論文の内容の要旨

論文題目： Studies on the ascending chain condition for F-pure thresholds
(F 純閾値の昇鎖条件に関する研究)

氏　　名： 佐藤 謙太

本論文では，正標数の代数多様体 X について，Frobenius 射 $F: X \longrightarrow X$ を用いて定義される一連の "mild" な特異点のクラス，いわゆる F 特異点を考える．その中でも特に，**鋭 F 純** (*sharply F-pure*) と呼ばれる特異点を扱う．

X を標数 $p > 0$ のネーター正規スキームであって **F 有限**，すなわち $F: X \longrightarrow X$ が有限射であるものとする．この時，X が高々鋭 F 純であるとは，任意の点 $x \in X$ で，$(F^{\#})_x : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow (F_*\mathcal{O}_X)_x$ が $\mathcal{O}_{X,x}$ 加群の射として分裂することを言う．この特異点のクラスは，3 つ組 $(X, \Delta, \mathfrak{a}^t)$ の場合にもその定義が拡張されている．ここで，3 つ組 $(X, \Delta, \mathfrak{a}^t)$ とは，ネーター正規スキーム X，その上の有効 $\mathbb{R}$-因子 Δ，連接イデアル層 $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ 及び実数 $t \geqslant 0$ からなる組であって，$K_X + \Delta$ が $\mathbb{R}$-Cartier となるものを言う．更に，(X, Δ) が鋭 F 純である時，$\mathfrak{a}$ の (X, Δ) 上の **F 純閾値** (*F-pure threshold*) $\mathrm{fpt}(X, \Delta; \mathfrak{a}) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ が，3 つ組 $(X, \Delta, \mathfrak{a}^t)$ が鋭 F 純になるような t の上限として定義される．F 純閾値は，3 つ組 $(X, \Delta, \mathfrak{a})$ の特異点の悪さを数値的にはかる量であり，正標数の代数幾何学において重要な量である．

F 特異点論は，正標数の代数幾何学だけでなく，標数 0 の代数幾何学においても重要である．実際，F 特異点は Frobenius 射という正標数特有の道具を用いて定義されているにもかかわらず，標数 0 の双有理幾何学に現れる特異点のクラスと良い対応があることが知られており，たとえば，上述の鋭 F 純特異点や F 純閾値は，それぞれ標数 0 における**対数的標準** (*log canonical*) 特異点及び**対数的標準閾値** (*log canonical threshold*) の正標数化とみなされている．ここで，対数的標準特異点とは，標数 0 の 3 つ組に対して特異点解消を用いて定義される "mild" な特異点であり，極小モデル理論において重要な役割を果たす特異点のクラスの一つである．また，対数的標準閾値は，F 純閾値同様，3 つ組が対数的標準となる閾値として定義されている．

Shokurov は，標数 0 の代数閉体上において，多様体の次元及び因子の係数を固定した時に，単項イデアルの対数的標準閾値として現れうる実数の全体のなす集合が昇鎖条件を満たすであろうと予想した ([8])．この予想は，de Fernex, Ein, Mustaţă らによって，多様体が非特異などの仮定のもとで，部分的に解決され ([2], [3])，その後 Hacon, M^cKernan, Xu らによって完全に解決された ([4])．

一般に，不変量について昇鎖条件が成立することは，幾何学への応用を考える

上で有益であり，それはこの，いわゆる対数的標準閾値の昇鎖条件に関しても例外ではない．実際 [4] において，対数的標準閾値の昇鎖条件は，flip の終止や Fano 多様体の有界性等の双有理幾何的な問題に応用されている．

Blickle, Mustaţă, Smith らは，対数的標準閾値の昇鎖条件の正標数版として，次のような予想を提唱した ([1])．

予想 ([1]). 自然数 n と素数 p を固定する．集合 $\mathcal{D}^{\mathrm{reg}}_{n,p}$ を，その元がすべて標数 p の n 次元 F 有限正則局所環となるものとする．この時，集合

$$\mathcal{T}^{\mathrm{preg}}_{n,p} := \{\mathrm{fpt}(A;\mathfrak{a}) \mid A \in \mathcal{D}^{\mathrm{reg}}_{n,p}, \mathfrak{a} \subsetneq A \text{ は単項イデアル }\} \subseteq \mathbb{R}$$

は昇鎖条件を満たす．

この予想は，[1]，[5]，[6] などにおいて非常に限定的な状況に絞って議論されてきたが，一般の場合に関しては 2 次元の場合ですら未解決であった．本論文では，この予想を一般次元において解決する．

