審査の結果の要旨

氏名　　大井　雅雄

F を p 進体とし，G を F 上の連結簡約代数群とする．局所 Langlands 対応とは，$G(F)$ の既約表現を L パラメータと呼ばれる準同型 $W_F \to {}^LG$ によってパラメータ付ける対応のことである．ここで，W_F は F の Weil 群であり，${}^LG$ は G の L 群である．このような対応の存在は長らく未解決の問題であったが，近年，Arthur らによって G が準分裂な古典群（斜交群，特殊直交群，ユニタリ群）の場合に対応が構成された．しかし，その構成法は抽象的なものであり，局所 Langlands 対応の具体的な様子については未知の部分が多く残されている状況である．

本論文では，$G(F)$ の既約表現および L パラメータに対して定義される「深度」という不変量に着目し，その局所 Langlands 対応に関するふるまいについて研究を行った．$G(F)$ の既約表現の深度とは，どのくらい大きなコンパクト開部分群が固定ベクトルを持ちうるかを測る不変量である．一方，L パラメータの深度とは，W_F の分岐フィルトレーションを用いて定義される数論的な不変量である．これらの 2 種類の深度が局所 Langlands 対応によって保たれるだろうかという問題が Aubert-Baum-Plymen-Solleveld によって提起されていたが，一般線型群などの比較的簡単な場合を除き，結果はほとんど存在しなかった．本論文の第一部および第二部の主定理は，G が準分裂古典群の場合に，F の剰余標数が大きいという仮定のもとで，この問題に対する解答を与えるものである．

定理 1 G を準分裂古典群とし，ϕ をその L パラメータとする．局所 Langlands 対応によって ϕ にうつされる $G(F)$ の既約表現の同型類の集合を Π_ϕ と書く（Π_ϕ は有限集合であることが知られている）．このとき，F の剰余標数が十分大きいという仮定のもとで，以下の等式が成り立つ：

$$\max_{\pi\in\Pi_\phi} (\pi \text{ の深度}) = (\phi \text{ の深度}).$$

さらに，G がユニタリ群の場合には，Π_ϕ に属する表現の深度は一定である．すなわち，任意の $\pi \in \Pi_\phi$ に対して，π の深度は ϕ の深度と一致する．

定理 2 G を準分裂でないユニタリ群とし，ϕ および Π_ϕ を定理 1 の通りとする．F の剰余標数は十分大きいと仮定する．このとき，任意の $\pi \in \Pi_\phi$ に対して，π の深度は ϕ の深度と一致する．

定理 1 については，Ganapathy-Varma による先行研究において (左辺) $\leq$ (右辺) という不等式が得られており，その証明を精密化することが出発点となる．定理 1 の証明の概要は以下の通りである．まず，一般線型群の局所 Langlands 対応が深度を保つことから，$G(F)$ の既約表現に一般線型群の既約表現を対応させる，エンドスコピー持ち上げという操作が深度を保つことを証明すれば十分である．F の剰余標数が十分大きいとき，表現の深度は指標の局所展開と関係することが DeBacker の研究で分かっているため，エンドスコピー持ち上げを特徴付ける等式である指標関係式を通して，$G(F)$ の表現の深度と一般線型群の表現の深度が比較できるというのが基本的な方針である．この方針を実行する際には，一般線型群の Moy-Prasad フィルトレーションの特性関数

の半単純降下を決定することが必要になるが，これはそれ自体有意義な結果であり，今後の応用も見込まれる．

定理 2 の証明は，準分裂でないユニタリ群の表現が，テータ対応によって，一つサイズの大きい準分裂ユニタリ群の表現と結び付くことに注目し，定理 1 に帰着させることによって行われる．その際には，テータ対応が深度を保つという Pan の結果と，テータ対応を局所 Langlands 対応によって記述する Gan-Ichino の結果が用いられる．

本論文の第三部では，$G(F)$ の全ての既約表現の中で 2 番目に小さい深度を持つ，単純超尖点表現という表現のクラスに注目し，以下の結果を得た．

定理 3 F の剰余標数 p は 2 でないと仮定する．G を斜交群または準分裂偶数次特殊直交群とし，π を $G(F)$ の単純超尖点表現とする．π に対応する L パラメータを ϕ とおき，Π_ϕ を定理 1 と同様とする．このとき，Π_ϕ は単純超尖点表現のみからなり，どのような単純超尖点表現が Π_ϕ に属するかも明示的に決定可能である．さらに，ϕ の深度は π の深度と一致し，ϕ の具体的な形も決定可能である．

G が分裂奇数次特殊直交群および不分岐ユニタリ群の場合には，大井氏自身による先行研究があるが，同様の方法を斜交群等に適用することは困難である．定理 3 においては，斜交群，偶数次不分岐特殊直交群，偶数次分岐特殊直交群という，性格の大きく異なる 3 種類の群を同時に考え，エンドスコピー持ち上げおよびテータ対応を駆使してこれらの群の表現の関係を精査することで証明を行った．定理 3 の応用として，p に対するある仮定のもとで，Hiraga-Ichino-Ikeda による形式次数予想を単純超尖点表現に対して証明することができる．

以上のように，本論文では，古典群の局所 Langlands 対応と深度の関係について，多数の優れた結果が証明されている．特に，定理 1 および定理 2 は，今後の研究の礎となる重要な成果である．これらは，p 進簡約代数群の表現論や調和解析について，広汎かつ深い理解がなければ挙げることのできない業績である．よって，論文提出者大井雅雄は，博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める．