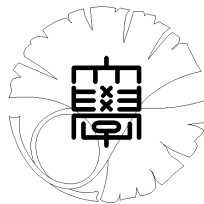


数理科学実践研究レター 2021-5 August 25, 2021

変換光学によるメタマテリアルのデザイン

by

福嶋 翔太



**UNIVERSITY OF TOKYO**

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

# 変換光学によるメタマテリアルのデザイン

福島翔太<sup>1</sup> (東京大学大学院数理科学研究科)

Shota Fukushima (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

## 概要

媒質の誘電率や透磁率をうまくコントロールすることで自然界の物質ではありえないような光の挙動を実現することができる。このように通常の物質ではありえない挙動を実現する構造物をメタマテリアルと呼ぶ。本論文では変換光学を用いて目的の光の挙動を実現するために誘電率・透磁率をどのように設定するかを計算する方法を述べる。その応用として「透明マント」のような振る舞いをする cloaking という現象を考察する。

## 1 はじめに

メタマテリアルとは、自然界の物質ではありえないような挙動を実現する構造物である。本論文で扱うのは誘電率や透磁率をコントロールして作るメタマテリアルである。目的の光、すなわち電磁波の挙動を実現するためには非一様かつ非等方的な誘電率や透磁率をもつ媒質を想定する必要があるが、一般にそのような媒質の中で電磁場を解析することは困難であるため、誘電率や透磁率をどのように設定すればよいかを考えることも困難である。

本論文では非一様かつ非等方的な誘電率や透磁率をもつ媒質を扱う方法の一つである変換光学 (transformation optics) を紹介する。これは媒質中の電磁場を微分同相によって曲がった空間における真空中の電磁場に変換して解析するという方法である [1]。第 2 章で変換光学の概要を述べた後、第 3 章で具体的に円筒形の媒質に変換光学を適用する。

第 4 章では変換光学の応用として cloaking を実現するための誘電率・透磁率の計算を行う。Cloaking とは、「透明マント」のように、中にある物体を見えなくするがその背後にあるものは何もなかったかのようにそのまま見えるという現象である [2]。Cloaking を応用することで、例えば設計上必要な物体を存在させつつ、それによる視野の阻害を防止するといったことが可能になる。本論文で計算された誘電率・透磁率を持つ媒質が実際に cloaking を実現するかどうかを電磁波の方程式の解析によって証明することはまだできていないが、幾何光学的な考察によって媒質の妥当性のある程度議論することができる。

## 2 変換光学

本節では変換光学を Riemann 幾何学を用いて定式化する。

### 2.1 媒質中の Maxwell 方程式

定義 1.  $U$  を 3 次元 Euclid 空間における開集合とする。

- 電場  $E$  とは  $U$  上の微分 1 形式、磁束密度  $B$  とは  $U$  上の微分 2 形式のことである。
- 誘電率  $\varepsilon$  とはファイバー束  $GL(T^*U)$  の切断であり、透磁率  $\mu$  とはファイバー束  $GL(\wedge^2 T^*U)$  の切断のことである。
- 誘電率  $\varepsilon$ 、透磁率  $\mu$  を持つ媒質のことを単に媒質  $(\varepsilon, \mu)$  と呼ぶ。

誘電率・透磁率のいずれも座標をとることで正則行列に値をとる関数であるとみなすこともできる。

注. 本論文における誘電率・透磁率の扱いは他の文献と異なる。例えば [1] では、誘電率および透磁率をファイバー束  $\text{Hom}(T^*U, \wedge^2 T^*U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  の切断とみなしている。しかし Hodge の星型作用素を通じて両者の扱いは等価なので特に問題はない。

<sup>1</sup>fukushima@ms.u-tokyo.ac.jp

$d$  を外微分とし,  $d^*$  をその形式的共役とする.

媒質  $(\varepsilon, \mu)$  における Maxwell 方程式とは時間に依存する電磁場  $(E(t, x), B(t, x))$  の満たす微分方程式

$$\begin{cases} dB = 0, \\ \partial_t B = -dE, \\ \varepsilon \partial_t E = -d^*(\mu^{-1}B), \\ d^*(\varepsilon E) = 0 \end{cases}$$

である.

