

博士論文

マイクロ波による  
フラックスフローホール効果の研究

小川 亮



# 目 次

<b>第 1 章</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	フラックスフロー Hall 効果	1
1.1.1	超伝導現象	1
1.1.2	マイスナー効果	2
1.1.3	第 1 種超伝導体と第 2 種超伝導体	2
1.1.4	第 2 種超伝導体における渦糸	3
1.1.5	渦糸コア内の準粒子状態	5
1.1.6	フラックスフロー	6
1.1.7	渦糸コア内の準粒子状態とフラックスフローの関係	6
1.1.8	ピン止めとフラックスフロー	10
1.1.9	これまでのフラックスフローの測定結果	11
1.1.10	フラックスフロー Hall 効果	12
1.1.11	混合状態における Hall 抵抗率の符号反転	15
1.2	本研究の目的	16
1.3	マイクロ波 Hall 効果測定	17
1.3.1	マイクロ波 Hall 効果	17
1.3.2	2 重縮退モード空洞共振器	17
1.4	本章のまとめ	21
<b>第 2 章</b>	<b>実験方法</b>	<b>22</b>
2.1	解析手法	22
2.1.1	円筒形共振器を用いた空洞共振器摂動法	23
2.1.2	十字型 2 重縮退モード空洞共振器による マイクロ波 Hall 効果測定	24
2.2	実験装置	28
2.2.1	直流抵抗率測定	28
2.2.2	極低温高磁場下でのマイクロ波を用いた測定	28
2.2.3	円筒形共振器	29
2.2.4	十字型 2 重縮退モード空洞共振器	29
2.3	測定対象	35

2.3.1	Bi 単結晶 . . . . .	35
2.3.2	$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$ 単結晶 . . . . .	35
2.3.3	$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$ 単結晶 . . . . .	37
<b>第 3 章</b>	<b>測定結果</b>	<b>38</b>
3.1	Bi におけるマイクロ波 Hall 効果測定 . . . . .	38
3.1.1	直流抵抗率測定 . . . . .	38
3.1.2	円筒形共振器による表面インピーダンス測定 . . . . .	43
3.1.3	十字型共振器による Hall 効果測定 . . . . .	45
3.2	$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$ におけるフラックスフロー Hall 効果測定 . . . . .	50
3.2.1	試料#1 に対する測定 . . . . .	50
3.2.2	試料#2 に対する測定 . . . . .	59
3.3	$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$ におけるフラックスフロー Hall 効果測定 . . . . .	66
3.3.1	直流抵抗率測定 . . . . .	66
3.3.2	円筒形共振器による表面インピーダンス測定 . . . . .	67
3.3.3	十字型共振器によるフラックスフロー Hall 効果測定 . . . . .	69
<b>第 4 章</b>	<b>考察</b>	<b>74</b>
<b>第 5 章</b>	<b>結論</b>	<b>78</b>
<b>付 録 A</b>	<b>十字型 2 重縮退モード空洞共振器内電磁場の解析的計算</b>	<b>80</b>
A.1	複素伝導度テンソル . . . . .	80
A.2	表面インピーダンステンソル . . . . .	80
A.3	電磁場の固有モード展開 . . . . .	83
A.4	固有モード展開による共振器内電磁場の計算 . . . . .	85
A.5	共振特性と試料の表面インピーダンスの関係 . . . . .	90
A.6	十字型 2 重縮退モード空洞共振器内の電磁場 . . . . .	93
A.6.1	領域 1 . . . . .	94
A.6.2	領域 2 . . . . .	95
A.6.3	領域 3 . . . . .	96
A.6.4	全領域 . . . . .	96
A.6.5	Hall 方向の入出力 . . . . .	98
A.6.6	縦方向の入出力 . . . . .	100
A.7	十字型 2 重縮退モード空洞共振器の共振特性 . . . . .	102
<b>付 録 B</b>	<b><math>\text{FeSe}_{1-x}\text{Te}_x</math> 薄膜の超伝導転移温度近傍における直流 Hall 効果測定</b>	<b>104</b>
B.1	背景と目的 . . . . .	104

B.2	実験方法 . . . . .	104
B.3	測定結果 . . . . .	105
B.4	結論 . . . . .	109



# 第1章 序論

本研究は、マイクロ波によるフラックスフロー Hall 効果の測定を行い、渦糸の運動状態における磁束量子コア内部の準粒子状態の性質を明らかにすることを目的としたものである。本論文の内容は以下の通りである。第1章では研究背景として、これまでの磁束量子コアやフラックスフロー Hall 効果の研究を概観することで本研究の目的を示す。第2章では、本研究で新たに開発した十字型 2 重縮退モード空洞共振器によるマイクロ波フラックスフロー Hall 効果測定の原理と手法について詳述する。第3章では、本手法の有効性を示すため行った Bi を対象としたマイクロ波 Hall 効果のテスト測定結果と、銅酸化物高温超伝導体である  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$  と  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$  を対象としたマイクロ波フラックスフロー Hall 効果測定の結果を示す。第4章では、第3章で得られた測定結果について議論する。最後に、第5章において、本研究で得られた結果をまとめ、結論を述べる。また、付録 A では、本研究でマイクロ波 Hall 効果の解析のために用いた、十字型 2 重縮退モード空洞共振器の共振特性と試料の表面インピーダンステンソルの関係式の導出について詳述する。付録 B では、本研究と関連する、鉄系超伝導体  $\text{FeSe}_{1-x}\text{Te}_x$  薄膜の超伝導転移温度近傍における直流 Hall 効果測定の結果について述べる。

## 1.1 フラックスフロー Hall 効果

### 1.1.1 超伝導現象

1911 年, Kamerlingh Onnes[1] らにより, 4.2 K 付近まで冷却した水銀の電気抵抗が急激にゼロになる超伝導現象が発見された。1931 年には, Meißner と Ochsenfeld により超伝導状態では物質内部から磁場が完全に排除された完全反磁性となる現象, いわゆるマイスナー効果が発見された [2]。これらの現象は超伝導を特徴づけるものであり, 古典論では説明できない量子的な現象として注目を集めた。初期における超伝導の現象論的な理論として, London 兄弟による London 方程式 [3] や Ginzburg と Landau による GL 理論 [4] などがあり, 1957 年に Bardeen と Cooper, Schrieffer による微視的な理論である BCS 理論により, フェルミオンである電子が電子格子相互作用によりクーパー対をつくることで量子凝縮状態になるという超伝導現象の基本的なメカニズムの理解がひとまず得られた [5]。

超伝導現象が出現する温度である超伝導転移温度  $T_c$  は、BCS 理論では 40 K 程度が上限と考えられ、実際に発見された物質も Nb 化合物における 20 K 程度が長年限界であった (例えば、 $\text{NbSn}_3$  では  $T_c = 18 \text{ K}$  である [6]). しかし、1986 年 Bednorz と Muller による Ba-La-Cu-O 系での超伝導の発見 [7] をきっかけにして、次々に銅酸化物高温超伝導体が見つかった. その結果、超伝導転移温度の記録は上昇し Hg 系では 135K が記録された [8]. その後も、磁性を持つため超伝導体の候補として不向きと考えられてきた鉄を含む物質での超伝導現象 (鉄系超伝導体) の発見 [9] や、高压下の水素化合物の室温に近い温度での超伝導現象が報告される [10, 11] など、現在でも超伝導に関する新奇な現象が発見されている.

超伝導現象は電気抵抗がゼロになるという実用性や巨視的な量子状態という物理的に興味深い現象としてこれまで詳細に調べられてきたが、いまだにその完全な解明はできておらず、その発見から 100 年以上たった現在でも超伝導の研究が盛んに行われている. 特に、超伝導現象を実用する場合において、超伝導体は磁場中にあることが多く、磁場中での超伝導現象の特性を調べることは重要である.

### 1.1.2 マイスナー効果

超伝導現象を特徴づける性質の 1 つが完全反磁性である. この性質はマイスナー効果 (あるいは、マイスナー・オクセンフェルト効果) と呼ばれ、超伝導状態の物質から磁場が排除されて超伝導体内部の磁束密度がゼロになるという性質である. マイスナー効果の特徴は、超伝導状態で磁場を印加したときに試料に磁束が侵入できないことに加えて、常伝導状態で磁場を印加した状態で温度を下げ超伝導にしたときに、磁束が試料から排除されることである. 完全導体では、磁場の侵入を妨げる遮蔽電流の減衰が起こらないため、磁束の侵入が妨げられることは起こり得る. しかしながら、磁場が試料内部にあるときに外部磁場を減少させると、それを妨げるように遮蔽電流が流れる. したがって、完全導体では磁束の排除は起こらず、このところは超伝導体が単なる完全導体ではないことを意味している.

### 1.1.3 第 1 種超伝導体と第 2 種超伝導体

磁場中での超伝導体の状態から、ロンドン侵入長  $\lambda$  とコヒーレンス長  $\xi$  の比である GL パラメーター  $\kappa = \lambda/\xi$  の値によって、超伝導体は 2 種類に分類される.  $\kappa < 1/\sqrt{2}$  である第 1 種超伝導体では、臨界磁場  $H_c$  以上の強い磁場がかかると、マイスナー効果が消失し、超伝導体内部に磁場が侵入し超伝導状態が完全になくなる. 第 1 種超伝導体に属する物質の多くは Al, Hg, Sn などの単体元素金属である. 一方、 $\kappa > 1/\sqrt{2}$  である第 2 種超伝導体では、磁場が下部臨界磁場  $H_{c1}$  と上部臨界磁場  $H_{c2}$  の間にあるとき、磁場が部分的に超伝導体内部に侵入した状態、すなわち、混合状態となる (図 1.1). 多

くの従来型超伝導体や高温超伝導体はこの第2種超伝導体に分類される．例えば，銅酸化物高温超伝導体や鉄系超伝導では典型的な値として  $\kappa \sim 100$  程度である．

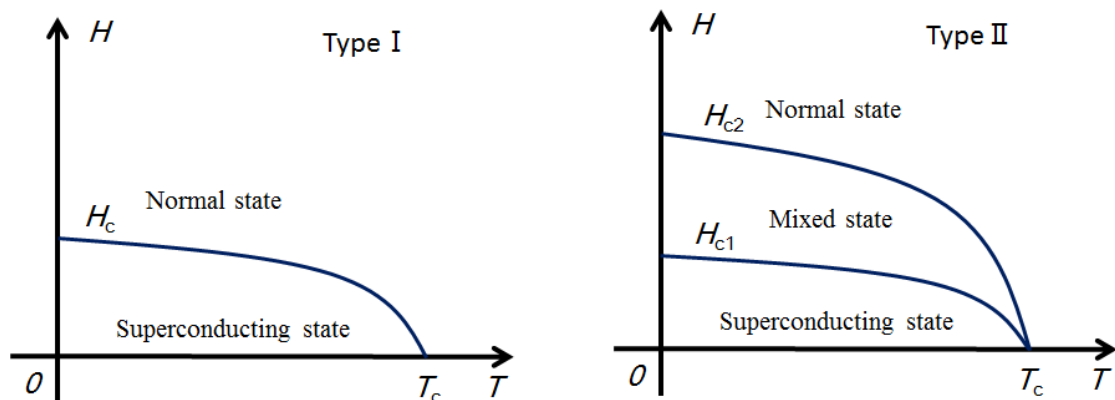


図 1.1: 第1種超伝導体と第2種超伝導体における温度磁場相図．

#### 1.1.4 第2種超伝導体における渦糸

第2種超伝導体の混合状態 (渦糸状態) では，磁場が超伝導体中に磁束量子  $\Phi_0 = h/2e = 2.07 \times 10^{-15}$  Wb を単位として侵入する．磁束量子は半径が磁場侵入長  $\lambda$  程度の領域に存在し，その周りに超伝導電流の渦が生じる．これらは渦糸 (vortex) と呼ばれ，渦糸の中心では超伝導状態を特徴づけるオーダーパラメーターの大きさが小さくなっていて，中心からコヒーレンス長  $\xi$  程度の距離で元に戻っていく (図 1.2)．

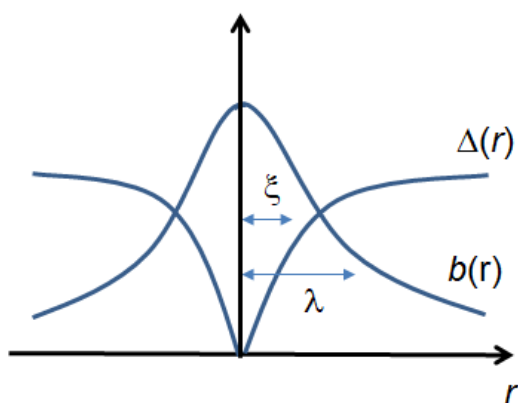


図 1.2: 磁束量子周辺の局所磁場  $b(r)$  と超伝導ギャップ  $\Delta(r)$  の位置依存性．

渦糸間には斥力相互作用が働き、混合状態では試料内に多数渦糸が存在することから、低温低磁場領域では、渦糸は安定した格子構造 (Abrikosov 格子) をとることが GL 理論に基づいて予言され [12], 等方的なフェルミ面と超伝導ギャップをもつ場合には、その構造は三角格子構造であることが知られている [13]. 第 2 種超伝導体の渦糸格子は様々な方法で観測されている. 例えば, Bitter 法と呼ばれる方法では, 試料に強磁性微粒子をふりかけることで渦糸格子を観測する [14]. 混合状態の試料表面付近には渦糸格子を反映した局所的な磁場分布が存在するので, ふりかけられた強磁性微粒子は渦糸中心部に付着する. それを走査電子顕微鏡などで観測することで渦糸格子の様子を知ることができる (図 1.3). 走査トンネル顕微鏡 (STM) で局所電子状態, つまり超伝導ギャップの空間変化を測定することでも磁束格子を観察することが可能である. 図 1.4 は NbSe<sub>2</sub> を対象とした STM で観測された Abrikosov 格子の像である [15]. その他にも渦糸の直接的な観測として, 強磁性体薄膜の Faraday 回転を利用する磁気光学効果や中性子回折, ローレンツ顕微鏡による方法などが知られている [16].

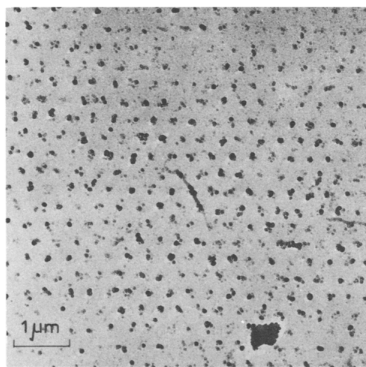


図 1.3: Bitter 法で観測された Abrikosov 格子 [14].

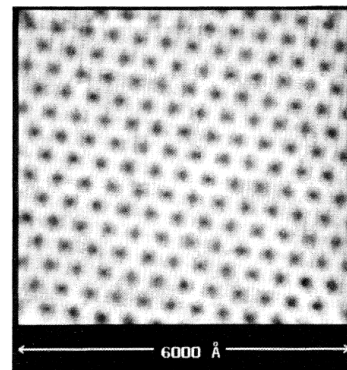


図 1.4: STM で観測された NbSe<sub>2</sub> における Abrikosov 格子の像 [15].

銅酸化物高温超伝導体の発見以前は, 第 2 種超伝導体の磁場中での相図は, 先程述べた単純なものが考えられてきた. しかしながら, 銅酸化物超伝導体においてその渦糸状態のさまざまな現象が発見されるにつれて, 磁場中での渦糸の相図はより複雑なものであることがわかった. 高温側では磁束が非常に動きやすく 1 本 1 本自由に運動できる状態である渦糸液体相となる. 一方, 低温側では, 乱れがほとんど存在しない場合には格子の長距離秩序をもつ磁束固体相となり, ランダムな点欠陥などの弱い乱れを含む多くの現実の系では, ピン止めが弱く準長距離秩序をもつ Bragg グラス相となる. また, 低温高磁場側では, 渦糸間相互作用よりも乱れによるピン止め力が大きく, ランダムに分布する点欠陥によって渦糸が不規則に凍結された状態である渦糸グラス相となる [17, 18].

### 1.1.5 渦糸コア内の準粒子状態

渦糸コア内には低エネルギー束縛状態 (Caroli-de Gennes-Matricon (CdGM) mode) が存在することが知られている [19]. その束縛状態のエネルギー  $E_n$  は

$$E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2), \quad (1.1)$$

$$\omega_0 \equiv \Delta_0^2/\hbar E_F, \quad (1.2)$$

で表される. ここで,  $n$  は整数,  $\Delta_0$  は超伝導ギャップ,  $E_F$  は Fermi エネルギーである. したがって, エネルギー準位間隔は  $\Delta E \equiv \hbar\omega_0 = \Delta_0^2/E_F$  で表される. 一方, エネルギー準位は有限の幅を持ち,  $\tau$  を渦糸コア内の準粒子の緩和時間すると, エネルギー幅は  $\delta E \equiv \hbar/\tau$  で表される (図 1.5).  $\omega_0\tau \ll 1$  のときには, 渦糸コアは dirty limit にあると呼ばれ, 渦糸コア内の領域を常伝導金属とみなすことができる (Bardeen-Stephen モデル)[20]. 一方, その逆の極限である  $\omega_0\tau \gg 1$  のときは clean limit と呼ばれ, 量子的な性質が顕著になる. また, その中間領域の  $\omega_0\tau \sim 1$  では, コア内は moderately clean であると呼ばれる. 多くの従来型超伝導体では,  $\Delta E$  が小さい (典型的には  $\sim 0.01$  K) ため渦糸コアは dirty である. 一方, 銅酸化物超伝導体や鉄系超伝導体では, 大きな  $\Delta E$  となるため, 量子的な性質による渦糸の新奇な特徴が出現することが期待されている (図 1.6).

この低エネルギー束縛状態の存在は, pure な超伝導体に対する Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式を解くことで見つかった [19]. その後, 渦糸コア内の束縛状態に対する理論として, BdG 方程式の Green 関数表現である Gor'kov 方程式の準古典近似 (Eilenberger 方程式) に基づく理論 [21] や Andreev 反射に基づく CdGM 状態の解釈 [22] などが考えられている.

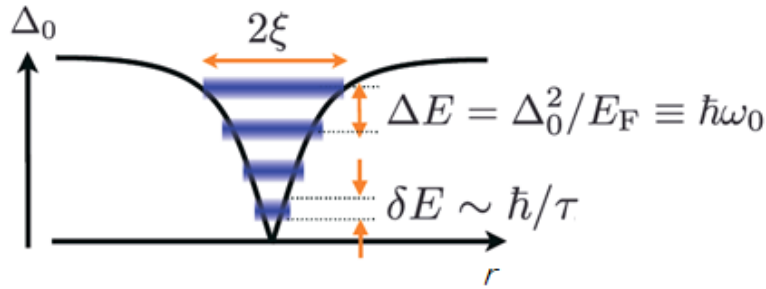


図 1.5: 渦糸コア内の CdGM 状態. 半径  $\xi$  程度のコア内に低エネルギー束縛状態が存在し, そのエネルギー準位間隔  $\Delta E$  は  $\hbar\omega_0$ , エネルギー準位幅  $\delta E$  は  $\hbar/\tau$  で表される.

渦糸コア内の準粒子状態に関する実験結果として, 従来型超伝導体である  $\text{NbSe}_2$  や  $\text{Nb}_{1-x}\text{Ta}_x\text{Se}_2$  に対する STS で, 渦糸コア内のゼロバイアス付近の状態密度において常

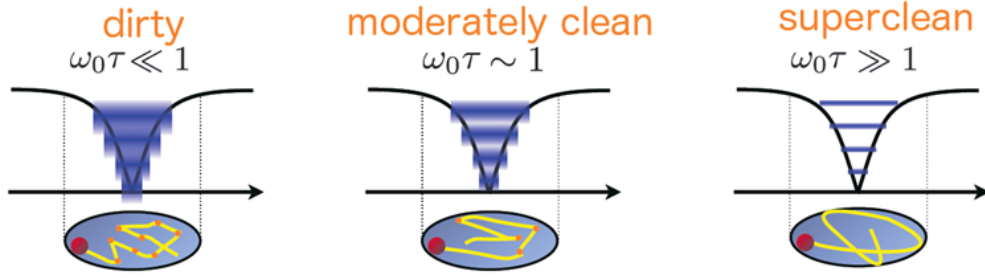


図 1.6: 磁束量子コア内の状態. dirty な渦糸コアでは準粒子励起スペクトルは連続的になるのに対し, super clean な渦糸コアでは, 量子的であることが期待される.

伝導状態より大きなピークが観測されている (図 1.7)[15, 23]. 銅酸化物超伝導を対象とした STS においても, 微分コンダクタンスに CdGM 状態によるピークが報告されている (図 1.8)[24, 25, 26].

### 1.1.6 フラックスフロー

混合状態にある超伝導体に対し, 外部電流を加えることを考える. このとき, 欠陥や不純物によるピン止めを無視すると, 駆動電流に起因する Lorentz 力あるいは Magnus 力により渦糸が流れ始める [20, 17, 27, 28]. その結果, 渦糸が運動することで生じる散逸による粘性抵抗と外部電流による駆動力が最終的に釣り合い, 渦糸はフラックスフロー (flux flow) と呼ばれる定常的な運動状態となる. このフラックスフローを理解するために, まず, 渦糸コア内を常伝導金属とみなす, 渦糸の基本的なモデルである Bardeen-Sthepen モデル [20] を考える. 渦糸コアは常伝導状態であるので駆動電流  $\mathbf{J}$  により Lorentz 力  $\mathbf{F}_L = \Phi_0 \times \mathbf{J}$  が渦糸に働く. これにより渦糸は速度  $\mathbf{v}$  で動き, このとき Faraday の法則より  $\mathbf{E} = \Phi_0 \times \mathbf{v}$  の電場が生じる (図 1.9). すなわち, フラックスフローでは超伝導体にオーミックな有限の抵抗 (フラックスフロー抵抗) が生じ, 超伝導状態の特徴の一つであるゼロ抵抗状態が破れている.

### 1.1.7 渦糸コア内の準粒子状態とフラックスフローの関係

渦糸コア内の量子状態とフラックスフローは密接に結び付いていることが知られている. 以下に, その詳細を Blatter の議論に基づいて説明する [17].  $z$  軸方向に外部磁場  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  が印加されていて,  $x$  軸方向に電流密度の大きさが  $j$  である駆動電流  $\mathbf{J} = (j, 0, 0)$  が加えられている状況を考える. このとき, 駆動力として Lorentz 力を考

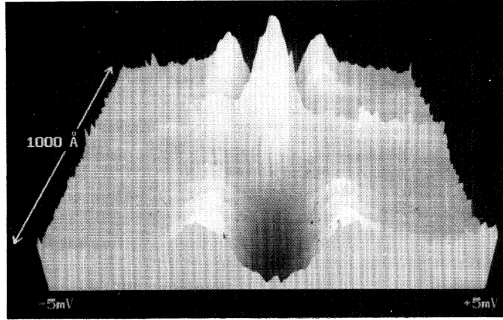


図 1.7: STS による  $\text{NbSe}_2$  の渦糸付近の準粒子励起スペクトルの状態密度 [15].

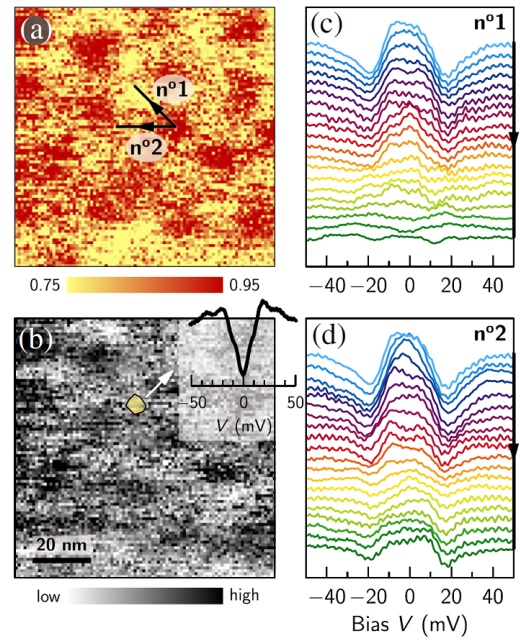


図 1.8: STS で観測された  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$  の CdGM 状態 [26].

