volume on  $z = 0.0$  at  $t = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25$  and  $0.3$ s : The interface of water and air is described as the green line



## 5.5 回転油槽問題

提案する流体構造連成手法の ALE 法の検証を行うため、Fig. 24 に示す回転油槽問題 [31] の数値計算を行った。回転油槽問題は、構造の大変形を伴う流体構造連成問題である。この問題は、Fig. 30 に示すように、油槽を模した解析領域下部にラバー板を配置し、ラバー板の高さまで油を入れ、解析領域全体にラバー板の根元を回転軸とした周期的な回転を与えたときのラバー板や気液界面の挙動を解析するものである。回転角度  $\theta$  は、Fig. 31 のように与えられる [32]。

本解析では、Laplace 方程式を用いた ALE メッシュの制御に焦点を当て、油領域を空気領域に変更して、単相流として計算を行う。これにより、構造物に大変形が生じた場合、本実装した手法で計算が継続できるかを検討する。

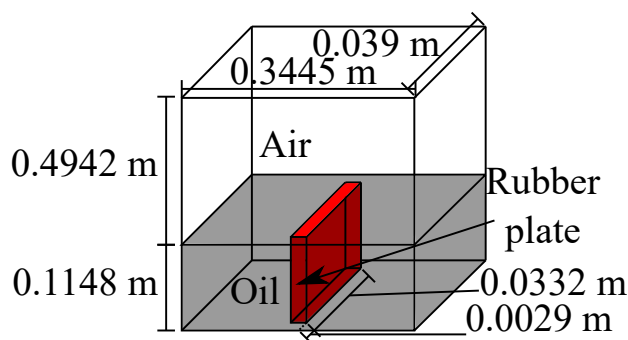


Fig. 30: Rotating oil tank problem

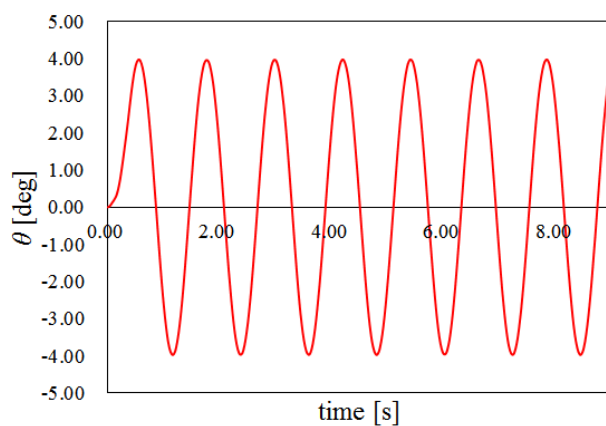


Fig. 31: Time history angle in the rotating tank problem

Table 13: Analysis condition of the rotating oil tank problem

Mass Density of air [kg/m <sup>3</sup> ]	1.1763
Viscosity of air [Pa·s]	$1.862 \times 10^{-5}$
Mass Density of oil [kg/m <sup>3</sup> ]	900
Viscosity of oil [Pa·s]	0.045
Mass Density of rubber [kg/m <sup>3</sup> ]	1100
Young's modulus of rubber [MPa]	6.0
Poisson ratio of rubber [-]	0.49
The number of nodes	30,526
The number of structural elements	81,974
The number of fluid elements	72,938
The number of DOFs	122,104
Element type	1st order tetrahedral element
Convergence tolerance of Newton-Raphson	$1.0 \times 10^{-6}$
Time increment $\Delta t$ [s]	$5.0 \times 10^{-4}$
Total time [s]	1.0

Table 13 に、今回適用した計算条件を示す．また、数値計算に使用したメッシュを、Fig. 32 に示す．解析メッシュにおける有限要素はいずれも四面体一次要素で、節点数は 30,526、要素数は構造領域が 81,974、流体領域が 72,938 で、自由度数は 122,104 である．ラバー板は St. Venant-Kirchhoff 体としてモデル化する．Fig. 32 のうち、ラバー板のメッシュを Fig. 33 に示す．なお、数値計算は FX10 上で 32 並列で行う．

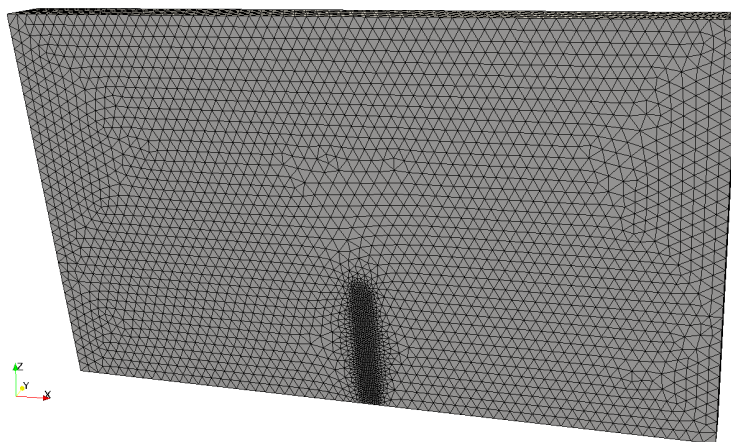


Fig. 32: Analysis mesh of the fluid and structural domain

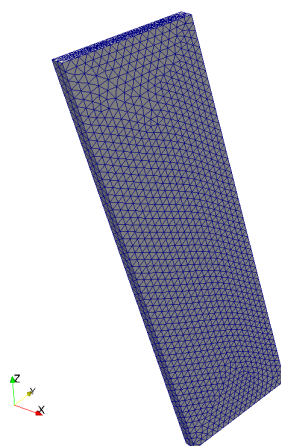


Fig. 33: Analysis mesh of the structural domain

ALE メッシュの制御に Laplace 方程式を用いた場合の計算結果について、時刻  $t = 0.05, 0.1$  s におけるラバー板の変位を Fig. 34 に示す。また、同じ時刻における平面  $y = 0$  上における速度、メッシュ速度の分布を、それぞれ Fig. 35, Fig. 36 に示す。なお、ラバー板において、変位と ALE メッシュの変位が一致することは確認している。Fig. 34 より、時刻  $t = 0.1$  S の時点で、ラバー板は大きく変形し、最大で 1.61cm、板長に対し約 14% の変位が生じている。従って、ALE メッシュの制御に Laplace 方程式を用いる場合、ラバー板に生じる変位が板長の 14% 程度であれば計算を続けることが可能である。また、Fig. 35 より、このとき解析領域に流体速度場に数値振動は生じていないことが分かる。

