論文の内容の要旨

論文題目　Relationship between orbit decompositions on flag varieties and multiplicity of induced representations
(旗多様体上の軌道分解と誘導表現の重複度の関係性について)

氏名　田内 大渡

本博士論文の目的は実簡約リー群 G とその閉部分群 H に対して G の一般旗多様体上の H による軌道分解の様子と H から誘導された G の誘導表現の G の既約表現に関する重複度の振る舞いの関係性について理解することである。

等質多様体上の大域解析の分野では、1950 年代から 1970 年代の終わりまでに Gelfand や Harish-Chandra、Helgason らによって群多様体やリーマン対称空間において、1980 年頃から 90 年代にかけては大島利雄や Delorme により半単純対称空間に対して、豊かな理論が展開された。小林俊行と大島利雄は表現論を用いた大域解析の理論が展開できる最も一般的な設定は何か？という問題を提起し、この問いに対しての一つの答えとして超局所解析を用いることで次を証明した。

定理 1 ([9, Theorem A])**.** G と H は $\mathbb{R}$ 上代数的に定義されていると仮定する。このとき組 (G, H) に関する次の二条件は同値である。

(i) 任意の $(\pi, \tau) \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{alg}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$ が成り立つ。
(ii) G/H が実球多様体である。

ここで G の滑らかな既約許容表現の同値類全体を $\hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ で、 H の代数的な有限次元既約表現の同値類全体を $\hat{H}_{\mathrm{alg}}$ で表した。 さらに $C^\infty(G/H, \tau)$ は同変ベクトル束 $G \times_H \tau \to G/H$ の可微分な切断全体の成す Fréchet 空間を表す。また実球多様体という用語は小林 [6] により導入された。

定義 2 ([9])**.** 実簡約リー群 G の極小放物型部分群 P が、等質多様体 $X = G/H$ に開軌道を持つとき、 X を実球多様体であるという。

上記定理 1 に見るように実球多様体は表現論を用いた大域解析の理論の展開が期待できる枠組みという意味で一つの重要な等質多様体のクラスである。実球多様体の構造論は $G \times H/diag(H)$ が実球多様体となる組 (G, H) の分類を与えた小林・松木による [8] や対称性破れ作用素の分類を与

えた最初の論文である 2015 年と 2017 年の小林・Speh による [11, 12] にも応用され近年活発に研究されている分野となってきている。また実球多様体の一つの特徴づけとして次のようなものが存在する。これは松木のランク 1 に帰着させる方法 [13] と Kimelfeld によるランク 1 での実球多様体の分類 [5] を組み合わせることで得られる。

定理 3 ([2])**.** 組 (G, H) に関する次の二条件は同値である。

(ii) G/H が実球多様体である（すなわち G/H 上に P 開軌道が存在する)。
(iii) $\#(H\backslash G/P) < \infty$ が成り立つ。

上記定理 1 と定理 3 から P が極小放物型部分群である場合は条件 (i), (ii), (iii) が全て同値であることが従う（下記図 1 参照)。本博士論文では極小放物型部分群 P の代わりに G の一般の放物型部分群 Q を考えたとき (i), (ii), (iii) の関係性がどのようになるのかということを問題とする。条件 (ii), (iii) には極小放物型部分群 P の情報が含まれているので一般放物型部分群 Q に対する条件 (ii_Q), (iii_Q) を自然に定義できる（後述の定義 5)。しかし条件 (i) にはこのままでは P の情報が含まれていないので上記の疑問を定式化するために次の定義を用いる。$\hat{Q}_{\mathrm{f}}$ で Q の有限次元既約表現の同値類全体を表す。

定義 4 ([7, Definition 6.6])**.** ある $\tau \in \hat{Q}_{\mathrm{f}}$ が存在して π が $C^\infty(G/Q, \tau)$ の部分商と同型になるとき $\pi \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ は Q シリーズに属するという。

$\hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}} := \{\pi \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}} \mid \pi$ は Q シリーズに属する $\}$ とおくと Harish-Chandra の部分商定理 [4] より $\hat{G}_{\mathrm{smooth}} = \hat{G}^P_{\mathrm{smooth}}$ が成り立つことがわかる。これを踏まえて次のような定義をする。

定義 5. 一般放物型部分群 $Q \subset G$ に対し条件 (i_Q), (ii_Q), (iii_Q) を次で定める。

(i_Q) 任意の $(\pi, \tau) \in \hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{f}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$ が成り立つ。
(ii_Q) G/H 上に Q 開軌道が存在する。
(iii_Q) $\#(H\backslash G/Q) < \infty$ が成り立つ。