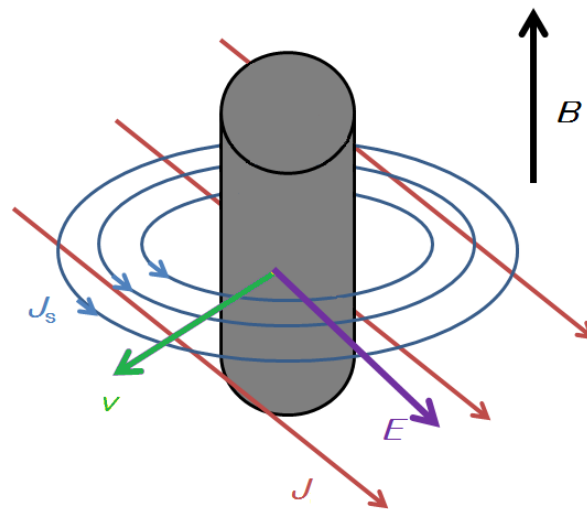


図 1.9: 駆動電流下の磁束量子コアの模式図．磁束量子のその周りに超伝導電流  $J_s$  の渦が生じている．そこに外部電流  $J$  を流すと、磁束量子が駆動力を受け速度  $v$  で運動し、それと垂直方向に電場  $E$  が発生する．

えると,

$$\mathbf{F}_L = \Phi_0 \hat{z} \times \mathbf{J} \quad (1.3)$$

の力が渦糸に加わる．一方，渦糸の運動に伴う散逸過程による粘性抵抗力  $\mathbf{F}_l$  として速度  $\mathbf{v}$  に比例する力を考えると，定常状態では力のつり合いから以下の式が成り立つ．

$$\Phi_0 \hat{z} \times \mathbf{J} = \eta \mathbf{v} + \alpha_H \hat{z} \times \mathbf{v} \quad (1.4)$$

ただし， $\eta$  は粘性抵抗係数， $\alpha_H$  はその Hall 方向に関する定数 (Hall 定数) である．一方，電場  $\mathbf{E}$  と伝導度テンソル  $\tilde{\sigma}$  の対角成分  $\sigma_{xx}$  と非対角成分  $\sigma_{xy}$  を考えると，電流密度  $\mathbf{J}$  に関して次の式が成り立つ．

$$\mathbf{J} = \sigma_{xx} \mathbf{E} + \sigma_{yx} \hat{z} \times \mathbf{E} \quad (1.5)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \quad (1.6)$$

$$\sigma_{yx} = \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + (\omega_c \tau)^2} \quad (1.7)$$

ここで， $e$  は電気素量， $\tau$  は準粒子緩和時間， $m$  は電子質量， $n$  は準粒子密度として， $\sigma_0 = ne^2 \tau / m$  (直流電気伝導度)， $\omega_c = eB/m$  (サイクロトロン周波数) である．Faraday の法則より  $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$  と書き換えてから (1.5) の両辺において  $\Phi_0 \hat{z}$  との外積を考えると

$$\begin{aligned} \Phi_0 \hat{z} \times \mathbf{J} &= -\Phi_0 B \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \mathbf{v} - \Phi_0 B \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + (\omega_c \tau)^2} \hat{z} \times \mathbf{v} \\ &= -\pi \hbar n \frac{\omega_c \tau}{1 + (\omega_c \tau)^2} \mathbf{v} - \pi \hbar n \frac{(\omega_c \tau)^2}{1 + (\omega_c \tau)^2} \hat{z} \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.8)$$

と計算できる．渦糸コア中の準粒子においてサイクロトロン周波数に対応する周波数はエネルギー準位間隔  $\hbar \omega_0$  によって与えられるので  $\omega_c \rightarrow \omega_0 = eB_{c2}/m$ ， $-n \rightarrow 2n$  と置き換え (1.4) と比較すると

$$\eta = \pi \hbar n \frac{\omega_0 \tau}{1 + (\omega_0 \tau)^2} \quad (1.9)$$

$$\alpha_H = \pi \hbar n \frac{(\omega_0 \tau)^2}{1 + (\omega_0 \tau)^2} \quad (1.10)$$

$$\tan \theta = \frac{\alpha_H}{\eta} = \omega_0 \tau \quad (1.11)$$

が得られる．これらの式から渦糸コア内の準粒子状態と渦糸のダイナミクスが結びついていることがわかる．なお，Larkin と Ovchinnikov[29] や Kopnin と Kravtsov[30] による pure な超伝導体に対する微視的な計算でも同様の結論が得られている．

運動方程式の各成分をより具体的に考えると，力のつり合いから

$$\Phi_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_H \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta v_x - \alpha_H v_y \\ \eta v_y + \alpha_H v_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．したがって， $x$  方向と  $y$  方向に対する渦糸の速さは，それぞれ

$$v_x = \frac{\alpha}{\eta} \cdot \frac{j\Phi_0}{\eta(1 + \eta^2/\alpha_H^2)} \quad (1.12)$$

$$v_y = \frac{j\Phi_0}{\eta(1 + \eta^2/\alpha_H^2)} \quad (1.13)$$

であることがわかる．このとき，粘性抵抗力による散逸  $W$  を考えると

$$W \sim F_l \cdot v = \eta v^2 = \frac{(j\Phi_0)^2}{\eta + \alpha_H^2/\eta} \quad (1.14)$$

である．一方で，散逸  $W$  は抵抗  $R$  と電流  $I$  から

$$W \sim RI^2 = \frac{\rho_f \Phi_0 j^2}{B} \quad (1.15)$$

と表すこともできる．ただし， $\rho_f$  はフラックスフロー抵抗率である．したがって，実行粘性抵抗係数  $\eta_{eff}$  を

$$\eta_{eff} \equiv \eta + \frac{\alpha_H^2}{\eta} = \pi \hbar n \omega_0 \tau \quad (1.16)$$

で定義すると，(1.14)(1.15) から，フラックスフロー抵抗率  $\rho_f$  と実行粘性抵抗係数  $\eta_{eff}$  は以下の関係をもつ．

$$\rho_f = \frac{B\Phi_0}{\eta_{eff}} \quad (1.17)$$

この式を書き換えると

$$\omega_0 \tau = \frac{B\Phi_0}{\pi \hbar n \rho_f} \quad (1.18)$$

であるので，渦糸コア内の準粒子状態は，フラックスフロー抵抗率の測定によっても評価することが可能であることが分かる [31]．

### 1.1.8 ピン止めとフラックスフロー

これまではフラックスフローの本質的な性質を考えるために、渦糸が自由に流れる状況を考えてきた。しかし、実際の結晶では不純物や格子欠陥、転移、結晶粒界などによる不均一性、乱れが存在する。超伝導体中にそれらの影響で、超伝導状態になっていない部分があったとすると、渦糸コアはその部分にいた方がエネルギー的に得である。つまり、渦糸の感じるポテンシャルは欠陥部分で低くなっていて、渦糸を安定点からほかの部分に動かそうとすると、それを引き戻す力が働く。この現象は渦糸のピン止めと呼ばれる。ピン止めにより、渦糸は外部電流から力を受けても、電流密度が臨界電流以下では静止し続ける。なお、超伝導体を実用する場合の多くはゼロ抵抗状態を利用するものであるので、渦糸が運動して抵抗が発生するのは好ましくない。そのため、高エネルギー粒子の照射など様々な方法により人工的にピン止めを強くすることで、臨界電流を大きくする研究が盛んに行われている [32, 33]。

また、有限温度では熱ゆらぎのため、渦糸が安定点から別の安定点へジャンプする磁束クリープと呼ばれる現象が起こる。この磁束クリープを定式化することで、線形のエネルギー散逸が得られることが知られている [34, 35]。従来型超伝導体ではこのオーミックな磁束クリープを観測することはできなかったが、高温超伝導体ではピン止めエネルギーの小ささからオーミックな磁束クリープを観測できる。これは、フラックスフローと同様に渦糸の運動によるオーミックな抵抗を生じることから、Thermally Assisted Flux Flow (TAFF) と呼ばれる。

#### 1.1.8.1 高周波領域でのフラックスフロー測定

これまでの駆動力  $\mathbf{F}_L$  と粘性抵抗  $\mathbf{F}_l$  に加えてピン止めを考慮すると、 $\mathbf{u}$  を渦糸の位置ベクトル、 $\kappa_p$  をピン止め定数として、力のつり合いから次の式が成り立つ。

$$\Phi_0 \hat{z} \times \mathbf{J} = \eta \dot{\mathbf{u}} + \alpha_H \hat{z} \times \dot{\mathbf{u}} + \kappa_p \mathbf{u} \quad (1.19)$$

したがって、 $e^{-i\omega t}$  の時間依存性で変化する駆動力を考えると、渦糸の速さ  $v$  は

$$v = \frac{j\Phi_0}{\eta_{eff}} \frac{1}{1 + i\omega_p/\omega} e^{-i\omega t} \quad (1.20)$$

であることが計算できる。この結果から、駆動周波数  $\omega$  がクロスオーバー周波数  $\omega_p \equiv \kappa_p/\eta_{eff}$  より十分大きいときには、ピン止めの影響を無視できることがわかる。つまり、高周波領域での系統的測定をすることにより、ピン止めの影響を取り除いたフラックスフローの測定が可能となる [36]。図 1.10 は超伝導状態における表面インピーダンスの周波数依存性の測定結果を示している。低周波領域では渦糸の運動はピン止めポテンシャル中の振動でリアクティブなものであるが、高周波領域ではピン止めの影響が無視できるため、表面インピーダンスが増加し、散逸的な運動になっている。

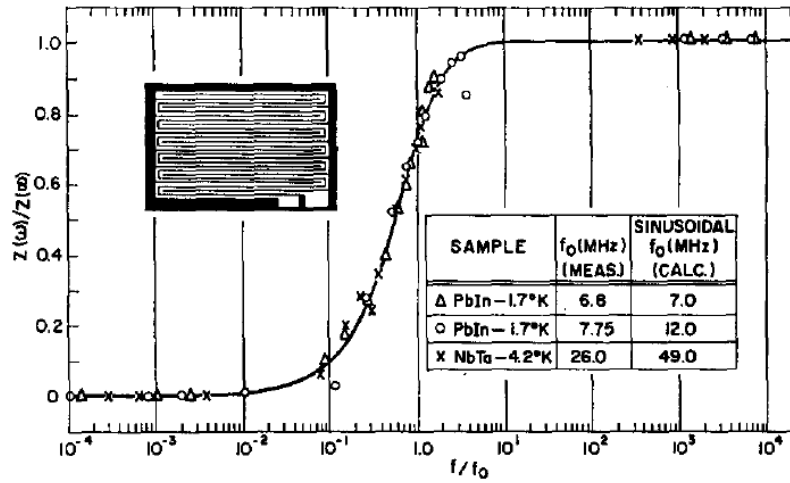


図 1.10: 表面インピーダンスの周波数依存性 [36]. 低周波領域では表面インピーダンスはゼロであるが、高周波領域ではピン止めの影響が無視できるため、表面インピーダンスが増加し、散逸的な運動になっている。

### 1.1.9 これまでのフラックスフローの測定結果

前述したように実効粘性抵抗係数は準粒子状態と簡単な関係式 (1.16) で結ばれている。このため、これまでの研究では、円筒形空洞共振器摂動法 [37, 38, 39] による測定でフラックスフローでの実行粘性抵抗係数が調べられ、そこから渦糸コア内の準粒子状態  $\omega_0\tau$  が評価されてきた [31]。例えば、銅酸化物超伝導体  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$  (YBCO) では実効粘性抵抗係数の測定から得られた磁束量子コア内の  $\omega_0\tau$  は、0.3 程度であることが報告されている [40]。また、渦糸コア内の平均自由行程はコヒーレンス長程度であるが [41], YBCO のコア外の平均自由行程はそれよりも 2 桁程度大きく [42], 渦糸コア内で平均自由行程が抑制されていることが分かっている。さらに、YBCO に Zn をドーピングすることでコアのクリーンさを系統的に変化させた測定でも、コア内は不純物の量にほとんどよらず一様に moderately clean であるという結果が得られている (図 1.11) [41]。銅酸化物超伝導体ではエネルギーギャップが大きく ( $\sim 0.01$  eV), フェルミエネルギーが小さい ( $\sim 0.1$  eV) ことにより  $\Delta E$  が大きい ( $\sim 1$  meV) ことや、YBCO を対象とした STS の測定結果から、量子化されたエネルギー準位を示すとされる結果 [24] が得られていることから、渦糸コアは superclean なコアであることが期待されたが、この結果は、予想とは異なりコア内は moderately clean であるということを意味している。このコア内が moderately clean であるという性質は他の銅酸化物超伝導体でも報告されている [43, 44]。さらに、2 ギャップ超伝導体である  $\text{Y}_2\text{C}_3$  [45] やフェルミエネルギーと超

伝導ギャップの大きさが同程度で [46], 純良な単結晶が作製できることが知られている [47] ことから superclean なコアであることが期待されていた FeSe などの鉄系超伝導体においてもコア内は moderately clean であることが報告されている [48, 49]. したがって, 渦糸コア内が moderately clean であるという性質は渦糸の運動状態において普遍的に見られている. このことは, 渦糸の運動状態において追加的な散逸を生じさせる普遍的なメカニズムが存在する可能性も示唆している. その原因として Andreev 反射 [50] やスペクトラルフロー [51, 52] など可能性として考えられるが, これまでのところ, これらの結果を説明する十分な理論的理解は得られていない.

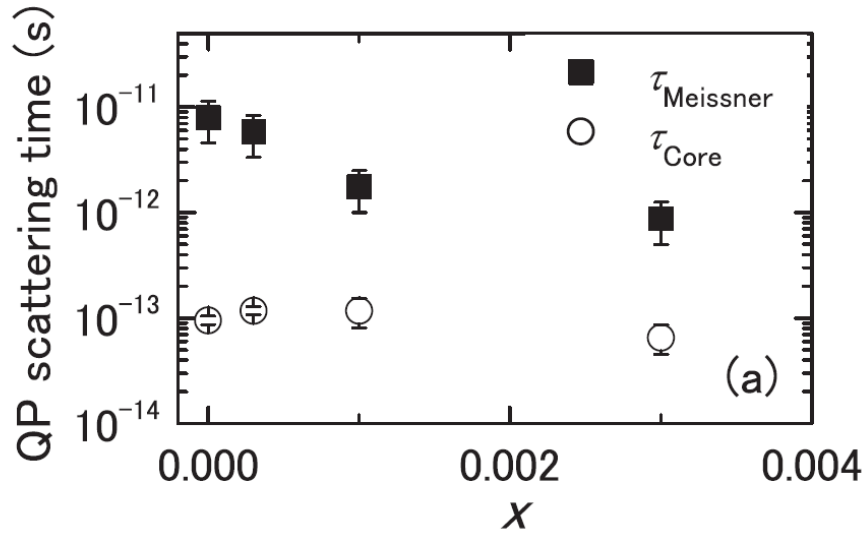


図 1.11:  $\text{YBa}_2(\text{Cu}_{1-x}\text{Zn}_x)_3\text{O}_y$  のコア内外における準粒子緩和時間 [41]. コア内外で準粒子緩和時間が異なりコア内で寿命が2桁程度短くなっている. また Zn をドーピングしてもコア内の準粒子緩和時間  $\tau_{\text{core}}$  は大きく変化していない.

### 1.1.10 フラックスフロー Hall 効果

一般に, フラックスフローでは渦糸は駆動電流と垂直方向だけでなく平行な方向にも運動をするので, 電流と垂直な方向にも電場が発生する (図 1.12). この現象はフラックスフロー Hall 効果と呼ばれる [17, 53, 54, 28]. (1.9)-(1.11) から分かるように,  $\omega_0\tau$  が 1 よりも十分小さい dirty limit では, 渦糸は駆動電流と垂直に運動し, Hall 角  $\theta$  は微小となる. このとき, 渦糸に働く力は渦糸の運動に平行な散逸的な項が支配的となる. 一方,  $\omega_0\tau$  が 1 よりも十分大きい superclean limit では, 渦糸は駆動電流と平行に運動し, Hall 角は  $\pi/2$  に近づく. また, 渦糸に働く力は非散逸的な項が支配的となる.

渦糸コア内の準粒子状態との関係について述べると、(1.11) から明らかなようにフラックスフロー Hall 効果はコア内の準粒子状態  $\omega_0\tau$  と直接的に結び付いている．一方で、縦フロー抵抗とフラックスフロー Hall 効果の両方の寄与を合わせた物理量である実効粘性抵抗係数も (1.16) に示すように、準粒子状態と簡単な関係で結ばれている．そのため、これまでの研究では、縦フロー抵抗、フラックスフロー Hall 効果の両方を別々に測定するのではなく、比較的測定が容易な、電流が環状に流れるマイクロ波の円筒形空洞共振器を用いた測定から、フラックスフローでの実効粘性抵抗係数が調べられ、そこから準粒子状態が評価されてきた [31]．ところが、すでに述べたように、その結果は予想と異なり、どの超伝導体でもコアの状態が moderately clean であるという結論が得られている．しかしながら、これまでの研究でのコア内の状態の評価は、粘性抵抗係数と Hall 定数が混ざった形式である実効粘性抵抗係数に基づくものであるので、実効粘性抵抗係数による評価は真の準粒子状態を反映していないことも考え得る．そのため、フラックスフロー Hall 効果測定で渦糸コア内部を別の観点から新たに評価することで、これまでとは異なる真の渦糸コアの描像を得られる可能性がある．しかしながら、実験的には、高周波領域でフラックスフロー Hall 効果を測定した研究はこれまでに報告されていない．

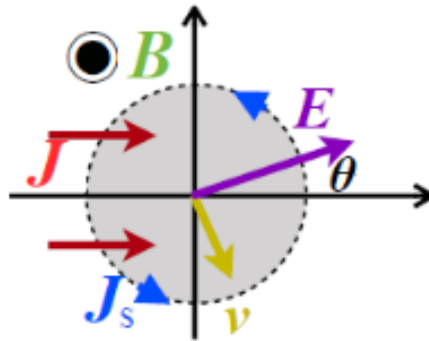


図 1.12: 渦糸の運動によるフラックスフロー Hall 効果．電場  $E$  が外部電流  $J$  に対して角度  $\theta$  で生じる．

フラックスフロー Hall 効果の理論に関して述べると、まず初期の現象論的な理論として、dirty limit における渦糸コア内の常伝導電子の寄与を考え、渦糸コアに働く Lorentz 力からフラックスフロー Hall 効果を計算した Bardeen-stephen モデルが知られている [20]．このモデルでは渦糸コアを常伝導コアとみなしているの、超伝導状態における Hall 効果は常伝導状態における Hall 効果と同じになり、例えばフラックスフロー Hall 角の大きさ  $\tan \theta$  は磁場に比例する．あるいは、反対の superclean limit における初期の現象論的理論として、Nozières らによる渦糸に働く力を Magnus 力とみなし、その下

でフラックスフロー Hall 効果を考えた流体力学的なモデルも知られている [27, 55]. このモデルでは Magnus 力を考えているので, Hall 角は磁場に依存しない. その後, 微視的な理論として, clean な超伝導体に対する Green 関数を使用した計算が Kopnin らによってなされている [30, 56]. それによると, superclean な場合では Hall 角は一定となり, moderately clean な場合では  $\tan \theta \propto A_1 + A_2 B$ ,  $A_2 B \ll A_1$  となり Hall 角は磁場に比例する微小な項と磁場に依らない項の和で表される. この理論は s 波超伝導体に対する計算であるが, その後, d 波超伝導体に対しても Green 関数を用いた微視的な計算がなされ, moderately clean な場合において s 波超伝導体と同様の Hall 角の磁場依存性が得られている [57]. これらの結果をまとめると, フラックスフロー Hall 角の磁場依存性は図 1.13 に示すようになる. これらに加えて, 準古典方程式に基づく理論計算が数多く行われている [58, 59, 60, 61]. 上記の理論は, 主に温度が  $T_c$  より十分低い場合を考えているが, 温度が  $T_c$  近傍である場合のフラックスフロー Hall 効果の理論として, Time Dependent Ginzburg Landau (TDGL) 方程式に基づくものも知られている [62, 63]. これらの理論では TDGL 方程式の緩和項に虚部を導入することで, TDGL 方程式によるフラックスフローの解析を拡張し, フラックスフロー Hall 効果を解析している.

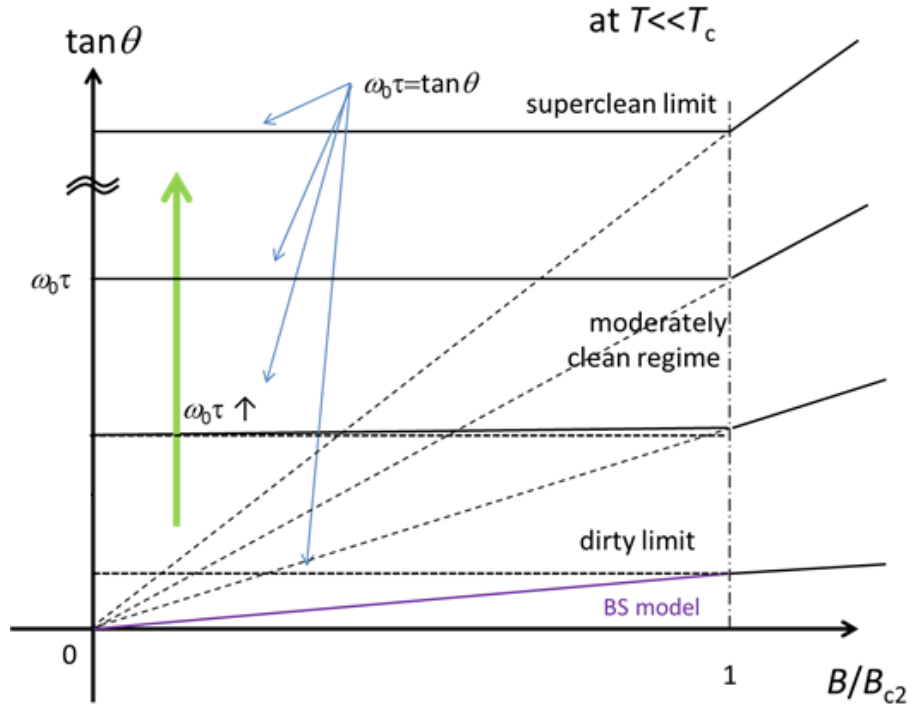


図 1.13: 理論から期待されるフラックスフロー Hall 角の磁場依存性 [20, 30, 27, 55, 56].

### 1.1.11 混合状態における Hall 抵抗率の符号反転

ここで、混合状態での Hall 効果に関する別の興味深い現象として、Hall 抵抗の符号反転する現象があることを述べておく。具体的には、V や Nb といった従来型超伝導体や一部の高温超伝導体において、混合状態における Hall 抵抗率の符号が、常伝導状態の符号と異なることが知られている (図 1.15, 図 1.14)[64, 65, 66, 67]。さらに、近年では  $\text{Ba}(\text{Fe}_{1-x}\text{Co}_x)_2\text{As}_2$  などの鉄系超伝導においても同様の符号反転が報告されている [68, 69, 70, 71]。一般的に常伝導状態での Hall 効果の振る舞いはフェルミ面における電子構造を反映している。その一方で、混合状態では渦糸の運動が Hall 効果の振る舞いに寄与していると考えられる。しかしながら、この Hall 抵抗率の符号反転といった振る舞いは基本的な渦糸の運動モデルでは説明することができない。例えば、先程も紹介した渦糸コアを常伝導コアとみなす Bardeen-Stephen モデルでは混合状態での Hall 抵抗率の符号は常伝導状態と同じである。同様に、Nozières らによる流体力学的なモデルでは、渦糸に Magnus 力が働くが Hall 抵抗率の符号は常伝導状態と同じになる。

この現象の発見以来、その原因を説明するためのいくつかの理論が提唱されてきた。その中の一つが超伝導揺らぎによるもので、Fukuyama らは Hall 伝導度が TDGL 方程式における電子-hole 非対称性の結果として現れることを示した [72]。同様に Aronov らは TDGL 方程式においてゲージ不変性を要請することで Hall 伝導度の符号が決まることを示した [73]。しかし、それらの理論を銅酸化物超伝導体に適用すると、測定結果とは逆の符号が与えられ、実験結果をうまく説明することはできていない [74]。その他にも、Wang らはピン止めによるバックフローが Hall 効果に影響を持つことを示した [75]。また、Kopnin らは十分強いピン止めは符号反転を起こし得ることを示した [76]。さらに、vortex core charging[77] や渦糸の多体相関 [78] などがその起源の可能性として指摘されている。しかしながら、Hall 抵抗率の符号反転の起源は未だに議論されておりコンセンサスは得られていない。

本研究と関連して、Hall 抵抗の符号反転の起源を明らかにするために、新たに鉄系超伝導体  $\text{FeSe}_{1-x}\text{Te}_x$  薄膜を対象として超伝導転移温度近傍における直流 Hall 効果測定を行ったので、その結果を付録 B に示す。

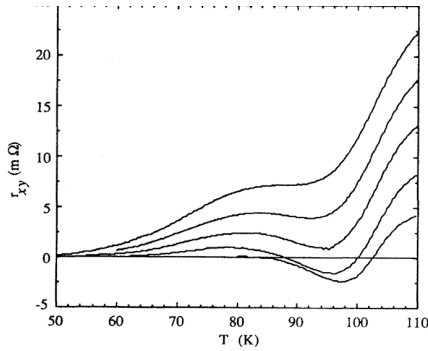


図 1.14:  $\text{Th}_2\text{Ba}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  薄膜における Hall 抵抗の 2 重符号反転 [66].

