# 論文の内容の要旨

論文題目：　Periods of tropical K3 hypersurfaces
　　　　　（トロピカル K3 超曲面の周期）

氏名：　山本　悠登

本論文の目的は、トロピカル幾何学における K3 超曲面の周期を計算し、古典的な複素 K3 超曲面の周期との関係を明らかにすることである。トロピカル幾何学は、和と積を

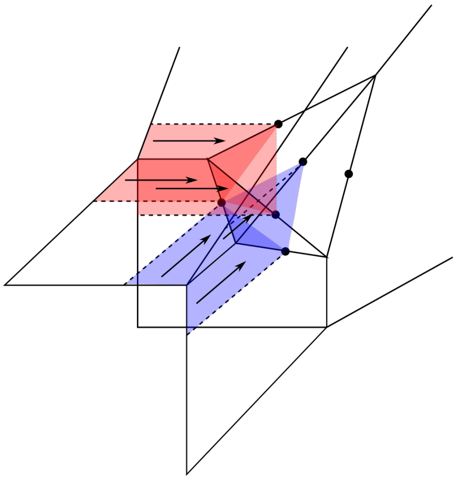
$$a + b := \max\{a, b\}, \quad a \cdot b := a + b \tag{1}$$

とする、トロピカル数半体 $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 上の代数幾何学で、ある種の整アファイン構造を持つ多面複体（トロピカル多様体）が代数多様体の役割を果たす。トロピカル多様体の典型的な例は、非アルキメデス付値体 $K$ 上の代数多様体のトロピカル化によって構成される。トロピカル化とは、非アルキメデス付値体 $K$ 上の代数多様体 $X$ に対して、$K$ の付値を用いて、トロピカル多様体 $\mathrm{Trop}(X)$ を構成する操作である。$\mathrm{Trop}(X)$ は、組み合わせ的な対象であり、もとの代数多様体に比べて単純である一方で、もとの代数多様体 $X$ に関する様々な情報を持っている。この性質を利用して、もとの代数多様体 $X$ の性質を調べるのが、トロピカル幾何学を研究する 1 つの動機である。

また、トロピカル多様体は、複素多様体の一変数退化族の退化点へ向かう極限で得られる対象とも見なせる。例えば、収束 Laurent 級数体 $K = \mathbb{C}\{t\}$ 上で考えると、$t$ に複素数を代入することで、$K$ 上の代数多様体 $X$ から、複素代数多様体の一変数退化族 $\{X_t\}_t$ が得られる。絶対値を取った後 log の値を取る写像の像をアメーバというが、$X_t$ のアメーバの $t \to 0$ での極限としても、$\mathrm{Trop}(X)$ が得られる。このとき、$\mathrm{Trop}(X)$ が $\{X_t\}_t$ の $t = 0$ 付近での振る舞いと深く関係し、極限 $t \to 0$ は、トロピカル極限と呼ばれる。

トロピカル多様体の周期に関しては、曲線の場合に先行研究がある。[KMM08], [KMM09] において、非アルキメデス付値体上の楕円曲線の $j$-不変量の付値が、それのトロピカル化によって得られるトロピカル楕円曲線の周長になることが示された。また、Mikhalkin–Zharkov[MZ08] によって一般のトロピカル曲線の周期が定義され、その後、岩尾 [Iwa10] によって、リーマン面の一変数族の退化点に向かう極限の下での周期写像の主要項が、それのトロピカル化によって得られるトロピカル曲線の周期によって与えられることが示された。本論文では、これらの結果を K3 超曲面の場合へ一般化する。

トロピカル K3 超曲面の周期を考える上で、Gross–Siebert プログラムのアイディアを用いる。Gross–Siebert プログラムでは、トーリック退化の双対交叉複体として、トロピカル多様体 $B$ を構成する。これは一般に、余次元 2 以上の特異性を許した整アファイン構造を持つ $C^0$ 多様体になる。超曲面の場合には、$B$ は、退化族のトロピカル化によって得られるトロピカル超曲面を、図 1 で示されるように、その有界な多面体の成す部分複体へ収縮して得られる、特異性を許容する整アファイン多様体に一致する。$B$ とそのトロピカル超曲面は、同値なトロピカル多様体と見なせる。



