数理科学実践研究レター　2021–7 August 25, 2021

クローキングと波動方程式のコーシー問題の非一意性

by

髙瀬 裕志

UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

クローキングと波動方程式のコーシー問題の非一意性

髙瀬裕志[1]（東京大学大学院数理科学研究科）
Hiroshi Takase (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概 要

クローキングという現象をポテンシャル項付き波動方程式のコーシー問題の非一意性と関連付け，2 次元空間における非一意解の具体的な構成を考える．1963 年の Kumano-go による構成を拡張し，遠方でそれぞれ波数の異なる無限個の非一意解を構成できることを示す．

1 はじめに

クローキングとはある対象の周りの有界な領域において媒質を変化させることで光の進行を曲げ，外部からの光が伝播しない見えないゾーンを作り出すことでその対象を不可視化することである (図 1)．偏微分方程式論において媒質の変化はしばしば低階項であるポテンシャルとして定式化される．見えないゾーンにおいてはそのポテンシャルの影響により外部からの光が伝播しない状況を，ポテンシャル項付き波動方程式のコーシー問題を通して理解する．

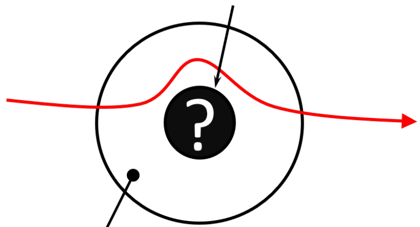

図 1: クローキングの模式図

このクローキング現象を数学的に理解するため，次の問題を考える．ただし $r > 0$ に対し $B_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < r\}$ とおき，関数は全て複素数値をとるものとし，$\Box := \partial_t^2 - \Delta$ とする．

問題 1 $\operatorname{supp} u = (\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)) \times \mathbb{R}$ かつ $\operatorname{supp} V \subset (B_2(0) \setminus B_1(0)) \times \mathbb{R}$ を満たす滑らかな関数 $u = u(x,t)$ と $V = V(x,t)$ で

$$\Box u + V(x,t)u = 0,\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \tag{1.1}$$

を満たすものが存在するか．

ここで u は光，V は媒質の変化を意味するポテンシャルである．したがって問題 1 は，領域 $(B_2(0) \setminus B_1(0)) \times \mathbb{R}$ においてのみ媒質 V を変化させ，$B_1(0) \times \mathbb{R}$ が外部からの光が伝播しない領域 (つまり $B_1(0) \times \mathbb{R}$ において $u \equiv 0$) となるような，ポテンシャル項付き波動方程式 (1.1) をみたす複素数値関数の組 (u, V) が存在するかどうかを問う問題である．この問題は波動方程式 (1.1) のコーシー問題に対する非一意解の存在問題と同等であり，例えば V が変数 t に関して解析的であれば，このような u は存在しない (つまり局所的な一意性が従う) ことが知られている (e.g., Robbiano–Zuily [3]，Tataru [6])．一般の偏微分方程式のコーシー問題に対する非一意解の構成については Zuily [7] にまとめられているが，中でも波動方程式に関する具体的な非一意解の構成は Kumano-go [2] や Alinhac–Baouendi [1] によってなされている．本レターでは Kumano-go [2] による構成方法を一般化し，問題 1 に対し遠方でそれぞれ波数の異なる無限個の非一意解 (u, V) の構成を実現する．

[1] htakase@ms.u-tokyo.ac.jp

2 非一意解の構成

2.1 主定理

定理 2 (1.1) を満たす複素数値関数 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ と $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ で，次を満たすものが無限個存在する*:*

$$\operatorname{supp} u = (\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)) \times \mathbb{R},$$
$$\operatorname{supp} V \subset (B_2(0) \setminus B_1(0)) \times \mathbb{R}.$$

定理 2 は，問題 1 に対しクローキング現象が起こる光 u と媒質の変化 V のペアが無限個存在することを主張している．さらに 2.2 節で示す具体的な構成から分かるように，これら無限個の光 u は遠方でそれぞれ波数が異なるという点において区別される．証明は以下の補題を組み合わせて具体的に解を構成することで達成される．補題の証明は本レターでは省略するが，[5] を参照されたい．