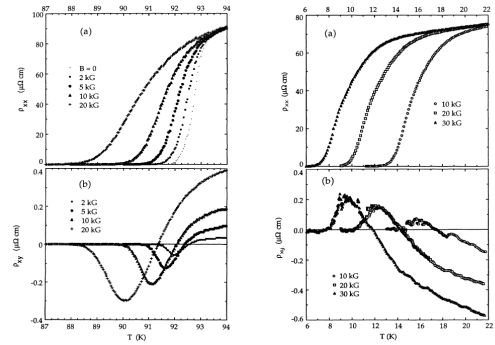


図 1.15:  $\text{YBa}_2\text{C}_3\text{O}_7$  薄膜 (左) と  $\text{Nd}_{1.85}\text{Ce}_{0.15}\text{CuO}_{4-y}$  単結晶 (右) での Hall 抵抗率の符号反転 [67].

## 1.2 本研究の目的

超伝導渦糸コア内には低エネルギー束縛状態がある．その渦糸コア内の準粒子状態はフラックスフローと深い関連性をもつことから，これまで円筒形空洞共振器摂動法によるフラックスフローにおける実行粘性抵抗係数の測定から，渦糸コア内の準粒子状態が調べられてきた．そこから明らかになったのは，STS での測定や理論からの予想に反して，銅酸化物超伝導体や鉄系超伝導体など，クリーンなコア内の清浄さが期待される物質で，コア内は一様に moderately clean であるということである．しかしながら，この測定結果が意味するものについて，既存の理論では十分な理解が得られておらず，そのメカニズムは謎となっている．フラックスフローにおける粘性抵抗係数はテンソル量であり，それを調べるには，縦フロー抵抗とフラックスフロー Hall 効果の両方の測定が必要となる．その一方で，縦フロー抵抗とフラックスフロー Hall 効果の両方の寄与を合わせた物理量である実効粘性抵抗係数は渦糸コア内の準粒子状態と簡単な関係で結ばれている．そのため，これまでの研究では，縦抵抗，Hall 効果の両方を別々に測定するのではなく，電流が環状に流れるマイクロ波の円筒形空洞共振器を用いた測定から，フラックスフローでの実行粘性抵抗係数が調べられ，準粒子状態が評価されてきた．したがって，渦糸コア内の準粒子状態の性質のより詳しい解明のためには，実効粘性抵抗係数だけではなく，縦方向と横方向の測定，特に，渦糸コア内の準粒子状態と一対一に対応しているフラックスフロー Hall 角の測定を行う必要がある．そこで本研究は，フラックスフロー Hall 効果を初めて直接的に測定することで，渦糸の運動状態におけるコア内の量子状態や，渦糸の運動の性質を明らかにすることを目的とする．

## 1.3 マイクロ波 Hall 効果測定

### 1.3.1 マイクロ波 Hall 効果

マイクロ波とは電磁波を波長によって分類したものの一つで、波長が短い周波数帯の電磁波を意味し、広義には波長が 1 m から 1 mm 程度、つまり、周波数が 300 MHz から 300 GHz 程度の電磁波を指す。磁場中の試料に対してマイクロ波領域の電磁場が加えられたとき、Hall 方向にもまたマイクロ波領域の周波数で応答する。このような Hall 効果はマイクロ波 Hall 効果と呼ばれる。マイクロ波 Hall 効果測定の手法としては、2つの直交モードの結合を利用した共振器による測定や [79]、Farady 回転に基づく非共鳴的な方法などが知られている [80]。高周波領域での Hall 効果の応答を調べるため、あるいは、空气中を伝播するマイクロ波を利用しているので、試料への直接的な接触無しに測定を行うことができることから、粉末状の試料など通常の電極端子を取り付ける方法では測定が困難な物質の物性を調べるために、マイクロ波 Hall 効果の測定が古くから行われてきた [81]。本研究ではピン止めの影響を取り除いたフラックスフロー Hall 効果測定を行うため、周波数が 10 GHz オーダーの領域でのマイクロ波 Hall 効果測定を行う。

### 1.3.2 2重縮退モード空洞共振器

マイクロ波 Hall 効果測定の代表的な手法が 2重縮退モード空洞共振器によるものである [79, 82]。2重縮退モード空洞共振器とは、電磁波をその内部に入射したときに、直交する 2つの縮退モードが励起する共振器のことである (図 1.16, 図 1.17)。先行研究における二重縮退モード空洞共振器によるマイクロ波 Hall 効果測定の原理を簡単に説明すると以下の様になる。直交する 2重縮退モードが存在可能な共振器 (例えば、 $TE_{101}$  モードと  $TE_{011}$  モードが縮退している矩形共振器) の中央に試料を配置する。そして、入力アンテナを片方の直交するモード ( $TE_{101}$  モード) とカップリングさせ、出力アンテナをもう一方の直交するモード ( $TE_{011}$  モード) とカップリングさせておく。次に、入力アンテナからマイクロ波を入射することで、直交する片方のモードのみを励起させる。このとき、試料の Hall 効果が存在しないならば、出力アンテナからは、何も信号は検出されない。一方で、試料の Hall 効果が存在する場合には、直交する 2つのモードが Hall 効果を通してカップリングする。その結果として、出力アンテナから信号が検出される (図 1.18)。言い換えると、直交する 2重縮退モード空洞共振器でのマイクロ波の入出力を観測することで、試料のマイクロ波 Hall 効果を調べることができる。

先行研究における 2重縮退モード空洞共振器によるマイクロ波 Hall 効果測定の主な例をまとめると表 1.1 のようになる。先行研究では、主に半導体や有機物などを対象としたマイクロ波 Hall 効果の測定・解析が行われている。一方、本研究は伝導度の高い

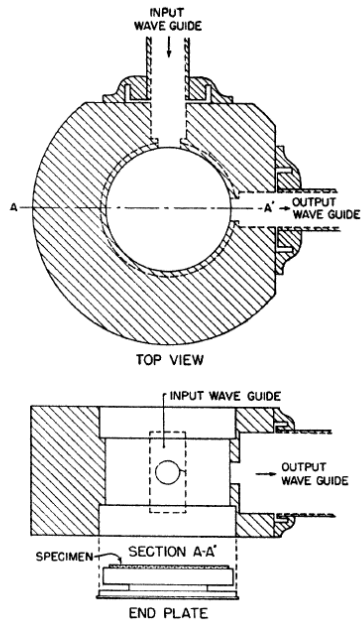


図 1.16: 円筒形 2 重縮退モード空洞共振器 [79].

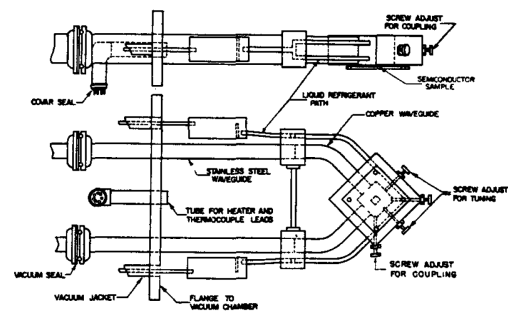


図 1.17: 矩形型 2 重縮退モード空洞共振器を用いた測定装置 [83].

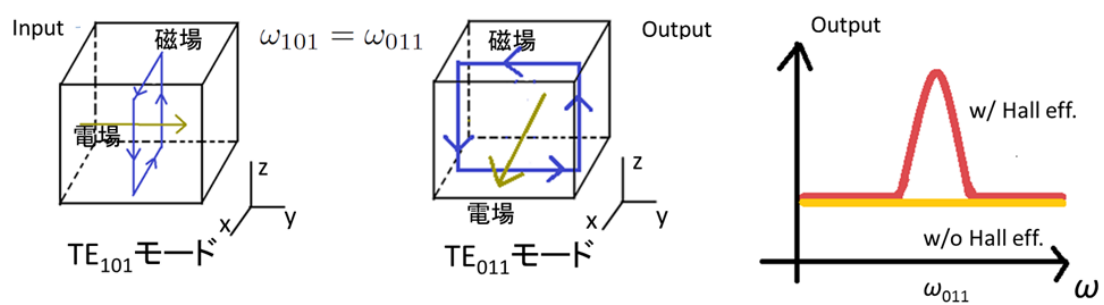


図 1.18: 2 重縮退モード空洞共振器による Hall 効果測定の概念図．直交する 2 重縮退モードが試料の Hall 効果でカップリングし，出力信号に変化が生じる．

物質に対するマイクロ波 Hall 効果測定を行うものである．マイクロ波 Hall 効果の解析手法としては移動度の低い物質 [84] や、やや伝導度の高い物質に対するもの [85] がこれまでに知られているが、表皮厚さ領域の物質に対する解析手法の報告例は調べた限りでは見当たらない．また、先行研究での測定ではその測定精度を向上させるためにネジなどによる縮退モードのカップリング調整機構 (図 1.19-1.20) を持つ共振器が多く用いられているが、報告されている測定はほぼ室温でのものであり、フラックスフロー Hall 効果を調べるのに必要な極低温において、同様の機構でカップリング調整を行うのは容易ではないと思われる．したがって、フラックスフロー Hall 効果測定を行うためには、表皮厚さ領域の物質に対する極低温でのマイクロ波 Hall 効果測定の手法を新たに開発することが必要である．

表 1.1: これまでのマイクロ波 Hall 効果測定の主な例

Cyl., Rect., Crossed W. G. はそれぞれ円筒形共振器，矩形共振器，交差した導波管を意味している．また，R.T. は室温での測定を意味する．

1st Author	年度	形状	$f$ (GHz)	$Q$	$T$ (K)	$B$ (T)	物質	引用
S. Cooke	1948	Cyl.	9	—	R.T.	0.3	Metals	[79]
E. Portis	1958	Cyl.	X Band	—	R.T.	—	$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$	[82]
G. Hambleton	1959	Crossed W.G.	20	—	80	1	Si, Ge	[86]
N. Watanabe	1961	Cyl.	24	—	100	0.5	Ge	[87]
Y. Nishina	1961	Rect.	9	2000	30	0.2	Ge	[88, 89]
M. Sayed	1975	Cyl.	9	2200	R.T.	0.7	CdS	[84, 90]
J. Fletcher	1976	Rect.	X band	6500	R.T.	1	ZnO	[91]
N. Ong	1977	Cyl.	9	—	R.T.	1.2	TTF-TCNQ	[92]
T. Cross	1980	Cyl.	33	15000	R.T.	—	Biopolymers	[93]
N. Ong	1981	Cyl.	9	3000	R.T.	—	Si	[85]
D. Eley	1983	Cyl.	9	9500	R.T.	1.2	Biological samples	[94]
F. Kuchar	1986	Crossed W.G.	33	—	2.2	8	GaAs-AlGaAs	[95]
M. Dressel	1991	Cyl.	10	—	R.T.	0.8	BEDT-TTF, YBCO	[96]
B. Na	1992	Cyl. and Rect.	X band	4000	R.T.	0.5	ZnO	[97]
L. Chen	1998	Cyl.	X band	2000	R.T.	0.3	Iron oxide	[98]
E. Prati	2003	Cyl.	20	—	R.T.	0.6	GaAs, ZnSe	[99]
A. Al-Zoubi	2005	Cyl. and Rect.	X band	6000	R.T.	—	Organic semiconductors	[100]
D. Murthy	2006	Cyl.	10	3000	R.T.	0.6	Si, InSb	[101]
D. Murthy	2008	Cyl.	14	3100	R.T.	0.6	C-nanotube	[102]

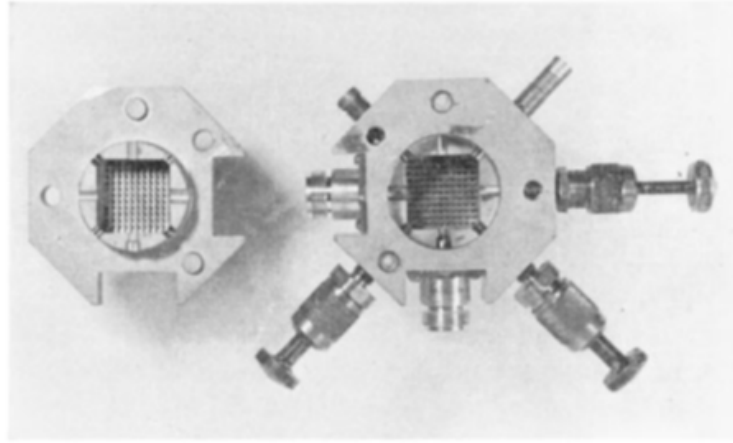


図 1.19: ネジによるカップリング調整機構をもつ 2 重縮退モード空洞共振器 (1)[91].

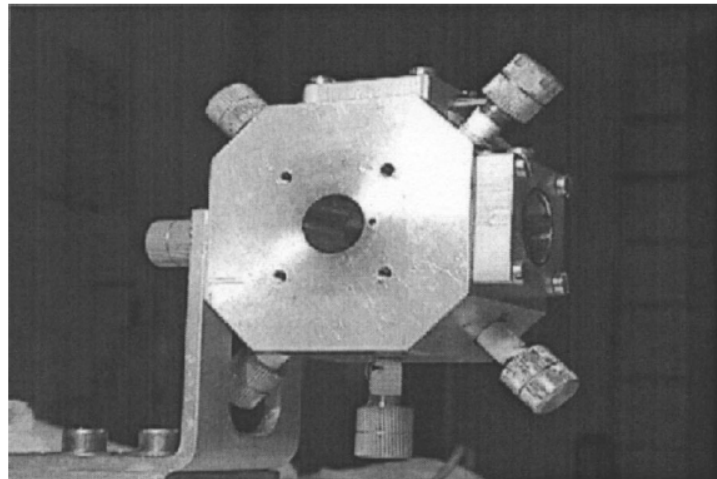


図 1.20: ネジによるカップリング調整機構をもつ 2 重縮退モード空洞共振器 (2)[99].

## 1.4 本章のまとめ

超伝導渦糸コア内には低エネルギー束縛状態がある．渦糸コア内の準粒子状態は，外部電流による渦糸のフラックスフローと深く関係していることから，これまでの研究では，フラックスフローにおける実行粘性抵抗係数が調べられ，準粒子状態が評価されてきた．そこから明らかになったのは，STS での測定や理論からの予想に反して，銅酸化物超伝導体や鉄系超伝導体など，異なるコア内の清浄さが期待される物質で，コア内は一様に moderately clean であるということである．しかしながら，この測定結果が意味するものについて，既存の理論では十分な理解が得られていない．したがって，そのメカニズム解明のためには，実効粘性抵抗係数だけではなく，縦方向と横方向の測定，特に，これまで測定に成功していない，渦糸コア内の準粒子状態と一対一に対応しているフラックスフロー Hall 角の測定を行う必要がある．

フラックスフロー Hall 効果の測定ではピン止めの影響を取り除いた高周波領域で測定を行わなければならない．そのため本研究では，以前から半導体などに対する測定などで用いられてきた 2 重縮退モード空洞共振器を用いることでフラックスフロー Hall 効果測定を行う．しかしながら，表皮厚さ領域の物質を対象とした解析手法の報告例は知る限りでは見当たらず，さらに，従来の手法では縮退モードのカップリング調節機構が必要であるなど極低温での測定が容易ではなかった．

そこで本研究では，極低温での表皮厚さ領域の物質に対するマイクロ波 Hall 効果測定手法を新たに開発することで，フラックスフロー Hall 効果を初めて測定することを目指す．そして，渦糸の運動状態におけるコア内の量子状態や，渦糸の運動の性質を明らかにすることを目的とする．

## 第2章 実験方法

本章では、十字型2重縮退モード空洞共振器によるマイクロ波 Hall 効果測定について、解析手法・実験装置・測定対象とした試料の順に詳しく述べていく。

### 2.1 解析手法

本研究の測定対象である物理量 Hall 角  $\tan \theta$  は以下のように表すことができる。

$$\tan \theta = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} \quad (2.1)$$

ここで、 $\sigma_{xx}$  と  $\sigma_{xy}$  は

$$\mathbf{J} = \tilde{\sigma} \mathbf{E} \quad (2.2)$$

で定義される伝導度テンソル  $\tilde{\sigma}$  の  $xx$  成分と  $xy$  成分である。ただし、電流密度を  $\mathbf{J} \equiv (j_x, j_y)$ 、電場を  $\mathbf{E} \equiv (E_x, E_y)$  とする。伝導度テンソル  $\tilde{\sigma}$  と表面インピーダンステンソル  $\tilde{Z}$  は、表皮厚さを  $1/\gamma$  で表すと

$$\tilde{Z} = \gamma \tilde{\sigma}^{-1} \quad (2.3)$$

の関係をもち、外部磁場が  $z$  軸方向を向いているとき、 $xy$  平面における試料の表面インピーダンステンソルは以下のように表わされる (詳細は付録を参照)。

$$\tilde{Z} \equiv \tilde{R} - i\tilde{X} = \begin{pmatrix} Z & Z^H \\ -Z^H & Z \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

ここで、 $\tilde{R}$  と  $\tilde{X}$  はそれぞれ、 $\tilde{Z}$  の実部 (表面抵抗テンソル) と虚部 (表面リアクタンステンソル) である。したがって、Hall 角は表面インピーダンステンソルの対角成分と非対角成分を用いて

$$\tan \theta = \frac{Z^H}{Z} \quad (2.5)$$

で表すことができる。

本研究では、十字型2重縮退モード空洞共振器に対して、共振器の  $\text{TE}_{011}$  モードと  $\text{TE}_{101}$  モードが縮退している場合の電磁場を解析的に計算した。その結果、十字型2重

縮退モード空洞共振器の共振特性と試料の表面インピーダンステンソルが、以下に示す式で表わされる関係をもつことが明らかになった。

$$\frac{1}{2Q_H} = G^L R + G^H |X^H| + D_0 \quad (2.6)$$

$$\frac{f_{H0} - f_H}{f_{H0}} = G^L X - G^H |R^H| + D \quad (2.7)$$

ここで、 $f_H$ , ( $f_{H0}$ ) は (理想的な場合の) 十字型 2 重縮退モード空洞共振器の共振周波数,  $Q_H$  は十字型 2 重縮退モード空洞共振器の Q 値,  $R$  と  $X$  は表面インピーダンステンソルの対角成分の実部と虚部,  $R^H$  と  $X^H$  は表面インピーダンステンソルの非対角成分の実部と虚部,  $G^L$  と  $G^H$  は試料や共振器の形状に依存する定数である幾何学因子,  $D$  と  $D_0$  は Q 値と共振周波数の変化に対する試料以外からの寄与を表す。

(2.6)(2.7) から分かるように,  $R$  と  $X$  が既知であれば十字型 2 重縮退モード空洞共振器の測定から  $R^H$  と  $X^H$  を得ることができる。また, (2.5) から分かるように, 表面インピーダンステンソルの各成分  $R$ ,  $X$ ,  $R^H$ ,  $X^H$  が得られれば, 試料の Hall 角が計算できる。そのため, 本解析手法で Hall 効果を調べるには, (1) 直流抵抗率測定, (2) 円筒形共振器を用いた表面インピーダンステンソルの対角成分の測定, (3) 十字型 2 重縮退モード空洞共振器による表面インピーダンステンソルの非対角成分の測定, という 3 つの測定が必要となる。本節では, (2) 円筒形共振器を用いた表面インピーダンステンソルの対角成分の測定と (3) 十字型 2 重縮退モード空洞共振器による表面インピーダンステンソルの非対角成分の測定について詳細を述べる。

### 2.1.1 円筒形共振器を用いた空洞共振器摂動法

本研究の解析手法では十字型 2 重縮退モード空洞共振器による測定に加えて, 試料の表面インピーダンステンソルの対角成分  $Z = R - iX$  を別の方法から評価する必要がある。そのため, 本研究では, 表面インピーダンステンソルの対角成分を通常の円筒形共振器による空洞共振器摂動法により評価する。空洞共振器摂動法では, 共振器内に試料が存在しないブランク測定と共振器内に試料が配置されたときにおける Q 値と共振周波数の変化から, 試料の表面インピーダンスを調べることができる [37, 38, 39]。この手法は非接触で物質の形状によらずにマイクロ波領域の物性を高感度に測定できるため, 一般的によく用いられている方法である。

円筒形共振器内にマイクロ波を入射すると, 様々な共鳴モードが励起されるが, 一般に空洞共振器摂動法では, 図 (2.1) に示すような電場が動径方向に回転し共振器中央で磁場が最大となる  $TE_{011}$  モードの下で, 試料の表面インピーダンスの測定を行う。共振器中央に試料が配置されているとき, 試料の表面抵抗  $R$  と表面リアクタンス  $X$  は,

共振のQ値  $Q$  と共振周波数  $f$  のシフトに対して以下の関係を持つ．

$$\left( \frac{1}{2Q_s} - \frac{1}{2Q_b} \right) = \Delta \left( \frac{1}{2Q} \right) = GR \quad (2.8)$$

$$\left( \frac{f_b - f_s}{f_b} \right) = \Delta \left( \frac{f}{f_b} \right) = GX + C \quad (2.9)$$

ここで、 $G$  と  $C$  は試料や共振器の形状に依存する定数であり、添え字の  $s$  と  $b$  は、それぞれ、共振器内に試料があるときとブランク測定での値を意味する．これらの式から試料の表面インピーダンスを調べるためには、まず幾何学因子  $G$  と  $C$  を決定する必要がある．したがって、例えば、超伝導状態における物性を調べたい場合には、常伝導状態において測定を行い、既知である常伝導状態での物理量を使用して  $G$  と  $C$  を決定する．具体的に述べると、常伝導状態の Hagen-Rubens 極限 ( $\omega\tau \ll 1$ ) では、表面抵抗と表面リアクタンスに対して以下の関係が成り立つ．

$$R = X = \sqrt{\mu_0 \omega \rho_{dc} / 2} \quad (2.10)$$

ここで、 $\mu_0$  は真空の透磁率、 $\omega = 2\pi f$  は角周波数、 $\rho_{dc}$  は直流縦抵抗率である．したがって、あらかじめ直流抵抗率測定を行い  $\rho_{dc}$  が得られているとすると、(2.8)(2.9) に  $R$  と  $X$ 、 $\Delta(1/2Q)$ 、 $\Delta(f/f_b)$  を代入することで  $G$  と  $C$  が決定できる．幾何学因子が一度決定されれば、超伝導転移温度以下におけるQ値と共振周波数の測定結果から、超伝導状態における表面抵抗  $R$  と表面リアクタンス  $X$  を知ることができる．

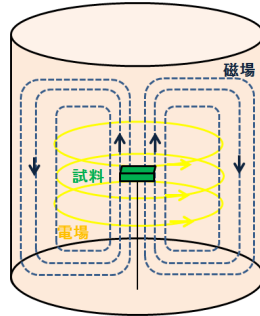


図 2.1: 円筒共振器における  $TE_{011}$  モードの電磁場．

### 2.1.2 十字型 2 重縮退モード空洞共振器による マイクロ波 Hall 効果測定

前述のように、十字型 2 重縮退モード空洞共振器内の電磁場を解析的に計算することで、十字型 2 重縮退モード空洞共振器の共振特性と試料の表面インピーダンステンソルが以下の関係を持つことが明らかになった．

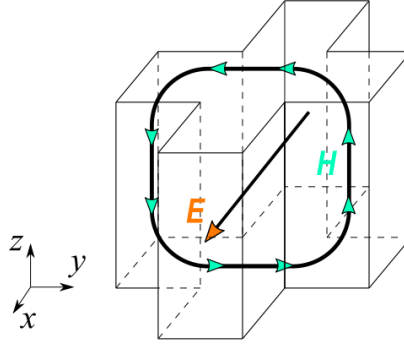


図 2.2: 十字型共振器における  $TE_{011}$  モードの電磁場.

$$\frac{1}{2Q_H} = G^L R + G^H |X^H| + D_0 \quad (2.11)$$

$$\frac{f_{H0} - f_H}{f_{H0}} = G^L X - G^H |R^H| + D \quad (2.12)$$

ここで,  $f_H$ , ( $f_{H0}$ ) は (理想的な場合の) 十字型 2 重縮退モード空洞共振器の共振周波数,  $Q_H$  は十字型 2 重縮退モード空洞共振器の Q 値,  $R$  と  $X$  は表面インピーダンステンソルの対角成分の実部と虚部,  $R^H$  と  $X^H$  は表面インピーダンステンソルの非対角成分の実部と虚部,  $G^L$  と  $G^H$  は試料や共振器の形状に依存する定数である幾何学因子,  $D$  と  $D_0$  は Q 値と共振周波数の変化への試料以外からの寄与を表す. 一方, Hall 角は表面インピーダンステンソルの対角成分と非対角成分を用いて

$$\tan \theta = \frac{Z^H}{Z} \quad (2.13)$$

で表わされる. 本研究では, これらの式を用いることでマイクロ波 Hall 効果の測定・解析を行う. 以下に, マイクロ波 Hall 効果測定のための具体的手順を金属 Bi と銅酸化物超伝導体の場合について, それぞれ記述する. これら物質において解析手法が異なる理由は, (2.11)(2.12) から表面インピーダンステンソルの非対角成分を求めるには幾何学因子  $G^L$  及び  $G^H$  を決定する必要があるが, その際にそれぞれの物質で測定が容易な物理量が異なるためである.

