審査の結果の要旨

氏　名　　滝　聞　太　基

論文提出者滝聞太基は, K 理論的 k-Schur 関数および安定 Grothendieck 多項式・双対安定 Grothendieck 多項式と呼ばれる, 広い意味のグラスマン多様体の幾何に由来する対称式に関する組合せ論的な研究を行った.

これらはいずれも, Schur 関数の K 理論的類似ということができる.

Schur 関数 s_λ は整数分割 λ によって添え字付けられた対称関数環の斉次元からなる基底で, 表現論的な意味に加え, Schubert カルキュラスにおいて, 通常のグラスマン多様体のコホモロジー環において Schubert 部分多様体の基本類を代表するという意味を持つ. コホモロジー環の代わりに K コホモロジーを考え, Schubert 部分多様体の構造層の類を代表するものとして A. Lascoux と M.-P. Schützenberger によって導入されたのが Grothendieck 多項式であり, 安定 Grothendieck 多項式 G_λ はその安定極限と呼ばれる無限極限としてある S. Fomin と A. Kirillov によって定義された非有界な対称べき級数である. Schur 関数はホモロジー環の Schubert 類を代表するものともみられるが, 安定 Grothendieck 多項式はそうでなく, その双対である K ホモロジーの元を代表する双対安定 Grothendieck 多項式 g_λ と呼ばれる非斉次対称多項式が別に定義される.

一方, 通常のグラスマン多様体の代わりに $A_k^{(1)}$ 型アフィンリー環に対応するアフィングラスマン多様体を考えると, そのホモロジー環の基底 (コホモロジー環の Schubert 類の双対) を, もともとは Macdonald 多項式の研究から L. Lapointe, Lascoux, J. Morse が導入した k-Schur 関数 $s_\lambda^{(k)}$ という斉次対称多項式によって代表させることができることが T. Lam によって示された. ただし k-Schur 関数は, k 有界分割 (パートがすべて k 以下の整数分割) によって添え字付けられ, 対称関数環のうち k 次以下の完全対称式によって生成される部分環の基底になっている. さらにその K 理論的類似である K ホモロジーの基底で, K コホモロジーにおける Schubert 部分多様体の構造層の類の双対であるものを代表する多項式として, Lam, A. Schilling, M. Shimozono がやはり k 有界分割全体を添え字集合を持つ K-k-Schur 関数 $g_\lambda^{(k)}$ という非斉次対称式の族を定義した.

滝聞太基は, このうち K-k-Schur 関数を博士論文の第 1・2 章で扱い, 安定 Grothendieck 多項式および双対安定 Grothendieck 多項式を第 3・4 章で扱っている. いずれも上記の歴

史の中で得られた組合せ論的な定義から出発し, 扱う手法も組合せ論, 主としてアフィン対称群の組合せ論に基づく.

第 1・2 章の主要結果は, 単独の K-k-Schur 関数 $g_\lambda^{(k)}$ ではなくその和 $\widetilde{g}_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} g_\mu$ を考えて, それに対する Pieri 型の公式および k-rectagble の factorization と呼ばれるアフィングラスマンの世界で特徴的な性質を示したものである．ここで $\leq$ は $\widetilde{A}_k^{(1)}$ 型リー環の Weyl 群であるアフィン対称群 $\widetilde{S}_{k+1}$ の Bruhat order であり, k 有界分割と $\widetilde{S}_{k+1}$ の中のアフィングラスマン元と呼ばれる元の間の 1 対 1 対応を用いている．k-rectangle とは縦の辺と横の辺の長さの和が $k+1$ であるような長方形の Young 図形で表される k 有界分割で, その factorization とは, 例えば k-Schur 関数が持つことが知られていた $s_{R\cup\lambda}^{(k)} = s_R^{(k)} s_\lambda^{(k)}$ のような性質 (R は k-rectangle で $R \cup \lambda$ は R と λ のパートを全部合わせて大きい順に並べ直した整数分割) をさし, アフィン対称群 (それに付随する拡大アフィン Weyl 群) の中では特別な意味をもつ元である．類似の性質が K-k-Schur 関数にもあることが予想され, $g_{R\cup\lambda}^{(k)}$ が $g_R^{(k)}$ で割り切れることは申請者の以前の論文にもあるが, 残りの因子は $g_\lambda^{(k)}$ を係数 1 で筆頭項にもつ複雑な 1 次結合になり, 記述は困難だった．申請者の博士論文では, 上の意味の K-k-Schur 関数の和を新たに導入すると, それに関しては $\widetilde{g}_{R\cup\lambda}^{(k)} = \widetilde{g}_R^{(k)} g_\lambda^{(k)}$ というきれいな形の分解が成立することを示した．これについては, 幾何的にそうなりそうだという予想もあり, 申請者がこの結果を学術誌に投稿する少し前に, 幾何的な証明が S. Kato によって与えられたが, 申請者の結果はこれを全く組合せ論的に示したものである．この結果は $\widetilde{g}_\lambda$ に対する Pieri 型の公式, すなわち $\widetilde{g}_\lambda^{(k)} \widetilde{g}_{(r)}^{(k)}$ ($r \leq k$, (r) は単一のパート r だけからなる k 有界分割) を分解する式を示すと, そこから比較的容易に得られる．Pieri 公式は Schur 関数 s_λ にそのパラメタが単一のパートからなるもの $s_{(r)}$ をかけたときの分解の式が発祥であるが, 各種の対称式の研究においてその積を分析する最も基本となるものであり, $g_\lambda^{(k)}$ に対しても Lam, Schilling, Shimozono や Morse によって示されて $\widetilde{g}_\lambda$ の組合せ論的な定義の基礎となっているが, $\widetilde{g}_\lambda^{(k)}$ に対する Pieri 型公式は新しい結果である.