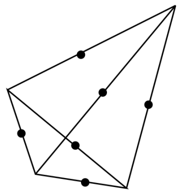


図 1: トロピカル K3 超曲面と、それを収縮して得られる、特異点付き整アフィン構造を持つ 2 次元球面 $B$

古典的な周期写像は Schmid の冪零軌道定理 [Sch73] によって近似されるが、冪零軌道の主要項は、退化点周りのモノドロミーによって決まる。Gross–Siebert[GS10] によって、トロピカル多様体 $B$ の radiance obstruction のウェッジ積が、古典的にはモノドロミー作用に対応することが知られており、このことから、radiance obstruction が周期写像の主要項を決めることが分かる。そこで本論文では、トロピカル K3 超曲面を収縮することで得られる、特異点付き整アフィン構造を持つ 2 次元球面の radiance obstruction の計算し、対応する複素 K3 超曲面の退化点に向かう極限での周期の漸近挙動と比較して、その関係を調べる。

$M$ を階数 3 の自由 $\mathbb{Z}$-加群、$N := \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$ をその双対とする。また、$M_\mathbb{R} := M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$、$N_\mathbb{R} := N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{R})$ とおく。$\Delta \subset M_\mathbb{R}$ を 3 次元の滑らかな反射的多面体、$\check{\Delta} \subset N_\mathbb{R}$ をその極多面体とする。通常の多項式の和と積を、それぞれ max と $+$ に置き換えることで、トロピカル多項式が得られる。ここでは、Newton 多面体が $\check{\Delta}$ であるようなトロピカル多項式

$$f(x) = \max_{n \in \check{\Delta} \cap N} \{a(n) + n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3\}. \tag{2}$$

を考える。これは $M_\mathbb{R}$ 上の区分線形関数であり、それによって定められる超曲面 $V(f) \subset M_\mathbb{R}$ は、そのトロピカル多項式の微分不可能な点全体の集合として定義される。図 1 で示されるように、Gross–Siebert の方法によって、トロピカル超曲面 $V(f)$ を収縮することで、特異点付き整アフィン構造を持つ 2 次元球面 $B$ を構成する。

$\iota \colon B_0 \hookrightarrow B$ を $B$ の特異点の補集合とする。さらに、$\mathcal{T}_\mathbb{Z}$ を $B_0$ 上の整接ベクトルのなす局所系とする。コホモロジー群 $H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_\mathbb{Z})$ は、ウェッジ積から誘導されるカップ積

$$\cup \colon H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_\mathbb{Z}) \otimes H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_\mathbb{Z}) \to H^2(B, \iota_* \wedge^2 \mathcal{T}_\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \tag{3}$$

を持つ。また、$\Delta$ の正規扇 $\Sigma$ に付随する複素トーリック多様体を $X_\Sigma$、その反標準超曲面を $Y$ として、

$$\mathrm{Pic}(Y)_{\mathrm{amb}} := \mathrm{Im}\left(\mathrm{Pic}(X_\Sigma) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(Y)\right) \tag{4}$$

とおく。今、各元 $n \in \left(\check{\Delta} \cap N\right) \setminus \{0\}$ は、扇 $\Sigma$ に含まれる一次元錐の原始的生成元になっている。その錐に対応するトーリック因子を $D_n \in \mathrm{Pic}(X_\Sigma)$ と書くことにする。以下が論文の主結果である。証明は、$B$ の適当な開被覆に関する Čech コホモロジーの計算に基づく。

**定理 1.** *1.* ペアリングを保つ、原始的な埋め込み

$$\psi\colon \operatorname{Pic}(Y)_{\mathrm{amb}} \hookrightarrow H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}}) \tag{5}$$

が存在する。

*2.* $B$ の *radiance obstruction* $c_B$ は、次で与えられる。

$$c_B = \sum_{n \in \left(\check{\Delta} \cap N\right) \setminus \{0\}} \{a(n) - a(0)\} \, \psi(D_n). \tag{6}$$