#### 2.1.2.1 Bi に対するマイクロ波 Hall 効果の解析手順

ここでは, 金属 Bi に対するマイクロ波 Hall 効果の解析手順について述べる. まず, 十字型 2 重縮退モード空洞共振器による測定に先行して, 直流抵抗率測定, 円筒形共振器による表面インピーダンステンソルの対角成分の測定を行い, 表面インピーダン

ステンソルの対角成分  $R$ ,  $X$ , 直流 Hall 角  $\tan \theta_{dc}$  が既に得られているものとする。なお、以下では  $Z$  の周波数依存性として  $Z \propto \omega^{1/2}$  を考える。以下では、 $\Delta$  は温度変化に対する差分、 $\delta$  は磁場変化に対する差分を意味し、その基準となる温度と磁場を  $T_0$ ,  $B_0 = 0$  T とする。つまり、 $\Delta$  及び  $\delta$  を

$$\Delta A = A(B, T) - A(B, T_0) \quad (2.14)$$

$$\delta A = A(B, T) - A(0, T) \quad (2.15)$$

で定義する。ここで、 $A$  はある物理量である。

(2.11)(2.12) から試料の Hall 効果を求めるには、まず、共振器などの試料以外の要素からの  $Q$  値と周波数への寄与を取り除かなければならない。今回の測定では試料の有無による電磁場の変化の影響を考慮し、空洞共振器摂動法で行われているブランク測定との差分を考えるのではなく、異なる温度での測定を考えることで試料以外からの寄与を打ち消す。共振器がホットフィンガー構造であることなどにより、試料の温度変化が共振器に影響を与えない場合には、(2.11)(2.12) において、異なる温度間での差分を考えると

$$\Delta \left( \frac{1}{2Q_H} \right) = G^L \Delta R + G^H \Delta |X^H| \quad (2.16)$$

$$\Delta \left( \frac{f_H}{f_{H0}} \right) = G^L \Delta X - G^H \Delta |R^H| \quad (2.17)$$

が成立する。つまり、2つの温度間での測定における差分を考えることで、試料以外からの影響が打ち消されて、試料からの寄与のみを抜き出せることがわかる。

次に、(2.16)(2.17) から試料の表面インピーダンステンソルの非対角成分を得るには、幾何学因子  $G^L$ ,  $G^H$  を決める必要がある。Bi に対しては、後述する直流抵抗率測定の結果と円筒形共振器での測定結果から、 $|X^H| - |R^H| \sim \tan \theta (|X| - |R|) \ll R + X$  という近似が成り立つことがわかるので (2.16)(2.17) から

$$\delta \Delta \left( \frac{1}{2Q_H} \right) + \delta \Delta \left( \frac{f_H}{f_{H0}} \right) \simeq G^L \delta \Delta (R + X) \quad (2.18)$$

が成り立つ。 $Q$  と  $f$  は測定量であるので、右辺に円筒共振器による測定から既に得られている  $R$ ,  $X$  の値を代入することで、幾何学因子  $G^L$  が定まる。続いて、幾何学因子  $G^H$  を決定することを考える。キャリアの緩和時間を  $\tau$ , 共振の角周波数を  $\omega$  とすると、 $\omega \tau \ll 1$  のとき、表面インピーダンステンソルの非対角成分は直流 Hall 角  $\tan \theta_{dc}$  を用いて

$$Z^H = \tan \theta_{dc} Z \quad (2.19)$$

と表わされる。したがって、

$$\delta \Delta \left( \frac{1}{2Q_H} \right) = G^L \delta \Delta R + G^H \delta \Delta |X^H| \quad (2.20)$$

あるいは

$$\delta\Delta\left(\frac{f_H}{f_{H0}}\right) = G^L\delta\Delta X - G^H\delta\Delta|R^H| \quad (2.21)$$

に,  $\tan\theta_{dc}$  を用いて (2.19) から計算した  $\delta\Delta R^H$  または  $\delta\Delta X^H$  を代入すると, 未知数は  $G^H$  だけなので, 幾何学因子  $G^H$  を決定することができる.

いま, 2つの幾何学因子が定まったので, 任意の温度  $T$  における表面インピーダンステンソルの対角成分  $R(T)$ ,  $X(T)$ , 温度  $T_0$  における直流 Hall 角  $\tan\theta_{dc}(T_0)$  から計算した  $R^H(T_0)$ ,  $X^H(T_0)$  を (2.16)(2.17) に代入することで, 任意の温度  $T$  における表面インピーダンステンソルの非対角成分  $R^H(T)$ ,  $X^H(T)$  を知ることができる. つまり, 任意の温度におけるマイクロ波 Hall 角

$$|\tan\theta(T)| = \left|\frac{Z^H(T)}{Z(T)}\right| = \sqrt{\frac{\{R^H(T)\}^2 + \{X^H(T)\}^2}{\{R(T)\}^2 + \{X(T)\}^2}} \quad (2.22)$$

を得ることができる.

### 2.1.2.2 マイクロ波フラックスフロー Hall 効果測定の解析手順

次に超伝導体に対するマイクロ波フラックスフロー Hall 効果測定の方法を述べる. 金属 Bi の場合と同様に, 直流抵抗率測定, 円筒形共振器による表面インピーダンステンソルの対角成分の測定を先行して行い, 表面インピーダンステンソルの対角成分  $R$ ,  $X$ , 直流 Hall 角  $\tan\theta_{dc}$  が既に得られているものとする. なお, 以下では  $Z$  の周波数依存性として  $Z \propto \omega^{1/2}$  を考える. まず, ある温度  $T_0(> T_c)$  との差分を考えること試料からの寄与のみを取り出す. そして, (2.16)(2.17) を用いることで幾何学因子を決定する. 超伝導体に対する測定では, 幾何学因子  $G^L$  はゼロ磁場での測定における超伝導転移前後での  $Q$  値の変化からよく決定することができる. 具体的な式で表すと,  $B = 0$  T のとき (2.16) 右辺の Hall 成分は 0 であるので

$$\Delta\left(\frac{1}{2Q_H}\right) = G^L\Delta R \quad (2.23)$$

となり, この式から  $G^L$  を定めることができる.

一方, 幾何因子  $G^H$  に関しては  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$  や  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$  といった銅酸化物超伝導体の常伝導状態での Hall 係数の大きさは  $R^H \sim 10^{-9} \text{ m}^3/\text{C}$  程度であるため, 常伝導状態における表面インピーダンステンソルの非対角成分の温度変化に対する差分を測定することで  $G^H$  を決定するのは, 本研究で使用した測定装置の精度では容易ではない. そこで, 本研究では,  $G^L = G^H$  と仮定して解析を進めた. この仮定は共振器や試料の対称性が理想的な場合に成立する (付録 A を参照). また, この仮定の正当性は,

Bi に対する測定で不確かさの範囲内で  $G^L = G^H$  が成立していることから確認できる (第3章を参照).

ひとたび  $G^L$  と  $G^H$  が決定されれば, (2.16)(2.17) において, 既知である常伝導状態での  $R(T_0)$ ,  $X(T_0)$ ,  $R^H(T_0)$ ,  $X^H(T_0)$  と, 超伝導状態における  $R(T)$ ,  $X(T)$  から, 超伝導状態の表面インピーダンステンソルの非対角成分  $R^H(T)$ ,  $X^H(T)$  を知ることができる. つまり, 任意の温度におけるフラックスフロー Hall 角を得ることができる.

## 2.2 実験装置

本節では, マイクロ波 Hall 効果測定で使用した実験装置の詳細について述べる.

### 2.2.1 直流抵抗率測定

直流抵抗率測定は, Quantum Design 社製の Physical Property Measurements System (PPMS) を使用した. 縦抵抗とホール抵抗は銀ペーストで試料とのコンタクトをとった通常の 6 端子法で測られている. また, Hall 抵抗率測定では Hall 方向成分以外の寄与をなくするため, 正負両方の電流を流し, 磁場を反転して印可した測定値の差分をとっている.

### 2.2.2 極低温高磁場下でのマイクロ波を用いた測定

マイクロ波を用いた S パラメータの測定では Agilent Technologies 社製のネットワークアナライザー (N5222A) を使用した. ネットワークアナライザーからマイクロ波が出力され, そのマイクロ波は共振器に入射される. そして, 共振器を通過したマイクロ波が再びネットワークアナライザーに入力されることで, 共振器を通過した後の透過パワー及び共振特性が測定される.

フラックスフロー Hall 効果の測定には極低温の環境を用意する必要がある. そのため, その内部に共振器を含むインサートと呼ばれる測定装置をクライオスタットに貯められた液体ヘリウム中に浸すことで極低温での測定を行う. インサートの外部は主に SUS304 製のパイプからなり, 上部に真空バルブと気密性 SMA コネクタあるいは導波管が取り付けられている. インサート下部は試料の入れ替え時などに取り外し可能で, インジウムシールで密閉できる構造になっている. 測定はロータリーポンプとディフュージョンポンプを使用してインサート内部の真空度を  $10^{-7}$  Torr 程度にしてから行われた. また, 本測定で使用したクライオスタットは液体ヘリウムを最大 60 L 貯めることできる. クライオスタット内部には超伝導マグネットが存在し, 超伝導マグネット

励起用電源 (鈴木商館, SSR-75) を使用することで最大 7 T まで磁場を印加できる．測定系の概要及び実際に使用した測定装置を図 2.3-2.4 に示す．

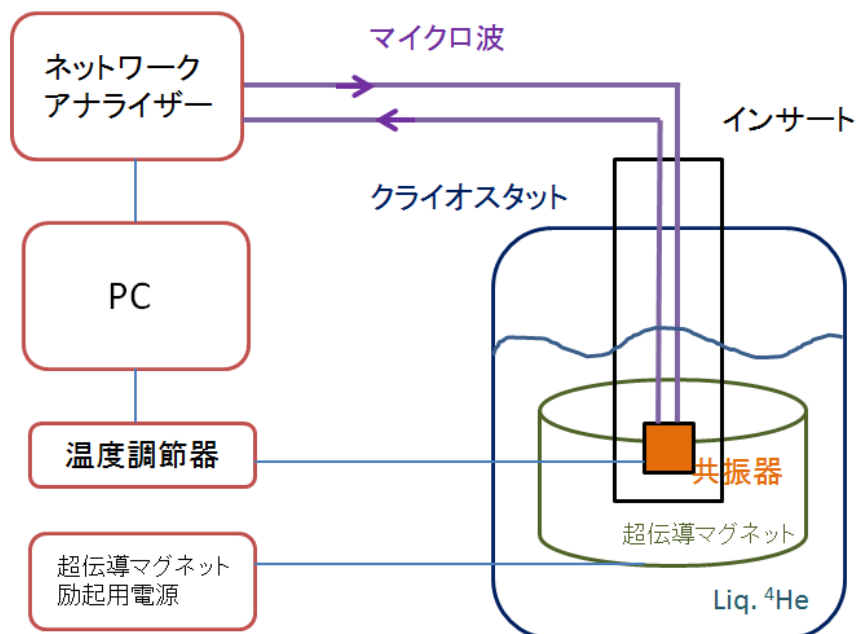


図 2.3: 測定系の概要．

### 2.2.3 円筒形共振器

本研究で用いた円筒形空洞共振器は無酸素銅から作られ、空洞の直径は 21 mm，高さは 21 mm である．この共振器には，円筒の直径と高さが等しいときに起きる，測定で使用するモードである  $TE_{011}$  モードと  $TM_{111}$  モードの縮退を妨げるために，共振器底部にモードトラップが設けられている．円筒形共振器は試料の温度変化が共振器の温度変化を生じさせないホットフィンガー構造 [103] をもつ．試料はファイアロッド上にアピエゾングリスで固定され，サファイアロッドを共振器底部から中央部まで挿入することで，共振器中央に配置される．測定に使用した  $TE_{011}$  モードのブランク測定での共振周波数は約 19 GHz で， $Q$  値は約 60000 である．また，測定では円筒軸方向に外部磁場が印加された．

### 2.2.4 十字型 2 重縮退モード空洞共振器

ここではフラックスフロー Hall 効果測定のために新たに作製した十字型共振器の詳細について述べる．十字型空洞共振器本体は無酸素銅製で，その大きさは十字型の一



図 2.4: 実際に使用した測定装置.

辺が 10.5 mm で、高さは 54 mm である。ワイヤー放電加工で十字型の空洞をもつように加工された本体の上下に、無酸素銅製の蓋をネジで取り付ける構造をしている (図 2.5)。

ネットワークアナライザーから十字型共振器本体へのマイクロ波の入射はインサート上部の気密性 SMA コネクタを通して行われる。さらに、SMA コネクタは外部導体がベリリウム銅で中心導体が銀メッキベリリウム銅の同軸ケーブル (長さ: 約 120 cm, 外径: 2.19 mm), ベリリウム銅製の自作したエンドランチ型同軸導波管変換アダプタ, 真鍮製導波管 (WR-42), 十字型共振器本体の順番で接続されている。インサートは 4 つの入出力ポートを持ち、それぞれ図 2.6 に示す位置にある 4 つの導波管につながっている。導波管と共振器は、共振器本体の高さ方向中央部に直径 1 mm 程度の穴が空けられることで接続されている。つまり、導波管から送られてきたマイクロ波がその穴を通して共振器内に入出力する。

本研究で作製・使用した共振器は、共振器底部に開けられた穴からサファイアロッドが挿入される、ホットフィンガー構造となっている。試料は試料台に取り付けられたサファイアロッド上にアピエゾングリスで固定され、それを共振器内に挿入することで、試料が共振器底面中央に配置される (図 2.7)。インサートが液体ヘリウム中にあるときには、インサートと熱的に繋がっている共振器本体や試料台は液体ヘリウム温度程度まで冷やされる。したがって、試料の温度変化は試料台に取り付けられた電気抵抗が約  $50\ \Omega$  のマンガン線に電流を流し加熱することで行われた。温度の PID 制御は温度調節器 (Lake Shore, LTC-20) によって行われた。また、測定では十字型の断面と垂直な方向に外部磁場が印加された。

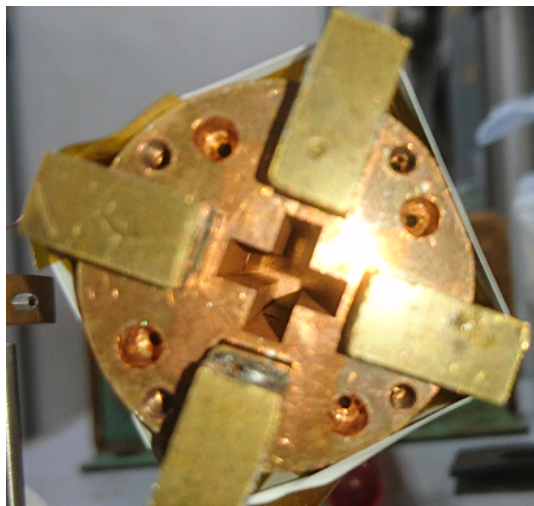


図 2.5: 作製した十字型共振器を底面から見た様子。

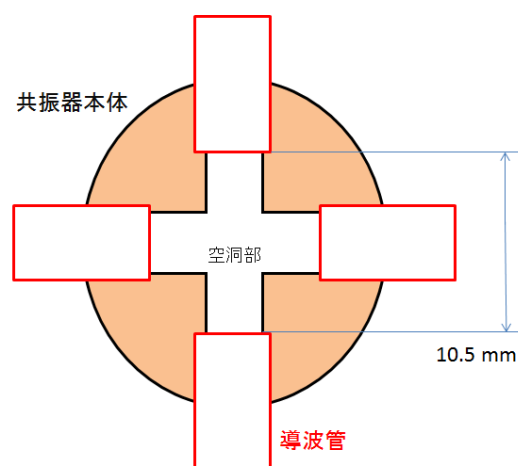


図 2.6: 共振器と導波管の断面図。

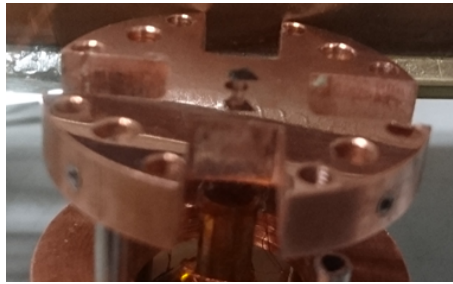


図 2.7: ホットフィンガー構造とサファイアロッド上に配置された試料.

作製した十字型共振器内において、測定に用いる予定の 2 重縮退モードが励起されるかを調べるために、電磁界シミュレーションソフト WIPL-D を使用し、共振器内電磁場のシミュレーションを行った．実際に作製した共振器と同じ形状の共振器に対する電磁界シミュレーションの結果を図 2.8-2.9 に示す．図 2.8 は、図 2.9 に示す 15.8 GHz 付近に存在する共振ピークにおける電磁場のシミュレーション結果である．つまり、これらの結果から、測定に使用する予定の  $TE_{101}$  モードが 15.8 GHz 付近にあることが期待できる．一方、実際に作製した共振器におけるブランク測定の結果が図 2.10 である．したがって、シミュレーションと概ね一致する 15.8 GHz 付近に存在する共振ピークが  $TE_{101}$  モードでことがわかる．以上の結果から、本研究では、この 15.8 GHz 付近に存在する共振ピークの共振特性を測定することで試料のマイクロ波 Hall 効果を調べた．なお、この共振ピークの  $Q$  値はブランク測定で約 3000 である．

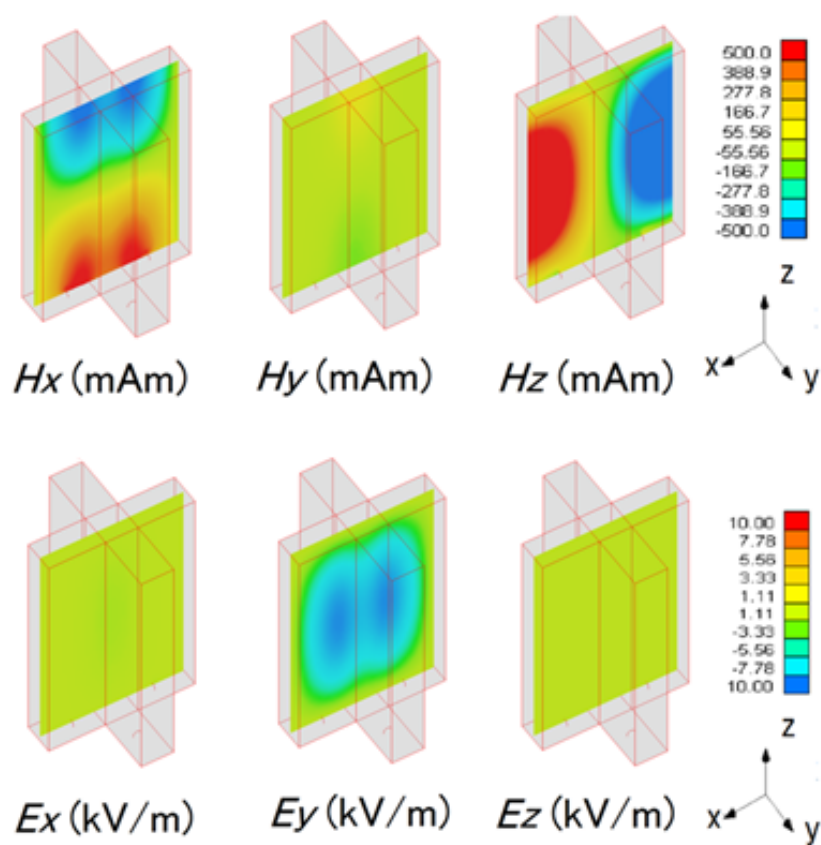


図 2.8: 15.8 GHz 付近の共振ピークにおける電磁場 (シミュレーション).  $TE_{101}$  的なモードの存在を示している.

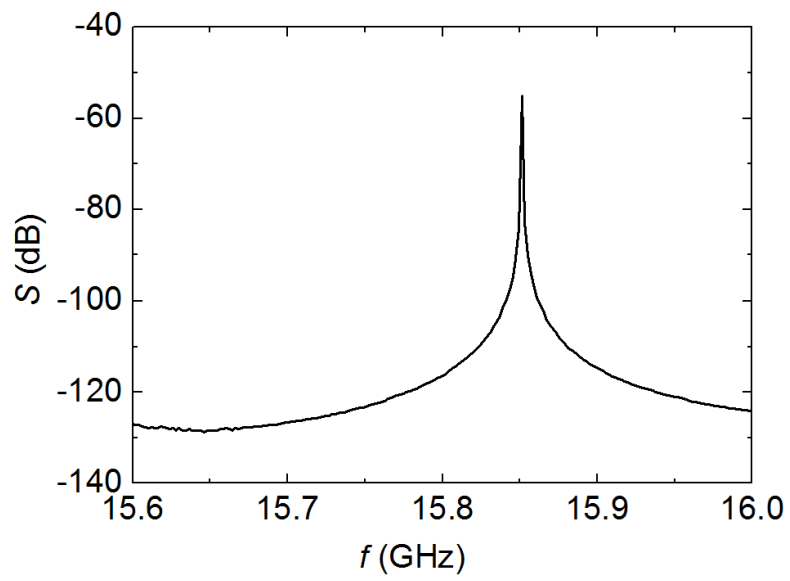


図 2.9: 透過パワーの周波数依存性のシミュレーション結果.

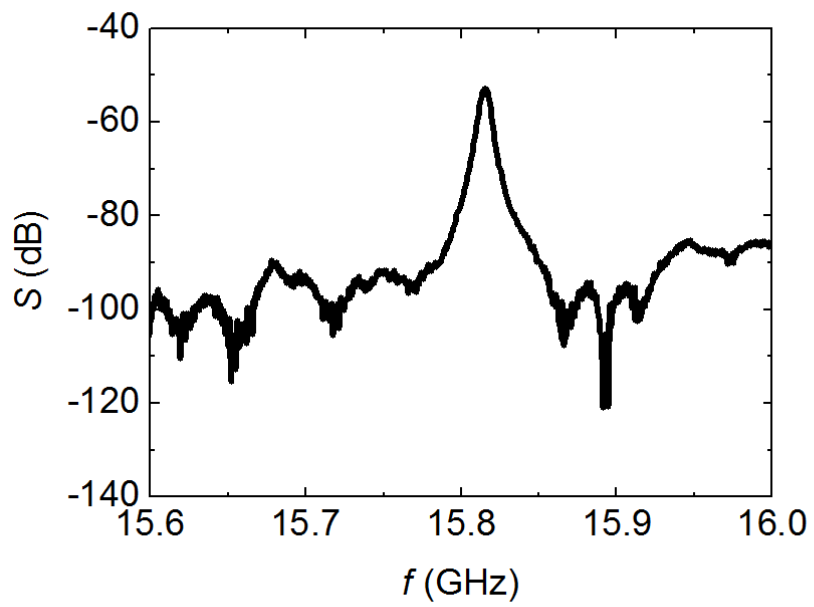


図 2.10: 透過パワーの周波数依存性の測定結果.

