論文の内容の要旨

論文題目　Categories of operators for multicategories with various symmetries
(多彩な対称性を持つマルチ圏のオペレーターの圏)

氏　　名　吉田　純

本論文では、各群オペラッドに関する対称性を持つマルチ圏について、May と Thomason によって提案され、Lurie によって高次のオペラッドの定式化に用いられた、オペレーターの圏の観点から、新たなモデルを構築し、それが古典的な場合と同値であることを示す。

本研究は、オペラッドによって表現される高次代数について、一般化された対称性をホモトピー整合的に導入することを目標としている。オペラッドは Stasheff や May によって、空間上の積及びその可換性をホモトピー論の観点から研究するために導入された概念であり、それ自身、対称モノイダル圏の中の代数構造として定義される。空間及び鎖複体へのオペラッドの作用を考えることによって、そのオペラッドが表現するホモトピー代数が定義できる。後に May と Thomason によって、各オペラッドは、オペレーターの圏と呼ばれる圏に対応することが指摘された。これは Segal の圏の逆圏 Γ^{op} 上の圏のある種のファイブレーションであり、オペラッドの代数的な構造が、オペレーターの圏においては、Γ^{op} の射の普遍的な持ち上げとして理解される。この特徴により、オペレーターの圏は高次の圏論と相性が良く、実際にこれをもとに Lurie が定義した $\infty-$オペラッドは、今日ではもっともよく用いられる高次オペラッドの一つである。

上で述べたオペラッドは、対称群の作用を持った、対称オペラッドである。これは、オペラッドと圏の共通の一般化であるマルチ圏において、次のように説明される。マルチ圏 $\mathcal{M}$ は、対象と呼ばれるものの集まり $\mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$、マルチ射と呼ばれるものの集合 $\mathcal{M}(a_1 \dots a_n; a)$、及びその上の合成演算からなる。ここで $\mathcal{M}$ の対象の列 $a, a_1, \dots, a_n$ について、対称群 $\mathfrak{S}_n$ の群作用

$$\left(\coprod_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathcal{M}(a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)}; a)\right) \times \mathfrak{S}_n \to \left(\coprod_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathcal{M}(a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)}; a)\right)$$

で、合成演算との両立条件を満たすものを $\mathcal{M}$ 上の対称構造と呼び、この時 $\mathcal{M}$ を対称マルチ圏と呼ぶ。上で述べた、Lurie の ∞-オペラッドは、正確には対称マルチ圏の高次化である。 Gurski は、ここに現われる対称群を他の群の族 $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}(n)\}_n$ に一般化できることを指摘した。すなわち、$\mathcal{G}$ が Zhang の意味での群オペラッドである時、上の議論において $\mathfrak{S}_n$ を $\mathcal{G}(n)$ に置き換えたものを考えることができる。こうして定義されるものが、$\mathcal{G}$-対称マルチ圏である。群オペラッドの例としては、対称群 $\mathfrak{S}$、組みひも群 $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_n\}_n$、リボン組みひも群 $\mathcal{RB}$ などがある。モノイダル圏 $\mathcal{C}$ に対応するマルチ圏 $\mathcal{C}^{\otimes}$ については、その上の $\mathcal{G}$-対称構造は、モノイダル構造の $\mathcal{G}$-対称構造と同値であり、$\mathcal{G}$ が $\mathfrak{S}$ 及び $\mathcal{B}$ の時には、それぞれ対称モノイダル構造、組みひもモノイダル構造と対応している。 $\mathcal{G}$-対称マルチ圏のなす 2-圏を $\mathbf{MultCat}_{\mathcal{G}}$、$\mathcal{G}$-対称モノイダル圏のなす 2-圏を $\mathbf{MonCat}_{\mathcal{G}}$ と書く。自然に 2-関手 $(-)^{\otimes} : \mathbf{MonCat}_{\mathcal{G}} \to \mathbf{MultCat}_{\mathcal{G}}$ があることに注意する。

本論文では、この $\mathcal{G}$-対称マルチ圏について、そのオペレーターの圏を構成し、各種の構造が普遍的な射の存在によって記述されることを見る。具体的には、2-圏 $\mathbb{B}_{\mathcal{G}}$ を構成し、次の結果を証明する。ここで、$\mathbf{Cat}_2$ は 2-圏、擬関手、擬自然変換、変更手 (modification) のなす 3-圏であり、$\mathbf{Cat}_2^{/\mathbb{B}_{\mathcal{G}}}$ は $\mathbb{B}_{\mathcal{G}}$ 上の厳密スライス圏である。