## 2.2 Riemann 多様体上の Maxwell 方程式

$(M, g)$  を Riemann 多様体とする. Euclid 空間の場合と同様に, 電場とは  $M$  上の微分 1 形式, 磁束密度とは  $M$  上の微分 2 形式のことである.  $d$  を  $M$  上の外微分,  $d_g^*$  を Riemann 計量  $g$  に関する  $d$  の形式的共役とする. Riemann 多様体  $(M, g)$  における真空中の Maxwell 方程式は

$$\begin{cases} dB = 0, \\ \partial_t B = -dE, \\ \varepsilon_0 \partial_t E = \mu_0^{-1} d_g^* B, \\ d_g^* E = 0 \end{cases}$$

である. ここで  $\varepsilon_0 > 0$  は真空中の誘電率であり,  $\mu_0 > 0$  は真空中の透磁率である. 電磁場  $(E, B)$  が  $(M, g)$  における真空中の Maxwell 方程式を満たすならばそれらは微分形式に対する波動方程式を満たす. 実際, Laplacian の定義  $\Delta_g = dd_g^* + d_g^*d$  と Maxwell 方程式によって

$$\partial_t^2 E = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1} \partial_t d_g^* B = -(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1} d_g^* dE = -(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1} \Delta_g E,$$

$$\partial_t^2 B = -\partial_t dE = -(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1} dd_g^* B = -(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1} \Delta_g B$$

と計算できるからである.

## 2.3 変換媒質

以上の準備の下で, 変換媒質を定義する.

**定義 2.**  $U \subset \mathbb{R}^3$  を開集合とする.  $U$  上の媒質  $(\varepsilon, \mu)$  が変換媒質 (transformation medium) であるとは, ある Riemann 多様体  $(M, g)$  と微分同相  $f: U \rightarrow M$  であって, 次の二つが同値となるようなものが存在することである.

- (i)  $U$  上の電磁場  $(f^*E, f^*B)$  が媒質  $(\varepsilon, \mu)$  における Maxwell 方程式を満たす.
- (ii)  $M$  上の電磁場  $(E, B)$  が  $(M, g)$  における真空中の Maxwell 方程式を満たす.

## 3 円筒形の媒質

$U$  として 3 次元空間から半径  $a$  の円柱を抜いた図形

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > a^2\}$$

を考える. ここでは  $U$  上の変換媒質を構成する方法を考える.  $U$  に円筒座標  $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$  を導入する. 誘電率  $\varepsilon$ , 透磁率  $\mu$  はそれぞれ電場  $E = E_r dr + E_\theta d\theta + E_z dz$  および磁束密度  $B = B_r d\theta \wedge dz + B_\theta dz \wedge dr + B_z dr \wedge d\theta$  に対して

$$\varepsilon E = \varepsilon_r E_r dr + \varepsilon_\theta E_\theta d\theta + \varepsilon_z E_z dz,$$

$$\mu^{-1} B = \mu_r^{-1} B_r d\theta \wedge dz + \mu_\theta^{-1} B_\theta dz \wedge dr + \mu_z^{-1} B_z dr \wedge d\theta$$

と作用するものとする. ここで  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \mu_r, \mu_\theta, \mu_z$  は  $U$  上の関数であるから場所によってその値は異なりうる.

$(M, g)$  を Riemann 多様体とし, 微分同相  $f: U \rightarrow M$  による  $M$  上の計量  $g$  の引き戻しが

$$f^*g(r, \theta, z) = \alpha(r)^2 dr^2 + \beta(r)^2 d\theta^2 + dz^2$$

という形をしているとする. ただし  $\alpha(r), \beta(r)$  はなめらかな正値関数である. 微分同相  $f$  として, 微分同相  $\psi: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  によって円筒座標系を用いて

$$f(r, \theta, z) = (\psi(r), \theta, z)$$

と表されるもの考える.

**定理 3.** 媒質  $(\varepsilon, \mu)$  の誘電率・透磁率が

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} = \frac{\mu_r}{\mu_0} = \frac{\beta}{\alpha r}, \quad \frac{\varepsilon_\theta}{\varepsilon_0} = \frac{\mu_\theta}{\mu_0} = \frac{\alpha r}{\beta}, \quad \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0} = \frac{\mu_z}{\mu_0} = \frac{\alpha\beta}{r} \quad (1)$$

で与えられているとする. このとき次は同値である.