## 2.3 測定対象

本節では、測定対象とした試料である金属 Bi，銅酸化物超伝導体  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$ ，銅酸化物超伝導体  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$  の詳細について述べる．

### 2.3.1 Bi 単結晶

Bi は巨大な磁気抵抗や大きな Hall 係数を持つことが知られている物質で，Nernst 効果や de Haas-van Alphen 効果など，多くの重要な物理現象が Bi において初めて発見されていることでも知られている．その結晶構造は単純立方格子がわずかに歪んだ rhombohedral 構造となっている．そのフェルミ面として L 点に 3 個の電子面と T 点に Hall 面がある．キャリア密度は電子と Hall が同程度で約  $3 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  と Cu などの一般的な金属と比較して低密度となっている [104, 105, 106]．

本研究で測定に用いた単結晶 Bi は先行研究 [107] を参考に以下の方法で用意した．多結晶 Bi を坩堝内で融点の  $271^\circ\text{C}$  以上まで加熱し融解させ，その後，坩堝を冷却すると側面に多数の単結晶が析出する．その際に柱状の結晶が析出することがあり，その柱状結晶が (111) 面で劈開する．本研究では，上記の手順により劈開した単結晶を得て，それを  $0.8 \times 0.8 \times 0.1 \text{ mm}^3$  の直方体状にカットして測定を行った (図 2.11)．

### 2.3.2 $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$ 単結晶

$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_{n-1}\text{Cu}_n\text{O}_y$  で構成される物質は Bi 系と呼ばれ， $n = 2$  である  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$  は，Bi2212 と呼ばれる．その超伝導転移温度  $T_c$  が液体窒素温度を超えることから，超伝導線材の材料として使われるなど実用上の研究も多く行われている．結晶構造はペロブスカイト構造を基礎とした結晶構造で，単位格子は  $\text{CuO}_2$  からなる伝導層と絶縁層から構成される．Bi2212 は絶縁層が厚く  $ab$  面内と  $c$  軸方向の異方性が大きいことでも知られ，異方性パラメーターは  $\gamma = \xi_{ab}/\xi_c \sim 100$  である．この性質のため  $c$  軸に平行な磁場成分に対してピン止めが効きにくくなっている．

本研究で測定された Bi2212 試料はフローティングゾーン (FZ) 法で作製された [108]．FZ 法とは単結晶の作製方法の一つで，原料となる多結晶棒をハロゲンランプからの光を集めて高温にして融液を作り，全体を徐々に下方移動させ，融液を冷却することで単結晶を得る方法である．この手法では結晶中に不純物が混入しにくく，高純度な試料が得られることが知られている．本研究では 2 つの Bi2212 試料を対象として測定を行った．測定した試料のサイズは，十字型共振器による測定では  $2.3 \times 2.3 \times 0.06 \text{ mm}^3$  程度の大きさである (図 2.12-2.13)．円筒形共振器の測定では，十字型共振器で測定した試料をさらに  $0.8 \times 0.8 \times 0.06 \text{ mm}^3$  の大きさにカットすることで測定を行った．



図 2.11: 測定を行った Bi 単結晶.

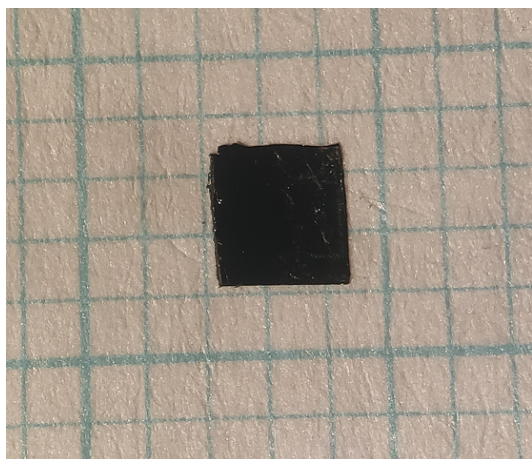


図 2.12: 測定を行った Bi2212 単結晶 (試料#1).

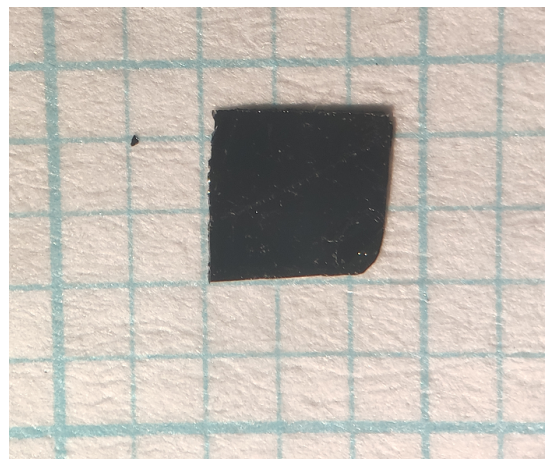


図 2.13: 測定を行った Bi2212 単結晶 (試料#2).

### 2.3.3 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$ 単結晶

$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$  は YBCO と呼ばれ，初めて液体窒素温度を超える温度での超伝導転移が発見された物質である．結晶構造は他の銅酸化物高温超伝導体と同様にペロブスカイト構造を基礎とした結晶構造で，単位格子は  $\text{CuO}_2$  からなる伝導層と絶縁層から構成される．典型的には  $ab$  面内のコヒーレンス長  $\xi_{ab}$  と磁場侵入長  $\lambda_{ab}$  はそれぞれ  $1 \sim 3 \text{ nm}$  と  $100 \sim 200 \text{ nm}$  である．したがって，GL パラメーター  $\kappa$  は 100 程度である．また，異方性パラメーターは  $\gamma \sim 10$  である．本研究で測定された YBCO 試料は西寄照和氏 (九州産業大学 理工学部 教授) により自己溶媒徐冷法で作製された [109]．測定した試料のサイズは十字型共振器による測定では  $2.0 \times 2.0 \times 0.3 \text{ mm}^3$  である (図 2.14)．また，円筒共振器による測定では  $1.0 \times 1.0 \times 0.3 \text{ mm}^3$  である．

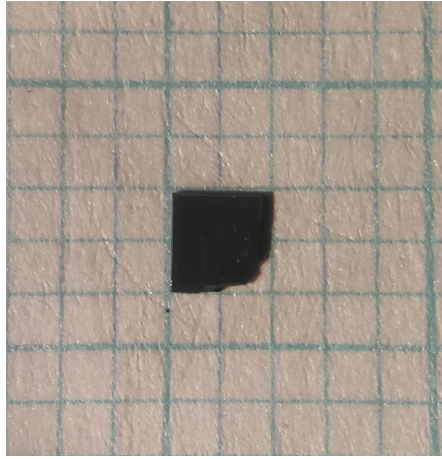


図 2.14: 測定を行った YBCO 単結晶.

## 第3章 測定結果

本章では，本研究で新たに開発したマイクロ波 Hall 効果測定法の有効性を確認するために行った金属 Bi を対象としたマイクロ波 Hall 効果のテスト測定の結果と，銅酸化物超伝導体  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$  と  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$  を対象としたマイクロ波フラックスフロー Hall 効果測定の結果について述べる．

### 3.1 Bi におけるマイクロ波 Hall 効果測定

本節では，Bi に対する各測定結果を直流抵抗率測定，円筒形共振器による表面インピーダンス測定，十字型 2 重縮退モード空洞共振器によるマイクロ波 Hall 効果測定の順に述べる．

#### 3.1.1 直流抵抗率測定

直流抵抗率測定により得られた，磁場が 0 T と 4 T における直流縦抵抗率  $\rho_{xx}$  の温度依存性を図 3.1 に示す．図 3.1 (b) から，磁場中では低温のとき  $\rho_{xx}$  が巨大になること，つまり，Bi が巨大な磁気抵抗をもつというよく知られている性質が確認できる．図 3.2-3.3 では直流縦抵抗率  $\rho_{xx}$  と直流 Hall 抵抗率  $\rho_{xy}$  の磁場依存性が示されている．図 3.2 に示す磁場依存性の測定結果から，低温側，特に  $T = 10$  K で，Schubnikov-de Haas(SdH) 振動の様子が確認できる．SdH 振動の振動数は，Fermi 面を磁場に垂直な平面で切った断面積の極値と比例する．得られた振動数  $\Delta(1/B) \simeq 0.14$  から計算した断面積は  $S_{SF} = \frac{2\pi e}{h\Delta(1/B)} \simeq 0.068 \text{ nm}^{-2}$  となり，先行研究 [110] と概ね一致した値が得られた．また，直流 Hall 角  $\tan \theta_{dc}$  の測定結果を図 3.4-3.5 に示す． $B = 7$  T における直流 Hall 角は 10 K で -0.3，60 K で -0.1 であった．これらの過去の研究 [111, 112] と本質的に同じである直流抵抗率の振る舞いは，測定に用いた試料が良質であることを示している．一方，低磁場側における Hall 抵抗率の測定値は高磁場側と比較して小さいため，SN 比が小さい．それにより，直流 Hall 角  $\tan \theta_{dc}$  は低磁場側では -0.05 程度であるが，Hall 抵抗率と同様に Hall 角においても低磁場側でエラーバーが大きくなっている．過去に報告されている Bi の直流 Hall 効果の測定においても， $\rho_{xy}$  の SN 比の小ささのためか，図に記載されていない例も見られる [113]．

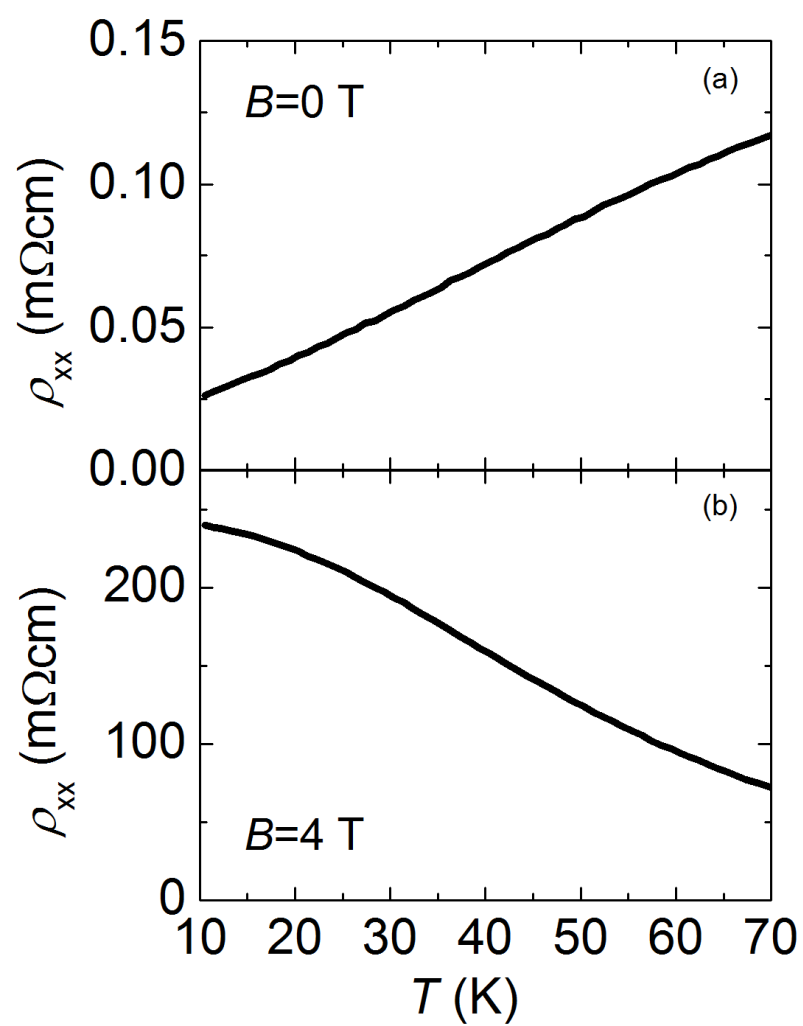


図 3.1: Bi の縦抵抗率  $\rho_{xx}$  の温度依存性: (a)  $B = 0 \text{ T}$ , (b)  $B = 4 \text{ T}$ . 磁場中では低温で抵抗率が巨大になることが確認できる.

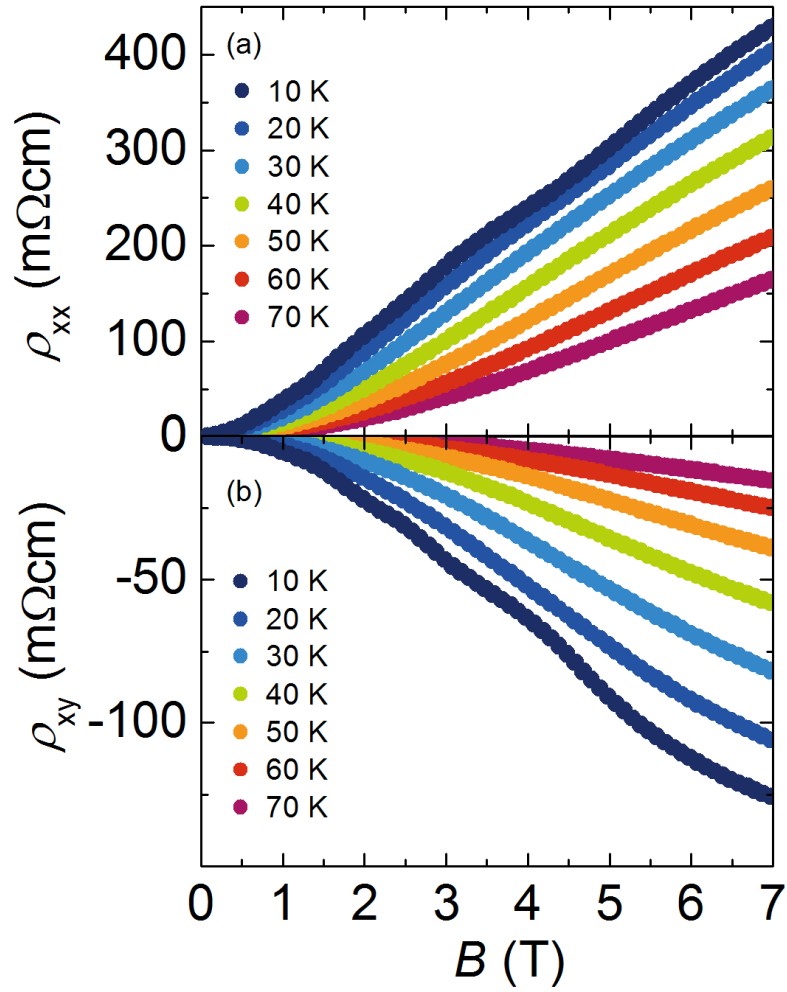


図 3.2: (a) Bi の縦抵抗率  $\rho_{xx}$  の磁場依存性. (b) Bi の Hall 抵抗率  $\rho_{xy}$  の磁場依存性. 低温側, 特に 10 K で, Shubnikov-de Haas 振動の様子が確認できる.

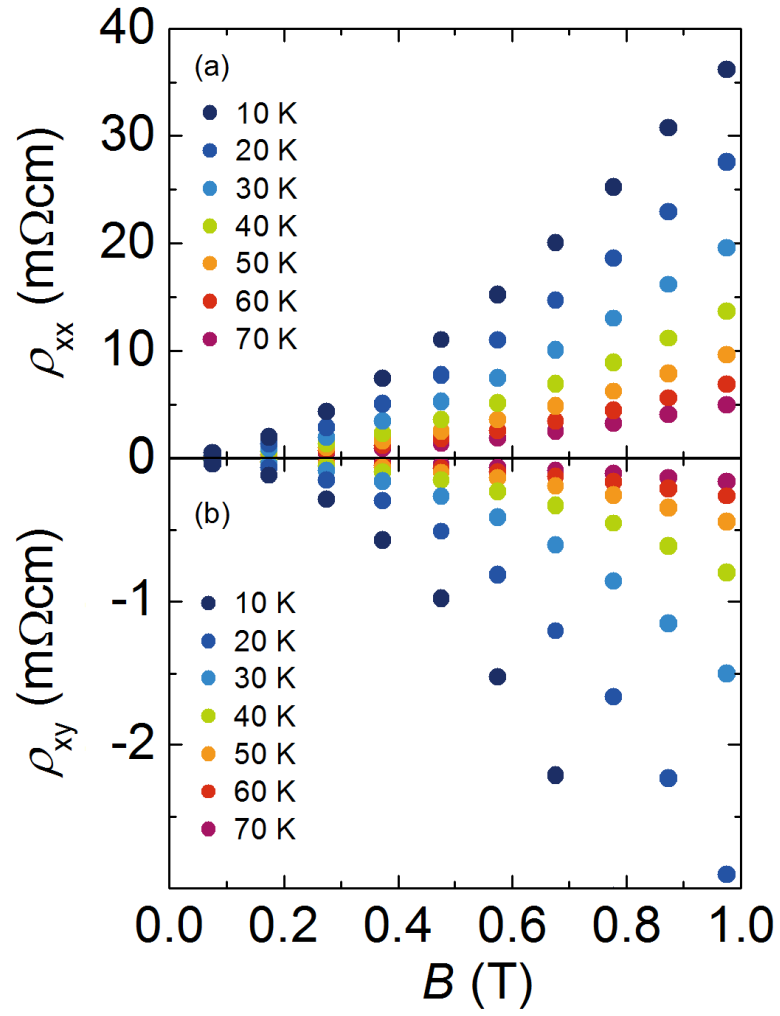


図 3.3: (a) Bi の縦抵抗率  $\rho_{xx}$  の磁場依存性. (b) Bi の Hall 抵抗率  $\rho_{xy}$  の磁場依存性. (0 T から 1 T までの拡大図).

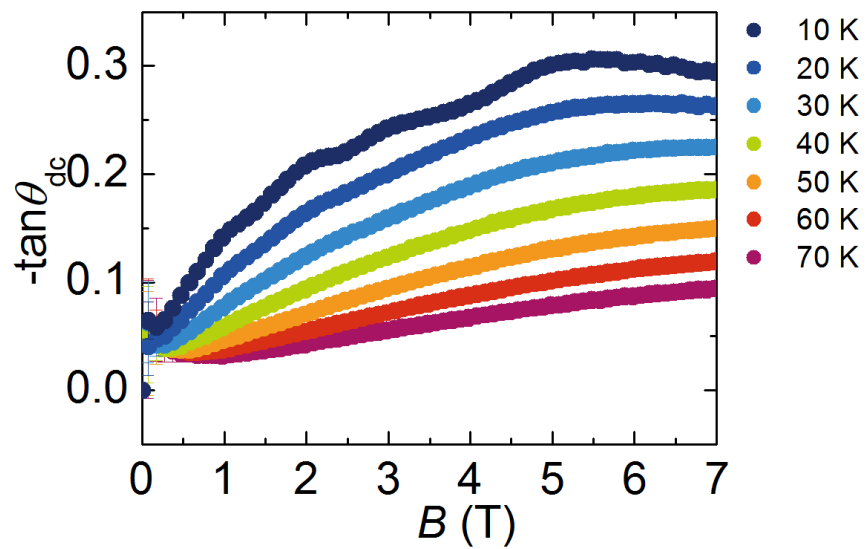


図 3.4: Bi の直流 Hall 角の磁場依存性.

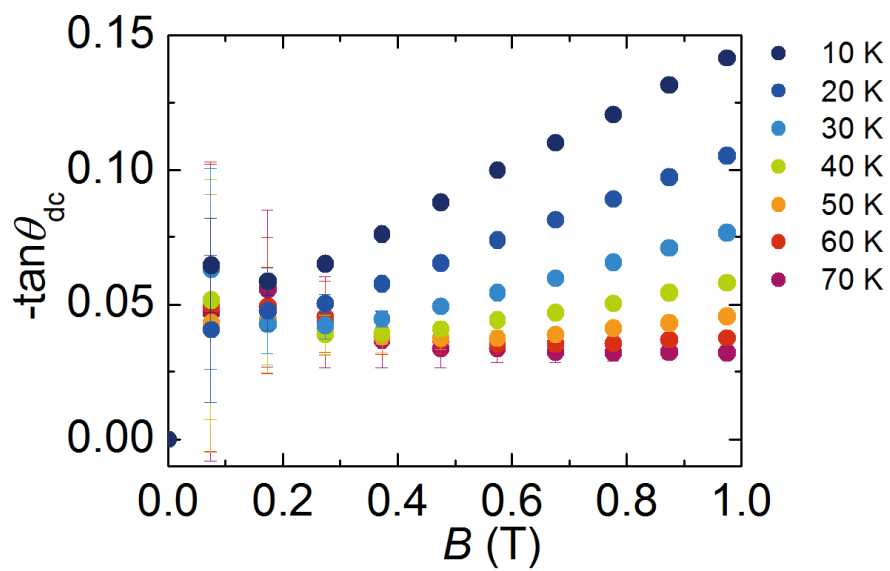


図 3.5: Bi の直流 Hall 角の磁場依存性 (0 T から 1 T までの拡大図).

### 3.1.2 円筒形共振器による表面インピーダンス測定

次に，円筒形共振器による表面インピーダンステンソルの対角成分の測定結果を示す．円筒形共振器の測定データである  $\Delta(1/2Q)$  と直流抵抗率による測定で得られた  $\Delta R = \sqrt{\mu_0 \omega \rho_{dc}}/2$  を比較することで，円筒形共振器の幾何学因子の値として  $G = 4.3 \pm 0.2 \times 10^{-6} \Omega^{-1}$  が得られた．この  $G$  の値に基づく， $B = 4 \text{ T}$  での  $\Delta(1/2Q)/G$  と  $\Delta R = \sqrt{\mu_0 \omega \rho_{dc}}/2$  の温度依存性のデータを図 3.6 に示す．ただし， $T_0 = 70 \text{ K}$  としている．図 3.6 における低温側での直流測定とマイクロ波測定の違いは，異常表皮効果によるものと考えられる．図 3.7 は表面抵抗テンソルの対角成分  $R$  と表面リアクタンステンソルの対角成分  $X$  の磁場依存性を示している．直流測定の結果から期待できるように， $R$  と  $X$  の値は磁場の増加とともに大きくなり，同一磁場中では温度の低下につれて大きくなった．さらに，これらの測定結果から計算した表面インピーダンスの大きさ  $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$  の磁場依存性を図 3.8 に示す．これらの表面インピーダンステンソルの対角成分の測定結果を使用することで，十字型共振器によるマイクロ波 Hall 効果の解析を行った．

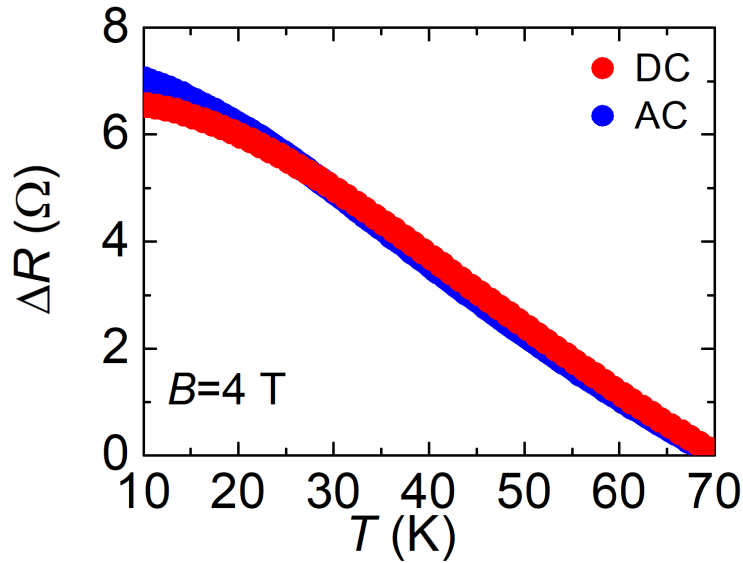


図 3.6:  $B = 4 \text{ T}$  における  $\Delta R$  の磁場依存性．青印は円筒形共振器による測定から得られたデータを示し，赤印は直流抵抗率から得られたデータを示している．

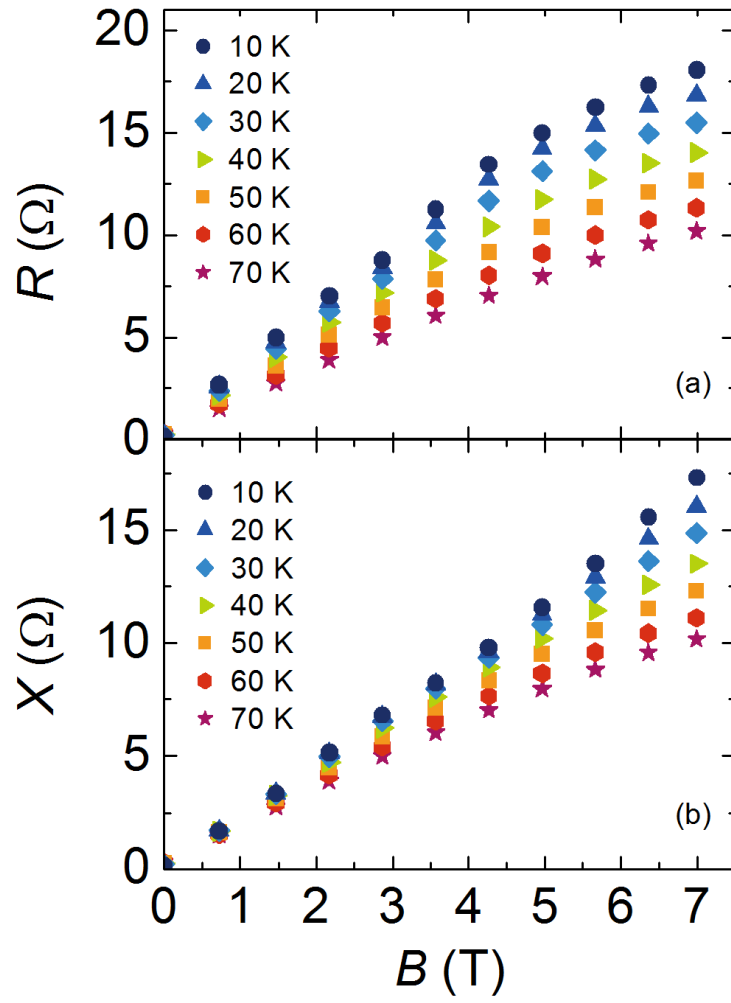


図 3.7: (a) Bi の表面抵抗テンソルの対角成分  $R$  の磁場依存性. (b) Bi の表面リアクタンステンソルの対角成分  $X$  の磁場依存性. これらのデータは円筒形空洞共振器摂動法から得られた.

