論文の内容の要旨

論文題目　On the Motion of Inhomogeneous Incompressible Fluids
(非一様非圧縮性流体の運動について)

氏　　名　李 煥元 (Li, Huanyuan)

本博士論文の目的は、流体力学のモデルである Navier–Stokes 方程式、磁気流体方程式 (以降単に MHD 方程式と呼ぶ)、Navier–Stokes–Korteweg 方程式に対する適切性の結果を述べる事である。流体の巨視的な運動則は質量保存則や運動量保存則のような物理学的な釣り合いの法則から導かれる偏微分方程式系で記述される。これら流体力学のモデルにおいて最も有名なものは、その重要性や数学的複雑さ及び幅広い応用の点から、多くの数学者と物理学者によって研究されている Navier–Stokes 方程式である。一般的に、古典的な流体力学は流体は一様であるかそうでないかの 2 つに分類される。通常、古典的な非圧縮性一様 Navier–Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u + \nabla P - \mu\triangle u = 0, \\ \mathrm{div} u = 0, \end{cases} \tag{NS}$$

は速度場 $u(x,t)$ と圧力場 $P(x,t)$ の方程式であり、$\mu > 0$ は粘性定数である。一方、圧縮性粘性流体

$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u\otimes u) + \nabla P(\rho) - \mu\triangle u - (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div} u = 0, \\ \partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \end{cases} \tag{CNS}$$

では流体の密度を表す非負関数 $\rho(x,t)$ も未知であり、P は ρ の関数となる。ここで、μ と λ は、ずれ粘性係数と体積粘性係数を表す。(NS) と (CNS) の中間の方程式として、非定数である密度をもつ非一様非圧縮性 Navier–Stokes 方程式がある。流体は非圧縮であるが密度を未知変数とするその方程式は地球物理流体力学の理論で現れる。基本的な例は、非圧縮流と非反応流の合わさった流体や、血流のような複雑な構造を持つ流体、溶けた物質を含む海や川の流体などである。一般に、方程式は次のように記述される。

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u\otimes u) + \nabla P - \mathrm{div}(\mu(\rho)(\nabla u + (\nabla u)^T)) = 0, \\ \mathrm{div} u = 0, \end{cases} \tag{INS}$$

ここで、$\mu(\rho)$ は密度 ρ の関数である粘性を表す。本博士論文では、主に (INS) および関連する非一様流体モデルの初期値・境界値問題や初期値問題の適切性を強解（滑らかな解）の範囲で議論する。以降、各章の結果を述べる。

第 1 章では、$\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな有界領域上で非一様 Navier–Stokes 方程式 (INS) の初期値・境界値問題について論じる。近年、X.Huang-Y.Wang[2] や J.Zhang[9] は独立に、初期速度場の勾配 ∇u の L^2 ノルムが十分小さい場合に、時間大域的強解の一意存在を示した。証明を改良することによりは別の条件の下でも、初期値・境界値問題が一意解を持つことを示した。特に、たとえ ∇u の L^2 ノルムが十分大きくても、運動エネルギーが小さいという仮定で十分であり、これは彼らの結果の拡張である。強調したい点は、X.Huang-Y.Wang[2]

や J.Zhang[9] によって得られた本来の時間重み付きエネルギー評価は、初期運動エネルギーが十分小さいという仮定のみでは大域的強解の構成を行えない事にある。これらの困難を克服するために、本研究でははは異なる時間重みの冪を用い、より詳細な評価を併せて用いる。この解析の副産物として、真空となりうる非圧縮性非一様 Navier–Stokes 方程式 (INS) の初期値・境界値問題もまた、粘性係数の下限が十分大きい、または密度の上限が十分小さいという仮定の下、大域的な強解をもつことを示す。第 1 章の結果は学術雑誌で掲載した論文 [3] の第 2 部分である。

第 2 章では、電磁場の影響下での非一様流体のモデルである MHD 方程式

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \\ (\rho u)_t + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mathrm{div}(\mu(\rho)(\nabla u + (\nabla u)^T)) + \nabla P - (\nabla \times B) \times B = 0, \\ \partial_t B - \nabla \times (u \times B) + \nabla \times (\lambda(\rho) \nabla \times B) = 0, \\ \mathrm{div} u = 0, \quad \mathrm{div} B = 0, \end{cases} \tag{MHD}$$

について議論する。ここで $B(x,t)$ は磁場を表し、$\lambda(\rho)$ は抵抗係数を表す。第 1 章の Navier–Stokes 方程式の結果の拡張として、流体の勾配と磁場の初期値があるソボレフ空間で十分小さいならば、3 次元滑らかな有界領域上 MHD 方程式の初期値・境界値問題の強解の一意存在を示す。Navier–Stokes 方程式 (INS) と比較して、強解の存在に必要な時間重み評価は、速度場と磁場の連立項や真空状態の現れること (運動方程式 $(\mathrm{MHD})_2$ の退化) がありうるので、さらに困難になる。初期値の小ささの仮定のおかげで、これらの困難を解消し、局所強解を大域的に拡張することができる。第 2 章の結果は学術雑誌で掲載した論文 [3] の第 1 部分である。

残り 3 つの章では、毛細流体の運動を記述する非一様非圧縮性 Navier–Stokes–Korteweg 方程式

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mathrm{div}(\mu(\rho)(\nabla u + (\nabla u)^T)) + \nabla P + \mathrm{div}(\kappa(\rho) \nabla \rho \otimes \nabla \rho) = 0, \\ \mathrm{div} u = 0, \end{cases} \tag{NSK}$$