定理. 部分 3-圏 $\mathbf{RepOper}_{\mathcal{G}}^{\mathsf{geom}} \subset \mathbf{Oper}_{\mathcal{G}}^{\mathsf{geom}} \subset \mathbf{Cat}_2^{/\mathbb{B}_{\mathcal{G}}}$ 及び、次の可換図式で水平方向の擬関手が 2-圏の同値であるものが存在する。

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{MonCat}_{\mathcal{G}} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "(-)^{\otimes}"'] & \mathbf{RepOper}_{\mathcal{G}}^{\mathsf{geom}} \arrow[d, hook] \\
\mathbf{MultCat}_{\mathcal{G}} \arrow[r, "(-)^{\nabla_{\mathcal{G}}}", "\simeq"'] & \mathbf{Oper}_{\mathcal{G}}^{\mathsf{geom}}
\end{tikzcd}$$

鍵となる 2-圏 $\mathbb{B}_{\mathcal{G}}$ の構成のために、群オペラッドと交差区間的群 (crossed interval group) との関係を明らかにする必要がある。一般に小圏 $\mathcal{A}$ について、交差$\mathcal{A}$-群は、Fiedorowicz と Loday 及び Krasauska が導入した交差単体的群の底圏を単体圏 Δ から $\mathcal{A}$ に一般化したものとして定義され、$\mathcal{A}$ が $\nabla = \Delta^{\mathrm{op}}$ の場合を交差区間的群と呼ぶ。交差単体的群については多くの研究があるが、一般の小圏 $\mathcal{A}$ についてはあまり研究されてこなかった。そこで、本論文では Chapter 1 において、基本的な概念を復習した後、Chapter 2 において交差 $\mathcal{A}$-群の理論を整備する。交差 $\mathcal{A}$ 群のなす圏 $\mathbf{CrsGrp}_{\mathcal{A}}$ が局所表現可能圏であることが示される。このことは第一に $\mathbf{CrsGrp}_{\mathcal{A}}$ に終対象 $\mathfrak{T}_{\mathcal{A}}$ が存在することを示しており、各交差 $\mathcal{A}$-群 G について唯一の射 $G \to \mathfrak{T}_{\mathcal{A}}$ の像を取ることによって、交差 $\mathcal{A}$-群の $\mathfrak{T}_{\mathcal{A}}$ の部分対象による分類が得られる。特に $\mathcal{A} = \Delta$ の場合には、$\mathfrak{T}_{\Delta}$ 及びその全ての交差単体的部分群が計算されているが、本論文では、交差版の Goursat の補題を証明することによって、$\mathcal{A} = \nabla$ の場合に分類を与えた。例えば、対称群の列は交差区間的群 $\mathfrak{S}$ をなし、またその関手 $\Delta \to \nabla$ による制限は交差単体的群 $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ となるが、これらはそれぞれの圏の終対象の部分対象である。局所表現可能性の第二の帰結として、随伴関手定理を用いることにより、底圏の変更に付随する随伴が得られる。具体的には、自然に定義される関手の列 $\Delta \xrightarrow{j} \widetilde{\Delta} \xrightarrow{\mathfrak{J}} \nabla$ が次の随伴を誘導する。

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{CrsGrp}_{\Delta}^{/\boldsymbol{\mathcal{S}}} \arrow[r, bend left, "j_{\flat}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{CrsGrp}_{\widetilde{\Delta}}^{/\mathfrak{S}} \arrow[l, bend left, "j^{\natural}"] \arrow[r, bend left, "\mathfrak{J}_{\flat}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{CrsGrp}_{\nabla}^{/\mathfrak{S}} \arrow[l, bend left, "\mathfrak{J}^{\natural}"]
\end{tikzcd}$$

一方 Chapter 3 では、群オペラッドのなす圏 $\mathbf{GrpOp}$ が圏 $\mathbf{CrsGrp}_{\nabla}^{/\mathfrak{S}}$ への充満忠実な埋め込みを持つことが示される。さらに、具体的な計算によって、実はこの埋め込みが左随伴を持つことがわかり、特に次の随伴の列が得られる。

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{CrsGrp}_{\Delta}^{/\boldsymbol{\mathcal{S}}} \arrow[r, bend left, "j_{\flat}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{CrsGrp}_{\widetilde{\Delta}}^{/\mathfrak{S}} \arrow[l, bend left, "j^{\natural}"] \arrow[r, bend left, "\mathfrak{J}_{\flat}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{GrpOp} \arrow[l, bend left, "\mathfrak{J}^{\natural}"]
\end{tikzcd}$$