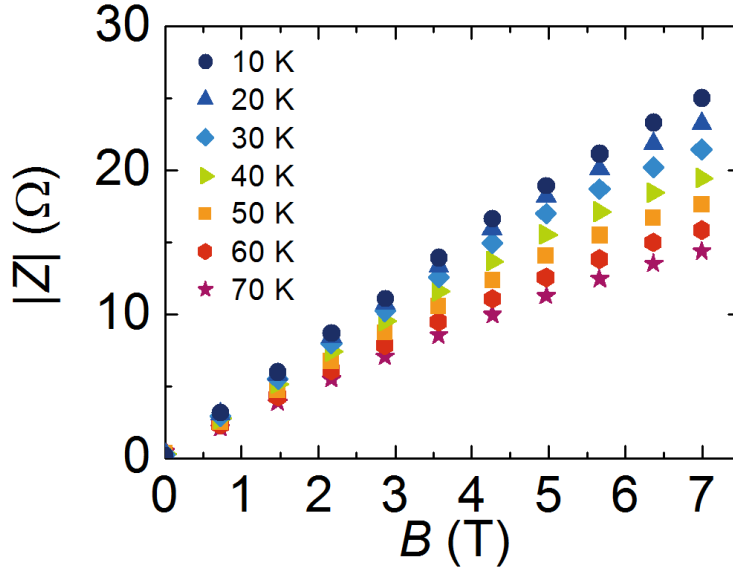


図 3.8: Bi の表面インピーダンステンソルの対角成分  $|Z|$  の大きさの磁場依存性. これらの値は  $R$  と  $X$  の測定結果から計算された.

### 3.1.3 十字型共振器による Hall 効果測定

最後に, 前項までと同一の Bi 試料を対象とした十字型 2 重縮退モード空洞共振器による測定結果を示す. 以下では,  $\Delta$  に対する基準点を  $T_0 = 70$  K として解析を行った. 十字型 2 重縮退モード空洞共振器による測定から Hall 角を得るためには, まず幾何学因子  $G^L$ ,  $G^H$  を決定する必要がある. そのために, 第 2 章で述べたように, (2.18) の近似式  $\delta\Delta(1/2Q_H) + \delta\Delta(f_H/f_{H0}) \simeq G^L\delta\Delta(R+X)$  を使用して幾何学因子  $G^L$  を定める. なお, 低温側では Bi の異常表皮効果の影響が考えられるため, 本解析では  $T = 60$  K での測定に基づき幾何学因子  $G^L$  の推定を行った. 十字型共振器の測定データである  $\Delta\delta(1/2Q_H) + \Delta\delta(f_H/f_{H0})$  と円筒形共振器による測定で得られた  $\Delta\delta(R+X)$  を比較することで, 幾何学因子の値として  $G^L = 5.6 \pm 0.8 \times 10^{-8} \Omega^{-1}$  が得られた. この幾何学因子の値に基づく  $[\Delta\delta(1/2Q_H) + \Delta\delta(f_H/f_{H0})]/G^L$  と  $\Delta\delta(R+X)$  のデータを図 3.9 に示す.

次に, 幾何学因子  $G^H$  を決定する. 第 2 章で述べたように, 十字型共振器の測定データと直流 Hall 角および円筒形共振器による表面インピーダンスのデータを,  $\Delta\left(\frac{1}{2Q_H}\right) = G^L\Delta R + G^H\Delta|X^H|$  に代入することで,  $G^H = 6.7 \pm 0.7 \times 10^{-8} \Omega^{-1}$  が得られた. この幾何学因子  $G^H$  の値に基づく  $[\Delta(1/2Q) - G^L R]/G^H$  と  $\tan\theta_{dc}R$  のデータを図 3.10 に示す. なお, 十字型共振器の測定から得られる  $X^H$  の符号は直流測定の結果から決定している.

以上で, Hall 角を得る際に必要となる幾何学因子  $G^L$ ,  $G^H$  が決定されたので, (2.6)

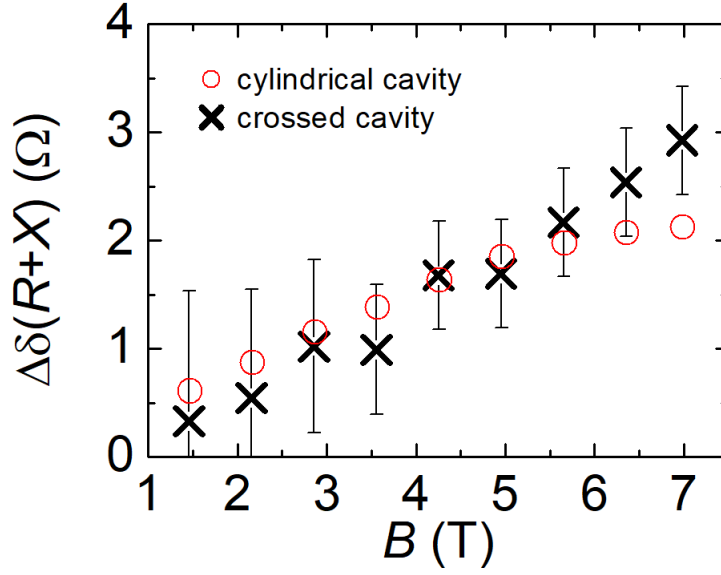


図 3.9:  $T = 60$  K における  $\Delta\delta(R + X)$  の磁場依存性．赤い丸印は円筒形共振器による測定から得られたデータを示し，黒いバツ印は十字型共振器から得られた  $[\Delta\delta(1/2Q_H) + \Delta\delta(f_H/f_{H0})]/G^L$  によるデータを示している．ここでは，幾何学因子  $G^L$  を  $G^L = 5.6 \times 10^{-8} \Omega^{-1}$  としている．

および (2.7) を用いて，表面抵抗テンソルの非対角成分  $R^H$  と表面リアクタンステンソルの非対角成分  $X^H$  を評価した．図 3.11 は Bi の 10 K から 60 K までにおける  $R^H$  と  $X^H$  の磁場依存性を示している．なお， $R^H$  と  $X^H$  の符号は直流測定の結果から決定している．これらの結果から計算された表面インピーダンスの非対角成分の大きさ  $|Z^H| = \sqrt{(R^H)^2 + (X^H)^2}$  の磁場依存性を図 3.12 に示す．そして，最終的に得られた Hall 角の大きさ  $|\tan \theta|$  の磁場依存性を，直流測定の結果とともに，図 3.13 に示す．

マイクロ波 Hall 角の大きさは 0.1 のオーダーで，温度の低下につれて 0.3 程度まで増加した．低磁場領域では，シグナルの小ささのためマイクロ波 Hall 角でのエラーバーが大きいものの，得られたマイクロ波 Hall 角と直流 Hall 角は不確かさの範囲内で一致している．このことは上記のデータの多くにおいて  $\omega\tau \ll 1$  が成立していることを示唆している．ここで， $\tau$  は Bi のキャリアの中で最も長い緩和時間である．この結果は，本研究における手法の有効性を示すものであり，極低温におけるマイクロ波 Hall 角測定が，複雑なカップリング調節機構なしに可能であることが明らかになった．

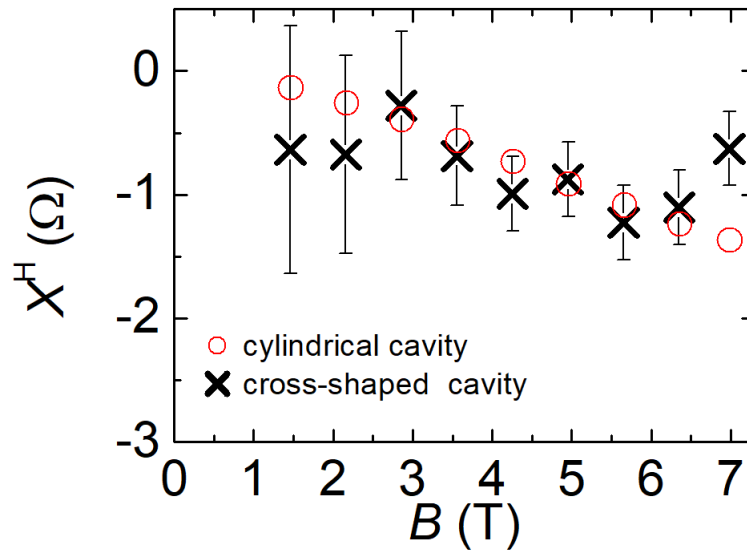


図 3.10:  $T = 60$  K における  $X^H$  の磁場依存性. 赤い丸印は直流測定と円筒形共振器による測定で得られる  $\tan \theta_{dc} X$  から計算したデータを示している. 黒いバツ印は十字型共振器から得られた  $[\Delta(1/2Q) - G^L R] / G^H$  によるデータを示している. ここでは, 幾何学因子  $G^H$  を  $G^H = 6.7 \times 10^{-8} \Omega^{-1}$  としている. なお, 十字型共振器の測定から得た  $X^H$  の符号は直流測定の結果から決定している.

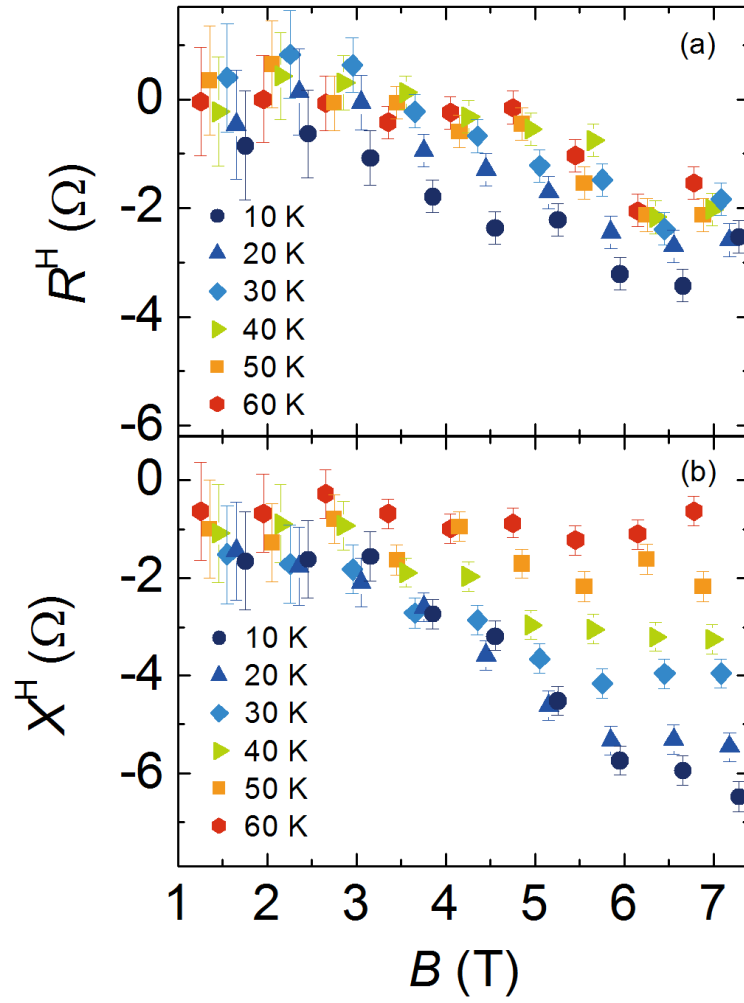


図 3.11: (a) Bi の表面抵抗テンソルの非対角成分  $R^H$  の磁場依存性. (b) Bi の表面リアクタンステンソルの非対角成分  $X^H$  の磁場依存性.  $R^H$  と  $X^H$  の符号は直流測定の結果から決定している.

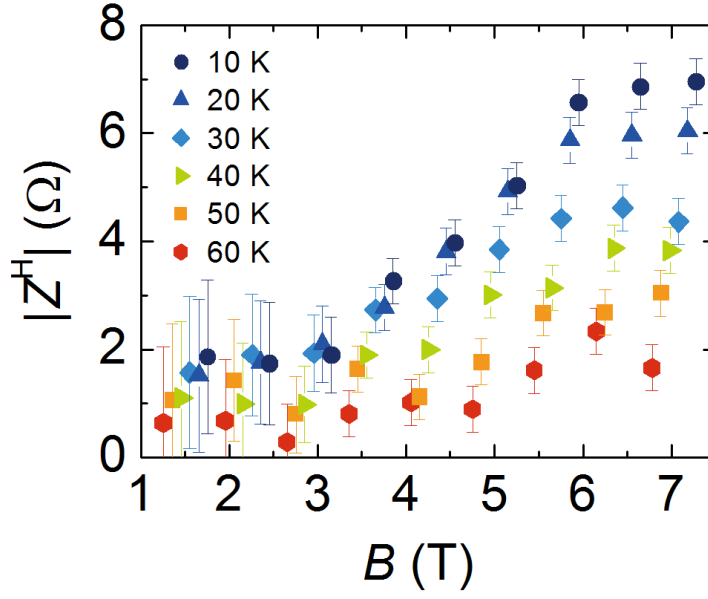


図 3.12: Bi の表面インピーダンステンソルの非対角成分の大きさ  $|Z^H|$  の磁場依存性. これらの値は  $R^H$  と  $X^H$  の測定結果から計算された.

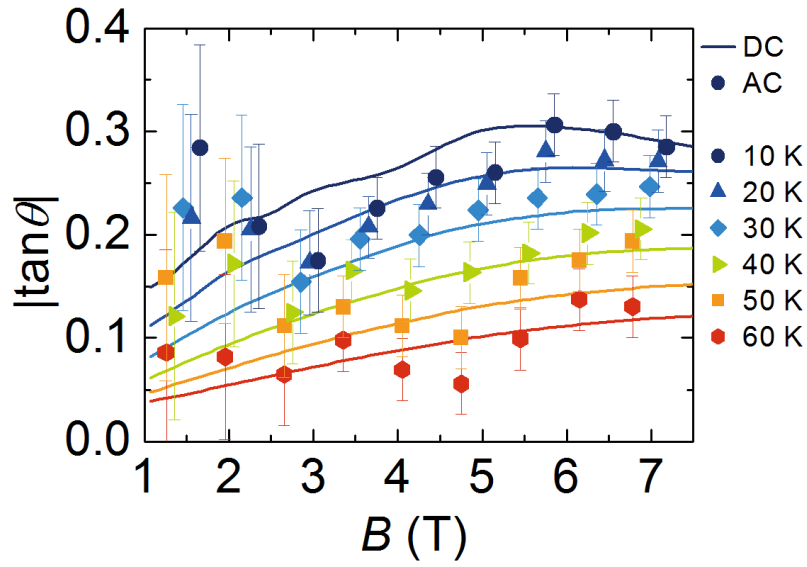


図 3.13: Bi の Hall 角の大きさの磁場依存性. 線は直流測定の結果を示し, 印はマイクロ波測定の結果を表している. マイクロ波測定での値は  $R$  と  $X$ ,  $R^H$ ,  $X^H$  の測定結果から  $|Z|$  と  $|Z^H|$  を計算し, その比を取ることで得られた.

## 3.2 $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$ におけるフラックスフロー Hall 効果測定

本節では、 $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$  を対象とした各測定結果を、直流抵抗率測定、円筒形共振器による表面インピーダンス測定、十字型 2 重縮退モード空洞共振器によるマイクロ波フラックスフロー Hall 効果測定の順に述べる。また、 $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$  では 2 つの試料に対して異なる磁場のかけ方で測定を行ったので、その両方の測定結果について述べる。

### 3.2.1 試料 #1 に対する測定

以下では 2 章に示した  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$  (試料 #1) を対象としたマイクロ波フラックスフロー Hall 効果測定の結果を述べる。なお、磁場中の超伝導体の測定には、一定磁場中で超伝導転移温度以下に冷却する Field Cool (FC) や、ゼロ磁場で超伝導転移温度以下に冷却した後、磁場を印加する Zero Field Cool (ZFC) などがあるが、試料 #1 に対する測定では試料中に均一に渦糸が分布するように FC で測定を行った。

#### 3.2.1.1 直流抵抗率測定

$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$  (試料 #1) を対象とした直流抵抗率の測定結果を図 3.14 に示す。超伝導転移温度  $T_c$  が約 95 K であることが図 3.14 のインセットから確認できる。また、図 3.14 のメインに示す直流 Hall 角の磁場依存性から、直流 Hall 角は常伝導状態で 0.01 のオーダーであることがわかる。また、 $\tan \theta_{dc} = R_H \sigma_{xx} B$  から計算した Hall 係数  $R_H$  は 110 K で  $9.8 \times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{C}$  であった。

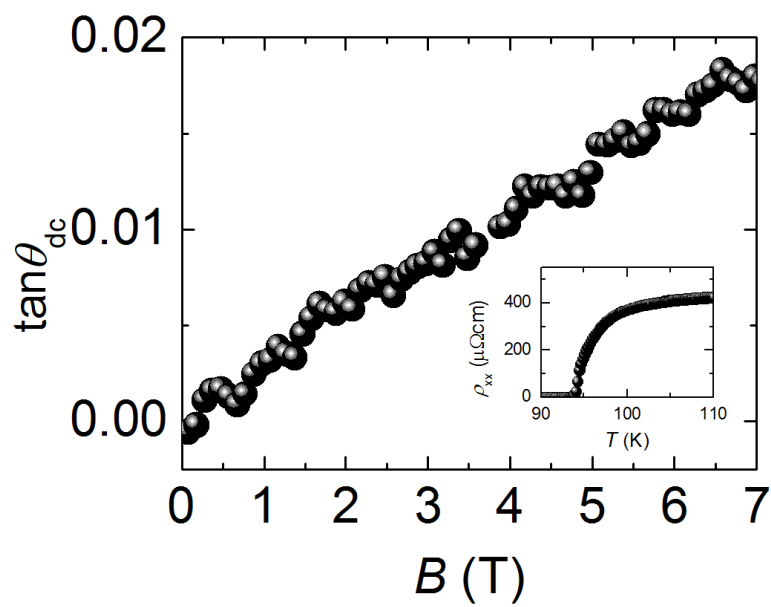


図 3.14: Bi2212(試料#1) の直流 Hall 角  $\tan \theta_{dc}$  の磁場依存性 ( $T = 110$  K). (Inset)  $T_c$  近傍での直流縦抵抗率  $\rho_{xx}$  の温度依存性. 測定した Bi2212(試料#1) の  $T_c$  は 95 K で, 110 K における Hall 係数  $R_H$  は  $9.8 \times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{C}$  であった.

### 3.2.1.2 円筒形共振器による表面インピーダンス測定

次に、円筒形共振器による表面インピーダンステンソルの対角成分の測定結果を示す。図 3.15 は表面抵抗  $R$  と表面リアクタンス  $X$  のゼロ磁場における温度依存性を示している。また、図 3.16 は Bi2212(試料#1) の  $R$  と  $X$  の磁場依存性を示している。得られた結果は、超伝導状態の表面インピーダンスの振る舞いとして一般的なものであった [43]。さらに、これらの結果から計算した表面インピーダンスの大きさ  $|Z|$  の磁場依存性を図 3.17 に示す。これらの表面インピーダンスの磁場依存性の結果を使用することで、次項に示す十字型共振器によるマイクロ波 Hall 効果の解析を行った。

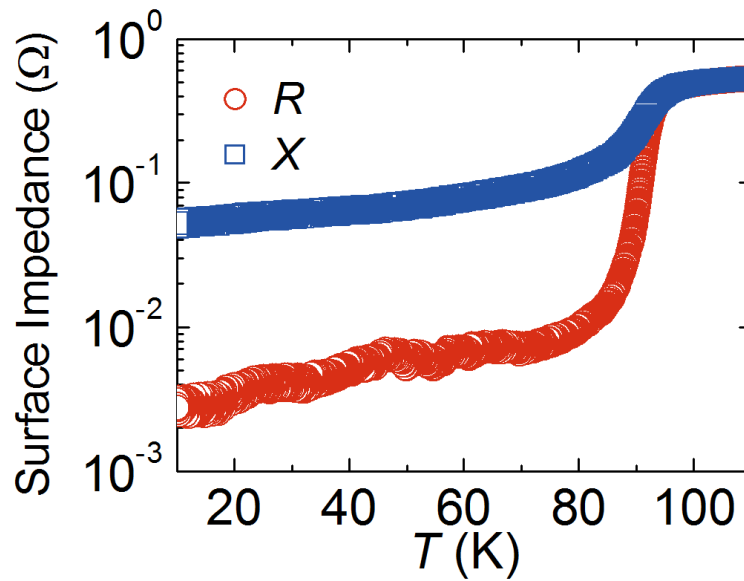


図 3.15: Bi2212(試料#1) の表面抵抗  $R$  と表面リアクタンス  $X$  の温度依存性 ( $B = 0$  T). これらのデータは円筒形空洞共振器摂動法から得られた。

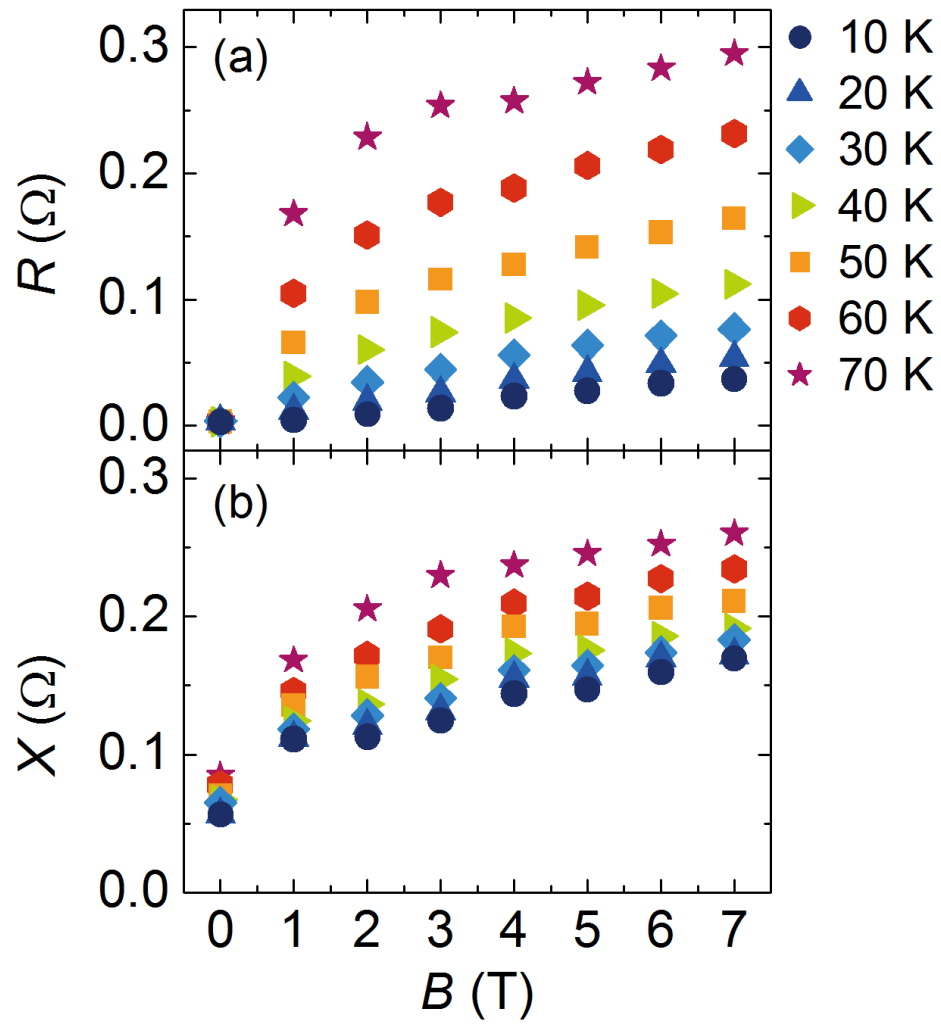


図 3.16: (a) Bi2212(試料#1) の表面抵抗の磁場依存性. (b) Bi2212(試料#1) の表面リアクタンスの磁場依存性. これらのデータは円筒形空洞共振器摂動法から得られた.