補題 3 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $p \in (0, \frac{2(1-2\delta)}{5})$, $\lambda > 0$ を定数とし，J_λ を位数 λ のベッセル関数とする．このとき $a \in (0, 1-\lambda^{-p}]$ について一様な次の漸近公式を得る*:*

$$J_\lambda(\lambda a) = (2\pi\lambda \tanh\alpha)^{-\frac{1}{2}} e^{\lambda(\tanh\alpha - \alpha)}(1 + O(\lambda^{-\delta})) \ \textit{as}\ \lambda \to \infty.$$

ただし $\alpha > 0$ は $\cosh\alpha = a^{-1} (> 1)$ で定義される定数とする．

$\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $p \in (0, \frac{2(1-2\delta)}{5})$ を定数とする．次を満たす正値数列 $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を考える．

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m^2 \le \lambda_m^p. \tag{2.1}$$

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m(1 + o(1)) \text{ as } m \to \infty. \tag{2.2}$$

(2.1) 及び (2.2) を満たす正値数列 $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ の例として，例えば次がとれる:

$$\lambda_m := a_n m^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j m^j.$$

ただし $n \ge \frac{2}{p}$ は自然数で $a_n \ge 1$, $a_j \ge 0$ $(j = 0, \dots, n-1)$ は定数とする．

補題 4 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $p \in (0, \frac{2(1-2\delta)}{5})$ を定数とし，$\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を正値数列とする．

$$G_m(r) := J_{\lambda_m}(\lambda_m r),\ r \in [0, 1 - m^{-2}]$$

とおき，(2.1) を仮定する．このとき $\ell \ge 1$ と $r := 1 - \ell m^{-2}$ に対し，次の漸近公式が成立する*:*

$$G_m(r) = (1 + o(1)) \frac{\sqrt{m}}{(2\pi^2\ell)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\lambda_m}} e^{-(1+o(1))\frac{2\sqrt{2}}{3}\ell^{\frac{3}{2}}\lambda_m m^{-3}} \ \textit{as}\ m \to \infty.$$

補題 5 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ と $p \in (0, \frac{2(1-2\delta)}{5})$ を定数とし，$\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を (2.1) を満たす正値数列とする．$\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を

$$\frac{k_m}{\lambda_m} = 1 - \frac{1}{m} + O(m^{-3}) \ \textit{as}\ m \to \infty \tag{2.3}$$

を満たす正値数列とし，$s \in [0, 1]$ に対し $r_m(s) := 1 + \frac{1}{m} - \frac{s}{m(m+1)}$ とおく．さらに

$$F_m(r) := G_m\left(\frac{k_m}{\lambda_m} r\right),\ m \in \mathbb{N}$$

とする．このとき F_m は

$$F_m''(r) + \frac{1}{r}F_m'(r) + \left(k_m^2 - \frac{\lambda_m^2}{r^2}\right)F_m(r) = 0 \tag{2.4}$$

を満たし，さらに $s \in [0,1]$ に対し

$$F_m(r_m(s)) = (1+o(1))\frac{\sqrt{m}}{(2\pi^2(1+s))^{\frac{1}{4}}\sqrt{\lambda_m}} e^{-(1+o(1))\frac{2\sqrt{2}}{3}(1+s)^{\frac{3}{2}}\lambda_m m^{-3}} \ as\ m \to \infty \tag{2.5}$$

が成り立つ．さらに γ_{m+1} を

$$\gamma_{m+1} := \frac{F_m(r_{m+1}(2^{-1}))}{F_{m+1}(r_{m+1}(2^{-1}))}$$

と定めると，(2.2) を仮定すればある $M \in \mathbb{N}$ が存在して全ての $m > M$ に対し

$$\gamma_{m+1} \leq e^{-\lambda_m m^{-3}}$$

が成り立ち，さらに $\mu > 0$ と $C > 0$ が存在して全ての $m > M$ に対し

$$\begin{cases} \gamma_{m+1}F_{m+1}(r_{m+1}(s)) \leq Ce^{-\mu\lambda_m m^{-3}}F_m(r_{m+1}(s)), & s \in [0, \frac{1}{4}], \\ F_m(r_{m+1}(s)) \leq Ce^{-\mu\lambda_m m^{-3}}\gamma_{m+1}F_{m+1}(r_{m+1}(s)), & s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} \tag{2.6}$$

