博士論文の内容の要旨

論文題目

Constructions of various solutions for parabolic equations in mathematical biology and phase-field models

(数理生物学とフェイズフィールドモデルにおける放物型方程式に対する様々な解の構成)

氏名　梶原 直人

本論文では, 解析半群の理論及び最大 L^p 正則性理論を用いて, 放物型発展方程式に対する解の構成を論じる. 扱う方程式は, 心臓の膜電位の伝達を表すバイドメイン方程式, 非圧縮粘性流体中の膜の変形を表すフェイズフィールド・ナヴィエストークス方程式, 合金の二成分が冷却過程に起こる相分離 (スピノーダル分解) を表すカーン・ヒリアード方程式, 及び抽象放物型発展方程式である. 1 つ目の方程式は, 数理生物学より要請された方程式であり, 2 つ目と 3 つ目の方程式はフェイズフィールド法と呼ばれる手法により解が記述される方程式である.

第 1 章では, バイドメイン方程式の主要部からなる作用素が生成する半群について考察する. 一般に線形発展方程式の解は, 初期値からある時刻の解を対応させる解作用素である半群を通して解析できる. 特に半群を生成する作用素の内, 解の平滑化作用を表す

解析半群を生成するかどうかを明らかにする事は, 方程式の型がわかるなど重要である. バイドメイン方程式は, 未知関数として細胞内外の電位 $u_{i,e}$ と膜電位 u が入り混じるが, Bourgault ら (2009) により導入されたバイドメイン作用素 A の使用により, 方程式を反応拡散系と捉えることができる. そこではバイドメイン作用素が, ヒルベルト空間である L^2 空間で, 自己共役作用素かつ極大単調作用素であることが示され, 解析半群 e^{-tA} を生成することがわかる. 本章では, 関数空間をより一般化させ, バナッハ空間でバイドメイン方程式の解析を行った. まず方程式の L^∞ レゾルベント評価を背理法と爆発法を併用し示した. 結論の否定により得られる不等式に対し, コンパクト性により不等式が保たれる事と, 解の一意性による自明解が不等式を破綻させる事により矛盾を導いた. 先行研究で知られていた L^2 評価と今回の L^∞ 評価を補間及び双対性により $1 < p < \infty$ に対する L^p レゾルベント評価を導出した. L^p 空間において適切にバイドメイン作用素を導入し, 導いた (アプリオリ) 評価とレゾルベント集合を特徴づける事により, 作用素 A が解析半群 e^{-tA} を L^p 空間で生成する事を示した. 線形部分が解析半群を生成するという事を用いて, 非線形問題である本来のバイドメイン方程式の時間局所強解の一意存在を解析半群論の一般論により行った.

第 2 章では, 心臓が時間周期的に拍動する事を考慮し, バイドメイン方程式の時間周期解について論じる. まず, 作用素 A が指数安定な解析半群 e^{-tA} を生成するという仮定の下, 抽象線形放物型発展方程式 $u' + Au = f$ に関して, 外力 f が時間周期関数の際, 解 u も時間周期関数となり, DaPrato–Grisvard 型 (実補間空間での) 最大 L^p 正則性を満たす事を示した. これは, 時間周期問題に関する線形理論の構築である. 証明には, 時間周期解の表現公式 $u(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} f(s)ds$ を用いて, 望んでいる微分の損失のない評価を行った. 非線形問題であるバイドメイン方程式においても, バナッハの不動点定理を用いて, 外力の大きさが十分小さいという仮定の下, 定常解近傍で時間周期解の一意存在を示した.

第 3 章では, 引き続きバイドメイン方程式の時間周期解について論じる. 第 2 章では, 線形方程式からの摂動として非線形方程式を考えるため, 外力の大きさに制限が必要である. 本章では, 非線形項を FitzHugh–Nagumo 型で, L^2 空間での解析に限るが, 外力に大きさの制限を課さずに, 時間周期解の存在を示した. ガレルキン法で解の近似列を取る際に, 時刻 0 から周期時刻 T に対応させるポアンカレ写像に対し, ブラウアーの不動点定理を用いて, 時間周期弱解の存在を示した. さらにこの時間周期弱解のある時刻を改めて初

期値と考え, 初期値問題の時間大域適切性の結果を用いて, 弱解が強解と一致する事を示した. すなわち, これは正則性定理でもあり, 時間周期弱解は実際は, (最大 L^2-L^2 正則な) 強解となる.

