論文の内容の要旨

論文題目：A combinatorial study on K-theoretic k-Schur functions and stable Grothendieck polynomials
(K-理論的 k-シューア関数と安定グロタンディーク多項式に関する組合せ論的研究)

氏　　名： 滝聞 太基

本論文は全 4 章からなり, 第 1 章と第 2 章では K-理論的 k-Schur 関数 (以下単に K-k-Schur 関数) と呼ばれる Schur 関数のアフィン版かつ K-理論版にあたる対称関数について調べる. 特に, Coxeter 群の強順序と弱順序の性質とアフィン対称群の構造についての組合せ論的な議論によって K-k-Schur 関数のある和についての Pieri 型の公式と因数分解公式を与える. 第 3 章と第 4 章では stable Grothendieck 多項式と呼ばれる Schur 関数の K-理論版にあたる対称関数についていくつかの性質を示す.

K-k-Schur 関数と stable Grothendieck 多項式はいずれも Schur 関数の類似物である. Schur 関数 s_λ は整数の分割で添字づけられる対称関数の族で, 組合せ論, 表現論, 幾何などの分野に跨って現れる重要な対象である. 特にここでは semi-standard tableaux の母関数としての表示, Pieri 公式による特徴付け, グラスマン多様体のコホモロジー Schubert 類との対応が重要である. Schur 関数とグラスマンのコホモロジー類の関係の一般化の 2 つに (1) K-理論版, つまりコホモロジーの代わりに K-コホモロジーを考えることと (2) アフィン版, つまりグラスマンの代わりにアフィングラスマン多様体を考えることがある.

第 1 章と第 2 章で扱う K-k-Schur 関数はこの 2 つの一般化を両方行ったものと言える. 歴史的には k-Schur 関数という Schur 関数のアフィン版にあたる (斉次) 対称関数が先にあって K-k-Schur 関数はその非斉次化になっている. 以下では k を正の整数とする. 整数の分割 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l)$ が k-**有界**とは $k \geq \lambda_1$ $(\geq \lambda_2 \geq \cdots)$ であることを言い, k-有界な分割全体の集合を $\mathcal{P}_k$ と書く.

Lam [1] により, $A_k^{(1)}$ 型アフィングラスマン多様体のホモロジー Schubert 類が Lapointe, Lascoux, Morse [3] によって導入された k-Schur 関数 $s_\lambda^{(k)}$ と対応していることが示された. $s_\lambda^{(k)}$ は k-有界分割で添字づけられていて, $\{s_\lambda^{(k)}\}_{\lambda \in \mathcal{P}_k}$ は対称関数環 Λ の部分環 $\Lambda_{(k)} = \mathbb{Z}[h_1, \cdots, h_k]$ の基底をなす (ただし h_i は完全対称関数). 組合せ論的には k-Schur 関数 $s_\lambda^{(k)}$ $(\lambda \in \mathcal{P}_k)$ は affine strip という (horizontal strip の類似にあたる) ものを用いた Pieri 型公式 [5]

$$h_m s_\lambda^{(k)} = \sum_{\mu/\lambda:\ \text{affine strip of size } m} s_\mu^{(k)}$$

によって特徴づけられる.

この K-理論的類似として, Lam, Schilling, Shimozono [2] はアフィングラスマン多様体の K-ホモロジーの Schubert 類として K-k-**Schur 関数** $g_\lambda^{(k)}$ $(\lambda \in \mathcal{P}_k)$ を導入した. この $g_\lambda^{(k)}$ は最高次の部分として $s_\lambda^{(k)}$ を持ち (よって $\Lambda_{(k)}$ の基底をなす), affine set-valued strip という affine strip の一般化を用いた Pieri 型公式によって特徴付けられる [6]. これは一般に以下のように書くことができる:

$$h_m g_\lambda^{(k)} = \sum_{\mu/\lambda:\ \text{affine strip of size } \leq m} \pm(\text{coefficient})\, g_\mu^{(k)}. \tag{1}$$

ここで, アフィン版類似の理論において組合せ論的背景にアフィン対称群があることに注意しておく: k-有

界分割の集合 $\mathcal{P}_k$ とアフィン対称群 $\tilde{S}_{k+1}$ のある部分集合 $\tilde{S}^\circ_{k+1}$ との間に全単射 $\mathcal{P}_k \simeq \tilde{S}^\circ_{k+1}$ が存在し [4], これによって k-有界分割とアフィン対称群の元を同一視する．一般の Coxeter 群 W に対してその強順序 (Bruhat 順序とも呼ばれる) と (左) 弱順序をそれぞれ $\leq$, $\leq_L$ と書き, 特に全単射 $\mathcal{P}_k \simeq \tilde{S}^\circ_{k+1}$ によって k-有界分割に対しても強順序と弱順序を定義する (1.2 節参照). $s^{(k)}_\lambda$ や $g^{(k)}_\lambda$ の Pieri 型公式に現れる affine strip や affine set-valued strip はいずれも弱順序を用いて記述することができ, 以下ではこれらの順序についての議論が重要になる.

