審査の結果の要旨

氏名　　若月 駿

位相幾何学においては写像空間とくに球面からの写像全体のなす空間の研究が基本的である。有向連結閉多様体 M の自由ループ空間すなわち 1 次元球面 S^1 から M への（基点を考えない）連続写像全体の空間 $\mathrm{Map}(S^1, M)$ のホモロジーに、ループ積と呼ばれる積構造を導入したのが 1999 年の Chas-Sullivan であった。ここでは多様体 M の有限次元性が本質的である。爾来、多様体の自由ループ空間のホモロジーの研究はストリング・トポロジーと呼ばれ、幅広い幾何学と関連しながら発展している。とくに Chas-Sullivan の構想に関連して、Cohen-Godin によるストリング作用素の一般化は、ループ余積をはじめとするストリング作用素の組織的構成によって $1+1$ 次元位相的場の理論を構成した。しかしながら、玉乃井広臣により多様体上ではループ余積はほとんど自明であって、ループ余積にループ積を合成したもの（種数 1 のストリング作用素）は消滅することが証明された。つまり、多様体上のループ余積は期待されたほど豊かなものではなかった。

Félix-Thomas によるストリング・トポロジーの Gorenstein 空間への一般化は、この困難の打開を目指したものと見ることもできる。単連結閉多様体のみならず連結リー群の分類空間や、有理ホモトピー群全部の直和が有限生成である単連結空間をも含む Gorenstein 空間は、多様体概念の適切な拡張と考えられる。Félix-Thomas は有理ホモトピー理論に基づいて、Gorenstein 空間の自由ループ空間の有理ホモロジー群にループ積とループ余積を拡張した。ループ余積が非自明な Gorenstein 空間は幅広く存在するが、ループ余積にループ積を合成したもの（種数 1 のストリング作用素）の非自明性は依然として未解決である。

以上がループすなわち 1 次元球面からの連続写像に関する考察であるが、球面の次元を高次元化する研究は 2006 年の Sullivan-Voronov に創まる。$k \geq 2$ について k 次元球面 S^k から M への（基点を考えない）連続写像全体の空間 $\mathrm{Map}(S^k, M)$ のホモロジーに、ブレーン積とよばれる積構造を導入している。しかし、本学位論文の登場までブレーン余積は定義されていなかった。余積とは球面 S^k を千切る操作であるが、その際、千切られる部分である $k-1$ 次元球面 S^{k-1} から「多様体」 M への写像空間 $\mathrm{Map}(S^{k-1}, M)$ において、定数写像のなす M に同相な「部分多様体」に関する shriek map を経由する必要がある。素朴に考える限り $k \geq 2$ では「部分多様体」の余次元は無限次元であり shriek map は構成できない。これがブレーン余積が定義されてこなかった理由であると思われる。

論文提出者 若月 駿 は本論文第一部において M として有理ホモトピー群全部の直和が有限生成である k-連結空間、これは Gorenstein 空間である、をとることによって、この無限次元の困難を回避した。このとき写像空間 $\mathrm{Map}(S^{k-1}, M)$ は Gorenstein 空間としては有限次元だからである。この M についてブレーン余積が $\mathrm{Map}(S^k, M)$ のホモロジーに定義された。その次数は $\mathrm{Map}(S^{k-1}, M)$ と M 自身の Gorenstein 空間としての次元の差のマイナス倍である。ブレーン積とブレーン余積が Frobenius 代数をなすこと、および、$\mathrm{Map}(S^2, S^{2n+1})$ 上のブレーン余積を具体的に計算し非自明であることが示されている。ブレーン余積は、球面にかぎらず多様体の連結和の構造からも定義される。

本論文第二部では、偶数次元多様体の連結和の状況でブレーン積とブレーン余積の合成が非自明となる例を与えた。 Gorenstein 空間のストリング・トポロジーでの種数 1 のストリング作用素の非自明性問題という未解決問題を見据えた例であるが、ブレーン余積が、ループ余積よりも豊かな構造をもつことを示唆している。

本論文第三部では M が単連結 Poincaré 双対性空間の場合に、球面の半球から M への写像空間が M 自身とホモトピー同値であるという単純な事実を用いて、別種のブレーン余積を導入した。球面が奇数次元のとき、第二部までのブレーン余積は、「非対称ブレーン余積」と名付けられたこの新しい余積の Euler 標数倍であることが示される。さらに、ブレーン余積の可換性を組み合わせることによって、奇数次元球面からの写像空間上のあるカップ積の消滅を証明した。この消滅定理は 1 次元球面の場合の Menichi の定理の拡張である。

以上のように本論文は、ブレーン余積を導入することで写像空間の位相幾何学すなわち広い意味でのストリング・トポロジーの重大な空隙を埋め、その非自明性を示すことでループ余積よりも豊かな構造をもつことを示し、古典的な問題にも応用をもつことを示している。写像空間の位相幾何学的研究に新生面を切り開き、位相幾何学に大きく貢献するものと言える。

よって、論文提出者　若月 駿　は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい充分な資格があると認める。