- (i)  $U$  上の電磁場  $(f^*E, f^*B)$  が媒質  $(\varepsilon, \mu)$  における Maxwell 方程式を満たす.
- (ii)  $M$  上の電磁場  $(E, B)$  が  $(M, g)$  における真空中の Maxwell 方程式を満たす.

したがって, 式 (1) で与えられる媒質は変換媒質である.

**証明** 外微分と引き戻しは可換だから,  $dB = 0$  と  $d(f^*B) = 0$  は同値であり,  $\partial_t B = -dE$  と  $\partial_t(f^*B) = -d(f^*E)$  は同値である.

$f^*g = h$  とおき,  $U$  上の計量  $h$  に関する外微分の形式的共役を  $d_h^*$  と書く. まずは誘電率テンソルを計算する.  $f^*E = \tilde{E}_r dr + \tilde{E}_\theta d\theta + \tilde{E}_z dz$  に対して

$$\begin{aligned} d_h^*(f^*E) &= \frac{1}{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\beta \tilde{E}_r}{\alpha} \right) + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \tilde{E}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial z} \\ &= \frac{\varepsilon_0 r}{\alpha\beta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon_r r \tilde{E}_r) + \frac{\varepsilon_\theta}{r^2} \frac{\partial \tilde{E}_\theta}{\partial \theta} + \varepsilon_z \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0 r}{\alpha\beta} d^*(f^*E) \end{aligned}$$

であり,  $\varepsilon_0 r / \alpha\beta > 0$  だから  $d_h^*(f^*E) = 0$  と  $d^*(f^*E) = 0$  は同値である.  $d_h^*(f^*E) = f^*d_g^*E$  だから  $d_g^*E = 0$  と  $d^*(f^*E) = 0$  は同値である.

次に  $f^*B = \tilde{B}_r d\theta \wedge dz + \tilde{B}_\theta dz \wedge dr + \tilde{B}_z dr \wedge d\theta$  に対し

$$\begin{aligned} d_h^*(f^*B) &= \left( \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \tilde{B}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{B}_\theta}{\partial z} \right) dr + \left( \frac{\partial \tilde{B}_r}{\partial z} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\tilde{B}_z}{\alpha\beta} \right) \right) d\theta + \left( \frac{1}{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\beta \tilde{B}_\theta}{\alpha} \right) - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \tilde{B}_r}{\partial \theta} \right) dz \\ &= \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon_r} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\mu_z^{-1} \tilde{B}_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial (\mu_\theta^{-1} \tilde{B}_\theta)}{\partial z} \right) dr + \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon_\theta} \left( \frac{\partial (\mu_r^{-1} \tilde{B}_r)}{\partial z} - r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\tilde{B}_z}{\mu_z r} \right) \right) d\theta \\ &\quad + \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon_z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \tilde{B}_\theta}{\mu_\theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\mu_r^{-1} \tilde{B}_r)}{\partial \theta} \right) dz \end{aligned}$$

である。一方

$$d^*(\mu^{-1}f^*B) = \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\mu_z^{-1}\tilde{B}_z)}{\partial\theta} - \frac{\partial(\mu_z^{-1}\tilde{B}_\theta)}{\partial z} \right) dr + \left( \frac{\partial(\mu_r^{-1}\tilde{B}_r)}{\partial z} - r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\tilde{B}_z}{\mu_z r} \right) \right) d\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r\tilde{B}_\theta}{\mu_\theta} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\mu_r^{-1}\tilde{B}_r)}{\partial\theta} \right) dz$$

であるから

$$d_h^*(f^*B) = \varepsilon_0\mu_0\varepsilon^{-1}d^*(\mu^{-1}f^*B)$$

である。よって  $\varepsilon_0\partial_t(f^*E) = \mu_0^{-1}d_h^*(f^*B)$  と  $\partial_t(\varepsilon f^*E) = d^*(\mu^{-1}f^*B)$  は同値である。  $d_h^*(f^*B) = f^*d_g^*B$  だから  $\varepsilon_0\partial_t E = \mu_0^{-1}d_g^*B$  と  $\varepsilon_0\partial_t(f^*E) = \mu_0^{-1}d^*(f^*B)$  は同値である。 □