この計算結果と、古典的な K3 曲面の周期写像のトロピカル極限を比較する。$K := \overline{\mathbb{C}\,\{t\}}$ を収束 Puiseux 級数体とし、$f = \sum_{n \in \check{\Delta} \cap N} k_n x^n \in K[x_1^{\pm}, x_2^{\pm}, x_3^{\pm}]$ を、$K$ 上の 3 変数 Laurent 多項式とする。十分に大きい $R \in \mathbb{R}^{>0}$ に対して、$f_R := f|_{t=1/R} \in \mathbb{C}\left[x_1^{\pm}, x_2^{\pm}, x_3^{\pm}\right]$ とおき、$V_R$ を $\{f_R = 0\}$ の極小モデルとする。ここで、$V_R$ は $Y$ のミラー多様体である。複素 K3 超曲面の一変数族 $\{V_R\}_R$ を考える。この族の周期写像は、[Iri11] による囲繞 A 模型 VHS と留数 B 模型 VHS の間のミラー同型を用いて、

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\colon (R_0, \infty) &\to \{[\sigma] \in \mathbb{P}\left((U \oplus \operatorname{Pic}(Y)_{\mathrm{amb}}) \otimes \mathbb{C}\right) \mid (\sigma, \sigma) = 0, (\sigma, \overline{\sigma}) > 0\} \\ &\cong \{\sigma \in \operatorname{Pic}(Y)_{\mathrm{amb}} \otimes \mathbb{C} \mid (\mathfrak{Re}\,\sigma, \mathfrak{Re}\,\sigma) > 0\}, \end{aligned} \tag{7}$$

と書ける。ここで $U$ は双曲平面を表す。一方で、多項式 $f$ のトロピカル化は、

$$\operatorname{trop}(f)(x) := \max_{n \in \check{\Delta} \cap N} \{\operatorname{val}(k_n) + n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3\}. \tag{8}$$

で定義される。$\operatorname{trop}(f)$ の定めるトロピカル超曲面 $V(\operatorname{trop}(f))$ を収縮することで、特異点付き整アフィン構造を持つ 2 次元球面 $B$ を構成する。周期写像 $\mathcal{P}$ は Givental の $I$-関数を用いて書き下され、それの $R \to +\infty$ の下での漸近挙動を radiance obstruction の計算結果 (定理 1) と見比べることで、以下が得られる。

**系 2.**

$$\mathcal{P}(R) \sim \log R \cdot \psi^{-1}(c_B) \quad (R \to +\infty). \tag{9}$$

これより、$\psi^{-1}(c_B) \in \operatorname{Pic}(Y)_{\mathrm{amb}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ をトロピカル K3 超曲面の $V(\operatorname{trop}(f))$ の "周期" とみなせることがわかる。また、定理 1 から以下の不等式も導ける。

**系 3.**

$$\left(\psi^{-1}(c_B), \psi^{-1}(c_B)\right) > 0. \tag{10}$$

不等式 (10) は、周期写像 $\mathcal{P}$ の主要項が Hodge–Riemann 双線形関係式を満たすために、トロピカル周期 $\psi^{-1}(c_B)$ が満たすべき不等式である。従って、不等式 (10) は、トロピカル K3 曲面に対する Hodge–Riemann 双線形関係式と見なすことができる。

# References


[GS10] Mark Gross and Bernd Siebert, *Mirror symmetry via logarithmic degeneration data, II*, J. Algebraic Geom. **19** (2010), no. 4, 679–780. MR 2669728

[Iri11] Hiroshi Iritani, *Quantum cohomology and periods*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **61** (2011), no. 7, 2909–2958. MR 3112512

[Iwa10] Shinsuke Iwao, *Integration over tropical plane curves and ultradiscretization*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no. 1, 112–148. MR 2576286

[KMM08] Eric Katz, Hannah Markwig, and Thomas Markwig, *The $j$-invariant of a plane tropical cubic*, J. Algebra **320** (2008), no. 10, 3832–3848. MR 2457725

[KMM09] ______, *The tropical $j$-invariant*, LMS J. Comput. Math. **12** (2009), 275–294. MR 2570928

[MZ08] Grigory Mikhalkin and Ilia Zharkov, *Tropical curves, their Jacobians and theta functions*, Curves and abelian varieties, Contemp. Math., vol. 465, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 203–230.

[Sch73] Wilfried Schmid, *Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping*, Invent. Math. **22** (1973), 211–319. MR 0382272