審査の結果の要旨

氏　名　　張　龍傑

本博士論文では、諸科学に現れる界面運動を記述するのにしばしば用いられる駆動力付平均曲率流方程式に対して、その解の一意性問題および解の長時間挙動が研究されている。

ユークリッド空間内の動く閉超曲面に対する駆動力付平均曲率流方程式は、閉超曲面の平均曲率と定数の和を法速度として動かすことを要求している。本研究では、初期超曲面が球で十分大きいとき、半径が無限大に時間無限大になるように定数の符号が定められている。例えば初期超曲面が球の場合は、その球がある定数より小さい半径の場合は有限時間で一点に縮み、半径がその定数の場合は動かず、またそれより大きい場合は、半径が時間無限大で無限に発散することが、常微分方程式を考察することによりわかる。初期値一般の閉超曲面とするときの解の長時間挙動を調べることは重要である。

一方、平均曲率流方程式の場合でもいえることであるが、空間内の初期曲面がダンベル状の場合は、有限時間でくびれが切れるなど特異点が発生しうる。特異点発生後の解をどう捉えていくかは偏微分方程式論では常に問題になるが、幸い 1991 年の Chen-Giga-Goto や Evans-Spruck の研究により等高面法により特異点発生後も解を追跡することが可能である。そのため、初期曲面に特異点があっても、一般化された意味の解が構成できる。しかし、特異点のある場合は時間発展する曲面としての解は一意ではなくなることがある。等高面法では、曲面をユークリッド空間全体で定義された補助関数の零点集合として表すが、その零点集合が内点を持つという現象に対応している。上述の解の一意性問題は、等高面法では肥満化現象と呼ばれている。

本博士論文では、駆動力付平均曲率流方程式についての初期値が軸対称超曲面の場合に対して肥満化現象の発生、非発生の十分条件、また肥満化現象が起きない場合の平面曲線について、その解の長時間挙動を考察している。駆動力のない平均曲率流方程式については、軸対称曲面についての解の挙動は特異点発生後の解の挙動も含めて、等高面法と交点数の減少原理を用いてよく知られている。しかし、駆動力のある場合は結果は予想できるが、駆動力のない場合の証明手法は使うことができない。

張龍傑氏は、肥満化現象が起こるか起きないかを軸対称曲面が、軸と垂直なある面に対して対称な場合で、かつその面の左右で一つの正値関数のグラフの回転面となり、軸と垂直な面との交点 P で、左右の曲面がくっついている特異点つき超曲面を初期値とする場合の肥満化現象を考察した。左右の超曲面が点 P である角度を持って交わるか、接するかによって状況が異なる。左右の超曲面が接する場合は、右の曲面が、単独では左に移動したがる場合は肥満化現象は発生せず、逆に右に移動したがる場合は常に発生することを厳密に示した。曲面を表す関数の満たす非線形拡散型方程式の解の一意性問題に帰着することにより証明している。駆動力がない場合はよく知られているが、駆動力のある場合は、証明は直接は使えず新たにやり直す必要があるなど単なる拡張ではない。

左右の超曲面が、ある角度を持ってくっついていて、かつ接していない（その角度が $90°$ 未満）状況はより複雑であり、平面内の曲線の場合は常に肥満化現象が起きる。一方、高次元の場合は、角度が小さいと肥満化現象は起きない。という結果を得ている。

肥満化現象が起きない場合の解の挙動については平面内の曲線の場合に限るか次の結果を得ている。解の挙動は次の 3 つの状況に分類される。

(i) 拡大：曲線は埋め込まれたままだんだん大きくなり、時間無限大で無限に膨張していく。

(ii) 有界：曲線は埋め込まれたまま定常解である口に時間無限大で近づく。円の半径は駆動力の大きさのみにより決まり、駆動力に反比例する。

(iii) 縮小：曲線は埋め込まれたままやがて凸になり、有限時間で円に近づいて一点に縮小する。

平面内の曲率流方程式については、1987 年の Grayson の結果により、どんな平面内に埋め込まれた曲線を初期値としてもやがて凸になり一点に縮むことが示されているが、駆動力付の場合はそれ以外の状況も起きうる。縮小の場合、凸になっていくことを示すのが難しいが、Huisken による曲線の 2 点間の曲線の長さで測る距離と平面内での距離との比が 1 に近づくことによる凸化の証明手法を、交点数減少原理を変形して用いることにより示している。このように、駆動力なしの手法が適用できない問題に対して、その解の漸近挙動を明らかにしたことは、対称性という制約はあるにしても、高く評価される成果である。よって、論文提出者 張龍傑は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。