# 論文内容の要旨

## 論文題目 Fibred Cusp b-Pseudodifferential Operators and Their Applications (Fibred Cusp b-擬微分作用素とその応用)

## 氏名　渡部 淳

境界または角のある多様体上への擬微分作用素の概念の拡張は Melrose による b-calculus [4] を始めとして様々な変種が知られている．これらの理論は特異性のある多様体上の指数理論やコボルディズム理論, あるいは Lie groupoid 上の擬微分作用素と密接に関係した重要な理論である．

$X$ を 2 つの埋め込まれた境界超平面 $\partial_0 X$,$\partial_1 X$ を持つコンパクトで角のある $C^\infty$ 多様体とし, ファイバー束 $\phi : \partial_0 X \to Y$ が与えられているとする．本論文では, このような $X$ に対し新たな変種である fibred cusp b-calculus $\Psi^*_{\Phi,b}(X)$ を定義する．この calculus は $\partial_1 X$ または $\partial_0 X$ が空集合のとき, Mazzeo-Melrose の fibred cusp calculus [3] または Melrose の b-calculus [4] に各々一致する．また, b-calculus と cusp calculus の関係と同様に logarithmic blow-up を用いることで, この calculus は Debord-Lescure-Rochon の S-calculus [1] に dense に埋め込まれる．

本論文の主結果は relative index formula の証明である．Relative index formula とは, elliptic な $P \in \Psi^*_{\Phi,b}(X)$ のある種の perturbation に対する Fredholm index の変化を $P$ の $\partial_1 X$ における normal operator $N_1(P)$ の logarithmic residue によって表した式である．これは角のない場合の b-calculus に対する relative index formula の拡張となっている．Fibred cusp b-calculus は, ある意味でこの拡張を行うために "適した"calculus であると言える．また relative index formula の応用として, 閉 $\mathbb{Z}/k$-多様体に対する Freed-Melrose の mod $k$ 指数定理 [2] を, 境界のある $\mathbb{Z}/k$-多様体に対して拡張する．

## 1　Relative index formula

$X$ を上で定義された角のある多様体とし $x_0, x_1$ を境界 $\partial_0 X, \partial_1 X$ をを定義する関数とする．簡単のために $m$ 階のベクトル束の間の擬微分作用素の代わりに 0 階の複素数値擬微分作用素を考える．Fibred cusp b-calculus の元 $P \in \Psi^0_{\Phi,b}(X)$ は次の有界作用素を定める．

$$P : L^2_{\Phi,b}(X) \to L^2_{\Phi,b}(X)$$

また, Symbol map $\sigma$ 及び $\partial_0 X, \partial_1 X$ に対する 2 つの normal map $N_0, N_1$ が定義され, 次の完全列が得られる．

$$0 \to \Psi^{-1}_{\Phi,b}(X) \to \Psi^0_{\Phi,b}(X) \xrightarrow{\sigma} S^0({}^{\Phi,b}T^*X) \to 0$$

$$0 \to x_0\Psi^0_{\Phi,b}(X) \to \Psi^0_{\Phi,b}(X) \xrightarrow{N_0} \Psi^0_{\mathrm{sus}({}^{\Phi,b}NY)}(\partial_0 X) \to 0$$

$$0 \to x_1\Psi^0_{\Phi,b}(X) \to \Psi^0_{\Phi,b}(X) \xrightarrow{N_1} \Psi^0_{\Phi,b,\mathrm{inv}}(\widetilde{\partial_1 X}) \to 0$$

ここで ${}^{\Phi,b}T^*X \simeq T^*X$ と ${}^{\Phi,b}NY \simeq \mathbb{R} \oplus^b T^*Y$ はベクトル束で, sus は suspended calculus である. $\widetilde{\partial_1 X} \simeq \partial_1 X \times [0,\infty]$ は $\partial_1 X$ の normal 束のコンパクト化であって, $\Psi^0_{\Phi,b,\mathrm{inv}}(\widetilde{\partial_1 X})$ の中の "inv" は群 $(0,\infty)$ の作用に対して不変であることを意味する.

$P \in \Psi^0_{\Phi,b}(X)$ が elliptic であるとは $\sigma(P)$ が可逆であることであって, fully elliptic であるとは更に $N_0(P)$ と $\widehat{N_1}(P)(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ が可逆であることである. ここで $\widehat{N_1}(P)$ は $N_1(P)$ の Mellin 変換であって, これは $\Phi$-calculus $\Psi^0_\Phi(\partial_1 X)$ に値を持つ $\mathbb{C}$ 全域で定義された正則関数である.

b-calsulus やその変種の場合と同様に Fredholm 性は次のように特徴づけられる.

**Theorem 1.** *$P \in \Psi^0_{\Phi,b}(X)$ に対し $P : L^2_{\Phi,b}(X) \to L^2_{\Phi,b}(X)$ が Fredholm である必要十分条件は $P$ が fully elliptic であることである.*

これらの準備のもとで relative index formula は次で与えられる.