定理 A. $n, p, \mathcal{D}^{\mathrm{reg}}_{n,p}$ を上述の通りとする．この時集合

$$\mathcal{T}^{\mathrm{reg}}_{n,p} := \{\mathrm{fpt}(A;\mathfrak{a}) \mid\ A \in \mathcal{D}^{\mathrm{reg}}_{n,p}, \mathfrak{a} \subsetneq A \text{ はイデアル }\} \subseteq \mathbb{R}$$

は昇鎖条件を満たす．

定理 A を証明する為には，正則局所環を一つ固定して考えれば十分である．本論文では，より一般に，特異点を許した局所環上でこの問題を考える．

$(R, \Delta, \mathfrak{a}^t)$ を，R が F 有限であるような正標数の 3 つ組とすると，**判定イデアル** と呼ばれるイデアル $\tau(R, \Delta, \mathfrak{a}^t) \subseteq R$ が，フロベニウス射を用いて定義されている．この判定イデアルを用いると，与えられたイデアル $I \subseteq R$ に関する，$(R, \Delta; \mathfrak{a})$ の **F 跳躍数** *(F-jumping number)* が，

$$\mathrm{fjn}^I(R, \Delta; \mathfrak{a}) := \inf\{t \geqslant 0 \mid \tau(R, \Delta, \mathfrak{a}^t) \subseteq I\}$$

により定まる．Chapter 3 の主定理は，この F 跳躍数に関する昇鎖条件である．

定理 B. $(R, \mathfrak{m})$ を F 有限なネーター正規局所環，$I \subseteq R$ を $\mathfrak{m}$-準素イデアル，$\Delta \geqslant 0$ を，$X = \operatorname{Spec} R$ 上の $\mathbb{Q}$-因子 であって，$K_X + \Delta$ が $\mathbb{Q}$-*Cartier* かつ，その *Cartier* 指数が標数で割り切れないものとする．更に，判定イデアル $\tau(R, \Delta)$ が自明かもしくは $\mathfrak{m}$-準素イデアルと仮定する．この時，集合

$$\mathrm{FJN}^I(R, \Delta) := \{\mathrm{fjn}^I(R, \Delta; \mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \subsetneq R\} \subseteq \mathbb{R}$$

は昇鎖条件を満たす．

$\tau(R, \Delta, \mathfrak{a}^t) = R$ となる時，3 つ組 $(R, \Delta, \mathfrak{a}^t)$ は**強 F 正則** (*strongly F-regular*) と呼ばれる．強 F 正則性は，鋭 F 純という性質よりも少し強い条件であり，また，標数 0 の**対数的端末** (*log terminal*) 特異点と良い対応があることが知られて

いる．(R,Δ) が強 F 正則の時，任意のイデアル $\mathfrak{a} \subseteq R$ について $\mathrm{fpt}(R,\Delta;\mathfrak{a}) = \mathrm{fjn}^{\mathfrak{m}}(R,\Delta;\mathfrak{a})$ である為，定理 B の系として次が確かめられる．

系 C. (R,Δ) を定理 B の通りとし，更に (R,Δ) が強 F 正則であると仮定する．この時，集合

$$\mathrm{FPT}(R,\Delta) := \{\mathrm{fpt}(R,\Delta;\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \subsetneq R\} \subseteq \mathbb{R}$$

は昇鎖条件を満たす．

F 有限正則局所環は常に強 F 正則である為，定理 A は，系 C から導かれる．

Chapter 4 では，系 C の結果を，強 F 正則性の仮定を外し，また局所環を固定せず，埋め込み次元のみを固定した場合に拡張する．すなわち，次が成立する．

主定理. 素数 p 及び，正の整数 e と N を固定する．集合 T を，その元がすべて標数 p の F 有限ネーター正規局所環 $(R,\mathfrak{m},k)$ であって，$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leqslant N$ を満たすものとする．更に，集合 $\mathrm{FPT}(T,e) \subseteq \mathbb{R}$ を，次の 3 条件を満たす 3 つ組 $(R,\Delta,\mathfrak{a})$ に関する F 純閾値 $\mathrm{fpt}(R,\Delta;\mathfrak{a})$ 全体のなす集合とする：

- $R \in T$,
- $\mathfrak{a} \subsetneq R$ はイデアル,
- $\Delta \geqslant 0$ は $\mathbb{Q}$-*Weil* 因子であって $(p^e-1)(K_R+\Delta)$ が *Cartier* かつ (R,Δ) が鋭 F 純.

