論文審査の結果の要旨

氏名　小関直紀

論文提出者の小関直紀氏は博士課程において代数多様体上の安定層のモジュライ空間や、連接層の導来圏の Bridgeland 安定性条件について研究してきた。博士論文はパート I とパート II から成り立っている。パート I では安定層のモジュライ空間が元の代数多様体のブローアップによってどの様に変化するか研究し、パート II ではネフな接束を持つ 3 次元代数多様体上の Bridgeland 安定性条件の存在問題について研究した。

パート I の課題である射影的代数多様体上の安定層のモジュライ空間の幾何学に関する研究は、古典的な代数曲線上のヤコビアンの研究の延長線上にある重要な研究課題である。特に代数曲面上の安定層のモジュライ空間に関しては Donaldson 不変量との関係から多くの先行研究が存在する。2011 年頃、中島-吉岡は代数曲面上の安定層のモジュライ空間と、そのブローアップ上の安定層のモジュライ空間が「偏屈連接層」と呼ばれる連接層の導来圏の対象のモジュライ空間を通じてフリップ型の図式によって関連付けられることを示した。小関氏はパート I において、一般次元の滑らかな代数多様体とその余次元 2 の滑らかな部分代数多様体によるブローアップという設定の下で、中島-吉岡による結果が高次元の場合でも成立することを証明した。中島-吉岡の論文における議論は多くの部分で代数曲面であるという特殊事情を用いているため、その高次元化は非自明な問題である。小関氏は連接層の圏に新たな捩れ対を導入するというアイデアで高次元におけるこの困難を克服した。

小関氏が構成した高次元におけるフリップ型図式を具体的に計算すると、代数曲面の場合の中島-吉岡による図式には現れなかった新しい現象が存在する。実際小関氏は、パート I の主定理をモジュライ空間が 2 点の Hilbert スキームとなる場合に当てはめることで、ブローアップの前後での Hilbert スキームの関係を具体的に記述した。その結果、代数曲面でフリップだったものが高次元ではフロップや逆フリップになることを示し、高次元における新しい現象が存在することを示した。より一般には、中島-吉岡による代数曲面の場合の図式の各ファイバーがグラスマン多様体となる一方、小関氏による高次元の場合の図式のファイバーはある種の Quot スキームとなり、グラスマン多様体以外の空間が現れる。

小関氏はパート 2 において、3 次元代数多様体上の連接層の導来圏上の

Bridgeland 安定性条件の存在問題を研究した。Bridgeland 安定性条件はミラー対称性や双有理幾何学における重要な数学的対象であるが、その存在問題は非自明であり、３次元以上では未解決の問題である。2011 年頃に Bayer-Macri-Toda は 3 次元における Bridgeland 安定性条件の存在問題を 3 次元代数多様体上の tilt-半安定な 2 項複体の Chern 数を評価する Bogomolov-Gieseker (BG) 型不等式予想に帰着した。この BG 型不等式予想はこれまでファノ多様体やアーベル多様体といった特殊な 3 次元代数多様体についてしか知られておらず、この不等式予想が成立する 3 次元代数多様体の例を見つけるだけでも重要な貢献となる。小関氏はパート 2 においてネフな接束を持つ全ての 3 次元代数多様体について BG 型不等式予想が成立することを証明した。証明はまず、接束がネフである 3 次元代数多様体の Campana-Peternell の分類を用い、それらの内の特別なものが非自明な自己射を持つことを示すことから始まる。上記の自己射を持つものに関しては、従来までのファノ多様体やアーベル多様体の場合の証明に使われた自己射の引き戻しによる議論を巧妙に組み合わせることで BG 不等式予想を証明している。そして一般の場合には、近年 Bayer 氏らによって導入されている t-構造の退化理論を用いて上述の自己射を持つ場合に帰着するという斬新なアイデアで証明している。

小関氏の以上のパート１、２における結果は、高次元代数多様体上の連接層の導来圏における安定対象のモジュライ空間の幾何学という未発展の分野における先駆的な仕事であると考えられ、大変重要なものである。以上より、論文提出者である小関直紀氏は博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があるものと認める。