博士論文

論文題目 Gauge theory and its applications to 3 and 4-dimensional topology

(ゲージ理論とその 3, 4 次元トポロジーへの応用について)

氏名 谷口　正樹

論文の内容の要旨

論文題目 Gauge theory and its applications to 3 and 4-dimensional topology (ゲージ理論とその3, 4次元トポロジーへの応用について)

氏名　谷口 正樹

1980年初頭, Donaldson ([1]) は, Yang-Mills (以下YM) ゲージ理論に現れる“ anti-self-dual (以下ASD) 方程式の解の同値類の空間”から情報を取り出すことで, 4次元多様体の微分構造に関する制約を明らかにした. このDonaldsonの発見, Freedmanのテクニック ([4]) を組み合わせることで, $\mathbb{R}^4$ の異種微分構造の存在が明らかとなった. その後, あるクラス[1]の有向閉4次元多様体に対して, ASD方程式, Seiberg-Witten方程式を用いて, Donalsdon不変量, Seiberg-Witten (以下SW) 不変量が定義され, その応用として, 閉4次元多様体の無限種類の異種微分構造の発見, 4次元の h-同境予想[2]の反証がなされた. 表1に, 閉及び, コンパクト境界付き4次元多様体に対するゲージ理論において現れる理論・不変量・ 4次元トポロジーの定理を記した. 本論文では, ゲージ理論における, 次の二つの方向性, 「より広い4次元多様体に対してゲージ理論を展開する方向性」, 「(ゲージ理論に現れる)Fleor理論において定量的な量を扱う方向性」に着目する.

	YM理論	SW理論
閉4次元多様体	Donaldson不変量 ([2]) Theorem A, B, C ([1])	SW不変量 ([14]) Theorem A 10/8-不等式 ([6])
境界付き 4次元多様体	インスタントンFloer理論 ([3]) Theorem A, B, C ([13])	モノポールFloer理論 ([8]) Theorem A ([5]) 10/8不等式 ([10])

表 1: ゲージ理論から現れる不変量・制約

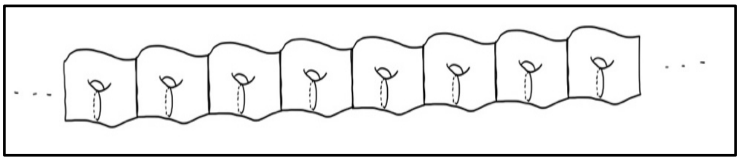

図 1: 周期的端の図

前者について述べる. この方向性は, ゲージ理論を行う多様体のクラスを変える, という性格を持つ. 表1におけるFloer理論は, 閉4次元多様体に対するゲージ理論を, 境

[1] 交差形式の正の固有値の個数が, 2以上であるような有向閉4次元多様体のクラス.

[2] h-同境定理と呼ばれる, 5以上の次元を持つ多様体に対して示されている, 微分構造の分類に関する重要な定理の4次元版.

界付き4次元多様体に拡張するものである．その際, 境界付き4次元多様体の境界を無限に引き伸ばした, 非コンパクト4次元多様体(シリンダー状の端を持つ4次元多様体)上で, ASD, SW方程式の解空間を観察する．一方で, 1987年, Taubesは, シリンダー状の端を含む, 図1のような, 周期的端を持つ非コンパクトな4次元多様体に対して, YMゲージ理論を展開し, その応用として$\mathbb{R}^4$の微分構造が非加算無限種類存在することを示した．このTaubesの仕事以降, 周期的端を持つ4次元多様体に対するゲージ理論が, いくつかの状況で展開された．これをまとめたものが表2である．本論文では, 周期的

	Yang-Mills理論	Seiberg-Witten理論
周期的端を持つ 4次元多様体	Theorem A ([12]) Theorem B, C 余次元1の 3次元多様体の 埋め込みの障害 (参考論文, [11])	PSCの障害 ([9]) 10/8不等式と PSCの障害(本論文)

表 2: 周期的端を持つ4次元多様体に対するゲージ理論

正スカラー曲率計量を持つ周期的端を含む4次元多様体に対して10/8不等式を示すことで, 「正スカラー曲率計量の存在」と「10/8不等式」を結びつけた:

定理 1 (今野-谷口)**.** $(X, \mathfrak{s})$を有向スピン有理ホモロジー$S^1 \times S^3$とする[3]. Yを, 有向有理ホモロジー3球面[4]とする．また, $(M, \mathfrak{t})$をコンパクト有向スピン4次元多様体であって, $\partial(M, \mathfrak{t}) = (Y, \mathfrak{s}|_Y)$を満たすものとする．ここで, Xが正スカラー曲率計量を持つとし, Yは, Xの部分多様体であって, $[Y] \in H_3(X;\mathbb{Z})$は生成元であるとする．この時,

$$b^+(M) \geq -\frac{\sigma(M)}{8} + h(Y, \mathfrak{s}|_Y)$$

が成立する．ここで, $h(Y, \mathfrak{s}|_Y)$は, モノポールFloer理論におけるFrøyshov不変量 ([5])であり, $\sigma(M)$はMの符号数, $b^+(M)$は, Mの交差形式の制限が正定値となる$H^2(M;\mathbb{R})$の部分空間の次元の最大値である．