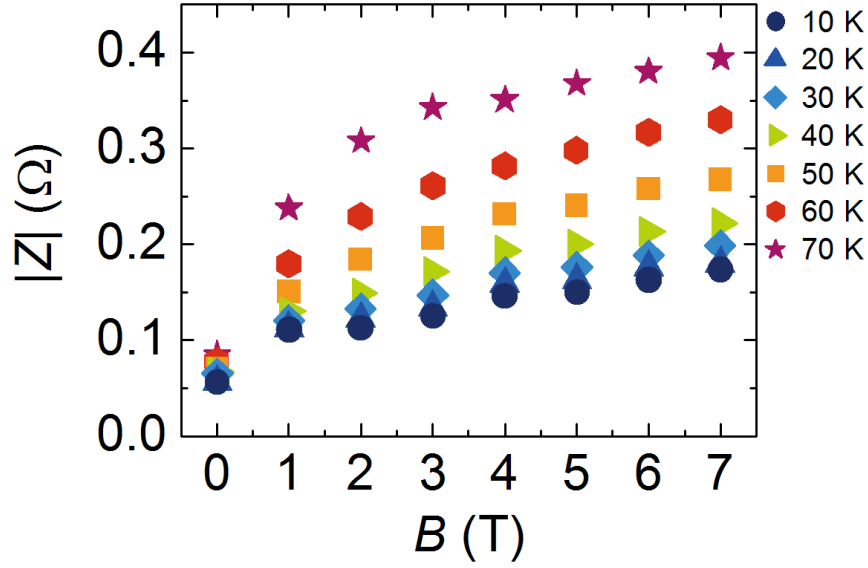


図 3.17: Bi2212(試料#1) の表面インピーダンスの大きさの磁場依存性.

### 3.2.1.3 十字型共振器によるフラックスフロー Hall 効果測定

最後に、十字型 2 重縮退モード空洞共振器による測定結果を示す．まず、第 2 章で述べた手順に従い、幾何学因子  $G^L (= G^H)$  を決定する．ゼロ磁場での共振特性の温度依存性の測定結果と、円筒形共振器による表面抵抗の温度依存性のデータを比較することで、十字型共振器における幾何学因子として  $G^L (= G^H) = 3.5 \times 10^{-6} \Omega^{-1}$  が得られた．この幾何学因子の値に基づく表面抵抗  $R$  の温度依存性を、円筒形共振器によるデータとともに図 3.18 に示す．これらの温度依存性のデータには若干の違いが見られる．これは、それぞれの測定に使われた試料は同一の結晶から切り出したものではあるものの、その特性に若干の違いがあることによるものと思われる．

幾何学因子  $G^L$ ,  $G^H$  が決定されたので、磁場下での十字型 2 重縮退モード空洞共振器での測定結果に対して、(2.6) および (2.7) を用いることで  $|R^H|$  と  $|X^H|$  を評価した．ここでは  $T_0 = 110 \text{ K}$  として、これら常伝導状態での測定結果を使用してフラックスフロー Hall 効果の解析を行った．図 3.19 は 10 K から 70 K までにおける、Bi2212(試料 #1) の  $|R^H|$  と  $|X^H|$  の磁場依存性を示している． $|R^H|$  と  $|X^H|$  のいずれも低温側を除いて、目立った磁場依存性を示さなかった．また、 $|R^H|$  と  $|X^H|$  のどちらも温度の低下とともにその値は増加した．これらの結果から計算された表面インピーダンステンソルの非対角成分の大きさ  $|Z^H|$  の磁場依存性を図 3.20 に示す．以上の結果から、(2.5) を用いることで最終的に得られた Hall 角の大きさの磁場依存性を図 3.21-3.22 に示す．フラックスフロー Hall 角の大きさは温度の低下とともに増加し、その値は 10 K で約 3 であった．このフラックスフロー Hall 角の大きさ、すなわち  $\omega_0 \tau$  の値は、これまでの

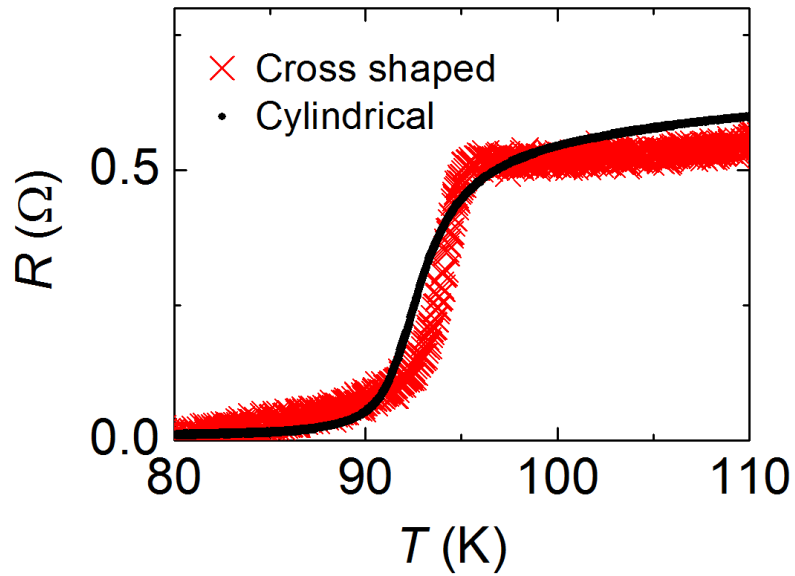


図 3.18: 円筒形共振器と十字型共振器から得られた Bi2212(試料#1) の表面抵抗の比較.

円筒形空洞共振器による実効粘性抵抗係数からの評価より一桁程度大きい [43]. 一方, フラックスフロー Hall 角は顕著な磁場依存性を示さなかったが, これはクリーンなコアに対して期待される振る舞いである. したがって, これらのことは, Bi2212 のコアは, これまでの実効粘性抵抗係数からの評価よりもクリーンであることを示唆している. コアの準粒子状態に対する, フラックスフロー Hall 角からの評価と実効粘性抵抗係数からの評価の違いについては次章で議論する.

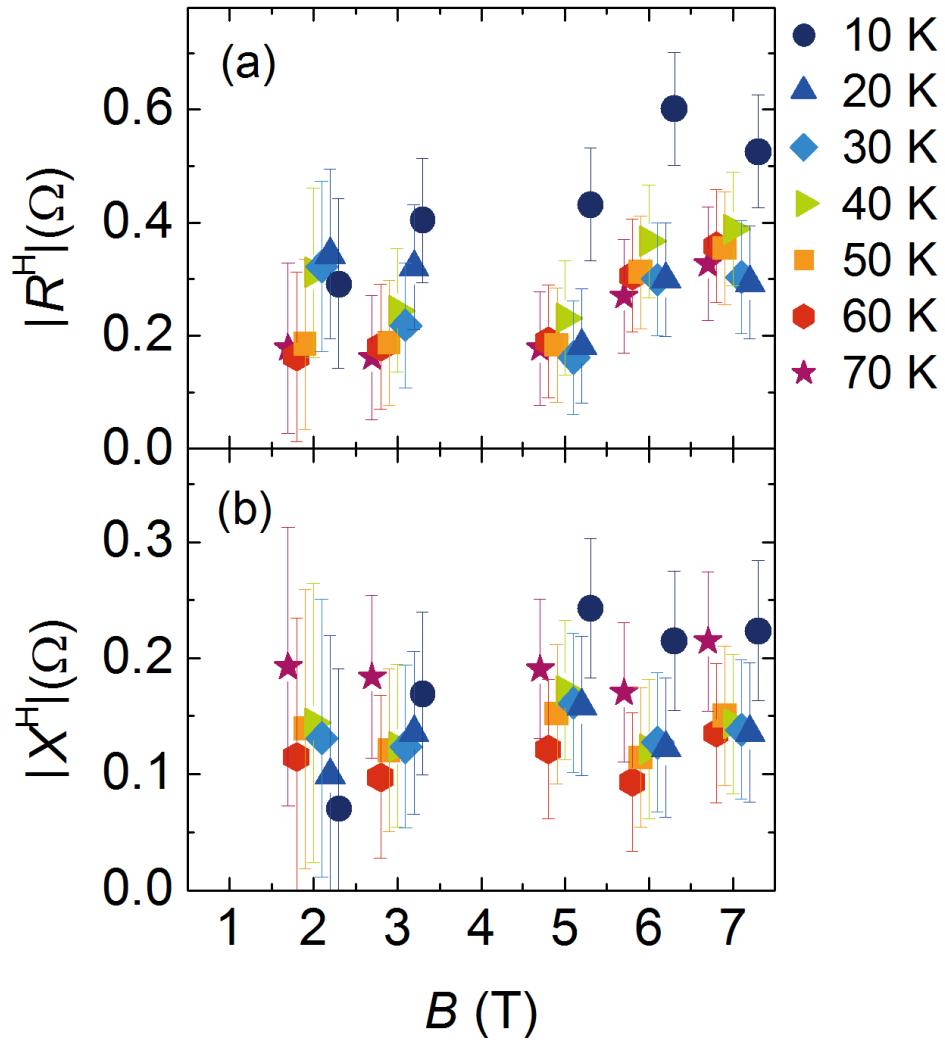


図 3.19: (a) Bi2212(試料#1) の表面抵抗テンソルの非対角成分の大きさの磁場依存性.  
 (b) Bi2212(試料#1) の表面リアクタンステンソルの非対角成分の大きさの磁場依存性.

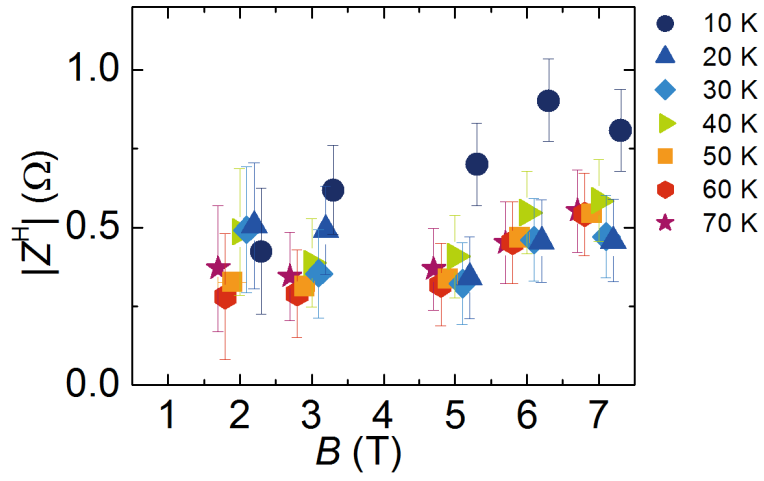


図 3.20: Bi2212(試料#1) の表面インピーダンステンソルの非対角成分の大きさの磁場依存性.

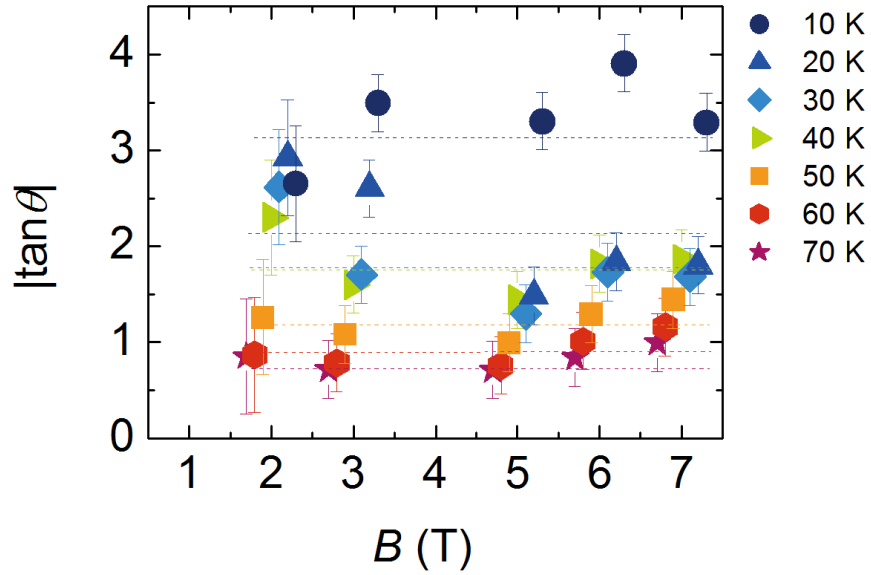


図 3.21: Bi2212(試料#1) のフラックスフロー Hall 角の大きさの磁場依存性. フラックスフロー Hall 角の大きさは温度の低下とともに増加し, 10 K で約 3 となった. また, いずれの温度でも, 顕著な磁場依存性を示さなかった.

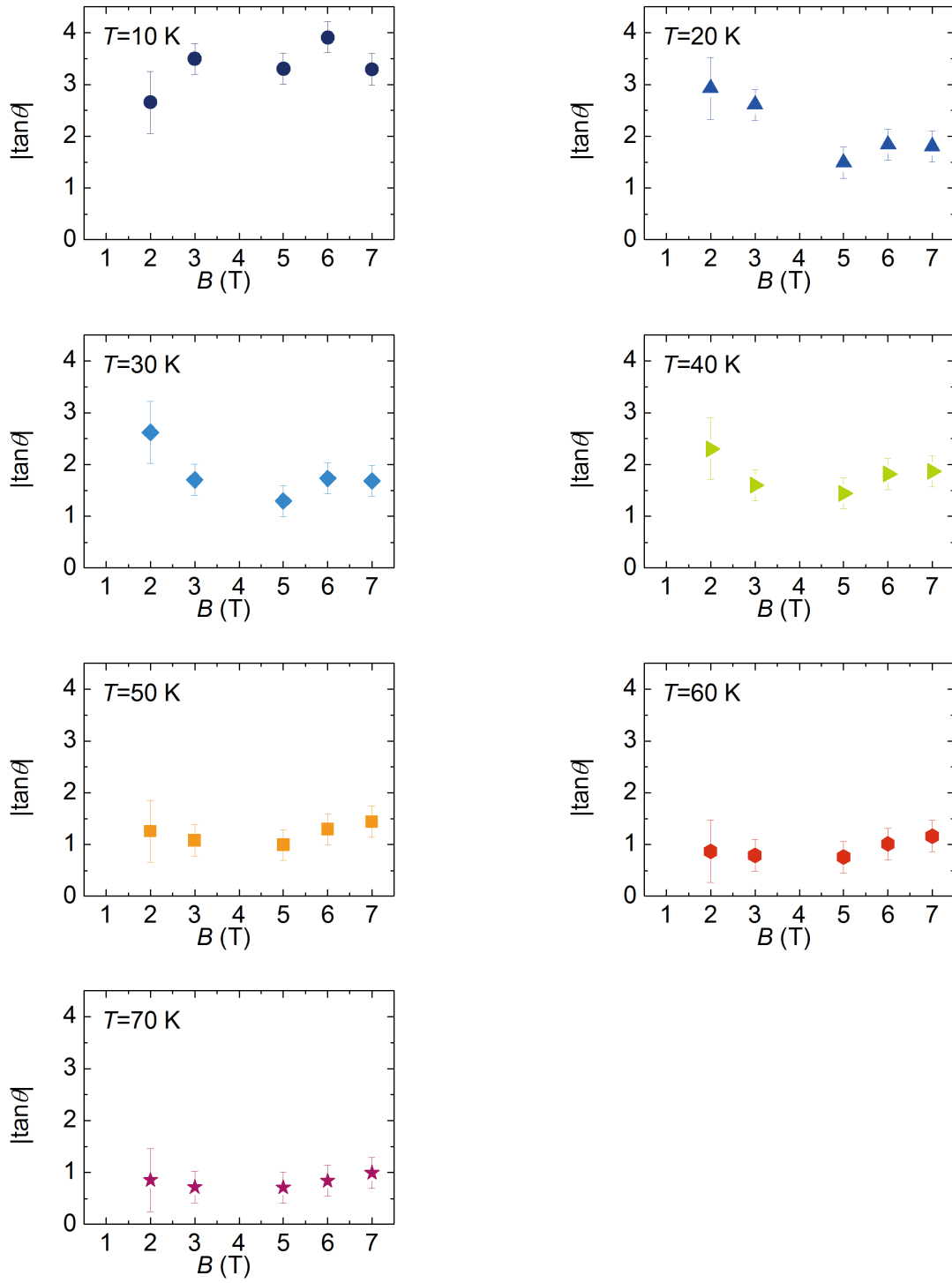


図 3.22: 温度別にプロットした Bi2212(試料#1) のフラックスフロー Hall 角の大きさの磁場依存性.

### 3.2.2 試料#2 に対する測定

ここでは、前節とは異なる Bi2212 試料 (試料#2) を対象とした、フラックスフロー Hall 効果測定の結果を述べる。試料#2 に対する測定は、FC でなく、常伝導状態で磁場を印加し、温度を低下させ超伝導状態した後に磁場を減少させることで測定を行った。低温低磁場側では、ピン止めのため磁束が不均一に分布し、FC での測定と違いが生じるが、高磁場側ではピン止めが弱くなり、FC の場合と同様の測定結果が期待できる。なお、測定を行った試料#1、試料#2 は、FZ 法で作製された試料を劈開して得られた Bi2212 単結晶を複数個に分割して得ていることから、直流測定の結果については試料#1 と同じ結果を使用して解析を行った。

#### 3.2.2.1 円筒形共振器による表面インピーダンス測定

まず、円筒形共振器による表面インピーダンステンソルの対角成分の測定結果を述べる。図 3.23 は Bi2212(試料#2) の表面抵抗  $R$  と表面リアクタンス  $X$  の磁場依存性を示している。得られた結果は、試料#1 と同様に、磁場下における超伝導状態の表面インピーダンスの振る舞いとして一般的なものである [43]。さらに、これらの結果から計算した表面インピーダンスの大きさ  $|Z|$  の磁場依存性を図 3.24 に示す。これらの表面インピーダンスの磁場依存性の結果を使用することで、次項に示す十字型共振器によるマイクロ波 Hall 効果の解析を行った。

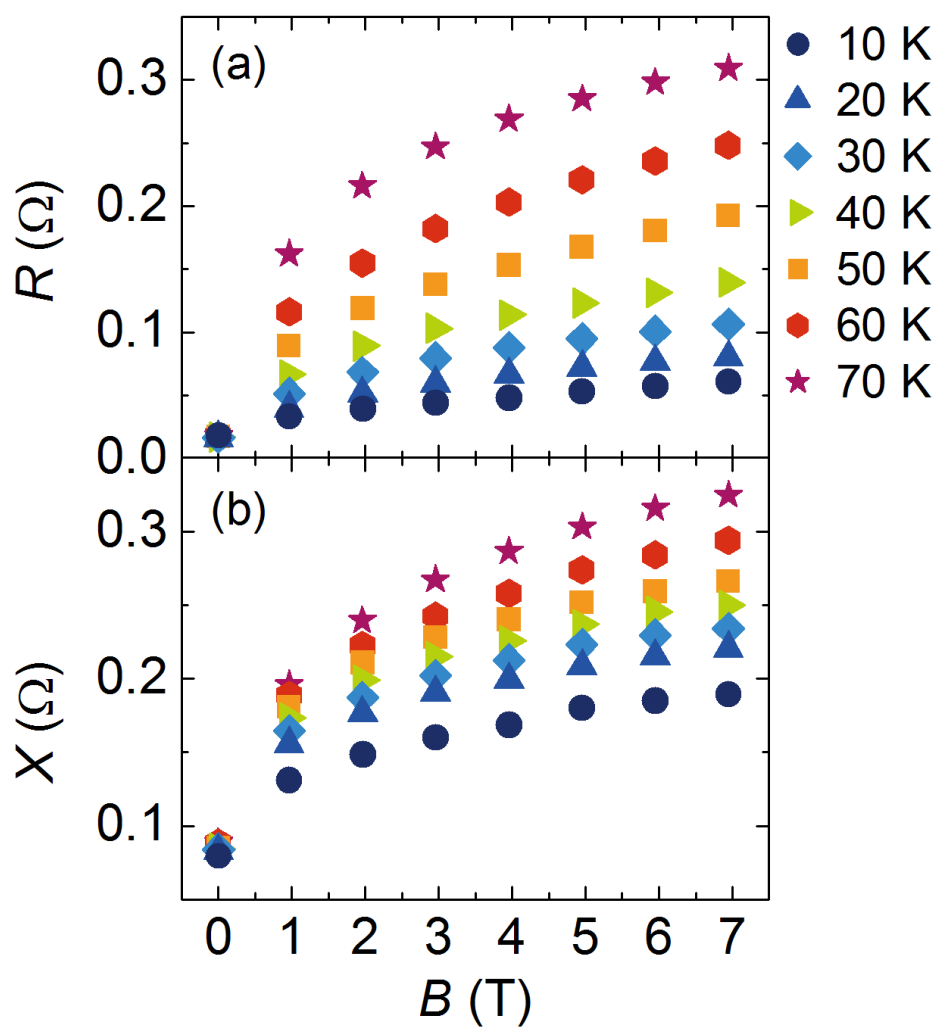


図 3.23: (a) Bi2212(試料#2) の表面抵抗の磁場依存性. (b) Bi2212(試料#1) の表面リアクタンスの磁場依存性. これらのデータは円筒形空洞共振器摂動法から得られた.

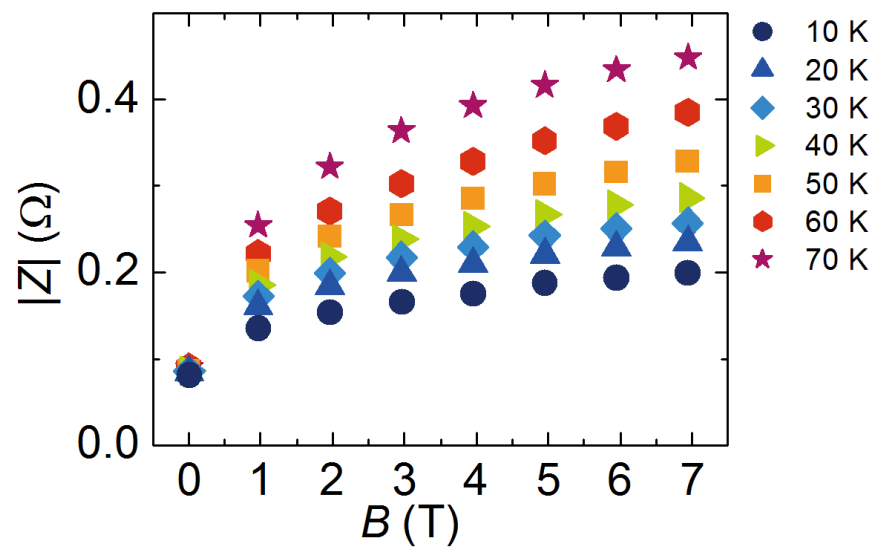


図 3.24: Bi2212(試料#2) の表面インピーダンスの大きさの磁場依存性.