これを示すため, 申請者はアフィン対称群に関するかなり立ち入った結果を示して用いている．特に, Demazure 積 (通常の Coxeter 群の積を生成元の 2 乗が自分自身となるように少し変形したもの) と Bruhat 順序および弱順序に関していくつかの興味深いことを示している．例えば Coxeter 群では (アフィン対称群でも) 一般に Bruhat 順序で 2 つの元の下限 (最大共通下界) は存在しないが, もし 2 元 v, w に下限 $v \wedge w$ が存在する場合には別の元 u による Demazure 積が下限の演算を保つこと (Demazure 積を $*$ で表せば $(u*v) \wedge (u*w) = u*(v \wedge w)$) や, また Bruhat 順序で v 以下かつ弱順序で w 以下であ

る元全体には必ず最大限があること, また $\widetilde{g}_\lambda^{(k)}$ に対する Pieri 型公式の右辺に現れる元の間には Bruhat 順序に関する下限が存在することなどを示しており, これらは独立に興味深い結果である. 以上は主として第 1 章の結果であるが, 第 2 章では 0-Hecke 代数という非可換代数の可換部分環の中に対称関数を実現するという手法でこれの別証明を与えている.

第 3・4 章では安定 Grothendieck 多項式および双対 Grothendieck 多項式を扱っている. 双対安定 Grothendieck 多項式 g_λ は K-k-Schur 関数 $g_\lambda^{(k)}$ の k を $+\infty$ に飛ばした極限としてもとらえることができ, $k \to \infty$ では順序 $\mu \leq \lambda$ は Young 図形の包含 $\mu \subset \lambda$ と一致するため, 和 $\widetilde{g}_\lambda = \sum_{\mu \subset \lambda} g_\mu$ に対しても申請者が K-k-Schur 関数の和 $\widetilde{g}_\lambda^{(k)}$ に対して示したと類似の形の Pieri 型公式を示すことができる. 一方, 双対安定 Grothendieck 多項式には K-k-Schur 関数 $g_\lambda^{(k)}$ にはみられない著しい性質があり, 特に, 各 g_λ を $\widetilde{g}_\lambda$ にうつす対称関数環の線型写像は積を保ち, 環同型になるこのことから双対安定 Grothendieck 多項式に関しては, 和をとらない g_λ そのものに対する Pieri 公式も新しい形の表示を導くことができ, さらに申請者はそれを用いて安定 Grothendieck 多項式 G_λ に対する Pieri 公式も導いた. ほかにもこの環同型による skew 安定 Grothendieck 多項式と呼ばれる元など様々な元の像や, 類似する環同型に関する種々の結果を得ている.

以上のように, 申請者が博士論文において得た結果は, 対称関数の組合せ論において幾何とも関連する大変興味深いものであり, また今後の理論の発展も期待できる価値の高いものである.

よって, 論文提出者滝聞太基は, 博士 (数理科学) の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める.