論文の内容の要旨

論文題目 Arithmetic degrees of self-maps of algebraic varieties

（代数多様体の自己写像の算術次数）

氏名 松澤陽介

古典的な力学系の研究では，多様体の自己写像による点の軌道の位相的，解析的性質を調べるが，数論的力学系では数体上の代数多様体の自己写像による点の軌道の数論的性質を研究する．代数体上定義された多様体の数論を研究する際の強力な道具として Weil 高さ関数というものがあるが，数論力学の研究では高さ関数の軌道に沿った増大度を幾何学的に捉えることが重要である．代数体上定義された滑らかで射影的な代数多様体の自己支配的有理写像 $f\colon X \dashrightarrow X$ を考える．Silverman は X 上の高さ関数 h_X の軌道に沿った増大度を測る量として，算術次数 $\alpha_f(P) = \lim_{n\to\infty} h_X(f^n(P))^{1/n}$ を導入した．ただし P は f-軌道が定義できる X の点である．例えば，f が偏極力学系の場合は $\alpha_f(P) = 1$ となることと P の f-軌道が有限集合になることが同値となる．川口-Silverman は算術次数について以下を予想した．

Conjecture 1 (**川口-Silverman 予想 (KSC)[6, 1]**).

(1) 極限 $\alpha_f(P) = \lim_{n\to\infty} h_X(f^n(P))^{1/n}$ は存在する．

(2) P の f 軌道が X で *Zariski* 稠密なら $\alpha_f(P) = \delta_f$．ただし δ_f は f の第一力学次数．

予想の (2) は算術次数を幾何学的な量である力学次数に関連づけるものであり興味深い．例えば X が曲面で f が自己同型である場合などは力学次数は位相的に決まってしまう量なので (力学次数のログが対応する複素多様体の自己連続写像の位相エントロピーに一致する)，この場合上の予想は数論的な量を位相的な量に結びつけるものとなっている．いくつもの特殊な場合にこの予想は証明されているが，一般には未解決である．

本論文の内容は大まかに以下のようになっている．

- 高さ関数の自己有理写像の軌道に沿った増大度の研究．その結果として算術次数が力学次数で上から抑えられることを証明した．(2 章)
- 滑らかで射影的な曲面，セミアーベル多様体の自己射の川口-Silverman 予想の証明と関連する問題の研究．(3, 5 章)
- 基礎体が標数 0 の関数体の場合の類似．(4 章)

(1) 算術次数の評価と標準高さ (本文 2 章, [2]) 川口-Silverman 予想 (KSC) の (2) について，片側の不等式は常に成立することを証明した．

Theorem 2. X を高さ関数が定義できる体 *(e.g.* 代数体*)* 上の滑らかな代数多様体，$f\colon X \dashrightarrow X$ を自己支配的有理写像とする．X 上の豊富因子に付随する高さ関数 h_X を任意に固定し，$h_X^+ = \max\{1, h_X\}$ とおく．この時，任意の $\epsilon > 0$ に対しある定数 $C > 0$ が存在して，任意の $n \geq 0$ と f-軌道が定義できる任意の点 P に

ついて

$$h^+_X(f^n(P)) \le C(\delta_f+\epsilon)^n h^+_X(P)$$

が成立する．特に，$\overline{\alpha}_f(P) := \limsup_{n\to\infty} h_X(f^n(P))^{1/n} \le \delta_f$.

証明の大きな方針は Tate の telescoping sum の手法の一般化である．誤差として数値的にゼロな因子に付随する高さ関数が現れるが，これをうまく評価することで上の不等式を得た．

アーベル多様体上の Neron-Tate 高さ関数に当たるものの力学系類似は標準高さ関数と呼ばれている．考えている力学系に対して，良い性質を持つ標準高さを構成することができればその力学系の理解に大きく近づく．実際，川口氏は曲面の自己同型に対して良い標準高さ関数を構成することで KSC を証明した．また Lesieutre と Satriano は Hyper Kähler 多様体に対して，川口氏の手法と同様の方法で良い標準高さを構成し KSC を証明した．標準高さ関数は典型的には点 P に対し $\lim_{n\to\infty} h_X(f^n(P))/\delta_f^n$ のような極限を対応させる関数として定義される．一般の有理写像に対してこのタイプの極限に存在は期待できないので，極限が存在する広いクラスを探すことが重要である．定理 1 の系として以下のことを示した．