特に、群オペラッド $\mathcal{G}$ に対して圏 $\widetilde{\Delta}_{\mathfrak{J}^{\natural}\mathcal{G}}$ が構成される。この圏には、自然な $\mathcal{G}$-対称モノイダル圏の構造が入り、さらに、任意の $\mathcal{G}$-対称モノイダル圏 $\mathcal{C}$ について、$\mathcal{C}$ 上のモノイド対象と $\mathcal{G}$-対称関手 $\widetilde{\Delta}_{\mathcal{G}} \to \mathcal{C}$ は、関手的な一対一対応を持つことがわかる。

Chapter 4 と Chapter 5 では、$\mathcal{G}$-対称マルチ圏のオペレーターの圏のモデルがそれぞれ構成される。各群オペラッド $\mathcal{G}$ に対し、Chapter 4 では、小圏 $\widetilde{\mathbb{E}}_{\mathcal{G}}$ を対応する交差区間的群の全圏 $\nabla_{\mathcal{G}}$ の商圏として定義する。典型的な関手 $\Delta^{\mathrm{op}} \cong \nabla \to \widetilde{\mathbb{E}}_{\mathcal{G}}$ によって、$\widetilde{\mathbb{E}}_{\mathcal{G}}$ 上の普遍的な持ち上げを持つファイブレーションについて、Segal の条件が書け、これがオペラッドの合成演算を表現する。さらに $\widetilde{\mathbb{E}}_{\mathcal{G}}$ 上の圏には、圏 $\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathcal{G}}$ の作用を考えることができ、これが各オペレーターの圏の $\mathcal{G}$-対称性が表す。一方 Chapter 5 では、$\widetilde{\mathbb{E}}_{\mathcal{G}}$ と $\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathcal{G}}$ が 2-圏 $\mathbb{B}_{\mathcal{G}}$ を定めることを見る。これは $\nabla_{\mathcal{G}}$ のある種のホモトピー商を取ったものと見ることができ、Chapter 4 の結果を翻訳することによって、部分 3-圏

$$\mathbf{RepOper}_{\mathcal{G}}^{\mathsf{geom}} \subset \mathbf{Oper}_{\mathcal{G}}^{\mathsf{geom}} \subset \mathbf{Cat}_2^{/\mathbb{B}_{\mathcal{G}}}$$

が定義され、上記の定理を得る。これに加え、包含 $\mathbf{RepOper}_{\mathcal{G}}^{\mathsf{geom}} \hookrightarrow \mathbf{Oper}_{\mathcal{G}}^{\mathsf{geom}}$ の左随伴が具体的に構成され、これを計算することで、上で指摘した $\widetilde{\Delta}_{\mathfrak{J}^\natural\mathcal{G}}$ の性質が導かれる。

以上の結果を用いることで、一般化された対称性のもとでの、結合的代数の Hochschild ホモロジーに数学的意味付けを与えることができる。例えば Hopf 代数 H について、H-加群代数 A とは左 H-加群の圏 H-$\mathbf{Mod}$ における結合的代数であり、従って、結合的代数のオペラッドからのマルチ関手 $A : \mathbf{Assoc} \to H$-$\mathbf{Mod}$ と見做すことができる。一方、H の R-行列と H-$\mathbf{Mod}$ のモノイダル構造の組みひも構造との対応が知られており、特に R-行列を固定することによって、H-$\mathbf{Mod}$ は、組みひも群の群オペラッド $\mathcal{B}$ について、$\mathcal{B}$-対称モノイダル圏になる。定理と上に述べた $\widetilde{\Delta}_{\mathfrak{J}^\natural\mathcal{B}}$ の性質から、A と $\mathcal{B}$-対称モノイダル関手 $A^\natural : \widetilde{\Delta}_{\mathfrak{J}^\natural\mathcal{B}} \to H$-$\mathbf{Mod}$ とが一対一に対応する。ここで、パラサイクリック圏 Λ_∞ について、典型的な関手 $\Lambda_\infty \to \widetilde{\Delta}_{\mathfrak{J}^\natural\mathcal{B}}$ が存在するので、Connes の方法によって $A^\natural$ からアーベル圏 H-$\mathbf{Mod}$ の鎖複体を構成することができ、そのホモロジー群を A の H を底とする Hochschild ホモロジー群と見ることができる。ここで、従来の Hochschild ホモロジーでは、底環は可換の場合のみを扱っており、上記の構成は、その一般化となっていることに注意する。さらに、Fiedorowicz と Loday によって導入された、交差単体的群 G についてのホモロジーの構成も同様に一般化できる。非可換幾何学において Hochschild ホモロジーは重要な役割を果たすものであり、上の一般化も重要な幾何学的意味を持つと期待され、今後の重要な研究対象である。