審査の結果の要旨

氏　名　　梶原　直人

本論文では, 解析半群の理論及び最大 L^p 正則性理論を用いて, 放物型発展方程式に対する解の構成を論じる. 扱う方程式は, 心臓の膜電位の伝達を表すバイドメイン方程式, 非圧縮粘性流体中の膜の変形を表すフェイズフィールド・ナヴィエストークス方程式, 合金の二成分が冷却過程に起こる相分離 (スピノーダル分解) を表すカーン・ヒリアード方程式, 及び抽象放物型発展方程式である. 1 つ目の方程式は, 数理生物学より要請された方程式であり, 2 つ目と 3 つ目の方程式はフェイズフィールド法と呼ばれる手法により解が記述される方程式である.

第 1 章では, バイドメイン方程式の主要部からなる作用素が生成する半群について考察する. 一般に線形発展方程式の解は, 初期値からある時刻の解を対応させる解作用素である半群を通して解析できる. 特に半群を生成する作用素の内, 解の平滑化作用を表す解析半群を生成するかどうかを明らかにする事は, 方程式の型がわかるなど重要である. バイドメイン方程式は, 未知関数として細胞内外の電位と膜電位が入り混じるが, Bourgault ら (2009) により導入された非局所 2 階作用素であるバイドメイン作用素 A の使用により, 方程式を反応拡散系と捉えることができる. そこではバイドメイン作用素が, ヒルベルト空間である L^2 空間で, 自己共役作用素かつ極大単調作用素であることが示され, 解析半群を生成することがわかる. 本章では, 関数空間をより一般化させ, バナッハ空間でバイドメイン方程式の解析を行った. まず方程式の L^∞ レゾルベント評価を背理法と爆発法を併用し示した. 先行研究で知られていた L^2 評価と今回の L^∞ 評価を補間及び双対性により $1 < p < \infty$ に対する L^p レゾルベント評価を導出した. L^p 空間において適切にバイドメイン作用素を導入し, 導いた (アプリオリ) 評価とレゾルベント集合を特徴づける事により, 作用素 A が解析半群 e^{-tA} を L^p 空間で生成する事を示した. 線形部分が解析半群を生成するという事を用いて, 非線形問題である本来のバイドメイン方程式の時間局所強解の一意存在を解析半群論の一般論により行った. これにより初期値に対する必要な仮定を大幅に減らすことが可能になった.

第 2 章では, 心臓が時間周期的に拍動する事を考慮し, バイドメイン方程式の時間周期解について, 最大正則性とバナッハの不動点定理を用いて, 外力の大きさが十分小さいという仮定の下, 定常解近傍で時間周期解の一意存在を示した. 第 3 章では, 非線形項をフィツハ・ナグモ型で, L^2 空間での解析に限るが, 外力に大きさの制限を課さずに, 時間周期解の存在を示した.

第 4 章では, フェイズフィールド・ナヴィエストークス方程式の適切性について, 時間局所強解の一意存在及び初期値に関する連続性を示した. また, この解は時空間で解析的であることも示し, 従って古典解となる. 流体の粘性係数と膜のモビリティ係数の積が十分大きいという仮定の下, エネルギーの第二変分が強圧的となる定常解の近傍の初期値をとる際は, 解が時間大域的に一意存在し, 定常解へ指数的に収束することも示した. 滑らかな解の存在を示したところが新しい.

第 5 章では, カーン・ヒリアード方程式にさまざまな境界条件を課したの時間大域解について論じる. 近年, 体積保存ではなく, 境界に物質が浸透して, 内部と境界での総体積保存を導く境界条件や, 境界からも浸透していく境界条件が提案された. これらは, 動的境界条件かつ非線形境界条件であることが問題を難しい. 本章では, 動的境界条件と非斉次境界条件を持つ高階の方程式で, 最大 L^p 正則性定理を当該線形化方程式へ応用し, 線形化方程式の可解性と外力のクラスを必要十分の形で明らかにした. 本来の非線形問題は, 不動点定理・エネルギー評価・アプリオリ評価といった手法で, 従来より簡潔に ($p = 2$ を含む一般化した)L^p 空間での時間大域可解性を示した. また, 本研究の初期関数空間の正則性は最適であり, 従来課されていた初期値に関する整合条件を, 可積分性の指数 p により, その必要性を分類することが可能となった.

第 6 章では, 時間重み付き最大 L_p 正則性理論を用いて, 抽象放物型発展方程式の適切性について論じた。

以上のように, 論文提出者 梶原直人は最大正則性の理論をさまざまな方程式に応用し, その初期値境界値問題を解くなど数学解析に大きく貢献したため, 博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める.