以下で主な結果を紹介する．まず, 第 1 章では k-有界分割上の強順序 (Bruhat 順序) に関する principal order ideal に渡る $g^{(k)}_\mu$ たちの和 $\sum_{\mu\leq\lambda} g^{(k)}_\mu$ を考え, この和を $\widetilde{g}^{(k)}_\lambda$ とおく．この $\widetilde{g}^{(k)}_\lambda$ について以下を与える:

- Pieri 型の公式 (すなわち, 積 $\widetilde{g}^{(k)}_{(r)}\widetilde{g}^{(k)}_\lambda$ についての公式).
- k-rectangle を括り出す因数分解公式.

Pieri 型の公式は以下のものである.

定理 1. k-有界分割 λ と非負整数 $r \leq k$ に対し, $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \cdots$ を μ/λ がサイズ r の affine strip になるような μ の全体とする (すなわち, k-Schur 関数の Pieri 型公式 $h_r s^{(k)}_\lambda = s^{(k)}_{\mu^{(1)}} + s^{(k)}_{\mu^{(2)}} + \cdots$ の右辺に現れるもの全体). このとき

$$\widetilde{g}^{(k)}_{(r)}\widetilde{g}^{(k)}_\lambda = \sum_{\nu\leq\mu^{(i)}\ (\exists i)} g^{(k)}_\nu \tag{2}$$

$$= \sum_i \widetilde{g}^{(k)}_{\mu^{(i)}} - \sum_{i<j} \widetilde{g}^{(k)}_{\mu^{(i)}\wedge\mu^{(j)}} + \sum_{i<j<l} \widetilde{g}^{(k)}_{\mu^{(i)}\wedge\mu^{(j)}\wedge\mu^{(l)}} - \cdots. \tag{3}$$

ただし, $\wedge$ は $\mathcal{P}_k$ $(\simeq \tilde{S}^\circ_{k+1})$ の強順序 $\leq$ についての meet を表す (すなわち $x \wedge y = \max_\leq\{z \in \mathcal{P}_k \mid x \geq z \leq y\}$). 一般に強順序についての meet は存在するとは限らないが, 下で述べる補題 3 より (3) に現れる meet は存在し, 包除原理により (2) から (3) への変形がしたがう.

上の Pieri 型公式を用いると, k-rectangle を括り出す因数分解公式を示すことができる．ある $1 \leq t \leq k$ について $(t^{k+1-t}) = (\underbrace{t, t, \ldots, t}_{k+1-t\ 個})$ と書ける k-有界な分割を $\boldsymbol{k}$**-rectangle** と呼び, R_t と書く．k-有界分割の中でも k-rectangle は特別な役割を果たす: 全単射 $\mathcal{P}_k \simeq \tilde{S}^\circ_{k+1}$ によってアフィン対称群 (= A 型アフィン Weyl 群) の元と見たとき R_t はある平行移動元に (大体) 対応するもので, さらに k-Schur 関数について $s^{(k)}_{R_t\cup\lambda} = s^{(k)}_{R_t} s^{(k)}_\lambda$ が任意の k-有界な分割 λ に対して成立する [5] (ただし整数の分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ に対し $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ を大きい順に並べ替えてできる分割を $\lambda \cup \mu$ と書いた). このような因数分解は通常の Schur 関数では見られない, アフィン型に特有の著しい現象である．この因数分解公式の K-理論版を考えるのは自然だが, K-k-Schur 関数 $g^{(k)}_\lambda$ については同じ形の等式は一般には成り立たない: $g^{(k)}_{R_t\cup\lambda}$ が $g^{(k)}_{R_t}$ で割り切れることは示されているが, 一般にその商 $g^{(k)}_{R_t\cup\lambda}/g^{(k)}_{R_t}$ は $g^{(k)}_\lambda$ により低次の項を加えたもの $g^{(k)}_\lambda + \sum_{|\mu|<|\lambda|}(\text{coefficient}) g^{(k)}_\mu$ になり, その形を求めるのは難しい．次の定理は, $g^{(k)}_\lambda$ の代わりにその和 $\widetilde{g}^{(k)}_\lambda$ を考えることで因数分解公式が $s^{(k)}_\lambda$ と同じ形で成立することを示している.