## 4 具体例

### 4.1 Cloaking device

$M = \mathbb{R}^3 \setminus (z \text{ 軸})$ ,  $g = dr^2 + r^2d\theta^2 + dz^2$  (円筒座標) とし,  $b > a$  とする。

$$f(r, \theta, z) = \begin{cases} (b(r-a)/(b-a), \theta, z) & \text{if } a < r < b, \\ (r, \theta, z) & \text{if } r \geq b \end{cases}$$

とする。  $f$  は滑らかではないが,  $a < r < b$  の領域と  $r > b$  の領域のそれぞれで媒質の誘電率・透磁率を計算することはできる。  $a < r < b$  においては

$$f^*g(r, \theta, z) = \left( \frac{b}{b-a} \right)^2 dr^2 + \left( \frac{b(r-a)}{b-a} \right)^2 d\theta^2 + dz^2$$

だから定理 3 より

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} = \frac{\mu_r}{\mu_0} = \frac{r-a}{r}, \quad \frac{\varepsilon_\theta}{\varepsilon_0} = \frac{\mu_\theta}{\mu_0} = \frac{r}{r-a}, \quad \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0} = \frac{\mu_z}{\mu_0} = \left( \frac{b}{b-a} \right)^2 \frac{r-a}{r}$$

である。この式から, cloaking を実現するには非一様かつ非等方的な媒質を作る必要があることが見て取れる。  $r > b$  においては定理 3 より  $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \varepsilon_0$ ,  $\mu_r = \mu_\theta = \mu_z = \mu_0$  である。この媒質中の電磁波と多様体中の電磁波を幾何光学的に比べてみると図 1 のようになる。左側の図で矢印(光線)が中央の穴を避けるようにして進んでいるということが cloaking が起きているということである。中央の穴に隠したい物体を入れれば物体を隠しつつ背景を見せることができる。

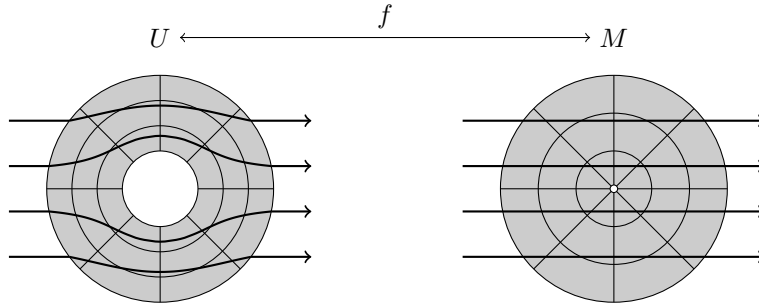


図 1: Cloaking device. 右側の図における矢印は測地線(直線)であり, 真空中の光線を表す。左側の図における矢印は右側の図における矢印を微分同相  $f$  によって引き戻したものである。

[2] においてこのような挙動をする媒質が実現されている。

## 4.2 Regular cloaking

前節で求めた媒質には、次の二つの問題がある。

- (i) 対応する Riemann 多様体が完備でないため、電磁場の解析が困難である。
- (ii)  $r \rightarrow a$  の極限で  $\varepsilon_r \rightarrow 0$  となるが、誘電率が小さい物質をつくるのは難しい。

この問題を解決する方法の一つとして、次の変換を考える。まず  $M = \mathbb{R} \times S^1 \times \mathbb{R}$  とし、Riemann 計量  $g$  は、なめらかな正値関数  $\lambda(s)$  を用いて

$$g(s, \theta, z) = ds^2 + \lambda(s)^2 d\theta^2 + dz^2$$

の形で与える。  $\lambda(s)$  はある  $\delta > 0$  に対して

$$\lambda(s) = \begin{cases} s & \text{if } s > \delta, \\ s^2 & \text{if } s < -\delta^{-1} \end{cases}$$