が成り立つ．

2.2 定理 2 の証明

証明 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ と $p \in (0, \frac{2(1-2\delta)}{5})$ を定数とし，$\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を (2.1), (2.2) を満たす正値数列とする．(2.2) は

$$\lambda_m \leq e^{o(m)} \text{ as } m \to \infty \tag{2.7}$$

を導くことに注意する．$r > 1$ に対し

$$u_m(r,\theta,t) := F_m(r)e^{i(\lambda_m\theta + k_m t)}$$

とおく．ただし $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ は (2.3) を満たす正値数列で，(r,θ) は $\mathbb{R}^2$ の極座標とする．ラプラシアン Δ の極座標表示

$$\Delta = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\theta^2$$

と (2.4) により

$$\Box u_m = 0$$

が成り立つ．$m \in \mathbb{N}$ と $j = 1,2,3,4$ に対し閉区間 I_m, $I_{m,j} \subset I_m$ を

$$I_m := \left[1 + \frac{1}{m+1}, 1 + \frac{1}{m}\right], \quad I_{m,j} := \left[1 + \frac{1}{m} - \frac{j}{4m(m+1)}, 1 + \frac{1}{m} - \frac{j-1}{4m(m+1)}\right]$$

と定める．十分大きな $M \in \mathbb{N}$ と $m > M$ に対し，滑らかな関数 A_M, A_m を

$$A_M(r) := \begin{cases} 1, & r \geq 1 + \dfrac{1}{M+2} + \dfrac{1}{4(M+1)(M+2)}, \\ 0, & 0 \leq r \leq 1 + \dfrac{1}{M+2}, \end{cases}$$

$$A_m(r) := \begin{cases} 1, & r \in (I_{m+1} \setminus I_{m+1,4}) \cup (I_m \setminus I_{m,1}), \\ 0, & r \in \left[0, 1 + \dfrac{1}{m+2}\right] \cup \left(1 + \dfrac{1}{m}, \infty\right) \end{cases}$$

とおく．$u = u(r,\theta,t)$ を

$$u(r,\theta,t) := A_M(r)u_M + \sum_{m=M+1}^{\infty} \gamma_{M+1} \times \cdots \times \gamma_m A_m(r) u_m$$

と定め，さらに

$$V(r,\theta,t) := \begin{cases} 0, & r \in K := [0,1] \cup \left[1 + \dfrac{1}{M+1}, \infty\right) \cup \displaystyle\bigcup_{m=M+1}^{\infty} (I_{m,2} \cup I_{m,3}), \\ -\dfrac{\Box u}{u}, & r \in [0,\infty) \setminus K \end{cases}$$

と定める．(2.5) と (2.7) から，$r \in I_m$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\begin{aligned} \left|\frac{d^\ell}{dr^\ell} F_m(r)\right| &= m^\ell (m+1)^\ell \left|\frac{d^\ell}{ds^\ell} F_m(r_m(s))\right| \\ &\leq C_\ell \frac{m^\ell (m+1)^\ell \lambda_m^\ell}{m^{3\ell}} (1+o(1)) \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\lambda_m}} e^{-(1+o(1))\frac{2\sqrt{2}}{3}(1+s)^{\frac{3}{2}}\lambda_m m^{-3}} \\ &\leq C_\ell e^{o(m)} F_m(r_m(s)). \end{aligned}$$

$r \in I_{m+1}$ に対し，$r_{m+1}(s) = r_m(1+s+O(m^{-1}))$ によりさらに

$$\begin{aligned} \left|\frac{d^\ell}{dr^\ell} F_m(r)\right| &= (m+1)^\ell (m+2)^\ell \left|\frac{d^\ell}{ds^\ell} F_m(r_{m+1}(s))\right| \\ &= (m+1)^\ell (m+2)^\ell \left|\frac{d^\ell}{ds^\ell} F_m(r_m(1+s+O(m^{-1})))\right| \\ &\leq C_\ell \frac{(m+1)^\ell (m+2)^\ell \lambda_m^\ell}{m^{3\ell}} (1+o(1)) \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\lambda_m}} e^{-(1+o(1))\frac{2\sqrt{2}}{3}(2+s+O(m^{-1}))^{\frac{3}{2}}\lambda_m m^{-3}} \\ &\leq C_\ell e^{o(m)} F_m(r_{m+1}(s)). \end{aligned}$$

したがって $r \in I_m \cup I_{m+1}$ と $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\left|\frac{d^\ell}{dr^\ell} F_m(r)\right| \leq C_\ell e^{o(m)} F_m(r). \tag{2.8}$$