一方で、この計算は時刻 0.111 s において、Newton-Raphson 法の反復ループが収束せず破たんした。このときの構造物の変位を Fig. 37 に示す。Fig. 37 に示すように、ラバー板の変位は最大で 7.88cm、板長に対し約 67% に達しており、時刻  $t = 0.1$  s のときに比べさらに大きく変形している。これは、ラバー板の変形があまりに大きいため、ALE メッシュが変形に追従しきれず計算が破綻しているものと考えられる。

以上より、Laplace 方程式に基づくメッシュ制御法では、ラバー板の変位が板長の 67% 程度までであれば、ALE メッシュを構造領域の動きに追従させて計算を続行できることが分かる。

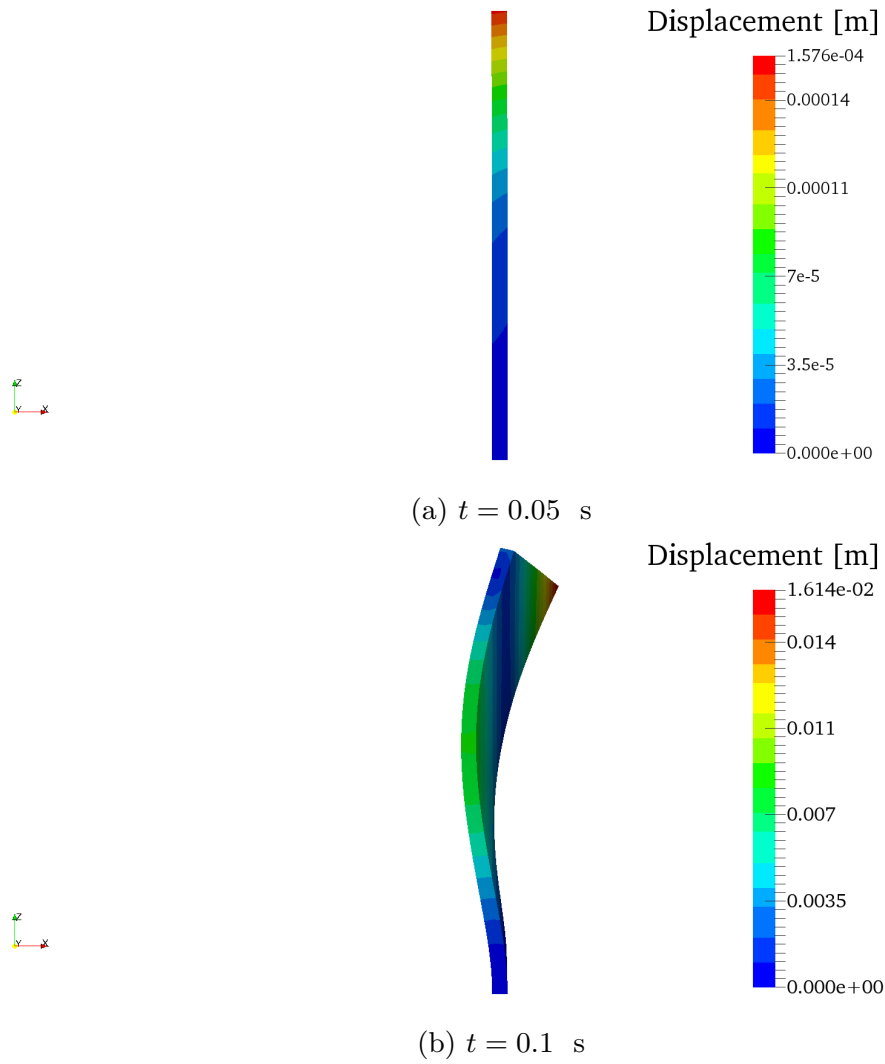
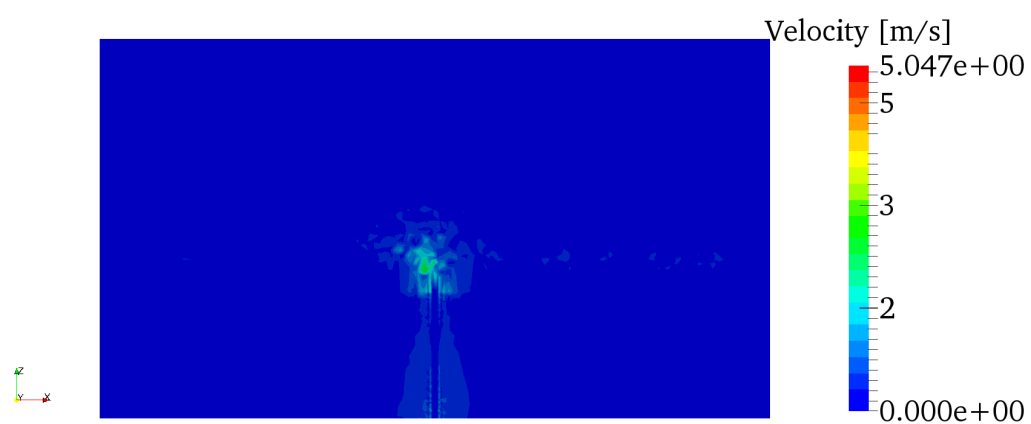
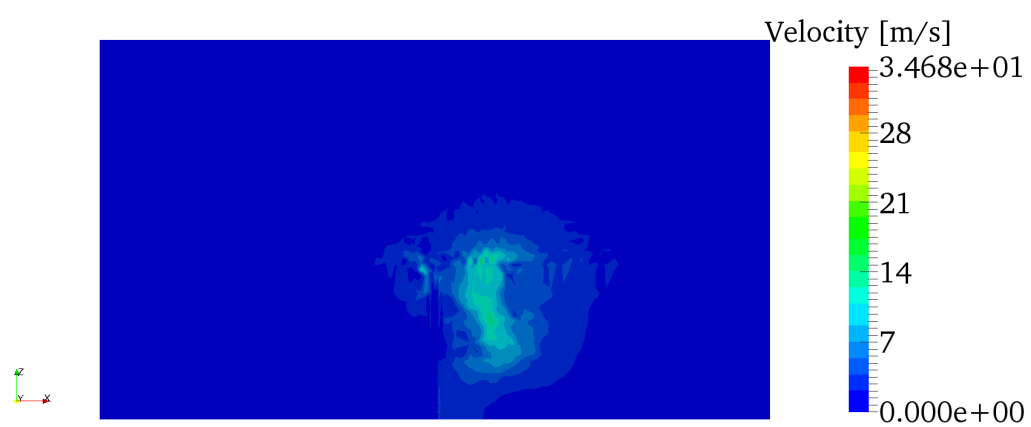