Theorem 3. X のピカール数が 1 で f が代数安定で $\delta_f > 1$ ならば上記の極限は収束する．ここで，f が代数安定とは $(f^n)^* = (f^*)^n \colon N^1(X) \longrightarrow N^1(X)$ ということである．

(2) 算術次数，曲面の KSC (本文 3 章，[3]) 一般には自己写像が Zariski 稠密な軌道を持つとは限らないので，算術次数が力学次数と一致する点が存在するかは予想とは別問題である．ネフ標準高さ関数を用いて以下を証明した．

Theorem 4. 射影多様体 X の全射 $f\colon X \longrightarrow X$ に対し $\alpha_f(P) = \delta_f$ なる点 P がある．

この定理は，ある意味で力学系の数論的複雑さと幾何学的複雑さが同等であるということを示している．

先に言及したように曲面の自己同型の KSC は川口氏により証明されている．同型ではない曲面の自己全射について，曲面の分類を用いて自己射を分析し以下を示した．

Theorem 5. 滑らかで射影的な曲面 X の自己全射 $f\colon X \longrightarrow X$ に対して *KSC* は正しい．

(3) 関数体類似 (本文 4 章，[4]) 基礎体が標数 0 の関数体 $\overline{k(t)}$ の場合にも高さ関数が定義できるので，算術次数も数体の時と同様に定義でき類似の問題を考えることができる．この場合，高さ関数が多様体の曲線上のモデルの上の交点数で表せることを用いて問題を完全に幾何学的なものに置き換えた．これにより不等式 $\overline{\alpha}_f(P) \le \delta_f$ の幾何学的な別証を与えた．さらに点 P が $\alpha_f(P) = \delta_f$ となるための十分条件を，点に対応するモデルのセクションに対する条件としていくつか与えた．また係数体 k が非可算の時，任意の支配的有理写像 f に対して $\alpha_f(P) = \delta_f$ となる点が十分たくさん存在することも証明した．この定理は，射だけではなく有理写像についても幾何学的複雑さと数論的複雑さが同等であるということが示された点で興味深い．

(4) セミアーベル多様体の算術次数 (本文 5 章，[5]) セミアーベル多様体の自己射の算術次数と力学次数を詳細に調べた．

Theorem 6. $f\colon X \longrightarrow X$ をセミアーベル多様体の自己射とする．$A(f) := \{\alpha_f(P) \mid P \in X(\overline{\mathbb{Q}})\}$ とおく．郡準同型 g と平行移動 T_a を用いて $f = T_a \circ g$ とかく．この時 f に対して *KSC* は正しい．さらに，

(1) 算術次数の集合は平行移動で変わらない: $A(f) = A(g)$.

(2) 集合 $A(g)$ は g の $\mathrm{End}(X)$ の元としての最小多項式などから完全に決定できる．

さらに，各算術次数を取る点の集合も決定することもできる．

アーベル多様体と代数トーラスに対しては上の結果は部分的には知られていた．しかし，一般に，ファイブレーションに同変に作用する力学系があった時，ベースとファイバーに対しての算術次数に関する結果から全体の力学系の結果を導くことは非常に難しい．今の場合，まず考えている自己射が自己準同型の場合に問題を帰着し，さらに最小多項式が $\mathbb{Q}$ 上既約な多項式のべき乗になっている場合に帰着する．この場合は，ベース (アーベル多様体) とファイバー (代数トーラス) の KSC から全体 (セミアーベル多様体) の KSC を導くことができる．さらに，算術次数の集合もこの方法で決定できる．

参考文献

[1] Kawaguchi, S., Silverman, J. H., *On the dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties*, J. Reine Angew. Math. **713** (2016), 21–48.

[2] Matsuzawa, Y., *On upper bounds of arithmetic degrees*, to appear in Amer. J. Math.

[3] Matsuzawa, Y., Sano, K., Shibata, T., *Arithmetic degrees and dynamical degrees of endomorphisms on surfaces*, Algebra Number Theory **12** (2018), no. 7, 1635–1657.

[4] Matsuzawa, Y., Sano, K., Shibata, T., *Arithmetic degree for dynamical systems over function fields of characteristic zero*, Math. Z. **290** (2018), no. 3-4, 1063–1083.

[5] Matsuzawa, Y., Sano, K., *Arithmetic and dynamical degrees of self-morphisms of semi-abelian varieties*, to appear in Ergodic Theory Dynam. Systems.

[6] Silverman, J. H., *Dynamical degree, arithmetic entropy, and canonical heights for dominant rational self-maps of projective space*, Ergodic Theory Dynam. Systems **34** (2014), no. 2, 647–678.