定理 2. 任意の k-有界分割 $\lambda \in \mathcal{P}_k$ と整数 $1 \leq t \leq k$ に対し,

$$\widetilde{g}^{(k)}_{R_t\cup\lambda} = \widetilde{g}^{(k)}_{R_t}\widetilde{g}^{(k)}_\lambda. \tag{4}$$

定理 2 は定理 1 から容易に導かれる．定理 1 の証明の方針は単純で, K-k-Schur 関数の Pieri 公式 (1) を足し合わせて整理すると (2) が得られるというものであるが, それを実行する際にはアフィン対称群の強順序と

弱順序についての細かい議論が必要になる．1.3 節では, 一般の Coxeter 群 W の強順序と弱順序について議論する．特に, Demazure 積 $*$ (すなわち, $W=(W,S)$ の定義関係式において, 各生成元 $s \in S$ について $s^2=1$ の代わりに $s*s=s$ とすることで得られるモノイド演算 $*\colon W \times W \longrightarrow W$) に関して以下のことを示す:

(I) 任意の $w \in W$ に対し, Demazure 作用 $(w*)$ によって強順序の meet は（存在するならば）保たれる．すなわち $x, y \in W$ に対し $x \wedge y$ が存在すれば $w*(x \wedge y) = (w*x) \wedge (w*y)$.

(II) 任意の $x, y \in W$ に対し, $\min_{\leq}\{z \in W \mid x \leq z \geq_L y\}$ や $\max_{\leq}\{z \in W \mid x \geq_L z \leq y\}$ という (強順序と弱順序を組み合わせた join や meet と思える) 元が存在し, Demazure 作用 (の双対にあたるもの) を用いて具体的に書ける．

1.4 節では W がアフィン対称群の場合に限定して, (一つ固定した) k-有界分割 λ に affine strip をつけて得られる k-有界分割全体の集合 $\{\mu \in \mathcal{P}_k \mid \mu/\lambda\colon \text{affine strip}\}$ の構造を調べる ($\mathcal{P}_k \simeq \tilde{S}_{k+1}^{\circ}$ で $\mathcal{P}_k$ の元をアフィン対称群の元と思っていることに注意)．特に, (一般に Coxeter 群の強順序に関する meet は存在するとは限らないが) この集合は meet について閉じている:

補題 3. k-有界分割 λ, μ, ν に対し, μ/λ と ν/λ が affine strip ならば μ と ν の強順序についての meet $\mu \wedge \nu = \max_{\leq}\{\kappa \in \mathcal{P}_k \mid \mu \geq \kappa \leq \nu\}$ が存在し, $(\mu \wedge \nu)/\lambda$ は affine strip となる．

