論文審査の結果の要旨

氏名　田内 大渡

多様体 X 上の大域解析において、個々の関数ではなく、関数全体のなすベクトル空間を考え、その上に定義された変換群 G の正則表現を活用するのが**非可換調和解析**の考え方である。変換群 G がコンパクトでも可換でもない場合は、その既約表現の多くは無限次元となるため、X 上の大域解析に無限次元表現論が用いられることになる。変換群 G が簡約リー群の場合の非可換調和解析は、半世紀以上にわたって以下のように飛躍的な進展を遂げてきた。

- X は 群多様体 G : Gelfand 学派, Harish-Chandra, ...
- X はリーマン対称空間 : Helgason, ...
- X は半単純対称空間 : 新谷, 高橋,Faraut,Flensted-Jensen, 大島, 関口,Delorme,...

これらの諸例を含む "良い枠組" で最も一般的なものを求めて、小林俊行は、1980 年代の後半に、次の問題を提起した。

基本問題 1. 多様体 X 上の大域解析において、どのような条件があれば群 G の表現論が "有効に機能する" か？

この問題を解決する過程において、実多様体における群作用に関して real spherical という概念が導入された。

Definition 2 (小林)**.** 実簡約リー群の等質多様体 X は、G の極小放物型部分群 P が開軌道をもつとき *real spherical* (実球多様体) という。

なお X が P 開軌道をもつことと $P\backslash X$ が有限集合であることとは同値である (Brion–Vinberg–松木)。

基本問題 1 は "表現論が有効に機能する" ということを、既約表現の重複度の有限性や一様有界性という観点から定式化することによって、次の形で解決された。

定理 3 (小林–大島)**.** 代数多様体 X を実簡約リー群 G の等質空間とする。このとき次の条件は同値である。
(i) (表現論) X 上の (代数的な) 同変ベクトル束の切断の空間において、G の各既約表現は高々有限個しか現れない。
(ii) (幾何) X は *real spherical* である。

一般に、非コンパクトな簡約リー群の既約表現は同値でないものが連続無限個存在するが、それらは、有限個の族に分けることができる。論文提出者は、小林–大島の定理の一つの精密化として、個々の放物型部分群に付随する既約表現が大域解析にどのように寄与するかを重複度の観点から研究し、次の問題を考察した。

問題 4. X を実簡約リー群 G の等質多様体とし、Q を G の放物型部分群とする。このとき、次の *3* つの条件の関係を明らかにせよ。
(i-Q) (表現論) X 上の代数的な同変ベクトル束の切断のなす空間において、Q からの誘導表現の部分商として得られる G の既約表現の重複度は常に有限である。

(ii-Q) (幾何) X に Q 開軌道が存在する。
(iii-Q) (幾何) $Q\backslash X$ は有限集合である。

Q が極小放物型部分群 P に一致する場合は、小林–大島の定理と Brion–Vinberg–松木の結果により

$$\text{(i-P)} \Leftrightarrow \text{(ii-P)} \Leftrightarrow \text{(iii-P)}$$

が成り立つ。また $P = G$ の場合にも明らかな理由でこの 3 つは同値となる。

一方、一般の放物型部分群に対して、(i-Q) $\Rightarrow$ (ii-Q) が成り立つ (小林、2014)。また、(ii-Q) $\Leftarrow$ (iii-Q) は自明な理由で成り立つが、逆に (ii-Q) $\Rightarrow$ (iii-Q) には初等的な反例も知られていた。論文提出者はこのような先行研究に基盤をおいて研究を開始し、次の定理を証明した。

定理 5 (田内)**.** (ii-Q) が成り立つにもかかわらず、(i-Q) が成り立たない例が存在する。

これは専門家も予期していなかった発見であり、単著論文として国際学術誌である Selecta Math に掲載された (2008)。定理 5 は $G = SL(2n, \mathbb{R})$ で Q が極大放物型部分群の場合に部分群 H をうまく選んで、一次独立な無限個の絡作用素を構成することによって証明された。論文提出者の構成的証明は注目すべき結果といえる。

さらに論文提出者は、中間次元の軌道に台をもつ超函数を考えることによって、逆方向について以下のような肯定的な結果を構成的に証明した。

定理 6 (田内)**.** （ある向き付けに関する緩やかな仮定のもとで）(i-Q) が成り立てば、(ii-Q) が成り立つ。

さて、小林–大島の重複度理論では定理 3 で述べた定性的性質のみならず、重複度に関する定量的な評価も証明されており、特に、「重複度の有界性が複素化の幾何的性質のみで決定される」ということが、下記の形で発見されていた。

定理 7 (小林–大島)**.** 代数多様体 X を実簡約リー群 G の等質空間とする。B を複素リー群 $G_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分群とするとき、次の条件は同値である。
(i) (表現論：一様有界性) X 上のランク r の代数的同変ベクトル束の切断の空間に現れる G の既約表現の重複度は r の定数倍以下である。
(ii) (複素幾何) $X_{\mathbb{C}}$ に B が開軌道をもつ。
(iii) (複素幾何) $B\backslash X_{\mathbb{C}}$ は有限集合である。

論文提出者は、ホロノミック $\mathcal{D}$ 加群の理論を援用して上記の定理 (iii) $\Rightarrow$ (i) の別証明を与え、さらにそれを以下のように一般化した。

定理 8 (田内)**.** 上記の定理における (iii) $\Rightarrow$ (i) は一般の放物型部分群に対しても拡張できる。

以上のように、当該論文は簡約リー群の表現論と大域解析の重要な分類において、新しい知見を与えたものであり、論文提出者 田内大渡氏は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。