このように定義して次の問題を考える。

問題. 条件 (i_Q), (ii_Q), (iii_Q) の関係性を決定せよ。

Q が極小放物型部分群 P のときは条件 (i_Q), (ii_Q), (iii_Q) はそれぞれ (i), (ii), (iii) に同値である。さらにこれら全てが同値であることが定理 1 と定理 3 によりわかっている（下記図 1 参照)。

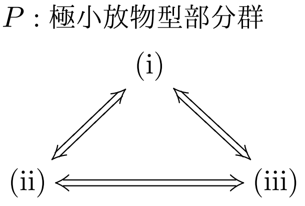

図 1

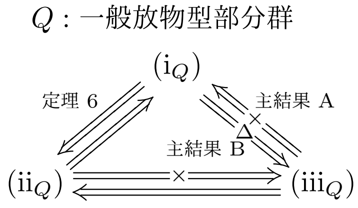

図 2

一般の放物型部分群 Q に対しては (iii_Q) $\Rightarrow$ (ii_Q) は真であることがすぐにわかる。また (ii_Q) $\Rightarrow$ (iii_Q) と (ii_Q) $\Rightarrow$ (i_Q) には簡単な反例が存在する。さらに (i_Q) $\Rightarrow$ (ii_Q) は真であることがより強く次の定理 6 が成り立つことからわかる。

定理 6 ([7, Corollary 6.8])**.** ある $\tau \in \hat{H}_{\mathrm{f}}$ が存在して $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$ が任意の $\pi \in \hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}}$ に対して成り立つならば G/H 上に Q 開軌道が存在する、すなわち (ii_Q) が成り立つ。

残りの関係性について本博士論文において次を示した。

主結果 A (Theorem 2.1.7)**.** $G = SL(2n, \mathbb{R})$ とし Q を次元が最大な G の極大放物型部分群として定義する。このとき $n \geq 3$ であれば次の二条件を満たす G の代数部分群 H が存在する。

(1) $\#(H\backslash G/Q) < \infty$ が成り立つ。
(2) Q の任意のクラス 1 指標 χ に対して $\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q, \chi), C^\infty(G/H)) = \infty$ が成り立つ。

ここで Q のクラス 1 指標 χ とは K を G の極大放物型部分群としたときに χ が $Q \cap K$ 上自明であることを言う。このとき $C^\infty(G/Q, \chi)$ は K 固定ベクトルを持つ。

主結果 B (Theorem 3.1.1)**.** G を実簡約代数群とし H をその実代数部分群とする。また Q を G の放物型部分群とし N を Q の冪零根基とする。もし向け付け可能な p 次元の H 軌道が G/Q 上に無限個存在すれば次が成り立つ。

$$\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q, \wedge^p \mathfrak{n}), C^\infty(G/H)) = \infty.$$

これらを含めると三条件の関係性は上記図 2 のようになる。主結果 A は (iii_Q) $\Rightarrow$ (i_Q) が成り立たないことを、逆に主結果 B は向きづけに関する条件のもとで (i_Q) $\Rightarrow$ (iii_Q) が成り立つことを主張している（向き付けの仮定を付けているので、上記図 2 では Δ と表記した)。

$G_{\mathbb{C}}$ と $H_{\mathbb{C}}$ をそれぞれ G と H の複素化とする。このとき定理 1 について小林と大島は $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau))$ の上界と下界を評価することにより同論文中に次も示している。

定理 7 ([9, Thorem B])**.** G と H は $\mathbb{R}$ 上代数的に定義されていると仮定する。このとき (G, H) に関する次の二条件は同値である。

(a) $\displaystyle \sup_{\tau \in \hat{H}_{\mathrm{alg}}} \sup_{\pi \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}}} \frac{1}{\dim \tau} \dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty,$
(b) $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ が球多様体である（すなわち $G_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分群 B が $G_{\mathbb{C}}/H_{\mathbb{C}}$ に開軌道を持つ)。

上記定理 7 の (b)⇒(a) の Q シリーズ版として次を示した。

主結果 C (Theorem 4.1.6)**.** $\#(H_\mathbb{C}\backslash G_\mathbb{C}/Q_\mathbb{C}) < \infty$ を仮定する。このとき次が成立する。

$$\sup_{(\eta,\tau)\in\hat{Q}_\mathrm{f}\times\hat{H}_\mathrm{f}} \frac{1}{\dim\eta\cdot\dim\tau}\dim\mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\eta), C^\infty(G/H,\tau)) < \infty. \tag{1}$$

