審査の結果の要旨

氏　名　山本　悠登

実数体に形式的に負の無限大を付け加えて得られる集合に加法と max によって演算を導入して得られる代数をトロピカル半環と呼ぶ。トロピカル半環上の多項式は区分線形写像を定め、可積分系の超離散化などと密接に関連する。トロピカル半環上の代数幾何学がトロピカル幾何学であり、付値を通して代数多様体の退化の研究と深く結び付いている。

K3 曲面は 2 次元の Calabi-Yau 多様体(Ricci 平坦な Kaehler 多様体)であり、楕円曲線の高次元化の一つとして深く研究されてきた。大域 Torelli 定理と周期写像の全射性によって、K3 曲面の幾何はその周期(あるいは Hodge 構造)によって統制される。

Calabi-Yau 多様体に対しては、超弦理論に由来を持つミラー対称性と呼ばれる現象が知られている。これはある Calabi-Yau 多様体の複素幾何学と、そのミラーと呼ばれる別の Calabi-Yau 多様体のシンプレクティック幾何学の間に不思議な関係があることを指し、弦理論と数学の双方の観点から活発に研究されてきた。Strominger-Yau-Zaslow は 1996 年に、ミラー対称性を Lagrange トーラスファイブレーションを通して理解するプログラムを提唱した。Lagrange トーラスファイブレーションの底空間は(一般には特異点を持つ)整アファイン構造を持つので、その上の区分線形関数の概念が意味をなし、その上のトロピカル幾何学を考えることができる。

K3 曲面の Lagrange トーラスファイブレーションの底空間として、実 2 次元球面に特異点を持つ整アファイン構造を与えたものが得られるが、以下ではこれをトロピカル K3 曲面と呼ぶ。これは Gross-Wilson の仕事に端を発し、Kontsevich-Soibelman や Gross-Siebert によってさらに深く研究された重要な対象である。

Calabi-Yau 多様体のミラー対の例を作る方法の一つとして、Batyrev による反射的多面体を用いた構成がある。こうして得られた Calabi-Yau 多様体に対して、Lagrange トーラスファイブレーションの底空間となるべき実多様体(トロピカル Calabi-Yau 多様体)が、その上の特異点を持つ整アファイン構造を込めて Gross によって構成された。また、radiance obstruction と呼ばれる整アファイン構造の不変量が Goldman-Hirsch によって 1984 年に導入されたが、Gross-Siebert によって、これが Calabi-Yau 多様体の退化する族の周期写像のモノドロミーを記述していることが示された。この意味で、

radiance obstruction はトロピカル Calabi-Yau 多様体の周期とみなすことができる。

本論文では、3 次元の滑らかで反射的な多面体に付随するトロピカル K3 曲面に対して radiance obstruction を計算した。さらに、この radiance obstruction はとある格子(対称双線形形式を持つ自由アーベル群)に実数体をテンソルしたものに値を取るが、この格子がミラーの Picard 格子を自然に含み、さらに radiance obstruction の値がミラーの Picard 格子を用いて簡明に表示されることを見出した。これは Givental によるトーリック超曲面に対する古典的ミラー対称性の、入谷による整構造を込めた記述を通して、Gross-Siebert による周期写像と radiance obstruction の関係を再現する。

曲線やアーベル多様体の周期のトロピカル化については先行研究があるが、K3 曲面の周期のトロピカル化についての明示的な研究は本論文が最初である。また、本論文において得られた結果はトロピカル幾何だけでなく、Calabi-Yau 多様体のミラー対称性や Gromov-Hausdorff 収束などの他の分野との関連からも興味深く、今後の発展が見込まれる重要なものである。よって、論文提出者山本悠登は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。