論文審査の結果の要旨

氏　名　佐藤　謙太

Frobenius 写像を用いて定義される正標数の特異点を総称して，F 特異点と呼ぶ．F 特異点は双有理幾何学に現れる特異点と密接に関係しており，近年その重要性を増している．例えば，最近 Hacon-Xu, Birkar, Birkar-Waldron によって標数が 7 以上の場合に 3 次元の極小モデル理論が成り立つことが証明されたが，その証明にも F 特異点の結果が用いられている．

F 特異点論における重要な不変量として，F 純閾値がある．F 純閾値は，標数 0 の特異点の不変量である対数的標準閾値の正標数における対応物と考えられている．実際 Mustaţă-Srinivas によって導入された弱通常予想 (weak ordinarity conjecture) が正しければ，標数 0 の対数的標準多様体 X 上のイデアル層 $\mathfrak{a}$ の対数的標準閾値 $\mathrm{lct}(X;\mathfrak{a})$ は，$X,\mathfrak{a}$ の標数 p への還元を $X_p,\mathfrak{a}_p$ としたとき，$\mathfrak{a}_p$ の F 純閾値 $\mathrm{fpt}(X_p;\mathfrak{a}_p)$ と無限個の p について一致することが知られている．佐藤謙太は本論文において，この F 純閾値の昇鎖条件について調べた．

この研究の背景には次のような問題意識がある．Shokurov は，自然数 n を固定したとき，複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された n 次元対数的標準多様体の対数的標準閾値全体のなす集合は昇鎖条件を満たすと予想した．この予想の部分的な解決として，de Fernex-Ein-Mustaţă は generic limit と呼ばれる概念を用いて，局所完全交叉特異点 (resp. 商特異点) しか持たない n 次元対数的標準多様体の対数的標準閾値全体のなす集合は昇鎖条件を満たすことを証明した．さらに最近 Hacon-M^{c}Kernan-Xu は，極小モデル理論を駆使することで Shokurov の予想を完全に解決した．この結果は，Birkar による Fano 多様体の有界性の証明に用いられるなど，双有理幾何学に非常に大きなインパクトを与えた．このような対数的標準閾値の昇鎖条件の研究に触発されて，F 純閾値の昇鎖条件が研究されるようになった．

Shokurov の予想の類似として Blickle-Mustaţă-Smith は，自然数 n と素数 p を固定したとき，標数 p の n 次元 F 有限正則局所環の F 純閾値全体のなす集合は昇鎖条件を満たすと予想した．この Blickle-Mustaţă-Smith の予想は 2009 年に提唱されて以来，約 10 年間 2 次元の場合ですら未解決であったが，佐藤はネーター局所環の cataproduct を用いることで，任意次元の場合に肯定的に解決した．これは真に驚くべき結果であり，F 特異点論の大家である Karl Schwede 氏（ユタ大学）から “I wasn't expecting anyone to prove something like that honestly” というコメントを貰うなど，世界中から注目されている．佐藤はより強く，自然数 N,e と素数 p を固定したとき，埋込次元が N 以下であり，Gorenstein 指数が p^e-1 の約数である，標数 p の F 純正規局所環の F 純閾値全体のなす集合は昇鎖条件を満たすことを証明した．これが本論文の主結果である．この結果の系として，自然数 n と素数 p を固定したとき，標数 p の n 次元 F 有限局所完全交叉特異点 (resp. 順的商特異点) の F 純閾値全体のなす集合は昇鎖条件を満たすことが従う．これは上述の de Fernex-Ein-Mustaţă の結果の正標数版に当たるものであり，現在のところ F 純閾値の昇鎖条件について望みうる最上の結果と言えるだろう．

佐藤は F 純閾値の昇鎖条件を調べる過程で，F 純閾値の有理性問題にも取り組んでいる．対数的標準閾値は特異点解消を一つ固定して計算することができるため，その有理性はほぼ明らかであるのに対し，F 純閾値の有理性は大変難しい問題である．Schwede-Tucker は，標数 p の $\mathbb{Q}$-Gorenstein 強 F 正則局所環 R の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ の F 純閾値 $\mathrm{fpt}(R;\mathfrak{a})$ は有理数であるこ

とを証明した．R の Gorenstein 指数が p で割り切れないという仮定のもとで，佐藤はこの結果を R が $\mathbb{Q}$-Gorenstein F 純正規局所環の場合に拡張した．この結果はそれ自体大変興味深いものであると同時に，主定理の証明でも重要な役割を果たす．

以上の結果は，F 特異点の研究の発展に大きく貢献する優れた業績である．よって，論文提出者佐藤謙太は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．