第 4 章では, フェイズフィールド・ナヴィエストークス方程式の適切性について論じる. 先行研究では, 時間大域弱解の存在 ([Du et al. 2007]) や時間局所強解 ([Takahashi et al. 2012]) の一意存在の結果があるが, 前者は解の一意性や正則性が不明であり, 後者は方程式の主要部となるべき連立部分を低階項と見做した半線形方程式として解析しており, 解のクラスとして適当でない. 本章では, 連立部分を主要項に入れた準線形構造として本方程式を扱った. この準線形方程式に現れる作用素が最大 L^p-L^q 正則性を満たす事を示し, 時間局所強解の一意存在及び初期値に関する連続性を示した. また, この解は時空間で解析的であることも示し, 従って古典解となる. 流体の粘性係数と膜のモビリティ係数の積が十分大きいという仮定の下, エネルギーの第二変分が強圧的となる定常解の近傍の初期値をとる際は, 解が時間大域的に一意存在し, 定常解へ指数的に収束することも示した.

第 5 章では, カーン・ヒリアード方程式の時間大域解について論じる. 秩序変数を u, 化学ポテンシャルを μ とした時, 従来は, 体積保存 ($\frac{d}{dt}\int_\Omega u\,dx = 0$) を導く μ に関するノイマン境界条件が与えられていた. 方程式の階数は 4 階であり, 境界条件は 2 つ必要である. もう一つの境界条件は, 自由エネルギー $E_\Omega(u)$ を減衰させる u に関するノイマン境界条件や, 境界からの寄与のエネルギー $E_{\partial\Omega}(u)$ を加えた $E_\Omega(u) + E_{\partial\Omega}(u)$ を減衰させる u に関する動的境界条件のいずれかが課されていた. しかし近年 $E(u) + E_{\partial\Omega}(u)$ を減衰させる境界条件の内, 体積保存ではなく, 境界に物質が浸透して, 内部と境界での総体積保存 ($\frac{d}{dt}(\int_\Omega u\,dx + \int_{\partial\Omega} u\,dS) = 0$) を導く境界条件 ([Goldstein et al. 2011]) や, 境界からも浸透していく境界条件 ([Gal 2006]) が提案されていた. これらは, 動的境界条件かつ非線形境界条件であることが問題を難しくしており, 近似問題からの特異摂動法と L^2 エネルギー法を組み合わせた複雑な手法により, 時間大域適切性が示されていた. 本章では, 動的境界条件と非斉次境界条件を持つ高階の方程式で, 最大 L^p 正則性定理 ([Denk et al. 2008]) を本線形化方程式へ応用し, 線形化方程式の可解性と外力のクラスを必要十分の形で明らかにした. 本来の非線形問題は, 不動点定理・エネルギー評価・アプリオリ評価といった手法で, 従来より簡潔に ($p = 2$ を含む一般化した)L^p 空間での時間大域可解性を示した. また, 本研究の初期関数空間の正則性は最適であり, 従来課されていた初期値に関する整合条件を, 可積分性の指数 p により, その必要性を分類することが可能となった.

第 6 章では、時間重み付き最大 L_p 正則性理論を用いて、抽象放物型発展方程式の適切性について論じる。従来の (古典的な) 最大 L^p 正則性理論とは、抽象線形発展方程式 $u' + Au = f$ に対する $L^p(0,T;X)$ での可解性及び微分の損失のない評価の事である。ここで $L^p(0,T;X)$ とは、X に値をとる時間区間 $(0,T)$ での L^p 関数全体である。最大 L^p 正則性理論の目覚ましい応用として、準線形方程式 $u' + A(u)u = F(u)$ の可解性がある。しかし、この理論を用いる際には一般に初期値のクラスは解空間の $t = 0$ でのトレースである実補間空間 $(X, D(A))_{1-1/p,p}$ でとる必要がある。近年 J. Prüss 氏を中心に研究が進められている時間重み付き最大 L^p 正則性理論では、関数空間 $L^p(0,T;X)$ を時間重み付きで考える事で、解のクラスはほぼそのままに、初期値をより広く $(X, D(A))_{\mu-1/p,p}$ $(1/p < \mu \leq 1)$ で取る事ができる。非線形項 F に応じて μ_c が決まり、$\mu_c \leq \mu$ なる μ で準線形方程式の時間局所適切性の一般論が構築されている。さらに作用素 $A(u)$ が u に依らない場合である半線形かつ非線形項を双線型 $F(u) = G(u,u)$ に限った形での時間大域となる十分条件も導出されていた。本章では、時間重み付き最大 L^p 正則性理論を用いて、時間に依存した係数や非線形項を持つ準線形方程式 $u' + A(t,u)u = F(t,u)$ の局所適切性を示す。また、作用素 $A(t,u)$ を制限し $A(t)$ の形、かつ多少の制限付きで局所適切性に用いる仮定の下、時間局所解が大域的に延長可能な十分条件を導出する。これは上記の双線形の結果を含む形となっている。また、この局所適切性定理の例として、時間と未知関数に依存した拡散係数を持つ準線形熱方程式 $u' - a(t,u)\Delta u = F(t,u) + |\nabla u|^\kappa (\kappa > 2)$ に応用した。