審査の結果の要旨

氏　名　谷口　正樹

学位申請論文 Gauge theory and its applications to 3 and　4-dimensional topology (ゲージ理論とその 3, 4 次元トポロジーへの応用について) において谷口正樹氏は周期的な端をもつ非コンパクトな 4 次元多様体の上でゲージ理論を展開し、さらにこの理論がトポロジーおよび微分幾何的のきわめて非自明な新しい帰結を導くことを示した。

周期的端をもつ非コンパクト 4 次元多様体上のゲージ理論は、1980 年代に Taubes によって最初に導入されトポロジーに応用された。その後の理論的展開は見られたものの、顕著な幾何学的応用は見られなかった。一方、周期的な端の特別な場合であるシリンダー状の端をもつ非コンパクト 4 次元多様体上のゲージ理論は、Floer 理論において基礎的な役割を果たしてきた。

申請者はシリンダー状とは異なる周期的端を本質的に用いてトポロジーおよび微分幾何への応用が可能な理論を展開した。Yang-Mills 理論と Seiberg-Witten 理論の両者において理論構成と応用を与えている。

Yang-Mills 理論の申請者による扱いの特徴は、インスタントンのエネルギーを定量的に扱うことである。インスタントンホモロジーは Chern-Simons 汎関数を Morse 関数とする無限次元多様体上の同変 Morse 理論として解釈することが可能である。インスタントンのエネルギーと密接に関係する Chern-Simons 汎関数を用い、接続全体からなる無限次元多様体上にフィルトレーションを導入し、それを用いてインスタントンホモロジーの変種を構成するアイディアは Fintushel-Stern により 80 年代に提起されていた。しかしその後、このフィルトレーションをシステマティックに用いてインスタントンホモロジーを展開することはなされていなかった。申請者が行ったひとつの理論構成は、この展開とともに、無限個の不変量を定義し、その性質を明らかにし、さらにトポロジーに応用することである。

Seiberg-Witten 理論は、Ynag-Mills 理論と、３、４次元トポロジーへの応用の観点から比較したとき、同様の帰結を導ける場合と、少なくとも現時点においてはそうではなく、一方が他方よりも強力である場合とがある。閉 4 次元多様体において両者のいずれをも用いてアプローチ可能なトポロジカルな性質として負定値閉 4 次元多様体における交差形式の限定が知られている。周期的端をもつ非コンパクト 4 次元多様体に対して、Jenffeng Lin が Seiberg-Witten 理論を用いることにより、端が正スカラー曲率をもつときこれを拡張し、正スカラー曲率に関する応用を行っていた。Seiberg-Witten 理

論ではアプローチできるが Yang-Mills 理論では現在のところアプローチが見出されていないトポロジカルな性質として、スピン閉 4 次元多様体に対する交差形式の限定が知られている。申請者は、周期的端をもつ非コンパクト 4 次元多様体に対して、Seiberg-Witten 理論を用いることにより端が正スカラー曲率をもつときこれを拡張し、応用を与えた（以下の（１）である）。

これらの理論構成の応用の中には次があげられる。

（１）正スカラー曲率計量を持つ周期的端を含む 4 次元多様体に対して 10/8 不等式を示すことで,「正スカラー曲率計量の存在」と「10/8 不等式」を結びつけ、正スカラー曲率計量を持たない新しい 4 次元多様体のクラスを発見した:。(今野北斗氏との共同研究)

（２）与えられたレンズ空間とホモロジー同境な有向 3 次元多様体であって、既約かつ結び目の手術では得られないものを無限個構成した。(佐藤光樹氏との共同研究)

（３）有向ホモロジー３球面のホモロジー同境不変量を無限個構成し、それによってホモロジー３球面のなすホモロジー同境群の無限個の部分群の増大列を構成し、この群の複雑さ測る新しい見方を与えた。(野崎雄太氏　佐藤光樹氏との共同研究)

（４）上の増大列の幾何学的性質の応用として、$\Sigma(2,3,5,7)$の有限個のコピーの連結和は、それを部分多様体として含む負定値有向閉 4 次元多様体に対して、包含関係が基本群に誘導する写像を代数的に制約することを示した。

これらの結果は、優れた数学的業績であり、大きな学問的貢献であると評価できる。よって、論文提出者谷口正樹は、博士(数理科学)の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。