Fig. 34: Displacement of the structures in the rotating oil tank problem: the structure is deformed

(a)  $t = 0.05$  s(b)  $t = 0.1$  sFig. 35: Velocity on  $y = 0$  in the rotating oil tank problem

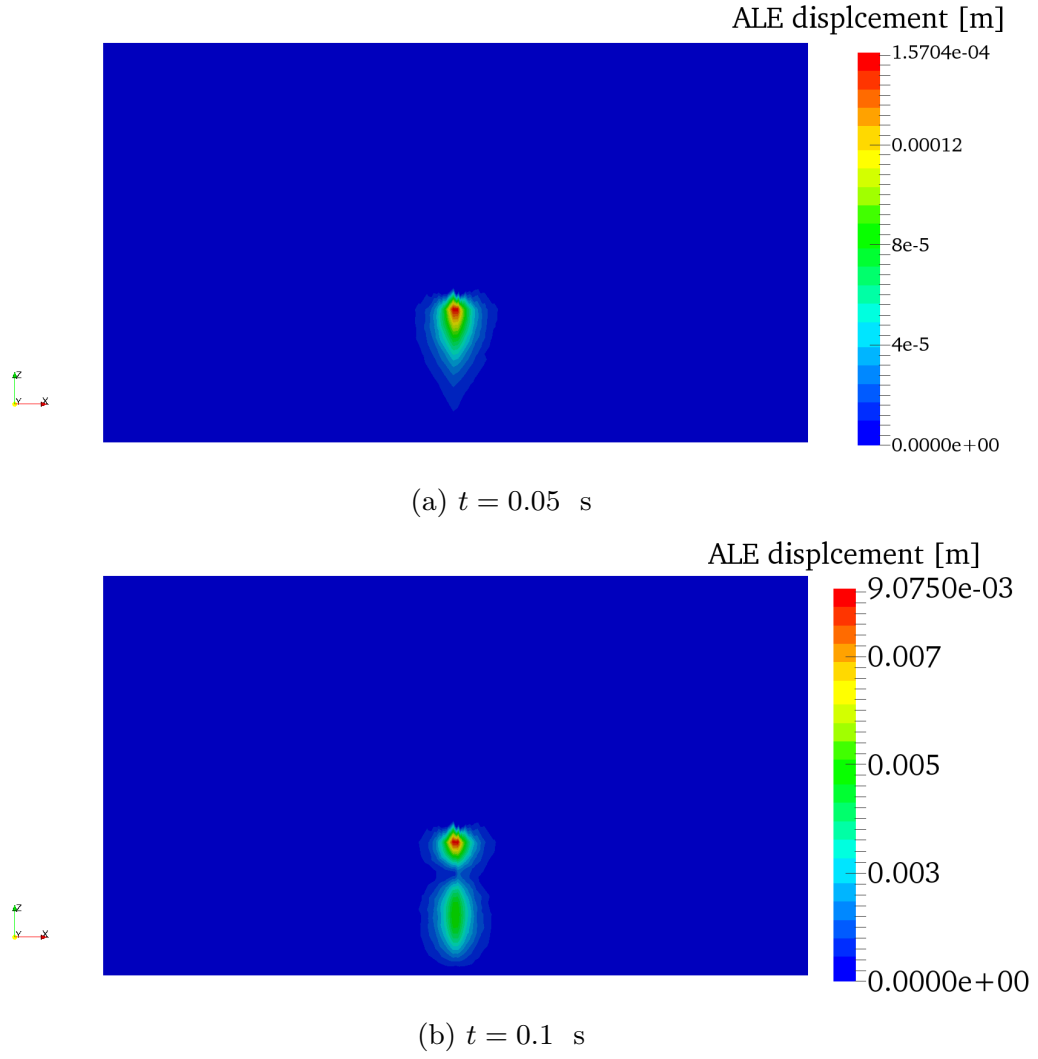


Fig. 36: Displacement of ALE mesh on  $y = 0$  in the rotating oil tank problem

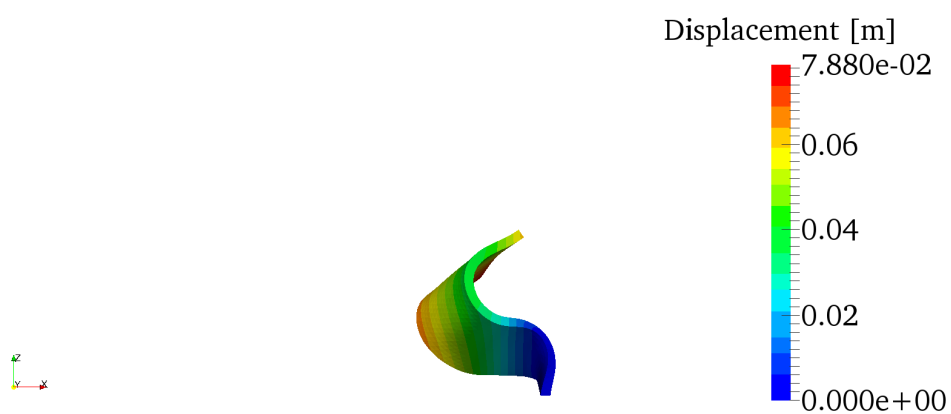


Fig. 37: Displacement of the structures at  $t = 0.111\text{s}$  in the rotating oil tank problem: the computation is corrupted after this step



## 第 6 章 結言

本論文では、液圧ブロー成形の数値シミュレーションに向けて、二相流と大変形・広域にわたる接触を伴う構造物間の流体構造接触連成手法を提案した。本手法は、大別して 3 つの構成技術から成る。第一に、広域にわたる接触を解くアルゴリズムとして、内点法による接触アルゴリズムを採用した。第二に、気液二相流の数値計算手法として、レベルセット法を採用した。第三に、流体構造連成手法として、Laplace 方程式に基づく ALE 法を採用した。これら 3 つの技術を統合して、内点法接触アルゴリズムにおける Newton-Raphson 法の反復において、構造の変位場、接触力場、流体速度場、圧力場を同時に解くことで一体型連成を実現した。ALE メッシュの変位場、レベルセット場は、これらの場を解いた後に逐次的に解くことで、分離型連成手法により連成させた。

