論文の内容の要旨

論文題目　Wild ramification, the nearby cycle complexes, and the characteristic cycles of ℓ-adic sheaves

(ℓ 進層の暴分岐、隣接サイクル複体、特性サイクルについて)

氏名　加藤　大輝

本論文では，Saito と Yatagawa[SY] の結果の精密化を証明している．彼らは，代数多様体の上の ℓ 進層（ℓ は基礎体の標数と異なる素数）の特性サイクルは境界に沿った暴分岐で決まるということを証明した．彼らは境界のすべての点の暴分岐を考える必要があったが，本論文では特性サイクルが暴分岐で決まるという主張を各点毎に証明する．

1　同じ暴分岐を持つという概念について

エタールコホモロジー理論においては ℓ 進層よりもねじれ層の方が一般的かつ柔軟なので，ℓ 進層を考える代わりに mod ℓ 構成可能エタール層を考える．

記号 1.1. 以下では，Λ と Λ' は有限体とし，標数は考えているスキーム上可逆であると仮定する．

定義 1.2 (c.f. [I]，[V], [SY])**.** X を連結で正規なスキーム，U を X の稠密な開部分スキームとする．$V \to U$ を有限ガロワエタール被覆としそのガロワ群を G と書く．x を X の幾何的点とする．

1. $g \in G$ が x で惰性的であるとは以下が成り立つことを言う：任意の U 上同型な固有射 $X' \to X$ に対して，X' の V における正規化の幾何的点で，x の上にあり，g によって固定されるものが存在する．
2. $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'$ を U 上の局所定数で構成可能な Λ 層と Λ' 層とし，$V \to U$ で自明化されると仮定する．$\mathcal{G}|_V$ と $\mathcal{G}'|_V$ に対応する G の表現を M，M' と書く．このとき，$\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'$ が x で同じ暴分岐を持つとは以下が成り立つことを言う：x で惰性的で位数が p ベキである任意の元 $g \in G$ に対して
$$\dim_\Lambda (M)^g = \dim_{\Lambda'} (M')^g$$
が成り立つ．

注意 1.3. 上の定義は，X のブローアップを取っているので一見 X の大域的な構造に依っているように見えるが，実際には同じ暴分岐を持つという性質は局所的な性質である．例えば，$\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'$ が x と同じ暴分岐を持つことは，$\mathcal{G}|_{U\times_X X_{(x)}}$ と $\mathcal{G}'|_{U\times_X X_{(x)}}$ が x で同じ暴分岐を持つことと同値である．

注意 1.4. 定義 1.2.1 においてブローアップを考えずに，単に「ある幾何的点を固定する」ものを惰性的と呼ぶことにしてしまうと「同じ暴分岐を持つ」という条件が強くなりすぎてしまう．実際，そのように定義してしまうと，二つの層であって明らかに順 (tame) 分岐であるのに同じ暴分岐を持たない例が作れてしまう ([K, Section B]).

注意 1.5. 定義 1.2.2 において，$\dim_\Lambda(M)^g = \dim_{\Lambda'}(M')^g$ という部分を $\mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}_{\mathbb{Q}}(g, M) = \mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}_{\mathbb{Q}}(g, M')$ と書き換えても同値な定義が得られる [K, Section 6]．ここで，$\mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}_{\mathbb{Q}}$ は [K] において rational Brauer trace と呼んでいるもので，Brauer トレース $\mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}(g, M)$ を含むような $\mathbb{Q}$ の有限次拡大 E をとり，$\mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}_{\mathbb{Q}}(g, M) = \frac{1}{[E:\mathbb{Q}]} \mathrm{Tr}_{E/\mathbb{Q}} \mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}(g, M)$ と定義される．主定理の証明においてはこちらを使う．

2 主結果

X を完全体 k 上の滑らかな代数多様体とする．[S2] において，構成可能な Λ 層 $\mathcal{F}$ に対してその特性サイクル $CC(\mathcal{F})$ が定義された．$CC(\mathcal{F})$ は X の余接束 T^*X 上のサイクルである．

定理 2.1. X を完全体 k 上の滑らかな代数多様体，$j : U \to X$ を開埋め込みとする．$\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'$ を局所定数で構成可能な Λ 層と Λ' 層とする．$x_0 \in X$ と x_0 の上にある幾何的点 x をとる．このとき，$\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'$ が x で同じ暴分岐を持つならば，x_0 の開近傍において $CC(j_!\mathcal{G}) = CC(j_!\mathcal{G}')$ が成り立つ．

注意 2.2. 既存の結果について説明する．X のコンパクト化 $\overline{X}$ をとる．[I] や [SY] では，$\overline{X}$ のすべての幾何的点で同じ暴分岐を持つことを「同じ暴分岐を持つ」と呼んでいた．[I] では，この意味で（正確に言うとわずかに強い）同じ暴分岐を持つ二つの層が同じ Euler 数を持つことが示されている．[SY] では，同じ暴分岐を持つ二つの層が同じ特性サイクルを持つことが示されている．