また, 定理1の応用として, 正スカラー曲率計量を持たない新しい4次元多様体のクラスを発見した:

系 2 (今野-谷口)**.** $m > 0$を奇数とする．Wを, $\Sigma(4, 7, 28m + 1)$からそれ自身への任意のホモロジー同境とする．この時, Wの両端を張り合わせて得られる閉4次元多様体は, 正スカラー曲率計量を持たない.

さらに周期的端を持つ4次元多様体に対するYMゲージ理論を用いて, 低次元トポロジーにおける伝統的な問題である「3次元多様体がいつS^3内の結び目の手術でかけるか」という問題に対して, 部分的回答を与えた.

[3] 有理ホモロジー$S^1 \times S^3$とは, 閉4次元多様体であって, 同型 $H_*(X;\mathbb{Q}) \cong H_*(S^1 \times S^3;\mathbb{Q})$が存在するもののことである.

[4] 有理ホモロジーS^3とは, 閉3次元多様体であって, 同型 $H_*(Y;\mathbb{Q}) \cong H_*(S^3;\mathbb{Q})$が存在するもののことをいう.

定理 3 (佐藤-谷口)**.** 0でない互いに素な自然数の組 (p,q) に対して, 既約で, 結び目の手術で書けない互いに微分同相でない有向3次元多様体の列 $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ が存在して, 全ての k について, Y_k が $L(p,q)$ にホモロジー同境となる. [5]

次に, 二つの目の方向性, 「(ゲージ理論に現れる)Fleor理論において定量的な量を扱う方向性」について述べる. 表1における, インスタントン・モノポールFloer理論では, 3次元多様体 Y に対して, Y に付随する無限次元の空間上の汎関数のMorseホモロジーをモデルとして, 次数付られた有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群 (Floerホモロジー) が定義される. シンプレクティック幾何・接触幾何においても, 同様の考察で, いくつかのFloerホモロジーが定義される. 接触幾何に現れる, Embedded Contact Homology (以下ECH) 理論では, 汎関数の値を用いて, フィルター付られたホモロジーが定義される ([7]) . Hutchingsは, フィルター付られたECHを用いて, スペクトル不変量 ([7]) と呼ばれる, 接触3次元多様体の不変量を定義した. スペクトル不変量が接触3次元多様体の不変量であることを示す際に, 「(Morse関数の役割を果たす)汎関数が接触3次元多様体の言葉で表記できる」という点が, 重要となる. 一方で, インスタントンFloer理論における汎関数であるChern-Simons汎関数は, Y のみを用いて定義される. よって, インスタントンFloer理論において, 定量的な不変量が構成できるか, という問いは, 自然な問いである. この問いに対する一つの答えとして, Daemi, 野崎-佐藤-著者は, それぞれ独立に, 実数値不変量 $\Gamma_Y(k)$, $r_s(Y)$ を導入した.[6] $r_s(Y)$ の性質について述べる:

定理 4 (野崎-佐藤-谷口)**.** 有向ホモロジー3球面[7] Y と $s\in[-\infty,0]$ に対して, $r_s(Y)\in(0,\infty]$ が定まり次の性質をみたす:

1. 交差形式が負定値の有向コンパクト4次元多様体 W であって $\partial W = Y_1 \amalg -Y_2$ を満たすとき, 全ての $s\in[-\infty,0]$ について $r_s(Y_2)\le r_s(Y_1)$ が成立する. また, W が単連結であり, $r_s(Y_1)<\infty$ を満たすとき, $r_s(Y_2)<r_s(Y_1)$ が成立する.

2. $r_s(Y)<\infty$ であるならば, $r_s(Y)$ は, Y の $SU(2)$ Chern-Simons 汎関数の臨界点に属する.

3. $s_1\le s_2$ ならば, $r_{s_1}(Y)\ge r_{s_2}(Y)$ が成り立つ.

4. 連結和に関して次が成立する:

$$r_s(Y_1\#Y_2)\ge\min\{r_{s_1}(Y_1)+s_2, r_{s_2}(Y_2)+s_1\}$$

   ただし, $s,s_1,s_2\in(-\infty,0]$ とし, $s=s_1+s_2$ とする.