本論文では、提案した手法の構成技術について検討した。まず、内点法による接触アルゴリズムについて、ブロー成形を模したモデルを解いて、接触状態探索の収束性が優れているかを確認した。次に、レベルセット法に含まれる移流を解くための SUPG 法と、非圧縮性 Newton 流体を解くための SUPG/PSPG 法について、回転円錐問題やキャビティ内強制対流問題を解くことで精度について検討した。さらに、レベルセット法そのものに関しては、ダム崩壊問題を解くことで既存の実験値、計算値との比較を行った。最後に、Laplace 方程式に基づく ALE 法は構造に大変形が生じた場合でも計算が破綻しないかを確認するため、単相流の流体構造連成問題を解いてその結果を検討した。

検討の結果、内点法による接触アルゴリズムは、大変形と広域にわたる接触を伴う問題についても、従来の有効制約法に比べ接触状態探索の収束性が優れていることが定量的に示された。また、移流を解くための SUPG 法、非圧縮性 Newton 流体を解くための SUPG/PSPG 法については、それぞれベンチマーク問題の理論解と従来の計算結果と比較して、十分な精度が得られていることを確認した。さらに、レベルセット法でダム崩壊問題を解いた場合、液柱が崩壊する様子を計算することができ、液柱の先端部までの距離が既存の計算値、実験値とよく一致することが示された。最後に、Laplace 方程式に基づく ALE メッシュ制御法では、板状の構造物について、板の長さに対する先端部の変形が 67% 程度になるまでは、ALE メッシュを追従させて計算を続行できることを確認した。

一方で、レベルセットの再初期化ソルバでは、実装したソルバでは数値振動が発生した。これは、レベルセット再初期化の支配方程式における非線形な移流速度を線形化していることや、同支配方程式を離散化する際の安定化手法が不十分であったことが原因と考えられる。また、Laplace 方程式に基づくメッシュ制御法では、構造の変位がさらに大きくなる場合計算が破綻した。これは、提案した手法で採用した ALE メッシュの移動法では、構造物の変位によって ALE メッシュが破綻したことが原因だと考えられる。液圧ブロー成形における被加工物は局所的に大変形を伴うことから、ALE メッシュの制御法には更なる検討が必要とされる。

今後は、以下に述べるように研究を進める。まず、二相流を伴う流体構造連成手法におけるレベルセット関数の再初期化について、移流速度に相当する項の非線形性を考慮した Newton-Raphson 法反復の構築や、より安定な離散化手法についての検討を行う。続いて、ALE メッシュの移動方法について、構造物の大変形を伴う場合に適した手法について検討する。さらに、二相流を伴う流体構造連成手法について、回転油槽問題といったベンチマーク問題を求解し、他の計算手法や実験値と同等の結果が得られているかどうかを確認する。そして、本論文で提案した手法について、全ての構成技術を考慮した数値シミュレーションを行い、提案手法の精度や計算時間を検討する。

## 謝辞

本論文は、東京大学大学院新領域創成科学研究人間環境学専攻修士課程における筆者の研究成果をまとめたものです。研究の遂行にあたり、多くの方々に御指導、御協力頂きましたこと、ここに厚く御礼申し上げます。

はじめに、指導教官である橋本学講師と奥田洋司教授に、深く感謝の意を表します。お二人には、流体解析や流体構造連成手法といった研究に関する事項から、論文投稿といった研究生活に関する事柄まで、貴重な御指導を多数頂きました。また、学会発表や研究会への参加といった貴重な機会を多数頂きました。特に橋本学講師は、研究遂行に関しての打ち合わせの場を多数設けて頂き、その都度多数の御指導御鞭撻を頂きました。

次に、本論文に関して副査を務めて頂き、貴重な御指摘を多数頂きました坂東茂客員准教授に、ここに謹んで感謝の意を示します。

さらに、奥田・橋本研究室の皆様には、謹んで御礼申し上げます。特に、研究室の先輩である森田直樹氏、井原遊氏には、研究に関して多くの助力、御指摘を頂いたほか、研究生活に関する私的な事柄に至るまで多くの相談に親身に乗って頂きました。同じく先輩である三橋祐太氏も、研究に関して多くの御指摘を頂きました。研究室の秘書である渡辺夏実氏、齊藤麻衣氏には、出張申請といった事務手続きに関して多くの御助力を頂きました。同期である徳永勇介氏や後輩である松田和高氏、郎詩萌氏、邱桐氏、Daniya Maridan氏にも多くのお気遣いを頂きました。

そして、FrontISTR 研究会を心から感謝いたします。奥田・橋本研究室のOBでもあられる稲垣和久氏には、内点法接触アルゴリズムについて貴重な御指摘、御助力を頂きました。このほかにも、殷峻氏、小川道夫氏、後藤和哉氏、徳田明彦氏、林雅江氏には、研究や後輩指導に関して多くの御協力を頂きました。

最後に、家族・友人に深く感謝いたします。父と母には、学部時代から一貫して暖かく応援して頂きました。友人である會田尚氏は、研究遂行が滞った折、私を気遣って気分転換に映画に誘っていただくなど、多くの心遣いを頂きました。

最後に、これまで御協力頂いた皆様には、改めて感謝の気持ちを申し上げ、謝辞にかえさせていただきます。

## 参考文献

- [1] 有方広洋. プラスチック成形加工基礎と実務—射出成形から二次加工まで—. 日刊工業新聞社, 2005.
- [2] 小林智. プラスチック材料の不良現象事例集. 技術情報協会, 2012.
- [3] 東洋製罐株式会社. 製品情報 | 飲料用: ペットボトル | ペットボトル. <https://www.toyo-seikan.co.jp/product/for-beverage-petbottle/petbottle.html>, 2017/01/11 最終アクセス.
- [4] 株式会社日本容器. ブロー成形 (中空成形). [http://nihonyoki.co.jp/products/products-cat/prod01/prod01/prod01\\_01/](http://nihonyoki.co.jp/products/products-cat/prod01/prod01/prod01_01/), 2016/02/04 最終アクセス.
- [5] みのる化成株式会社. 超大型ブロー成形. <http://www.minorukasei.co.jp/>, 2016/02/04 最終アクセス.
- [6] H. G. deLorenzi and H. F. Nied. Blow molding and thermoforming of plastics, finite element modelling. *Journal of computers and structures*, Vol. 26, pp. 197–206, 1987.
- [7] F. M. Schmidt, J. F. Agassant, and M. Bellet. Experimental study and numerical simulation of the injection stretch/blow molding process. *Polymer engineering and science*, Vol. 38, No. 9, p. 1399, 1998.
- [8] S. Wang and A. Makinouchi. Contact search strategies for FEM simulation of the blow molding process. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 48, No. 4, pp. 501–521, 2000.
- [9] G. Marckmann, E. Verron, and B. Peseux. Finite element analysis of blow molding and thermoforming using a dynamic explicit procedure. *Polymer engineering and science*, Vol. 41, No. 3, pp. 426–439, 2001.
- [10] Z. J. Yang, E. Harkin-Jones, G. H. Menary, and C. G. Armstrong. Coupled temperature–displacement modelling of injection stretch-blow moulding of PET bottles using Buckley model. *Journal of materials processing technology*, Vol. 153, pp. 20–27, 2004.