特性サイクルは隣接サイクル複体の全次元 (total dimension) を用いて定義されているので，定理 2.1 は次の隣接サイクル複体の暴分岐に関する結果からただちに従う．

定理 2.3. K を強ヘンゼルな離散付値環，X を整数環 O_K 上有限型のスキーム，$j : U \to X_K$ を開埋め込みとし，U 上の局所定数で構成可能な Λ 層 $\mathcal{G}$ と Λ' 層 $\mathcal{G}'$ を考える．x を X の特殊ファイバーの幾何的点とする．このとき，$\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'$ が x で同じ暴分岐を持つならば，$(R\psi j_!\mathcal{G})_x$ と $(R\psi j_!\mathcal{G}')_x$ は同じ暴分岐を持つ，つまり，任意の暴惰性群の元 $\sigma \in P_K$ に対して

$$\sum_i (-1)^i \dim_\Lambda((R^i\psi j_!\mathcal{G})_x)^\sigma = \sum_i (-1)^i \dim_{\Lambda'}((R^i\psi j_!\mathcal{G}')_x)^\sigma$$

が成り立つ．

注意 2.4. 定理 2.3 の設定で X は O_K 上固有であると仮定する．Vidal は [V] において，$\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}'$ がすべての X の幾何的点で同じ暴分岐を持つならば，$H^i_c(U_{\overline{K}}, \mathcal{G})$ と $H^i_c(U_{\overline{K}}, \mathcal{G}')$ が同じ暴分岐を持つことを示した．定理 2.3 は彼女の結果の局所類似と考えることもできる．

3 定理 2.3 の証明の方針

3.1 絡公式による帰着

定理 2.3 の設定で，$\mathcal{G}$ を自明化する有限ガロワエタール被覆 $V \to U$ をとる．そのガロワ群を G，定数層 $\mathcal{G}|_V$ に対応する G の表現を M と書く．すると，エタールコホモロジーと Brauer トレースの一般論により，

各 $\sigma \in P_K$ に対し，絡公式

$$\mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}(\sigma, (R\psi j_! \mathcal{G})_x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}((g, \sigma), (R\psi(j_! h_* \mathbb{Q}_\ell))_x) \cdot \mathrm{Tr}^{\mathrm{Br}}(g, M)$$

を得る．定理 2.3 は絡公式と以下の命題から従う．

命題 3.1. $\mathrm{Tr}((g, \sigma), (R\psi(j_! h_* \mathbb{Q}_\ell))_x)$ は ℓ に依らない整数で，$\neq 0$ なら g は x で惰性的である．

ℓ 独立性は以下のように用いる．$(R\psi(j_! h_* \Lambda))_x$ が $\Lambda[G]$ 加群の複体として完全であることと Brauer トレースの理論により，命題のトレースが $\neq 0$ なら g の位数が ℓ と互いに素であることがわかる．したがって，トレースが ℓ に依らないことが分かれば，g の位数は p のベキでなければならないことが言え，定理 2.3 を得る (注意 1.5 を参照)．

注意 3.2. 絡公式を用いることと ℓ 独立性から g の位数が p ベキであることを導出するという議論は Deligne と Illusie[I] による「同じ暴分岐を持つならば同じ Euler 数を持つ」という結果の証明と同様である（[V] も参照）．

3.2 ガロワ作用の幾何的解釈

命題 3.1 の証明について説明する．ここが本論文の肝である．ℓ 独立性と g が惰性的なことは同時に証明される．$\mathrm{Tr}((g, \sigma), (R\psi(j_! h_* \mathbb{Q}_\ell))_x)$ を，オルタレーションに関する de Jong の結果とウェイトスペクトラル系列を用いて幾何的に解釈する．[O] や [V] においても同様の方針で $\mathrm{Tr}((g, \sigma), R\Gamma_c(V_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$ の幾何的な解釈が与えられていた．

簡単のため x を X の特殊ファイバーの閉点と仮定する (実際，定理 2.1 を示すには閉点の場合を考えれば十分である)．$X' \to X$ を U 上同型な固有射とし，Y' を X' の V における正規化とする．命題 3.1 は有限群 G が O_K 上作用するスキーム Y' についての命題だと考えることができる：

命題 3.3. Y' を有限群 G の許容的な O_K 上の作用をもつ O_K 上有限型のスキーム，$u : V \to Y'_K$ を G 共変な開埋め込み，Z を Y' の特殊ファイバーの閉部分多様体で G 安定かつ O_K *(*の剰余体*)* 上固有なものとする．このとき，$\mathrm{Tr}((g, \sigma), R\Gamma(Z, R\psi(u_! \mathbb{Q}_\ell)))$ は ℓ によらない整数で，$\neq 0$ なら g は Z 上に固定点をもつ．

