審査の結果の要旨

氏　名　高橋　和音

論文提出者高橋和音は，臨界ソホレフ指数$2^* \coloneqq 2N/(N-2)$，$(N \geq 3)$，を持つ，次の二つの Dirichlet 問題を考察した：

(1) $$-\Delta u = \lambda \Psi u + |x|^{\alpha} u^{2^*-1} \quad \text{in} \quad \Omega,$$

(2) $$-\left(a + b\left(\int_{\Omega} |Du|^2 dx\right)^{\frac{p-2}{2}}\right) \Delta u = \Psi u^{q-1} + |x|^{\alpha} u^{2^*-1} \quad \text{in} \quad \Omega.$$

ここで，$\Omega \subset \mathbf{R}^N$は，単位球に含まれ，$x_0 \coloneqq (1,0,\dots,0)$で接し，$x_0$で内部球条件を満たす境界が区分的に$\mathrm{C}^1$である領域とする．また$\lambda > 0$と$\alpha \geq 0$は定数，$\Psi$は有界な非負関数とする．(1)は Hénon 方程式の一般化，(2)は Kirchhoff 方程式の一般化である．臨界ソホレフ指数を持つ方程式の正値解の存在問題は，山辺の問題などが動機となり，Brézis-Nirenberg の手法を契機に約 40 年近く研究されている．その概要は，対応する汎関数は PS 条件を満たさないが，峠のエネルギーが Sobolev 定数を用いて表示されるある定数未満となる場合はコンパクト性が回復し，正値解の存在が証明されるというものである．峠のエネルギーと上記の定数の差は非常に小さく，それらの精密な評価が議論の鍵である．両問題は，$|x|^{\alpha}$がΩ上で最大値をとらないため正確な評価は非自明で，2012 年まで先行研究が存在しなかった．

(1)は，$\alpha > 0$が小さくΨが定数である場合，$N \geq 7$かつΩが滑らかな有界領域であるときと$N \geq 5$かつΩが単位球であるときに，符号変化解の存在が知られていた．論文提出者は下記の条件の下で正値解の存在を示した：λ_1を Dirichlet 境界条件下における固有値問題$-\Delta \phi = \lambda \Psi \phi$の第一固有値とする．$N \geq 4$，$0 < \lambda < \lambda_1$とし，さらに次を満たす$m > 0$，$\beta \geq 0$と開球$B \subset \Omega$が存在するとする：$x_0 \in \partial B$，$\Psi_0 \leq \Psi \leq 1$ in Ω．ここで，

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} m|x - x_0|^{\beta} & x \in B, \\ 0 & x \in B^c. \end{cases}$$

このとき，(1)は$\alpha > 0$が小さいときに正値解が存在する．

(2)は，$p = 4$，$\alpha = 0$，$\Psi = \lambda$の場合が主に研究されてきた．この場合に限っても非局所項を処理する技巧が必要となるため，正値解の存在は$N = 3$かつ$2 < q < 2^*$の場合，$N = 4$かつ$2 \leq q < 2^*$の場合，その他限られた場合のみ知られていた．論文提出者は既存の結果を大きく拡張した次の条件の下で正値解の存在を示した．主結果である$\alpha > 0$の場合を述べる： $N = 3$かつ$4 < q < 2^*$または$N \geq 4$を仮定し，次を満たす$m > 0$と$\beta \geq 0$と開球$B \subset \Omega$の存在を仮定する：$x_0 \in \partial\Omega, \Psi_0 \leq \Psi$ in Ω．このとき(2)は$\alpha > 0$が小さいとき正値解が存在する．

両問題とも証明に峠の定理が用いられるが，新規性が 2 点挙げられる．1 点目は，エネルギー評価を得るためのテスト関数を工夫した点である．臨界 Sobolev 指数を持つ汎

関数に，$\varepsilon \to 0$のとき δ関数に近づくよう加工した Talenti 関数の列を代入すると欲しい評価が得られることはよく知られる．論文申請者は，加えて中心が移動しx_0へ近づく関数族を構成した．このアイデアは数年前から存在していたが，先行研究は荒い評価にとどまっており，定理に技術的な仮定を要していた．論文提出者はパラメータに応じ関数族を調整し，解が存在する次元を$N \geq 4$まで下げた．一方，$N = 3$では異なる現象が存在するので，この結果は最良と考えられる． 2 点目は，エネルギーの表示についてである．前述の手法の峠のエネルギー評価の際，ファイバリング写像を経由するが，先行研究はその具体的表示に依存していた．(2)については，$p = 4$かつ$N = 3$の場合，$p = 4$かつ例外を除いた$N = 4$の場合，その他の限られた場合にしか，十分な情報が得られていなかった．論文提出者は，ファイバリング写像の代数的な表示を経ずに必要なエネルギー評価が得られる手法を考案し，既存の結果を拡張した．同種の方法が同時期に Zeng-Tang により独立に考案されたが，論文提出者の手法はより弱い条件下にも有効で Hénon 型$\alpha > 0$にも適用できる．ファイバリング写像の表示が障害となり正値解が得られていない方程式は数多く存在するので，応用が期待される．これらの楕円型方程式と変分法の研究への寄与は高く評価できる．

よって論文提出者高橋和音は，博士(数理科学)の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．