

## 審査の結果の要旨

氏 名 李 煥元

本博士論文の目的は、流体力学のモデルである Navier-Stokes 方程式、磁気流体方程式、Navier-Stokes-Korteweg 方程式に対する初期値境界値問題の適切性を示すことである。流体の巨視的な運動則は質量保存則や運動量保存則のような物理学的な釣り合いの法則から導かれる偏微分方程式系で記述される。これら流体力学のモデルにおいて最も有名なものは、その重要性や数学的複雑さ及び幅広い応用の点から、多くの数学者と物理学者によって研究されている Navier-Stokes 方程式である。一般的に、古典的な流体力学は流体は非圧縮性か圧縮性により 2 つに分類される。この 2 つのモデルの中間の方程式である非定数である密度をもつ非一様非圧縮性 Navier-Stokes 方程式がある。流体は非圧縮であるが密度を未知変数とするその方程式は地球物理流体力学の理論で現れる。基本的な例は、非圧縮流と非反応流の合わさった流体や、血流のような複雑な構造を持つ流体、溶けた物質を含む海や川の流体などである。方程式は密度  $\rho$ 、速度  $u$  および圧力の方程式で、粘性係数  $\mu$  は  $\rho$  によっているとする。速度については発散なしを要請し、質量保存則、運動量保存則を要請する。こうして得られる非圧縮性非一様 Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題や初期値問題の適切性を強解（滑らかな解）の範囲で議論する。各章の結果を要約する。

第 1 章では、3 次元の滑らかな有界領域上で非一様 Navier-Stokes 方程式の初期値・境界値問題について論じる。近年、X. Huang-Y. Wang (2015) や J. Zhang (2015) は独立に、初期速度場の勾配  $\nabla u$  の  $L^2$  ノルムが十分小さい場合に、時間大域的強解の一意存在を示した。証明を改良することによりは別の条件の下でも、初期値・境界値問題が一意解を持つことを示した。特に、たとえ  $\nabla u$  の  $L^2$  ノルムが十分大きくても、運動エネルギーが小さいという仮定で十分であり、これは彼らの結果の拡張である。強調したい点は、X. Huang-Y. Wang (2015) や J. Zhang (2015) によって得られた本来の時間重み付きエネルギー評価は、初期運動エネルギーが十分小さいという仮定のみでは大域的強解の構成を行えない事にある。これらの困難を克服するために、本研究では異なる時間重みの冪を用い、より詳細な評価を併せて用いる。この解析の副産物として、真空となりうる非圧縮性

非一様 Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題もまた、粘性係数の下限が十分大きい、または密度の上限が十分小さいという仮定の下、大域的な強解をもつことを示すことに成功した。

第 2 章では、電磁場の影響下での非一様流体のモデルである磁気流体方程式について、その初期値問題を研究した。第 1 章の Navier-Stokes 方程式の結果の拡張として、流体の勾配と磁場の初期値があるソボレフ空間で十分小さいならば、3 次元滑らかな有界領域上磁気流体方程式の初期値境界値問題の強解の一意存在を示した。Navier-Stokes 方程式と比較して、強解の存在に必要な時間重み評価は、速度場と磁場の連立項や真空状態の現れることがありうるので、さらに困難になる。初期値の小ささの仮定のおかげで、これらの困難を解消し、局所強解を大域的に拡張した。

残り 3 つの章では、毛細流体の運動を記述する非一様非圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式について論じる。圧縮性 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の研究は多くあるが、非一様非圧縮 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の研究に関してはほとんどない。近年、T. Wang (2017) は密度と速度の初期値がある正則性と整合条件を満たせば、初期値・境界値問題に関して局所強解を構成した。第 3 章では、3 次元密度依存、真空になりうる Navier-Stokes-Korteweg 方程式に対する Serrin 型爆発判定条件を示す。また、2 次元密度依存 Navier-Stokes-Korteweg 方程式の強解の爆発判定条件を得た。第 5 章では全空間での問題を扱った。

このように、論文提出者 李煥元は非圧縮一様 Navier-Stokes 方程式を中心にその数学解析を大きく前進させたため、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。