- 
- [11] M. Bordival, F. M. Schmidt, Y. Le Maout, and E. Coment. Measurement of thermal contact resistance between the mold and the polymer for the stretch-blow molding process. In *10 th ESAFORM conference on material forming: Part A (AIP conference proceedings volume 907)*, Vol. 907, pp. 1245–1250, 2007.
  - [12] F. Daver and B. Demirel. A simulation study of the effect of preform cooling time in injection stretch blow molding. *Journal of materials processing technology*, Vol. 212, pp. 2400–2405, 2012.
  - [13] A. Bougharriou, M. Jeridi, M. Hdiji, A. Boughrira, and K. Saï. Finite element analysis of PMMA stretch blow molding. *International journal of manufacturing engineering*, Vol. 2014, , 2014.
  - [14] Y. Salomeia, G. H. Menary, C. G. Armstrong, J. Nixon, and S. Yan. Measuring and modelling air mass flow rate in the injection stretch blow moulding process. *International journal of material forming*, pp. 1–15, 2015.
  - [15] Dassault Systèmes. <http://www.3ds.com/>, 2016/02/04 最終アクセス.
  - [16] ANSYS Inc. <http://www.ansys.com/>, 2016/02/04 最終アクセス.
  - [17] RheoWare Simulation Inc. <http://rheoware.com/solutions.html>, 2017/01/11 最終アクセス.
  - [18] アムコーリミテッド. 液体または液圧ブロー成形. 特許第 4669934 号, June 2009. 特開 WO2009/075791.
  - [19] J. Zimmer, G. Chauvin, and M. Stommel. Experimental investigation and numerical simulation of liquid supported stretch blow molding. *Polymer engineering and science*, Vol. 55, No. 4, pp. 933–944, 2015.
  - [20] J. J. Monaghan. Simulating free surface flows with SPH. *Journal of computational physics*, Vol. 110, No. 2, pp. 399–406, 1994.
  - [21] P. W. Christensen, A. Klarbring, J.-S. Pang, and N. Strömberg. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 42, No. 1, pp. 145–173, 1998.
  - [22] K. Inagaki, G. Hashimoto, and H. Okuda. Predictor-corrector interior point method for contact analysis models with multi-point constraints. *JSIAM letters*,

- Vol. 7, No. 0, pp. 65–68, 2015.
- [23] 稲垣和久. 電子機器の構造信頼性評価における大規模接触解析手法に関する研究. 博士論文, 東京大学, 2016.
- [24] Tayfun E Tezduyar. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. *Advances in applied mechanics*, Vol. 28, pp. 1–44, 1991.
- [25] T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray, and R. Shih. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 95, No. 2, pp. 221–242, 1992.
- [26] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of computational physics*, Vol. 114, pp. 146–159, 1994.
- [27] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 32, No. 1, pp. 199–259, 1982.
- [28] W. A. Wall and E. Ramm. *Fluid Structure Interaction Based Upon a Stabilized (ALE) Finite Element Method*. SFB 404, Geschäftsstelle, 1998.
- [29] A. M. Winslow. "equipotential" zoning of two-dimensional meshes. Technical report, University of California, Livermore (USA). Lawrence Livermore Laboratory, 1963.
- [30] A. M. Winslow and R. T. Barton. Rescaling of equipotential smoothing. Technical report, Lawrence Livermore National Laboratory, California (USA), 1982.
- [31] E. Botia Vera, A. Souto Iglesias, G. Bulian, and L. Lobovský. Three SPH novel benchmark test cases for free surface flows. In *Proceedings of the 5th ERCOFTAC SPHERIC workshop on SPH applications*, 2010.
- [32] SPHERIC benchmark. [http://canal.etsin.upm.es/ftp/SPHERIC\\_BENCHMARKS/](http://canal.etsin.upm.es/ftp/SPHERIC_BENCHMARKS/), 2017/01/11 最終アクセス.
- [33] FrontISTR 研究会事務局. FrontISTR 研究会・日本計算工学会 GreenCAE 研究会.

- <http://www.multi.k.u-tokyo.ac.jp/FrontISTR/>, 2017/01/11 最終アクセス.
- [34] P. Wriggers. *Computational contact mechanics*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [35] S. Hübner and B. I. Wohlmuth. A primal–dual active set strategy for non-linear multibody contact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 194, No. 27, pp. 3147–3166, 2005.
- [36] S. Hübner, G. Stadler, and B. I. Wohlmuth. A primal-dual active set algorithm for three-dimensional contact problems with Coulomb friction. *SIAM journal on scientific computing*, Vol. 30, No. 2, pp. 572–596, 2008.
- [37] 山下浩. 大規模最適化問題へのアプローチ. システム制御情報学会誌, Vol. 50, No. 9, pp. 332–337, 2006.
- [38] G. Tanoh, Y. Renard, and D. Noll. Computational experience with an interior point algorithm for large scale contact problems. *Optimization online*, 2004.
- [39] 宮村倫司, 寒野善博, 大崎純. 内点法による接触問題の求解に関する検討. 計算力学講演会講演論文集, Vol. 2006, No. 19, pp. 69–70, 2006.
- [40] 宮村倫司, 寒野善博, 大崎純. 内点法と試行錯誤法の組み合わせ手法による摩擦のない接触問題の求解. 学術講演梗概集, B-1, Vol. 2007, pp. 223–224, 2007.
- [41] T. Miyamura, Y. Kanno, and M. Ohsaki. Combined interior-point method and semismooth Newton method for frictionless contact problems. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 81, No. 6, pp. 701–727, 2010.
- [42] H. Y. Benson and D. F. Shanno. An exact primal–dual penalty method approach to warmstarting interior-point methods for linear programming. *Computational optimization and applications*, Vol. 38, No. 3, pp. 371–399, 2007.
- [43] H. Y. Benson and D. F. Shanno. Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: regularization and warmstarts. *Computational optimization and applications*, Vol. 40, No. 2, pp. 143–189, 2008.
- [44] 内山知実, 峯村吉泰. ALE 有限要素法による移動境界を含む気液二相流の数値解析: 非圧縮性二流体モデルを用いた解法. 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 66, No. 647, pp. 1627–1635, 2000.