この時，集合 $\mathrm{FPT}(T,e)$ は昇鎖条件を満たす．

主定理の系として，順的 (tame) 商特異点もしくは局所完全交差な多様体に限定した場合は，埋め込み次元でなく，次元のみを固定しても昇鎖条件が成立することが示される．すなわち，次が成立する．

系 D. 正の整数 n と素数 $p>0$ を固定する．

1. 集合 $\mathcal{D}^{\mathrm{quot}}_{n,p}$ を，その元がすべて標数 p の n 次元 F 有限ネーター正規局所環であって順的商特異点しか持たないものとする．この時，集合

$$\mathcal{T}^{\mathrm{quot}}_{n,p} := \{\mathrm{fpt}(R;\mathfrak{a}) \mid R \in \mathcal{D}^{\mathrm{quot}}_{n,p}, \mathfrak{a} \subsetneq R\} \subseteq \mathbb{R}$$

は昇鎖条件を満たす．

2. 集合 $\mathcal{D}^{\mathrm{l.c.i.}}_{n,p}$ を，その元がすべて標数 p の n 次元 F 有限ネーター正規局所環であって，完全交差なものとする．この時，集合

$$\mathcal{T}^{\mathrm{l.c.i.}}_{n,p} := \{\mathrm{fpt}(R;\mathfrak{a}) \mid R \in \mathcal{D}^{\mathrm{l.c.i.}}_{n,p}, \mathfrak{a} \subsetneq R\} \subseteq \mathbb{R}$$

は昇鎖条件を満たす．

主定理の証明の鍵は，F 純閾値の有理性である．標数 0 において，対数的 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 対上の任意のイデアルの対数的標準閾値は，一つの特異点解消によっ

て計算されるので，有理数になる．しかし，その正標数版である，鋭 F 純な対数的 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 対 (R,Δ) の上での F 純閾値の有理性はまだ完全にはわかっていない．

近年，Schwede, Tucker らは [7] において，(R,Δ) が強 F 正則という仮定のもとであれば 任意のイデアル $\mathfrak{a} \subsetneq R$ について F 純閾値 $\mathrm{fpt}(R,\Delta;\mathfrak{a})$ が有理数であることを証明した．本論文では，$K_X+\Delta$ の Cartier 指数が R の標数で割り切れないという仮定のもとで，彼らの結果を強 F 正則でない場合に拡張した．

定理 E. $(R,\mathfrak{m})$ を F 有限ネーター正規局所環，$\Delta \geqslant 0$ を $X=\operatorname{Spec} R$ 上の $\mathbb{Q}$-*Weil* 因子であって，(R,Δ) が鋭 F 純で，$K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-*Cartier* かつ，その *Cartier* 指数が R の標数で割り切れないようなものとする．この時，任意のイデアル $\mathfrak{a} \subsetneq R$ について その F 純閾値 $\mathrm{fpt}(R,\Delta;\mathfrak{a})$ は有理数である．

定理 E と系 C を組み合わせることで，主定理が証明される．

参考文献

[1] M. Blickle, M. Mustaţă and K. E. Smith, Discreteness and rationality of F-thresholds, Special volume in honor of Melvin Hochster, Michigan Math. J. **57** (2008), 43–61.

[2] T. de Fernex, L. Ein and M. Mustaţă, Shokurov's ACC conjecture for log canonical thresholds on smooth varieties, Duke Math. J. **152** (2010), no. 1, 93–114.

[3] T. de Fernex, L. Ein and M. Mustaţă, Log canonical thresholds on varieties with bounded singularities, *Classification of algebraic varieties*, pp. 221–257, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zrich, 2011.

[4] C. D. Hacon, J. McKernan and C. Xu. ACC for log canonical thresholds, Ann. of Math. **180** (2014) no. 2, 523–571.

[5] D. J. Hernández, L. Núñez-Betancourt and E. E. Witt, Local $\mathfrak{m}$-adic constancy of F-pure thresholds and test ideals, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (2017), 1–11.

[6] D. J. Hernández, L. Núñez-Betancourt, E. E. Witt and W. Zhang, F-pure thresholds of homogeneous polynomials, Michigan Math. J. **65** (2016), no. 1, 57–87.

[7] K. Schwede and K. Tucker, Test ideals of non-principal ideals: Computations, Jumping Numbers, Alterations and Division Theorems, J. Math. Pures. Appl. **102** (2014), no. 05, 891–929.

[8] V. Shokurov, Three-dimensional log perestroikas, With an appendix by Yujiro Kawamata, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992) no. 1, 105–203.