補題 3 の証明には (I) を使う．補題 3 は定理 1 の証明で使われるだけでなく, これ自体アフィン対称群についての興味深い結果と言える．

第 2 章では, ($g_\lambda^{(k)}$ と同じく [2] で導入された) 非可換 K-k-Schur 関数を用いて定理 1 と定理 2 の別証明を与える．一般に Coxeter 群 (W,S) の 0-Hecke 代数 $H(W)$ とは, 生成元 $\{T_s \mid s \in S\}$ と関係式 ($T_s^2 = -T_s$ と W の組紐関係式) で与えられる (非可換) 代数で, W の群環のある種の変形である: $H(W) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}T_w$ (ただし最短表示 $w = s_1 \cdots s_m \in W$ に対し $T_w := T_{s_1} \cdots T_{s_m}$)．アフィン対称群の 0-Hecke 代数 $\mathbb{K} := H(\tilde{S}_{k+1})$ の中に K-アフィン Fomin–Stanley 代数 $\mathbb{L}$ という $\Lambda_{(k)}$ と同型な可換部分環が存在し, 同型 $\Lambda_{(k)} \simeq \mathbb{L}$ による K-k-Schur 関数 $g_\lambda^{(k)}$ の像が**非可換 K-k-Schur 関数** $\mathbf{g}_\lambda^{(k)}$ と呼ばれ, $\mathbf{g}_\lambda^{(k)}$ は $\mathbb{L}$ の元として $\mathbf{g}_\lambda^{(k)} \equiv T_{w_\lambda} \mod J$ で特徴付けられる ([2] による．ただし $J \subset \mathbb{K}$ はある左イデアルで, また $\mathcal{P}_k \simeq \tilde{S}_{k+1}^{\circ}\,;\, \lambda \mapsto w_\lambda$ と書いた)．このとき鍵となる性質として, $\widetilde{T}_s = T_s + 1$ $(s \in S)$ とおいて $\widetilde{T}_w$ を T_w と同様に最短表示 $w = s_1 \cdots s_m$ を取って $\widetilde{T}_w := \widetilde{T}_{s_1} \cdots \widetilde{T}_{s_m}$ と定めると (i) $\widetilde{\mathbf{g}}_\lambda^{(k)} := \sum_{\mu \leq \lambda} \mathbf{g}_\mu^{(k)}$ と置くとこれは $\widetilde{\mathbf{g}}_\lambda^{(k)} \equiv \widetilde{T}_{w_\lambda} \mod J$ で特徴付けられ, (ii) $v, w \in \tilde{S}_{k+1}$ に対し $vw \not\geq_L w$ ならば $T_v \widetilde{T}_w = 0$, (iii) $v \in \tilde{S}_{k+1}$ と $w \in \tilde{S}_{k+1}^{\circ}$ に対し, $vw \notin \tilde{S}_{k+1}^{\circ}$ ならば $T_v \widetilde{T}_w \in J$ が成立する ((i) は既知の結果の適用で, (ii) と (iii) をここで示す)．これに加えて第 1 章で示したアフィン対称群についての結果 (特に補題 3) を使うことで, (3) と (4) に対応する非可換 K-k-Schur 関数の和 $\widetilde{\mathbf{g}}_\lambda^{(k)}$ についての等式が 0-Hecke 代数 $\mathbb{K}$ の中での modulo J の計算によって見通しよく示せる．

次に, 第 3 章と第 4 章では Schur 関数の K-理論版である **stable Grothendieck 多項式** (安定グロタンディーク多項式) G_λ とその Hall 内積に関する双対基底である **dual stable Grothendieck 多項式** g_λ を扱う．G_λ (resp. g_λ) はグラスマン多様体の K-コホモロジー (resp. K-ホモロジー) の Schubert 類に対応し, 最低次 (resp. 最高次) の部分として s_λ を持つ Schur 関数の非斉次化となっている．また任意の分割 λ について k が十分大きければ $g_\lambda^{(k)} = g_\lambda$ となるので, g_λ は $g_\lambda^{(k)}$ の ($k \to \infty$ とした) 極限と思うことができる．さらに $k \to \infty$ としたとき affine strip が horizontal strip と一致し強順序が Young 図形としての包含関係と一致することより, $\widetilde{g}_\lambda = \sum_{\mu \subset \lambda} g_\mu$ と置くと定理 1 で k を十分大きく取ることで $\widetilde{g}_\lambda$ の Pieri 公式についても同じ形の等式が得られる．特に (3) より $\widetilde{g}_\lambda \widetilde{g}_{(r)}$ を $\widetilde{g}_\mu$ で展開すると最高次の項の (Young 図形の包含関係に関する)

meet の交代和になる．

一方で, 非アフィン (i.e. $k=\infty$) の場合にはアフィンの場合 (i.e. $k<\infty$) に成立しない性質が見られる．特に,

(A) 対称関数環の 2 つの基底 $\{g_\lambda\}$ と $\{\widetilde{g}_\lambda\}$ の積の構造定数は一致する．すなわち, $g_\lambda \mapsto \widetilde{g}_\lambda$ で定義される線型写像を I と置くと $I\colon \Lambda \longrightarrow \Lambda$ は対称関数環 Λ の環自己同型となる．さらに $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $g_{(m)} = h_m$ なので, I は $h_m \mapsto h_m + h_{m-1} + \cdots + h_1 + h_0$ によって生成される環自己同型と一致する．特に, $g_\lambda g_{(r)}$ を g_μ で展開すると最高次の項の (Young 図形の包含関係に関する) meet の交代和になる．すなわち $(s_\lambda s_{(r)} =)\ s_\lambda h_r = s_{\mu^{(1)}} + s_{\mu^{(2)}} + \cdots$ とおくと $g_\lambda g_{(r)} = \sum_i g_{\mu^{(i)}} - \sum_{i<j} g_{\mu^{(i)}\wedge\mu^{(j)}} + \sum_{i<j<l} g_{\mu^{(i)}\wedge\mu^{(j)}\wedge\mu^{(l)}} - \cdots$ となる．