- 
- [45] T. Uchiyama. ALE finite element method for gas–liquid two-phase flow including moving boundary based on an incompressible two-fluid model. *Nuclear engineering and design*, Vol. 205, No. 1, pp. 69–82, 2001.
- [46] S. Koshizuka and Y. Oka. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. *Nuclear science and engineering*, Vol. 123, No. 3, pp. 421–434, 1996.
- [47] J. E. Welch, F. H. Harlow, J. P. Shannon, and B. J. Daly. The MAC method—a computing technique for solving viscous, incompressible, transient fluid-flow problems involving free surfaces. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory, University of California, New Mexico, 1965.
- [48] B. D. Nichols, C. W. Hirt, and R. S. Hotchkiss. SOLA-VOF: a solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory, New Mexico (USA), 1980.
- [49] T. Yabe and P. Y. Wang. Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid. *Journal of the physical society of Japan*, Vol. 60, No. 7, pp. 2105–2108, 1991.
- [50] 陸田秀実, 河合ひろみ, 安田孝志. C-CUP 法による気液界面の直接数値計算. 海岸工学論文集, Vol. 45, pp. 55–59, 1998.
- [51] 金井亮浩, 宮田秀明. 密度関数法を応用した気泡の数値シミュレーション. 日本造船学会論文集, Vol. 1996, No. 179, pp. 41–48, 1996.
- [52] M. Sussman and E. Fatemi. An efficient, interface-preserving level set redistancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow. *SIAM Journal on scientific computing*, Vol. 20, No. 4, pp. 1165–1191, 1999.
- [53] 姫野武洋, 渡辺紀徳. 微小重力環境における気液界面挙動の数値解析. 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 65, No. 635, pp. 2333–2340, 1999.
- [54] 姫野武洋, 渡辺紀徳, 百々悟, 今野彰. 低重力環境における液面挙動の 3 次元解析. 流体工学部門講演会講演論文集, No. 303, p. 47. 一般社団法人日本機械学会, 9 2000.
- [55] J. Yan, A. Korobenko, X. Deng, and Y. Bazilevs. Computational free-surface fluid–structure interaction with application to floating offshore wind turbines.



- Computers and fluids*, 2016.
- [56] U. M. Mayer, A. Popp, A. Gerstenberger, and W. A. Wall. 3D fluid–structure–contact interaction based on a combined XFEM FSI and dual mortar contact approach. *Computational mechanics*, Vol. 46, No. 1, pp. 53–67, 2010.
- [57] L. R. Schmidt and J. F. Carley. Biaxial stretching of heat-softened plastic sheets: Experiments and results. *Polymer engineering and science*, Vol. 15, No. 1, pp. 51–62, 1975.
- [58] T. J. R. Hughes. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 1413–1418, 1980.
- [59] H. C. Ku, R. S. Hirsh, and T. D. Taylor. A pseudospectral method for solution of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of computational physics*, Vol. 70, No. 2, pp. 439–462, 1987.

## 付録 A 連続体力学

本章では、本論文で取り扱う範囲で、連続体力学について説明する。

### A.1 現配置と参照配置

時刻  $t$  において連続体が占める領域を  ${}^t\Omega$  とする． ${}^t\Omega$  を現配置と呼ぶ．これに対し，全単射写像  ${}^t\phi : {}^0\Omega \mapsto {}^t\Omega$  が存在するような別の領域  $\tilde{\Omega}$  を考える． $\tilde{\Omega}$  を参照配置と呼ぶ．参照配置の例として，時刻 0 において連続体が占める領域  ${}^0\Omega$  などが挙げられる．参照配置上の点  $\tilde{\mathbf{x}}$  は，時間に依存しないものとする．また， ${}^t\phi$  を  $\tilde{\Omega}$  から  ${}^t\Omega$  への変形と呼ぶ．以降では，文字  $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}$ ， ${}^t\mathbf{x} \in {}^t\Omega$  との間に次式 (A.1) の関係が成り立つものとする．

$${}^t\mathbf{x} = {}^t\phi(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (\text{A.1})$$

このとき，次式 (A.2) で与えられるベクトル  ${}^t\tilde{\mathbf{u}}$  を  $\tilde{\Omega}$  から  ${}^t\Omega$  への変位ベクトルと呼ぶ．

$${}^t\tilde{\mathbf{u}}({}^t\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \quad (\text{A.2})$$

次に， $\tilde{\Omega}$  上で定義された時間依存のベクトル場  ${}^t\boldsymbol{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}})$  を考える．なお，ここではベクトル場を考えるが，スカラー場，2 階以上のテンソル場の場合についても同様である．このとき， ${}^t\Omega$  上の時間依存のベクトル場  ${}^t\boldsymbol{\alpha}({}^t\mathbf{x})$  を，次式 (A.3) のように定義する．

$${}^t\boldsymbol{\alpha}({}^t\mathbf{x}) = {}^t\boldsymbol{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (\text{A.3})$$

式 (A.3) に示すように  ${}^t\boldsymbol{\alpha}({}^t\mathbf{x})$  と  ${}^t\boldsymbol{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}})$  は異なる領域で定義された別の関数であるが，1 対 1 対応で結びついた空間上の点  ${}^t\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}$  において同じ値をとる．本論文では，このような関数について，同じ文字を使って関数を表し，両者の区別が必要な場合は変数を明記することで区別するものとする．

ベクトル場  ${}^t\boldsymbol{\alpha}({}^t\mathbf{x})$  について， ${}^t\boldsymbol{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}})$  のように参照配置と時刻の関数として扱う場合，ベクトル場  ${}^t\boldsymbol{\alpha}$  は Lagrange 表記されるという．他方， ${}^t\boldsymbol{\alpha}({}^t\mathbf{x})$  のまま現配置と時刻の関数として扱う場合，ベクトル場  ${}^t\boldsymbol{\alpha}({}^t\mathbf{x})$  は Arbitrary Lagrangian Eulerian(ALE) 表記されるという．特に， $\tilde{\Omega} = {}^0\Omega$  の場合， ${}^t\boldsymbol{\alpha}({}^t\mathbf{x})$  は Eulerian 表記されるという．

次式 (A.4) のように定義されるテンソルを変形勾配テンソルという．

$${}^t\tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{\nabla} \otimes {}^t\mathbf{x}) \quad (\text{A.4})$$

ここで、 $\tilde{\nabla}$  は  $\tilde{\mathbf{x}}$  座標系で定義されたナブラ演算子である．また、次式 (A.5) のように定義されるスカラーを体積変化率という．

$${}^t\tilde{J} = \det {}^t\tilde{\mathbf{F}} \quad (\text{A.5})$$

${}^t\mathbf{x}$  座標系における点  $\tilde{\mathbf{x}}$  の速度  ${}^t\tilde{\mathbf{v}}$  は、次式 (A.6) により定義される．

$${}^t\tilde{\mathbf{v}} = \left. \frac{\partial {}^t\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}} = \left. \frac{\partial {}^t\mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}} \quad (\text{A.6})$$