I_{m+1} 上において (2.8), (2.3), (2.7), (2.1) から

$$\begin{aligned} |\partial^\beta u(r,\theta,t)| &:= \left|\sum_{|\beta|=\ell} (\partial_r \partial_\theta \partial_t)^\beta u(r,\theta,t)\right| \\ &\leq C_\ell \gamma_{M+1} \times \cdots \times \gamma_m \lambda_m^{2\ell} e^{o(m)} (F_m + \gamma_{m+1} F_{m+1}) \\ &\leq C_\ell e^{-\lambda_m m^{-3}} e^{o(m)} \\ &< C_\ell e^{-m^2(1+o(m^{-1}))} \\ &\leq C_\ell e^{-\frac{1}{2}m^2} \\ &\leq C_\ell e^{-\frac{1}{2}((r-1)^{-1}-2)^2} \xrightarrow{r \searrow 1} 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

を得る．ただし (2.1) から得られる以下の不等式

$$\lambda_m m^{-3} \geq m^{\frac{2}{p}-3} > m^2 \tag{2.10}$$

を用いた．以上により u が $\mathbb{R}^3$ において滑らかであることが示せた．

さらに $I_{m+1,1}$ において $s \in [0, \frac{1}{4}]$ に対し (2.6) と (2.10) により

$$\begin{aligned} |u| &\geq \gamma_{M+1} \times \cdots \times \gamma_m (|u_m| - \gamma_{m+1}|u_{m+1}|) \\ &= \gamma_{M+1} \times \cdots \times \gamma_m (F_m(r_{m+1}(s)) - \gamma_{m+1} F_{m+1}(r_{m+1}(s))) \\ &\geq \gamma_{M+1} \times \cdots \times \gamma_m (1 - Ce^{-\mu\lambda_m m^{-3}}) F_m(r_{m+1}(s)) \\ &\geq \gamma_{M+1} \times \cdots \times \gamma_m (1 - Ce^{-\mu m^2}) F_m(r_{m+1}(s)) > 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

が成立するので $I_{m+1,1}$ 上で $|u|>0$. 同様にして $I_{m+1,4}$ 上でも $s\in[\frac{3}{4},1]$ に対し

$$\begin{aligned}|u| &\geq \gamma_{M+1}\times\cdots\times\gamma_m(\gamma_{m+1}|u_{m+1}|-|u_m|) \\ &= \gamma_{M+1}\times\cdots\times\gamma_m(\gamma_{m+1}F_{m+1}(r_{m+1}(s))-F_m(r_{m+1}(s))) \\ &\geq \gamma_{M+1}\times\cdots\times\gamma_{m+1}(1-Ce^{-\mu\lambda_m m^{-3}})F_{m+1}(r_{m+1}(s)) \\ &\geq \gamma_{M+1}\times\cdots\times\gamma_{m+1}(1-Ce^{-\mu m^2})F_{m+1}(r_{m+1}(s))>0\end{aligned} \tag{2.12}$$

なので，$I_{m+1,4}$ 上で $|u|>0$. $I_{m+1,2}\cup I_{m+1,3}$ 上で $\Box u=0$ だから，u の定義により $r\in(1,\infty)$ において V は滑らかである.

最後に，$r=1$ において V が滑らかであることを示す．$I_{m+1,1}$ 上において，$\Box u=\Box[\gamma_{M+1}\times\cdots\times\gamma_{m+1}A_{m+1}u_{m+1}]$ だから $|\beta|=\ell\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ に対して (2.8) より

$$|\partial^\beta\Box u|\leq C_\ell\gamma_{M+1}\times\cdots\times\gamma_{m+1}\lambda_m^{2\ell+2}e^{o(m)}F_{m+1}(r). \tag{2.13}$$

したがって $|\beta|=\ell\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ に対し (2.9), (2.11), (2.13), (2.6), (2.10) により

$$\begin{aligned}|\partial^\beta V(r,\theta,t)| &= \left|\partial^\beta(u^{-1}\Box u)\right| = \left|\sum_{|\beta_1|\leq\ell}\binom{\beta}{\beta_1}\partial^\beta(u^{-1})\partial^{\beta-\beta_1}(\Box u)\right| \\ &\leq C_\ell\left(\frac{\gamma_{m+1}F_{m+1}}{F_m}\right)\lambda_m^{2(\ell+1)}e^{o(m)}\left(1+\frac{\gamma_{m+1}F_{m+1}}{F_m}\right)^\ell \\ &\leq C_\ell e^{-\mu\lambda_m m^{-3}+o(m)} \\ &\leq C_\ell e^{-\frac{\mu}{2}m^2}.\end{aligned}$$