(B) (上の g_λ の状況と似て) $G_\lambda G_{(r)}$ を基底 $\{G_\mu\}$ で展開すると, 最低次に現れる項のjoinの交代和になる．すなわち, $\mu^{(i)}$ を上と同様におくと $G_\lambda G_{(r)} = \sum_i G_{\mu^{(i)}} - \sum_{i<j} G_{\mu^{(i)}\vee\mu^{(j)}} + \sum_{i<j<l} G_{\mu^{(i)}\vee\mu^{(j)}\vee\mu^{(l)}} - \cdots$ となる (ここで $\vee$ は Young 図形の包含関係における join).

第 3 章では, (A) の写像 $I\colon \Lambda \longrightarrow \Lambda;\ g_\lambda \mapsto \widetilde{g}_\lambda \,(= \sum_{\mu\subset\lambda} g_\mu)$ が以下の表示を持つことを示す (特に (a) より環準同型であることがわかる) :

(a) 代入写像 $f(x) \mapsto f(1,x)$, (すなわち, $f(x_1,x_2,\cdots) \mapsto f(1,x_1,x_2,\cdots)$),

(b) 写像 $H(1)^\perp$. (ただし $H(1) = \sum_i h_i$ で, $F^\perp$ は F を掛ける写像 $(F\cdot)$ の Hall 内積に関する随伴写像)

(a) と (b) の写像が等しいこと (より一般に, $H(t) = \sum_i t^i h_i$ に対し $H(t)^\perp(f(x)) = f(t,x)$) は既知である．写像 I が (a) の代入写像に等しいことを示す鍵は代入写像 $f \mapsto f(1,0,0,\cdots)$ によって任意の λ/μ について $g_{\lambda/\mu}$ が 1 に行くことで, それと I がこの代入写像と対称関数環の余積のある合成として書けることから $I = (f(x) \mapsto f(1,x))$ がしたがう．さらに以下のものも与える:

- 写像 I (より一般に $H(t)^\perp$) による $g_{\lambda/\mu}$ の像が, $\mu\subset\nu\subset\lambda$ をみたす ν にわたって $g_{\nu/\mu}$ (または $g_{\lambda/\nu}$) を足した和になるという公式. (これは $I(g_\lambda) = \sum_{\nu\subset\lambda} g_\nu$ の一般化になっている)
- $H(t)^\perp$ の逆写像 $E(-t)^\perp$ についての同様の公式. (ただし, $E(-t) = \sum_i (-t)^i e_i = H(t)^{-1}$)
- 基底 $\{G_\lambda\}$ に関する写像 $(H(t)\cdot)$ と $(E(-t)\cdot)$ の表示．これは $\{G_\lambda\}$ と $\{g_\lambda\}$ が双対基底であることと一般に $(F\cdot)$ と $F^\perp$ が互いに随伴であることによる.

第 4 章では (B) の証明を与える．これは G_λ と g_λ の Pieri 公式に現れる係数が一つ決めた分割 λ に horizontal strip を足した分割のなす半順序集合の Möbius 関数の値として得られることによる.

参考文献

[1] Thomas Lam, *Schubert polynomials for the affine Grassmannian*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), no. 1, 259–281.

[2] Thomas Lam, Anne Schilling, and Mark Shimozono, *K-theory Schubert calculus of the affine Grassmannian*, Compos. Math. **146** (2010), no. 4, 811–852.

[3] Luc Lapointe, Alain Lascoux, and Jennifer Morse, *Tableau atoms and a new Macdonald positivity conjecture*, Duke Math. J. **116** (2003), no. 1, 103–146.

[4] Luc Lapointe and Jennifer Morse, *Tableaux on $k+1$-cores, reduced words for affine permutations, and k-Schur expansions*, J. Combin. Theory Ser. A **112** (2005), no. 1, 44–81.

[5] ———, *A k-tableau characterization of k-Schur functions*, Adv. Math. **213** (2007), no. 1, 183–204.

[6] Jennifer Morse, *Combinatorics of the K-theory of affine Grassmannians*, Adv. Math. **229** (2012), no. 5, 2950–2984.