**Theorem 2.** *$P \in \Psi^0_{\Phi,b}(X)$ とし, $\sigma(P)$ と $N_0(P)$ が可逆であるとする. $\beta_i \notin -\mathrm{ImSpec}(\widehat{N_1}(P))$ $(i = 1,2)$, $\beta_2 > \beta_1$ を満たす任意の実数 $\beta_1$, $\beta_2$ に対して次の等式が成り立つ.*

$$\mathrm{ind}(x_1^{\beta_1} P x_1^{-\beta_1}) - \mathrm{ind}(x_1^{\beta_2} P x_1^{-\beta_2}) = \frac{1}{2\pi i}\mathrm{tr}\oint \widehat{N_1}(P)^{-1}(\lambda)\frac{\partial \widehat{N_1}(P)}{\partial \lambda}(\lambda)d\lambda, \qquad (1)$$

*ここで積分路は, $\widehat{N_1}(P)^{-1}(\lambda)$ の極であって $\beta_1 < -\mathrm{Im}(\lambda) < \beta_2$ を満たすものをすべて内側に含むように取る.*

証明の概略は次で与えられる. symbol の calculus $S^0$ 及び suspended operator の calculus $\Psi^0_{\mathrm{sus}}$ は正則関数による functional calculus に関して閉じているので, $\sigma(P)^{-1}$ または $N_0(P)^{-1}$ は同じ calculus の元となる. したがって parametrix $Q$ であって次の性質を満たすものを構成できる:$R := \mathrm{Id} - PQ \in x_0^\infty \Psi^{-\infty}_{\Phi,b}(X)$. $R$ は $\partial_0 X$ で無限次数で消えているので, その Schwartz kernel は blow-down して b-擬微分作用素となる. このことを利用して, b-calculus に対する relative index theorem と同様に証明できることを示す.

## 2 境界のある $\mathbb{Z}/k$-多様体の指数定理

$X$ を境界のある $\mathbb{Z}/k$-多様体とする. すなわち, $X$ を 2 つの埋め込まれた境界超平面 $\partial_0 X$,$\partial_1 X$ を持つコンパクトで角のある $C^\infty$ 多様体とし, 微分同相 $\partial_1 X \simeq kZ$ が与えられているとする. ここで $Z$ は境界のある多様体であって $kZ$ は $Z$ の $k$ 個のコピーの disjoint union である. 自明なファイバー束 $\phi := \mathrm{Id} : \partial_0 X \to \partial_0 X$ に対して $\Psi^0_{sc,b}(X;E,F) := \Psi^0_{\Phi,b}(X;E,F)$ と定義する. $X$ 上のベクトル束 $E$ が, あるベクトル束 $E_Z \to Z$ に対して $E|_{\partial_1 X} = kE_Z$ を満たしているとき, $E$ を $\mathbb{Z}/k$-ベクトル束と呼ぶ.

$E, F$ を $X$ 上の $\mathbb{Z}/k$-ベクトル束とする. $\mathbb{Z}/k$-構造と compatible な calculus を次で定義する.

$$\Psi^0_{sc,b,\mathbb{Z}/k}(X;E,F) := \{P \in \Psi^0_{sc,b}(X;E,F) \mid \text{ある } Q \in \Psi^0_{sc,b}(\widetilde{Z};E,F) \text{ に対して } N_1(P) = kQ\ \}$$

$\sigma(P)$ と $N_0(P)$ が可逆であるような $P \in \Psi^0_{sc,b,\mathbb{Z}/k}(X;E,F)$ に対して, (1) の右辺は常に $k$ の倍数なので $\mathrm{ind}(x_1^{\beta} P x_1^{-\beta}) \mod k \in \mathbb{Z}/k$ は $\beta$ のとり方に依存しない.

一方, このような $P$ のホモトピー類は K 群の元を定める. すなわち:

$$s : \{P \in \Psi^0_{sc,b,\mathbb{Z}/k}(X;E,F) \mid \ \sigma(P) \text{ と } N_0(P) \text{ は可逆 }\}/\text{homotopy} \\ \to K(D(\overline{TX}), \partial_0 D(\overline{TX})).$$

ここで上線は $k$ 個のコピーを同一視して得られる商を意味し, $\overline{TX} \to \overline{X}$ はベクトル束である. $\partial D(TX) = S(TX) \cup D(TX|_{\partial_0 X}) \cup D(TX|_{\partial_1 X})$ であって, $\partial_0 D(\overline{TX}) := S(\overline{TX}) \cup D(\overline{TX|_{\partial_0 X}})$ と定義する. また, Freed-Melrose [2] の場合と同様に, topological index map $\text{t-ind} : K(D(\overline{TX}), \partial_0 D(\overline{TX})) \to \mathbb{Z}/k$ を定義することができる. これらの準備のもとで境界のある $\mathbb{Z}/k$-多様体の指数定理は次で定式化される.

**Theorem 3.** *$P \in \Psi^0_{sc,b,\mathbb{Z}/k}(X;E,F)$ とし, $\sigma(P)$ と $N_0(P)$ が可逆であるとする. このとき $\mathrm{ind}(x_1^{\beta} P x_1^{-\beta}) \mod k = \text{t-ind}(s(P)) \in \mathbb{Z}/k$, $\beta \notin -\mathrm{ImSpec}(\widehat{N_1}(\lambda))$.*

本論文では 2 つの方法でこの定理を証明する. 1 つ目の方法では analytic index がいくつかの公理を満たすことを示し, その公理を満たす写像の唯一性から topological index に一致していることを示す. 2 つ目の方法では, $\partial_0 X$ が空集合の場合, すなわち Freed-Melrose の場合に, 切除を用いて帰着させる.

# 参考文献


[1] C. Debord, J. Lescure and F. Rochon, Pseudodifferential Operators on Manifolds with fibred Corners, *Annals de L'institut Fourier* **65**(4) (2015) 1799-1880.

[2] D. S. Freed and R. B. Melrose, A mod $k$ index theorem, *Invent. Math.* **107** (1992) 283-299.

[3] R. Mazzeo and R. B. Melrose Pseudodifferential opearators on manifolds with fibred boundaries, *Asian J. Math.* **2**(4) (1999) 833-866.

[4] R. B. Melrose, The Atiyah Patodi Singer Index Theorem, A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, (1993).