この主結果を示す途中で $\mathcal{D}$ 加群に関する次の結果を得た。$\mathcal{B}_M$ で実解析多様体 M 上の佐藤超関数の層を表す。

主結果 D (Theorem 4.1.4)**.** M を実解析多様体、X をその複素化、U を M の相対コンパクトな半解析的開集合とする。複素リー群 $H_\mathbb{C}$ が X に作用しているとし $\#(H_\mathbb{C}\backslash X) < \infty$ を仮定する。このときある $C > 0$ が存在して次を満たす。

$$\dim(\mathcal{B}_M(U)\otimes\tau)^\mathfrak{h} < C\cdot\dim\tau \quad \forall\tau\in\hat{\mathfrak{h}}_\mathrm{f}.$$

この主結果 D の一つの系として定理 7 の (b)⇒(a) の別証明を与えることができる。Gourevitch らは [1] において $\mathcal{D}$ 加群の理論と Weil 表現の普遍性を用いることで定理 7 の (b)⇒(a) よりすこし弱い主張に別証明を与えている。本論文の証明では $\mathcal{D}$ 加群の重複度の理論を用いているので Gourevitch らとは異なる手法となっている。

定理 3 により G/P 上の H 軌道の有限性が誘導表現の重複度の有限性を特徴付ける。また主結果 C を Q が極小放物型部分群 P のときに適用することで $G_\mathbb{C}/P_\mathbb{C}$ 上の $H_\mathbb{C}$ 軌道の有限性が誘導表現の重複度の一様有界性を保証する。これらを鑑みると $\#(H\backslash G/P) < \infty$ だが $\#(H_\mathbb{C}\backslash G_\mathbb{C}/P_\mathbb{C}) = \infty$ となるときに誘導表現の重複度の振る舞いがどのようになるのかが次に疑問になる。しかしこれが成り立つような例はあまりしられていない。この研究の第一歩として次を証明した。

主結果 E (Theorem 5.1.9)**.** コンパクト因子を持たない実簡約リー群 G の極小放物型部分群を P とし $P = MAN$ をその Langlands 分解とする。このとき G が準分裂的でなければ $\#(A_\mathbb{C}N_\mathbb{C}\backslash G_\mathbb{C}/P_\mathbb{C}) = \infty$ が成り立つ。

一般に実簡約リー群 G に対して Bruhat 分解より $\#(AN\backslash G/P) < \infty$ が成り立つ。よって主結果 E によりコンパクト因子のない実簡約リー群 G が準分裂的でないときには $\#(AN\backslash G/P) < \infty$ を満たすが $\#(A_\mathbb{C}N_\mathbb{C}\backslash G_\mathbb{C}/P_\mathbb{C}) = \infty$ を満たす例を与えることになる。

参考文献

[1] A. Aizenbud, D. Gourevitch, A. Minchenko, Holonomicity of relative characters and applications to multiplicity bounds for spherical pairs, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 4, 2325–2345.

[2] F. Bien, Orbit, multiplicities, and differential operators, Contemp. Math. **145** (1993), Amer. Math. Soc. 199–227.

[3] M. Brion, Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques, Manuscripta Math. **55** (1986), no. 2, 191–198.

[4] Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie groups. II, Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 26–65.

[5] B. Kimelfeld, Homogeneous domains in flag manifolds of rank 1, J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), 506–588.

[6] T. Kobayashi, Introduction to harmonic analysis on real spherical homogeneous spaces, Proceedings of the 3rd Summer School on Number Theory "Homogeneous Spaces and Automorphic Forms" in Nagano (F. Sato, ed.), 1995, 22–41 (in Japanese).

[7] T. Kobayashi, Shintani functions, real spherical manifolds, and symmetry breaking operators, Developments in Mathematics **37** (2014), 127–159.

[8] T. Kobayashi, T. Matsuki, Classification of finite-multiplicity symmetric pairs, Transformation Groups, **19** (2014), 457–493. Special Issue in honour of Professor Dynkin for his 90th birthday.

[9] T. Kobayashi, T. Oshima, Finite multiplicity theorems for induction and restriction, Adv. Math. **248** (2013), 921–944.

[10] T. Kobayashi, M. Pevzner, Differential symmetry breaking operators: I. General theory and F-method, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 2, 801–845.

[11] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry Breaking for Representations of Rank One Orthogonal Groups, Mem. Amer. Math. Soc. **238** (2015), 118 pp.

[12] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry breaking for representations of rank one orthogonal groups II, Lecture Notes in Mathematics, **2234**. Springer, Singapore, 2018. xv+342 pp.

[13] T. Matsuki, Orbits on flag manifolds, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto 1990, Vol. II (1991), Springer-Verlag, 807–813.

[14] È. B. Vinberg, Complexity of action of reductive groups, Func. Anal. Appl. **20** (1986), 1–11.