命題 3.1 を導出するには，$Z = x \times_X Y'$ に命題 3.3 を適用すればよい．命題 3.3 は Y'_K の次元に関する帰納法で $V = Y'_K$ の場合に帰着される．

実際には de Jong の結果を用いて準安定なオルタレーションをとる必要があるが，ここでは簡単のため次を仮定する：K の有限次ガロワ拡大 L と生成ファイバー上同型で $G' = G \times \mathrm{Gal}(L/K)$ 共変な固有射 $Y'' \to Y' \otimes_{O_K} O_L$ であって，Y'' が O_L 上強準安定なものが存在することを仮定する．ウェイトスペクトラル系列の構成 ([RZ], [S1]) と同様にスペクトラル系列

$$E_1^{ij} = \bigoplus_a H^{j-2a}(Z^{(i+2a)}, \mathbb{Q}_\ell)(-a) \Rightarrow H^{i+j}(Z \times_{Y'} Y'', R\psi_{Y''/O_L} \mathbb{Q}_\ell) \cong H^{i+j}(Z, R\psi_{Y'/O_K} \mathbb{Q}_\ell)$$

を構成できる．ここで，$Z^{(i)}$ は以下のように定義される $Z \times_{Y'} Y''$ の閉部分多様体の非交和である：$(Y'')^{(i)}$ を Y'' の特殊ファイバーの既約成分 $i+1$ 個の共通部分を全通り考えてその非交和をとったものとして，$Z^{(i)} = Z \times_{Y'} (Y'')^{(i)}$ とおく．

このスペクトラル系列は $G \times \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用に関して共変である．また，E_1 項への作用は $G' = G \times \mathrm{Gal}(L/K)$ の $Z^{(i+2a)}$ への幾何的な作用から来ているので Lefschetz 跡公式を適用でき，ℓ 独立性とトレースが $\neq 0$ のときの固定点の存在が言える．

注意 3.4. 命題 3.3 と似た既存の結果について述べる．

1. $V = Y'_K$ の場合は ℓ 独立性の部分は Mieda によってすでに証明されていた [M]．固定点の存在は [M] では述べられていないが，この場合には [M] の証明から導出できる．したがって，命題 3.3 は定式化された時点で次元に関する帰納法によって [M] に帰着される．ただし，x が閉点でない場合は命題 3.3 にあたる命題がもう少し複雑になる．その場合には [M] では不十分だと思われる．
2. [M] の証明の手法は我々のものとかなり近く，どちらもオルタレーションを使って準安定な場合の考察からもとの場合を導出している．導出の手法が少し異なっており，我々は次元に関する帰納法を用いているが，彼は有限群の作用よりも広く代数対応の作用まで考えることでそれを可能にしている．
   代数対応の作用付きで議論するためには少々込み入ったスペクトラル系列の構成が必要であり，我々の手法は，彼の証明を単純化していると見ることもできる．
3. O_K の剰余体が $\overline{\mathbb{F}}_p$ の場合，ℓ 独立性の部分は Zheng による結果 [Z] の帰結である．彼は，局所体上の代数多様体上で，隣接サイクル関手が ℓ 進層の整合系を整合系に送るということを証明しており，我々とは異なる手法を用いている．また，固定点の存在を彼の証明から導出するのは難しいと思われる．

参考文献

[I] L. Illusie,Théorie de Brauer et caractéristique d'Euler-Poincaré, d'après Deligne,Caractéristique d'Euler-Poincaré, Exposé VIII, Astérisque 82-83 (1981), 161-172.

[K] H. Kato, Wild ramification, the nearby cycle complexes, and the characteristic cycles of ℓ-adic sheaves, https://arxiv.org/abs/1911.04737.

[M] Y. Mieda, On ℓ-independence for the étale cohomology of rigid spaces over local fields, Compositio Math. 143 (2007) 393–422.

[O] T. Ochiai, ℓ-independence of the trace of monodromy, Math. Ann. **315**, 321-340 (1999).

[RZ] M. Rapoport and T. Zink, Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik, Inv. Math. (1982), 21–101.

[S1] T. Saito, Weight spectral sequences and independence of ℓ, Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2003) **2** (4), 583–634.

[S2] T. Saito, The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf, Invent. Math. **207** 597-695 (2017).

[SY] T. Saito, Y. Yatagawa, Wild ramification determines the characteristic cycle, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 50 (2017), no. 4, 1065-1079.

[V] I. Vidal,Théorie de Brauer et conducteur de Swan, J. Algebraic Geom. 13 (2004), no. 2, 349-391.

[Z] W. Zheng, Sur l'indépendance de ℓ en cohomologie ℓ-adique sur les corps locaux, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **42** (2009), no. 2, 291–334.