を満たしているとする。この Riemann 計量  $g$  は完備である。微分同相  $f : U \rightarrow M$  は  $f(r, \theta, z) = (\psi(r), \theta, z)$  の形をしていて、  $\psi(r)$  はある  $0 < \delta' < (b-a)/2$  に対して

$$\psi(r) = \begin{cases} -1/(r-a) & \text{if } a < r < a + \delta', \\ b(r-a)/(b-a) & \text{if } a + \delta' < r < b - \delta', \\ r & \text{if } r > b + \delta' \end{cases}$$

を満たしているとする。この変換による幾何光学的な対応は図 2 のようになる。

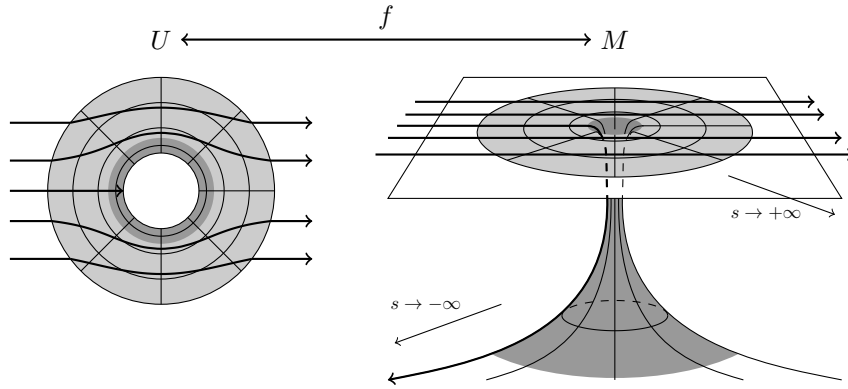


図 2: Regular cloaking device. 左側の図では途中で止まっているように見える矢印でも、右側の図では無限の長さに伸びている (完備性)。

$r = a$  付近では

$$f^*g(r, \theta, z) = \frac{dr^2}{(r-a)^4} + \left( \frac{b}{(b-a)(r-a)} \right)^4 d\theta^2 + dz^2$$

である。よって定理 3 を用いて  $r = a$  付近の誘電率・透磁率を計算すると

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} = \frac{\mu_r}{\mu_0} = \frac{b^2}{(b-a)^2 r}, \quad \frac{\varepsilon_\theta}{\varepsilon_0} = \frac{\mu_\theta}{\mu_0} = \frac{(b-a)^2 r}{b^2}, \quad \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0} = \frac{\mu_z}{\mu_0} = \frac{1}{(b-a)^2 r (r-a)^4}$$

となる。この変換媒質は  $r \rightarrow a$  で 0 に収束するような成分を持たない。

## 5 まとめと今後の課題

本論文で紹介したように, 変換光学によって非一様・非等方的な媒質を扱うことができ, 逆に目的に応じて必要な誘電率・透磁率を計算することができる. 本論文では円筒形の媒質のみを扱ったが, 他の形状の媒質を扱う上でも応用が期待できる. さらに, 可視光に限らず様々な波長を持つ電磁波に対する応用も期待される.

一方で, 計算で得られた誘電率・透磁率をもつ媒質が実際に目的の挙動をするかどうかはまだ数学的にはわかっていない. 考えられる解決法として散乱理論の応用が挙げられる. これは知りたい波動の挙動を既知の波動と比べて調べるという方法である. 今回の場合, 知りたい波動は媒質中の電磁波あるいは対応する多様体上の電磁波であり, 既知の波動は媒質が無い状態での電磁波である. この対応関係をうまく散乱理論に落とし込めば媒質中の電磁波と媒質がない状態での電磁波を比較できると考えられる. このような媒質の有無による電磁波の挙動の比較は今後の課題である.

## 謝辞

本研究の課題提供および有意義な議論を下さった日産自動車株式会社三浦進氏, また積極的に本テーマについて議論を下さった東京大学金井雅彦先生, 間瀬崇史先生, 佐藤謙氏, 高瀬裕志氏, 岡本潤氏, 関澤昊氏に感謝する. 本論文の著者は東京大学数物フロンティア・リーディング大学院プログラム (FMSP) による助成を受けている.

## 参考文献

- [1] U. Leonhardt, T. G. Philbin, General relativity and electrical engineering, *New J. Phys.* **8** (2006), 247.
- [2] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, D. R. Smith, Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies, *SCIENCE VOL 314* 10 NOVEMBER (2006).