本論文では、参照配置を  ${}^0\Omega$  とした場合の変形勾配テンソル、体積変化率、変位、速度をそれぞれ  ${}^t_0\mathbf{F}$ ,  ${}^t_0J$ ,  ${}^t\mathbf{u}$ ,  ${}^t\mathbf{v}$  と記述する．また、点  ${}^t\mathbf{x}$  における加速度  ${}^t\mathbf{a}$  は、次式のように定義される．

$${}^t\mathbf{a} = \left. \frac{\partial {}^t\mathbf{v}({}^0\mathbf{x})}{\partial t} \right|_{{}^0\mathbf{x}} \quad (\text{A.7})$$

なお、参照配置を  ${}^0\Omega$  としたときの参照配置を固定した時間方向微分のことを物質時間微分といい、次式 (A.8) のように定める．

$$\frac{D}{Dt} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{{}^0\mathbf{x}} \quad (\text{A.8})$$

以降では、物質時間微分は  $D/Dt$  と表記し、現時刻の空間配置を固定した時間方向微分を単に  $\partial/\partial t$  と表記するものとする．

## A.2 時間微分

Lagrange 表記されたベクトル場  ${}^t\mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}})$  について、参照配置を固定した時間方向の偏微分は容易に求まる．また、ALE 表記されたベクトル場  ${}^t\mathbf{a}({}^t\mathbf{x})$  について、空間配置を固定した時間方向の偏微分も容易に求まる．一方で、連続体力学やそれに基づく数値解法の定式化では、ベクトル場を ALE 表記したまま、参照配置を固定した時間方向微分する操作が頻繁に現れる．今、現配置で定義されたベクトル場  ${}^t\boldsymbol{\alpha}({}^t\mathbf{x})$  を考える．このとき、

${}^t\alpha({}^t\mathbf{x})$  の参照配置における時間方向微分は、次式 (A.9) のように求まる.

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial {}^t\alpha({}^t\mathbf{x})}{\partial t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}} \\
&= \left. \frac{\partial \alpha({}^t\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}}, t), t)}{\partial t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}} \\
&= ({}^t\nabla \otimes {}^t\alpha({}^t\mathbf{x}))^T \left. \frac{\partial {}^t\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial t}{\partial t} \left. \frac{\partial {}^t\alpha({}^t\mathbf{x})}{\partial t} \right|_{{}^t\mathbf{x}} \\
&= (\tilde{\mathbf{v}} \cdot {}^t\nabla) {}^t\alpha({}^t\mathbf{x}) + \frac{\partial {}^t\alpha({}^t\mathbf{x})}{\partial t}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

### A.3 非圧縮性

構造解析や流体解析では、連続体の密度の変化を無視してモデル化できることがある. 連続体の密度が変化しないという仮定を、非圧縮性条件といい、次式 (A.10) のように表される.

$$\frac{D {}^t\rho}{Dt} = 0 \tag{A.10}$$

ここで、 ${}^t\rho$  は時刻  $t$  における連続体の密度である. 式 (A.10) が必ずしも成り立たないとしてモデル化する場合、圧縮性条件が課されているという.

### A.4 連続の式

連続体では、連続体の総質量は変化しないという仮定がなされる. これは、式 (A.11) のように表せる.

$$\frac{D {}^t m}{Dt} = 0 \tag{A.11}$$

ここで、 ${}^t m$  は物質の質量であり、次式 (A.12) で定義される.

$${}^t m = \int_{{}^t\Omega} {}^t\rho dV \tag{A.12}$$

ここで、 ${}^t\Omega$  は現配置において物質が占める領域、 ${}^t\rho$  は現配置における連続体の密度である. 式 (A.12) より、時刻 0 での密度と現時刻における密度には、次式 (A.13) の関係が成り立つことが導かれる.

$${}^t\rho = \frac{1}{{}^tJ} {}^0\rho \tag{A.13}$$

式 (A.11) を変形させることを考える．式 (A.11) の左辺は，式 (A.12) を代入することで次式 (A.14) のように変形できる．

$$\begin{aligned}
 \frac{D {}^t m}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \left( \int_{{}^t \Omega} {}^t \rho dV \right) \\
 &= \frac{D}{Dt} \left( \int_{{}^0 \Omega} {}^t \rho {}^t J dV \right) \\
 &= \int_{{}^0 \Omega} \left( \frac{D {}^t \rho}{Dt} {}^t J + {}^t \rho \frac{D {}^t J}{Dt} \right) dV \\
 &= \int_{{}^0 \Omega} \left( \frac{D {}^t \rho}{Dt} + {}^t \rho {}^t \nabla \cdot {}^t \mathbf{v} \right) {}^t J dV \\
 &= \int_{{}^t \Omega} \left( \frac{D {}^t \rho}{Dt} + {}^t \rho {}^t \nabla \cdot {}^t \mathbf{v} \right) dV
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

ここで， ${}^0 \Omega$  は初期配置において連続体が占める領域， ${}^t \nabla$  は  ${}^t \mathbf{x}$  座標系で定義されたナブラ演算子である．また，第 3 式から第 4 式へと変形する際に，体積変化率の時間変化について成り立つ次式 (A.15) の関係式を用いた．

$$\frac{D {}^t J}{Dt} = {}^t J {}^t \nabla \cdot {}^t \mathbf{v} \tag{A.15}$$

式 (A.14) を式 (A.11) に代入して，被積分項の連続性を考慮することで，次式 (A.16) が得られる．

$$\frac{D {}^t \rho}{Dt} + {}^t \rho {}^t \nabla \cdot {}^t \mathbf{v} = 0 \tag{A.16}$$

式 (A.16) を連続の式という．

また，非圧縮性条件 (A.10) が課される場合，連続の式 (A.16) は次式 (A.17) のようになる

$${}^t \nabla \cdot {}^t \mathbf{v} = 0 \tag{A.17}$$

## A.5 運動量保存則

連続体力学における運動量保存則は，次式 (A.18) のように与えられる．

$$\int_{{}^t \Omega} {}^t \rho {}^t \mathbf{a} dV = \int_{{}^t \Omega} {}^t \rho {}^t \mathbf{b} dV + \int_{{}^t \Gamma} {}^t \mathbf{t} dS \tag{A.18}$$