定理4の1によって, $r_s(Y)$ は, ホモロジー同境不変量となる. このことから, $r_s(Y)$ は, ホモロジー3球面のなすホモロジー同境群 Θ^3 上の無限大を許す関数を定める. また, $r_s(Y)$ を用いて, Θ^3 の無限種類の部分群の増大列を定め, Θ^3 の複雑さに関する理解を深めるとともに, 結び目の手術から $\mathbb{Z}^\infty$ 部分群を見つけるための十分条件を発見した.

---

[5] $p=5$ の場合に, "ホモロジー同境" の条件を外したものは, すでに示されていた. また, 結び目の手術でかけるならば, その基本群のweightは1であることが帰結されるが, Y_k のweightが1かどうかは未解決である. また, 定理3の $L(p,q)$ を, S^3, $\Sigma(p,q,pql+1)$ $(l\in\mathbb{Z}_{>0})$ に置き換えたものも成立する.

[6] 本論文では, $r_s(Y)$ と $\Gamma_Y(k)$ の部分的比較も行った.

[7] 有向3次元多様体 Y であって, $H_*(Y;\mathbb{Z})\cong H_*(S^3;\mathbb{Z})$ を満たすもの.

また, $r_s(Y)$, $\Gamma_Y(k)$ の幾何的意味を与える研究として,「3次元多様体の余次元1の埋め込みの存在」と「埋め込まれる4次元多様体の基本群の複雑さ」を結びつける研究も行った. その系として, 次の定理を示した:

定理 5 (谷口)**.** n を正の整数とする. $\#_n\Sigma(2,3,5,7)$ を $\Sigma(2,3,5,7)$ の n 個のコピーの連結和とする. この時, $\#_n\Sigma(2,3,5,7)$ の $SU(2)$ 表現の同型類の空間 $R(\#_n\Sigma(2,3,5,7))$ にある S^2 と同相な連結成分 C_n が存在して次の性質を満たす：

任意の $\#_n\Sigma(2,3,5,7)$ を部分多様体にもつ, 交差形式が定値である有向閉4次元多様体 X に対して, C_n に属する任意の $SU(2)$ 表現は, X の $SU(2)$ 表現に拡張する.

定理5は, インスタントン Floer 理論のある定量的な精密化における, Lefschetz 型の不動点公式として示される. 定理5は, 位相多様体の圏で, statement を書き下す事はできるが, $\#_n\Sigma(2,3,5,7)$ は, S^4 への局所平坦埋め込みを許容することが知られている ([4]) ので, 位相多様体の圏では成立しない. また, 定理5の, C_n 以外の連結成分に対しては, まだわかっていない. さらに, 既約表現の全ての連結成分における $SU(2)$ 表現が拡張しない例も知られている. 例えば, $\Sigma(3,4,5)$ は, S^4 に滑らかに埋め込まれることが知られている. その埋め込みについて全て既約表現は, S^4 の表現に拡張しない.

参考文献

[1] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 2, 279–315. MR710056

[2] ———, *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29** (1990), no. 3, 257–315. MR1066174

[3] Andreas Floer, *An instanton-invariant for* 3*-manifolds*, Comm. Math. Phys. **118** (1988), no. 2, 215–240. MR956166

[4] Michael Hartley Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 3, 357–453. MR679066

[5] Kim A. Frøyshov, *Monopole Floer homology for rational homology 3-spheres*, Duke Math. J. **155** (2010), no. 3, 519–576. MR2738582

[6] M. Furuta, *Monopole equation and the* $\frac{11}{8}$*-conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291. MR1839478

[7] Michael Hutchings, *Quantitative embedded contact homology*, J. Differential Geom. **88** (2011), no. 2, 231–266. MR2838266

[8] Peter Kronheimer and Tomasz Mrowka, *Monopoles and three-manifolds*, New Mathematical Monographs, vol. 10, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. MR2388043

[9] Jianfeng Lin, *The Seiberg-Witten equations on end-periodic manifolds and an obstruction to positive scalar curvature metrics*, J. Topol. **12** (2019), no. 2, 328–371. MR3911569

[10] Ciprian Manolescu, *On the intersection forms of spin four-manifolds with boundary*, Math. Ann. **359** (2014), no. 3-4, 695–728. MR3231012

[11] Masaki Taniguchi, *Instantons for 4-manifolds with periodic ends and an obstruction to embeddings of 3-manifolds*, Topology Appl. **243** (2018), 1–32. MR3811080

[12] Clifford Henry Taubes, *Gauge theory on asymptotically periodic* 4*-manifolds*, J. Differential Geom. **25** (1987), no. 3, 363–430. MR882829

[13] Kim A. Frøyshov, *Equivariant aspects of Yang-Mills Floer theory*, Topology **41** (2002), no. 3, 525–552. MR1910040

[14] Edward Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 769–796. MR1306021