について論じる。ここで $\kappa(\rho)$ は密度 ρ の関数である毛細係数を表す。圧縮性 Navier–Stokes–Korteweg 方程式の研究は多くあるが、非一様非圧縮 Navier–Stokes–Korteweg 方程式の研究に関してはほとんどない。近年、T.Wang[8] は密度と速度の初期値がある正則性と整合条件を満たせば、初期値・境界値問題に関して局所強解を構成した。以降、本論文で得られた (NSK) の結果を述べる。

第 3 章では、3 次元密度依存、真空になりうる Navier–Stokes–Korteweg 方程式 (NSK) に対する Serrin 型爆発判定条件を示す。密度と速度が $q > 3$ と $\frac{2}{s} + \frac{3}{r} \le 1, 3 < r \le \infty$ を満たす (r,s) に対し、$\|\nabla \rho\|_{L^\infty(0,T;W^{1,q})}$ $+\|u\|_{L^s(0,T;L^r_\omega)} < \infty$ を満たせば、密度依存 Navier–Stokes–Korteweg 方程式は $[0,T]$ 上大域的に解が存在する事を示した。ここで L^r_w は弱 L^r 空間を表す。第 3 章の結果は査読中論文 [5] にある。

第 3 章と似た計算を行い、2 次元密度依存 Navier–Stokes–Korteweg 方程式の強解の爆発判定条件を得る。すなわち、密度と速度が $q > 2$ と $\frac{2}{s} + \frac{2}{r} \le 1, 2 < r \le \infty$ を満たす (r,s) に対し、$\|\nabla \rho\|_{L^\infty(0,T;W^{1,q})} + \|u\|_{L^s(0,T;L^r_\omega)}$ $< \infty$ を満たせば、2 次元密度依存 Navier–Stokes–Korteweg 方程式は $[0,T]$ 上大域的に解が存在する事を示した。$\sup_{T>0}(\|\sqrt{\rho} u\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(0,T;L^2)})$ が有界という基本的なエネルギー評価は ρ が正下界を持つ時、$u \in L^4(0,T;L^4)$ を意味することに注意する。従って、第 3 章で示した判定条件は、密度 ρ がゼロでない時、密度に関する拡張となる。しかし、密度がゼロになる場合は未だ未解決である。これが第 4 章で取り組む主な問題である。Desjardin による補題と対数 Gronwall 不等式によって、第 4 章で $\mathbb{R}^2$ 滑らかな有界領域上真空になりうる密度依存型 Navier–Stokes–Korteweg 方程式の強解に対する新たな密度の項のみによる爆発判定条件を示す。第 4 章の結果は学術雑誌で印刷中論文 [4] の内容である。

第 3 章と第 4 章は有界領域上での流体の運動について論じた。次に関心があるのは、全空間 $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ といった非有界領域で流体の運動についてである。3 次元の初期値問題に対して、Galerkin 法、エネルギー法、領域拡張法によって、一般の初期値に対し、局所強解の一意存在を示すことは簡単である。ここで、T.Wang[8] の初期値・境界値問題の結果を用いる。しかし、これらの考えを 2 次元の場合に応用することは困難である。2 次元におけるソボレフの不等式は臨界であるので、速度 u の L^p ノルムを $\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ や $\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ の項のみで評価することはできない。P.L.Lions[7] による空間重み付きに関する補題に基づき、ある空間重みを持つ初期密度があるソボレフ空間に属せば、非一様 Navier–Stokes–Korteweg 方程式の強解の適切性を得る。第 5 章は、定数粘性と抵抗を持つ非一様非圧縮 Navier–Stokes–Korteweg 方程式の 2 次元初期値問題が、初期密度が無限遠であまりに遅い減衰でないならば、一意的な局所強解を持つ事を示す。第 5 章の結果はプレプリント [6] として投稿準備中である。

参考文献

[1] Q. Chen; Z. Tan; Y. J. Wang, *Strong solutions to the incompressible magnetohydrodynamic equations.* Math. Methods Appl. Sci. 34 (2011), no. 1, 94107.

[2] X. D. Huang; Y. Wang, *Global strong solution of 3D inhomogeneous Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity.* J. Differential Equations 259 (2015), no. 4, 1606-1627.

[3] H. Y. Li, *Global strong solution to the three dimensional nonhomogeneous incompressible magneto-hydrodynamic equations with density-dependent viscosity and resistivity*, Math. Methods Appl. Sci. 41 (2018), no. 8, 3062-3092.

[4] H. Y. Li, *A blow-up criterion for the density-dependent Navier-Stokes-Korteweg equations in dimension two.* (to appear in Acta Appl. Math.)

[5] H. Y. Li, *A blow-up criterion for the strong solution to the 3D nonhomogeneous Navier-Stokes-Korteweg equations.* (submitted)

[6] H. Y. Li, *On local strong solutions to the Cauchy problem of two-dimensional nonhomogeneous Navier-Stokes-Korteweg equations with vacuum.*(in preparation)

[7] P. L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 3. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996. xiv+237 pp.

[8] T. Wang, *Unique solvability for the density-dependent incompressible Navier-Stokes-Korteweg system.* J. Math. Anal. Appl. 455 (2017), no. 1, 606-618.

[9] J. W. Zhang, *Global well-posedness for the incompressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity coefficient.* J. Differential Equations 259 (2015), no. 5, 1722-1742.