ここで， ${}^t \Gamma$  は  ${}^t \Omega$  の表面領域， ${}^t \mathbf{b}$  は単位質量あたりの体積力ベクトル， ${}^t \mathbf{t}$  は表面力ベクトルである．式 (A.18) を Euler の第一法則という．ここで，式 (A.18) を次のように変形

する.

$$\begin{aligned}
\int_{t\Omega} {}^t\rho {}^t\mathbf{a} dV &= \int_{t\Omega} {}^t\rho {}^t\mathbf{b} dV + \int_{t\Gamma} {}^t\mathbf{t} dS \\
\int_{t\Omega} {}^t\rho {}^t\mathbf{a} dV &= \int_{t\Omega} {}^t\rho {}^t\mathbf{b} dV + \int_{t\Gamma} {}^t\mathbf{n} \cdot {}^t\mathbf{T} dS \\
\int_{t\Omega} {}^t\rho {}^t\mathbf{a} dV &= \int_{t\Omega} {}^t\rho {}^t\mathbf{b} dV + \int_{t\Omega} {}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{T} dS
\end{aligned} \tag{A.19}$$

ここで, 上式の一行目から二行目の式変形には, 次式 (A.20) で表される Cauchy の法則を用い, 二行目から三行目の式変形には Gauss の発散定理を用いた.

$${}^t\mathbf{t} = {}^t\mathbf{n} \cdot {}^t\mathbf{T} \tag{A.20}$$

ここで,  ${}^t\mathbf{n}$  は外向きの単位法線ベクトル,  ${}^t\mathbf{T}$  は Cauchy 応力テンソルである. 式 (A.19) において, 被積分項の連続性を考慮して, 次式 (A.21) を得る.

$${}^t\rho {}^t\mathbf{a} = {}^t\rho {}^t\mathbf{b} + {}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{T} \tag{A.21}$$

式 (A.21) を, Cauchy の第一法則という.

式 (A.21) は, 現配置で記述されている. 本研究では, 構造領域の定式化に Total Lagrangian を用いるため, 参照配置で記述された Cauchy の第一法則を導く. まず, 式 (A.13) を式 (A.18) に代入して, 次式 (A.22) を得る.

$$\int_{{}^0\Omega} {}^0\rho {}^t\mathbf{a} dV = \int_{{}^0\Omega} {}^0\rho {}^t\mathbf{b} dV + \int_{{}^0\Gamma} {}^t\mathbf{t}^* dS \tag{A.22}$$

ここで,  ${}^t\mathbf{t}^*$  は公称表面力ベクトルであり, 次式 (A.23) により定義される.

$${}^t\mathbf{t}^* = \frac{d {}^tS}{d {}^0S} {}^t\mathbf{t} \tag{A.23}$$

式 (A.22) を式 (A.19) と同様に変形することで,  ${}^0\Omega$  を参照した Cauchy の第一法則が, 次式 (A.24) のように得られる.

$${}^0\rho {}^t\mathbf{a} = {}^0\rho {}^t\mathbf{b} + {}^0\nabla \cdot ({}^t\mathbf{S} \cdot {}^t\mathbf{F}^T) \tag{A.24}$$

ここで,  ${}^t\mathbf{S}$  は第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルで, 次式 (A.25) により定義される.

$${}^t\mathbf{S} = {}^tJ {}^t\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^t\mathbf{T} \cdot {}^t\mathbf{F}^T \tag{A.25}$$

## A.6 角運動量保存則

連続体力学における角運動量保存則は、次式 (A.26) のように与えられる.

$$\int_{t\Omega} {}^t\rho {}^t\mathbf{x} \times {}^t\mathbf{a} dV = \int_{t\Omega} {}^t\rho {}^t\mathbf{x} \times {}^t\mathbf{b} dV + \int_{t\Gamma} {}^t\mathbf{x} \times {}^t\mathbf{t} dS \quad (\text{A.26})$$

式 (A.26) を Euler の第二法則という. 式 (A.26) を変形することで, 次式 (A.27) が得られる.

$$\begin{aligned} \int_{t\Omega} {}^t\rho {}^t\mathbf{x} \times {}^t\mathbf{a} dV &= \int_{t\Omega} {}^t\rho {}^t\mathbf{x} \times {}^t\mathbf{b} dV + \int_{t\Gamma} {}^t\mathbf{x} \times {}^t\mathbf{t} dS \\ \int_{t\Omega} {}^t\mathbf{x} \times ({}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{T}) dV &= \int_{t\Gamma} {}^t\mathbf{x} \times {}^t\mathbf{t} dS \quad (\because \text{式 (A.21)}) \\ \int_{t\Omega} {}^t\mathbf{x} \times ({}^t\nabla \cdot {}^t\mathbf{T}) dV &= \int_{t\Gamma} {}^t\mathbf{x} \times ({}^t\mathbf{n} \cdot {}^t\mathbf{T}) dS \quad (\because \text{式 (A.20)}) \\ \int_{t\Omega} e_{kij} {}^tx_i {}^tT_{lj,l} \mathbf{e}_k dV &= \int_{t\Omega} (e_{kij} {}^tx_i {}^tn_l {}^tT_{lj} \mathbf{e}_k) dS \\ \int_{t\Omega} e_{kij} {}^tx_i {}^tT_{lj,l} \mathbf{e}_k dV &= \int_{t\Omega} (e_{kij} {}^tx_i {}^tT_{lj} \mathbf{e}_k)_{,l} dV \\ \int_{t\Omega} e_{kij} {}^tT_{ij} \mathbf{e}_k dV &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

ここで,  $e_{ijk}$  は次式 (A.28) で定義される Edington のイプシロンであり,  $\mathbf{e}_i$  は直交デカルト座標系における単位ベクトルである.

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k \text{ が偶置換}) \\ -1 & (i, j, k \text{ が奇置換}) \\ 0 & (i, j, k \text{ のうち 2 つ以上の変数が互いに等しい}) \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

式 (A.27) から次の 3 式が得られる.

$${}^tT_{23} = {}^tT_{32} \quad (\text{A.29})$$

$${}^tT_{31} = {}^tT_{13} \quad (\text{A.30})$$

$${}^tT_{12} = {}^tT_{21} \quad (\text{A.31})$$

上の 3 式により, 次式 (A.32) が成り立つ.

$${}^t\mathbf{T} = {}^t\mathbf{T}^T \quad (\text{A.32})$$

また，第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソルについても，その定義式 (A.25) より次式 (A.33) が成り立つ．

$${}^t_0\mathbf{S} = {}^t_0\mathbf{S}^T \quad (\text{A.33})$$