同様に $I_{m+1,4}$ 上でも，$\Box u=\Box[\gamma_{M+1}\times\cdots\times\gamma_m A_m u_m]$ だから $|\beta|=\ell\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ に対して (2.8) より

$$|\partial^\beta\Box u|\leq C_\ell\gamma_{M+1}\times\cdots\times\gamma_m\lambda_m^{2\ell+2}e^{o(m)}F_m(r). \tag{2.14}$$

したがって $|\beta|=\ell\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ に対し (2.9), (2.12), (2.14), (2.6), (2.7), (2.10) により

$$\begin{aligned}|\partial^\beta V(r,\theta,t)| &= \left|\partial^\beta(u^{-1}\Box u)\right| = \left|\sum_{|\beta_1|\leq\ell}\binom{\beta}{\beta_1}\partial^\beta(u^{-1})\partial^{\beta-\beta_1}(\Box u)\right| \\ &\leq C_\ell\left(\frac{F_m}{\gamma_{m+1}F_{m+1}}\right)\lambda_m^{2(\ell+1)}e^{o(m)}\left(1+\frac{F_m}{\gamma_{m+1}F_{m+1}}\right)^\ell \\ &\leq C_\ell e^{-\mu\lambda_m m^{-3}+o(m)} \\ &\leq C_\ell e^{-\frac{\mu}{2}m^2}.\end{aligned}$$

以上により，全ての $|\beta|=\ell\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ に対して I_{m+1} 上で

$$|\partial^\beta V(r,\theta,t)|\leq C_\ell e^{-\frac{\mu}{2}m^2}\leq C_\ell e^{-\frac{\mu}{2}((r-1)^{-1}-2)^2}\xrightarrow{r\searrow1}0.$$

□

3　終わりに

本レターでは 2 次元空間におけるポテンシャル項付き波動方程式のコーシー問題に対する非一意性に着目し具体的に遠方で波数の異なる無限個の非一意解を構成することにより，クローキング現象への数学的アプローチを試みた．今回の構成を実際にクローキングに応用する研究はまだ不十分であるが，本レターでの問題設定と類似した設定下でのクローキングに関する実験的研究が Smolyaninov–Hung–Davis [4] によってなされている．本レターで構成した無限個の非一意解のクローキングへの応用は今後の課題である.

謝辞

本研究において課題を提供してくださった日産自動車の三浦進様に心から感謝申し上げます．また内容に関しまして様々なご意見をくださった東京大学大学院数理科学研究科の金井雅彦教授，間瀬崇史助教に心から御礼申し上げます．最後に，議論を交わしました東京大学大学院数理科学研究科の岡本潤君，佐藤謙君，福嶌翔太君，関澤昊君に心から感謝申し上げます．なお本研究は FMSP リーディング大学院の助成を受けております．

参考文献

[1] S. Alinhac and M. S. Baouendi. A non uniqueness result for operators of principal type. *Mathematische Zeitschrift*, 220(1):561–568, 1995.

[2] H. Kumano-go. On an example of non-uniqueness of solutions of the Cauchy problem for the wave equation. *Proc. Japan Acad.*, 39:578–582, 1963.

[3] L. Robbiano and C. Zuily. Uniqueness in the Cauchy problem for operators with partially holomorphic coefficients. *Inventiones Mathematicae*, 131(3):493–539, 1998.

[4] I. I. Smolyaninov, Y. J. Hung, and C. C. Davis. Two-dimensional metamaterial structure exhibiting reduced visibility at 500 nm. *Optics Letters*, 33(12):1342–1344, 2008.

[5] H. Takase. Infinitely many non-uniqueness examples for Cauchy problems of the two-dimensional wave and Schrödinger equations. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 97(7):45–50, 2021.

[6] D. Tataru. Unique continuation for solutions to pde's; between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem. *Communications in Partial Differential Equations*, 20(5-6):855–884, 1995.

[7] C. Zuily. *Uniqueness and Non-uniqueness in the Cauchy Problem.* Springer Science+Business Media, LLC, 1983.