### 3.2.2.2 十字型共振器によるフラックスフロー Hall 効果測定

次に，十字型 2 重縮退モード空洞共振器による測定結果を示す．まず，試料#1 と同様に，ゼロ磁場での共振特性の温度依存性の測定結果と，円筒形共振器による表面抵抗の温度依存性のデータを比較することで，十字型共振器における幾何学因子として  $G^L(=G^H)=3.0\times 10^{-6}\Omega^{-1}$  が得られた．そして，幾何学因子  $G^L$ ,  $G^H$  を決定したのちに，磁場下での十字型 2 重縮退モード空洞共振器での測定結果に対して，(2.6) および (2.7) を用いることで  $|R^H|$  と  $|X^H|$  を評価した．ここでは  $T_0=110\text{ K}$  として，これら常伝導状態での測定結果を使用してフラックスフロー Hall 効果の解析を行った．図 3.25 は 10 K から 70 K までにおける，Bi2212(試料#2) の  $|R^H|$  と  $|X^H|$  の磁場依存性を示している．試料#1 とは異なり， $|R^H|$  と  $|X^H|$  のいずれも磁場依存する振る舞いを示している．また，これらの結果から計算された表面インピーダンステンソルの非対角成分の大きさ  $|Z^H|$  の磁場依存性を図 3.26 に示す．以上の結果から，2.5 を用いることで最終的に得られた Hall 角の大きさの磁場依存性を図 3.27-3.28 に示す．試料#1 と試料#2 のフラックスフロー Hall 角の測定結果を比較すると，試料#2 の低温低磁場側ではフラックスフロー Hall 角の磁場依存性が見られる．また，その大きさは試料#2 の方が小さい値となっている．一方，それ以外の領域では，フラックスフロー Hall 角の大きさは同程度である．この試料#1 と試料#2 における低温低磁場側のフラックスフロー Hall 角の振る舞いの違いは，次章で議論するように，ピン止めによるものと考えられる．したがって，試料#1 と試料#2 の結果は測定の実現性を示すものであると考える．

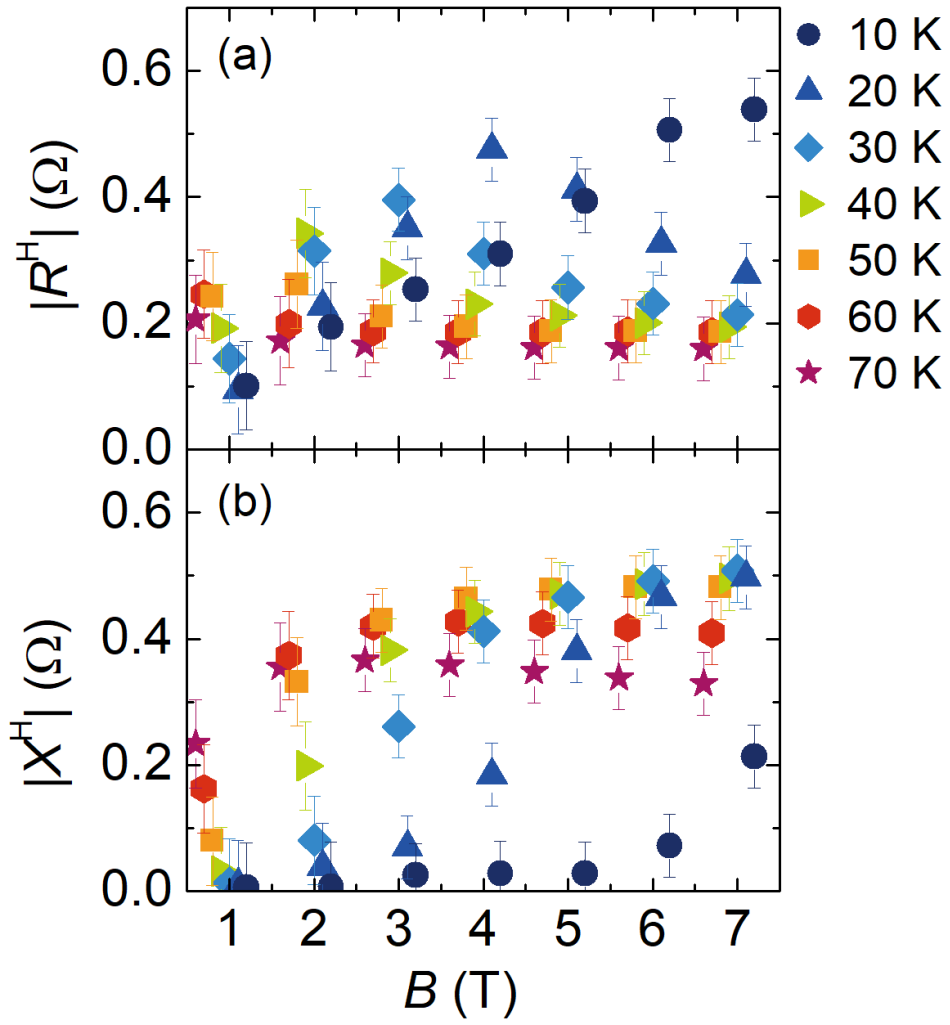


図 3.25: (a) Bi2212(試料#2) の表面抵抗テンソルの非対角成分の大きさの磁場依存性.  
 (b) Bi2212(試料#2) の表面リアクタンステンソルの非対角成分の大きさの磁場依存性.

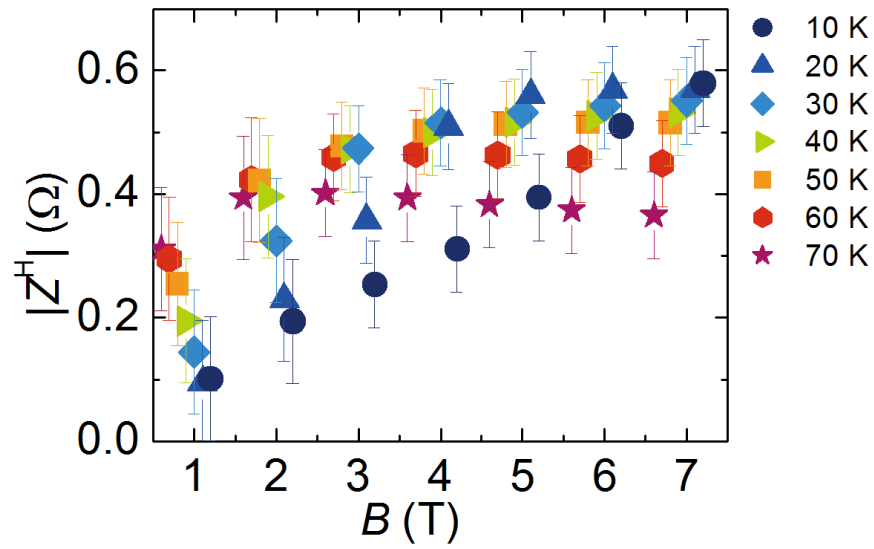


図 3.26: Bi2212(試料#2) の表面インピーダンステンソルの非対角成分の大きさの磁場依存性.

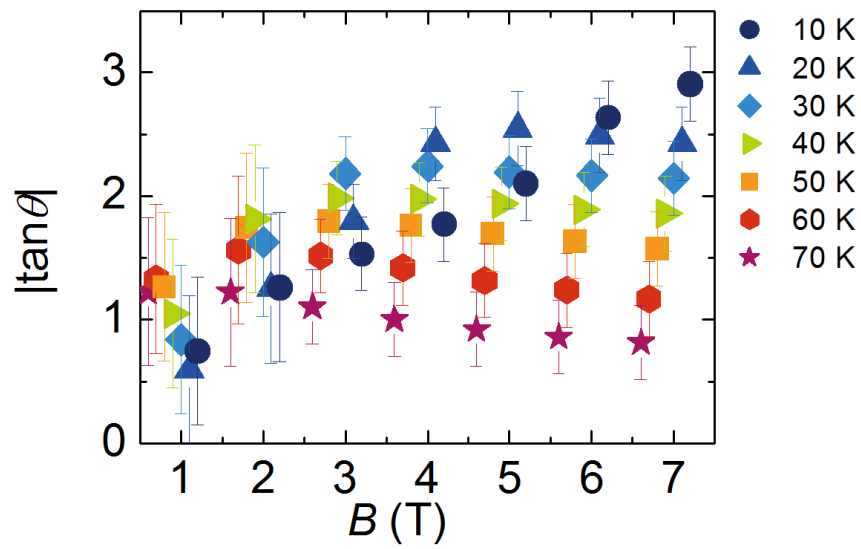


図 3.27: Bi2212(試料#2) のフラックスフロー Hall 角の大きさの磁場依存性. 試料#2 の低温低磁場側におけるフラックスフロー Hall 角の大きさはピン止めのため, 試料#1 と異なる結果となった.

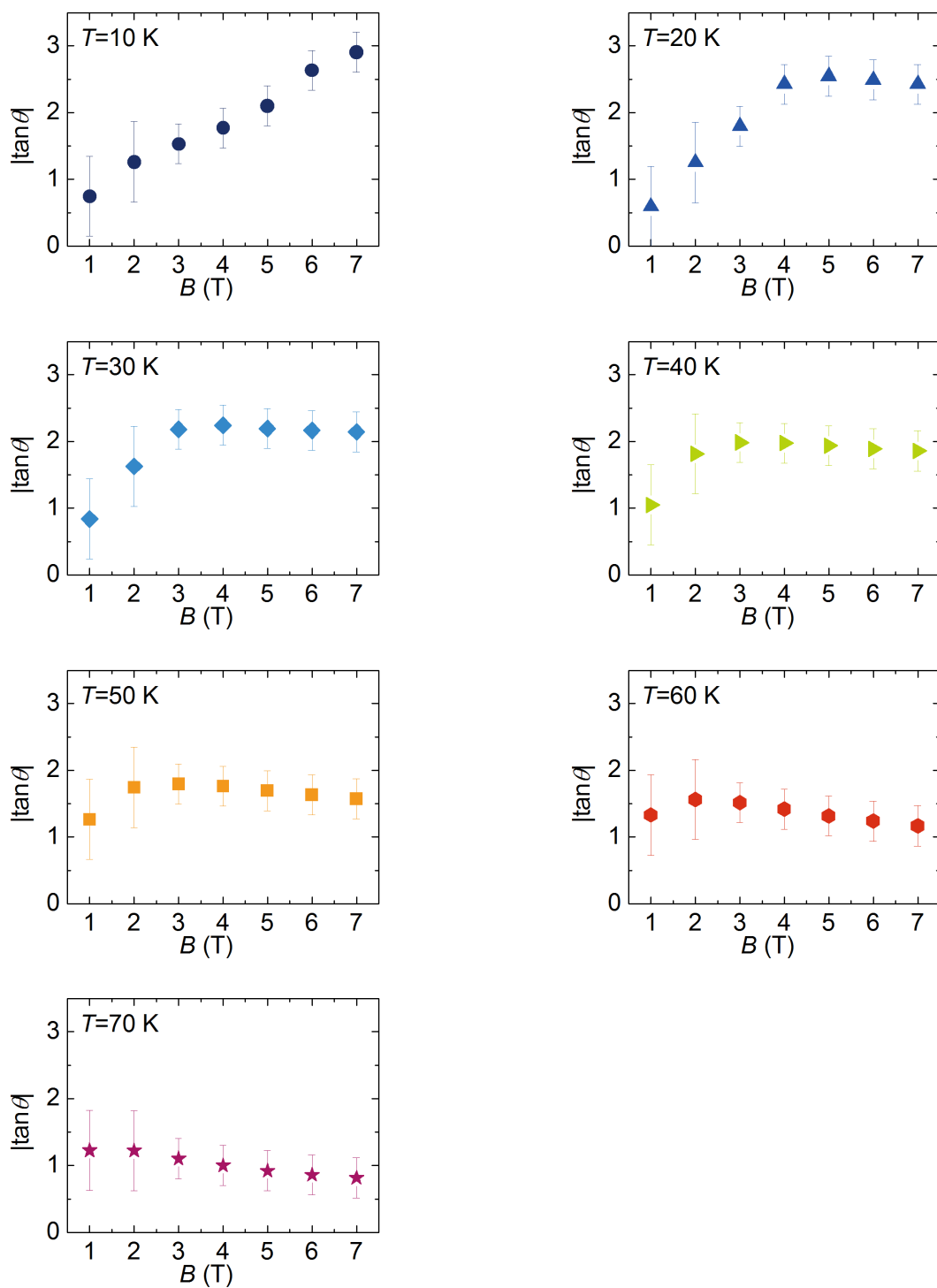


図 3.28: 温度別にプロットした Bi2212(試料#2) のフラックスフロー Hall 角の大きさの磁場依存性.

### 3.3 YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>y</sub> におけるフラックスフロー Hall 効果測定

本節では、YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>y</sub> を対象とした各測定結果を、直流抵抗率測定、円筒形共振器による表面インピーダンス測定、十字型 2 重縮退モード空洞共振器によるマイクロ波フラックスフロー Hall 効果測定の順に述べる．なお、YBCO 試料に対する測定では FC で磁場を印加してフラックスフロー Hall 効果測定を行った．

#### 3.3.1 直流抵抗率測定

YBCO を対象とした直流抵抗率の測定結果を図 3.29 に示す．超伝導転移温度  $T_c$  が約 88 K であることが図 3.29 のインセットから確認できる．また、図 3.29 のメインに示す直流 Hall 角の磁場依存性から、直流 Hall 角は常伝導状態で 0.01 のオーダーであることがわかる．また、 $\tan \theta_{dc} = R_H \sigma_{xx} B$  から計算した Hall 係数  $R_H$  は 100 K で  $2.1 \times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{C}$  であった．

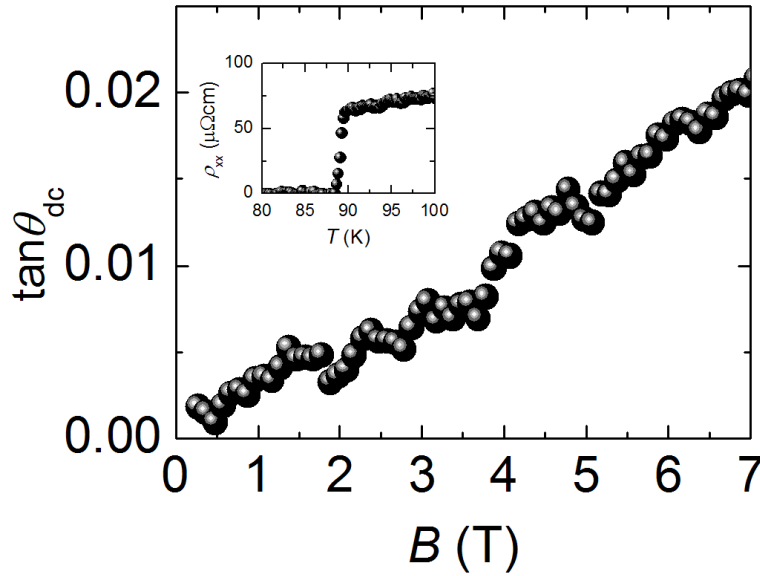


図 3.29: YBCO の直流 Hall 角  $\tan \theta_{dc}$  の磁場依存性 ( $T = 100 \text{ K}$ )．(Inset)  $T_c$  近傍での直流縦抵抗率  $\rho_{xx}$  の温度依存性．測定した YBCO の  $T_c$  は 88 K で、100 K における Hall 係数  $R_H$  は  $2.1 \times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{C}$  であった．

### 3.3.2 円筒形共振器による表面インピーダンス測定

次に，円筒形共振器による表面インピーダンステンソルの対角成分の測定結果を示す．図 3.30 は表面抵抗  $R$  と表面リアクタンス  $X$  のゼロ磁場における温度依存性を示している．また，図 3.31 は YBCO の表面抵抗  $R$  と表面リアクタンス  $X$  の磁場依存性を示している．得られた結果は，磁場下における超伝導状態の表面インピーダンスの振る舞いとして一般的なものであった [40]．さらに，これらの結果から計算した表面インピーダンスの大きさ  $|Z|$  の磁場依存性を図 3.32 に示す．これらの表面インピーダンスの磁場依存性の結果を使用することで，次項に示す十字型共振器によるマイクロ波 Hall 効果の解析を行った．

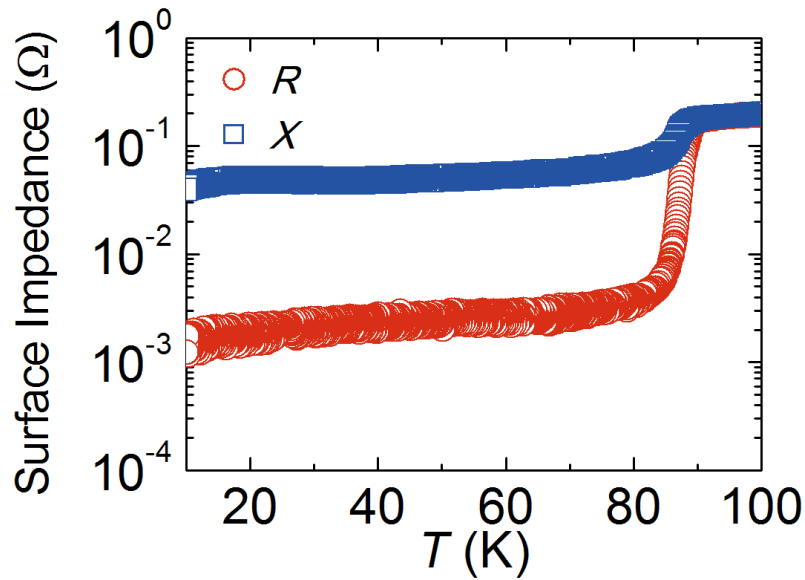


図 3.30: YBCO の表面抵抗  $R$  と表面リアクタンス  $X$  の温度依存性 ( $B = 0$  T)．これらのデータは円筒形空洞共振器摂動法から得られた．

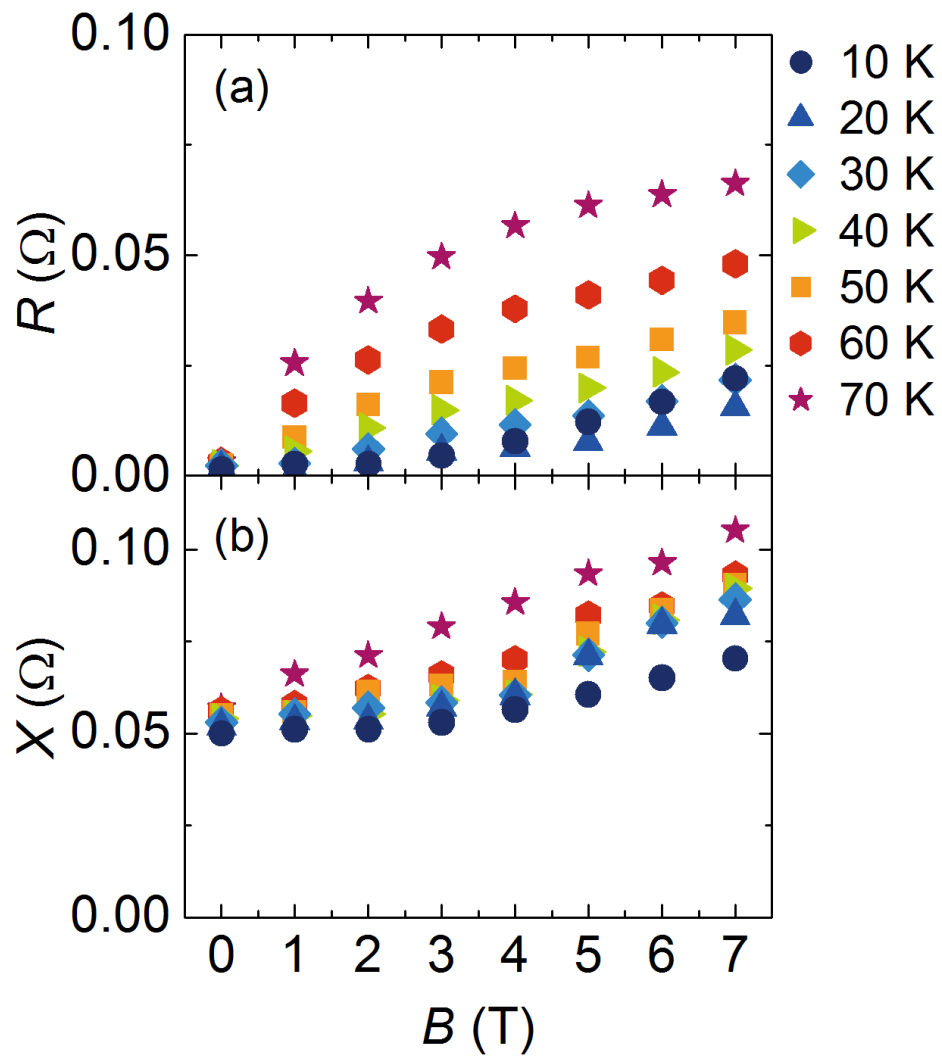


図 3.31: (a) YBCO の表面抵抗の磁場依存性. (b) YBCO の表面リアクタンスの磁場依存性. これらのデータは円筒形空洞共振器摂動法から得られた.

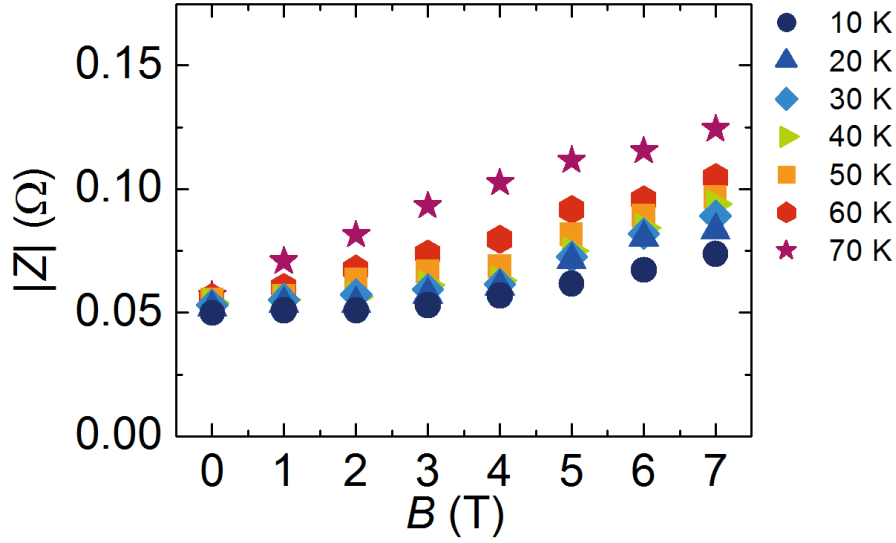


図 3.32: YBCO の表面インピーダンスの大きさの磁場依存性.

### 3.3.3 十字型共振器によるフラックスフロー Hall 効果測定

最後に、十字型 2 重縮退モード空洞共振器による測定結果を示す．まず、これまでと同様に第 2 章で述べた方法に従い、幾何学因子  $G^L (= G^H)$  を決定する．ゼロ磁場での共振特性の温度依存性の測定結果と、円筒形共振器による表面抵抗の温度依存性のデータを比較することで、十字型共振器における幾何学因子として  $G^L (= G^H) = 1.3 \times 10^{-6} \Omega^{-1}$  が得られた．この幾何学因子の値に基づく表面抵抗  $R$  の温度依存性を、円筒形共振器によるデータとともに図 3.18 に示す．これら 2 つのデータの振る舞いは一致しており、十字型 2 重縮退モード空洞共振器での測定の信頼性を確認できる．

幾何学因子  $G^L$ ,  $G^H$  が決定されたので、磁場下での十字型 2 重縮退モード空洞共振器での測定結果に対して、(2.6) および (2.7) を用いることで  $|R^H|$  と  $|X^H|$  を評価した．ここでは  $T_0 = 100 \text{ K}$  として、これら常伝導状態での測定結果を使用してフラックスフロー Hall 効果の解析を行った．

図 3.34 は 10 K から 70 K までにおける、YBCO の  $|R^H|$  と  $|X^H|$  の磁場依存性を示している． $|R^H|$  と  $|X^H|$  はどちらも磁場の増加とともに大きくなる傾向を示した．また、これらの結果から計算された表面インピーダンステンソルの非対角成分の大きさ  $|Z^H|$  の磁場依存性を図 3.35-3.37 に示す．以上の結果から、(2.5) を用いることで最終的に得られた Hall 角の大きさの磁場依存性を図 3.36 に示す．YBCO ではシグナルの小ささのため不確かさが比較的大きいものの、フラックスフロー Hall 角の大きさは温度の低下とともに増加した．この温度依存性の振る舞いは Bi2212 の場合と同じである．また、フラックスフロー Hall 角の大きさ、すなわち  $\omega_0 \tau$  の値は 10 K で 1 から 3 程度で、

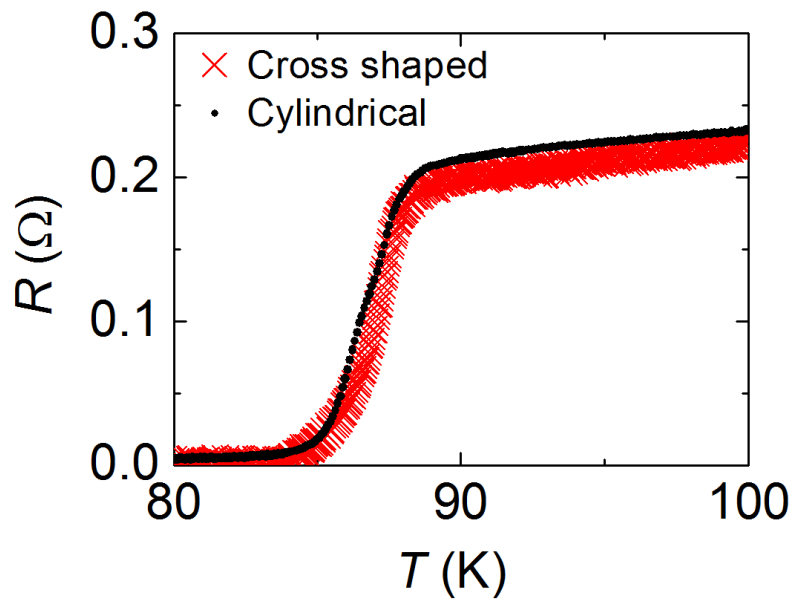


図 3.33: 円筒形共振器と十字型共振器から得られた YBCO の表面抵抗の比較.

Bi2212 の場合と同様に，これまでの円筒形空洞共振器による実効粘性抵抗係数からの評価より一桁程度大きい [40]．一方，YBCO での磁場依存性の振る舞いは，Bi2212(試料#1) の場合と異なり，磁場に伴い大きくなる傾向を示した．この磁場依存性の振る舞いは，ピン止めの影響によるものと考えられる (詳細は次章)．

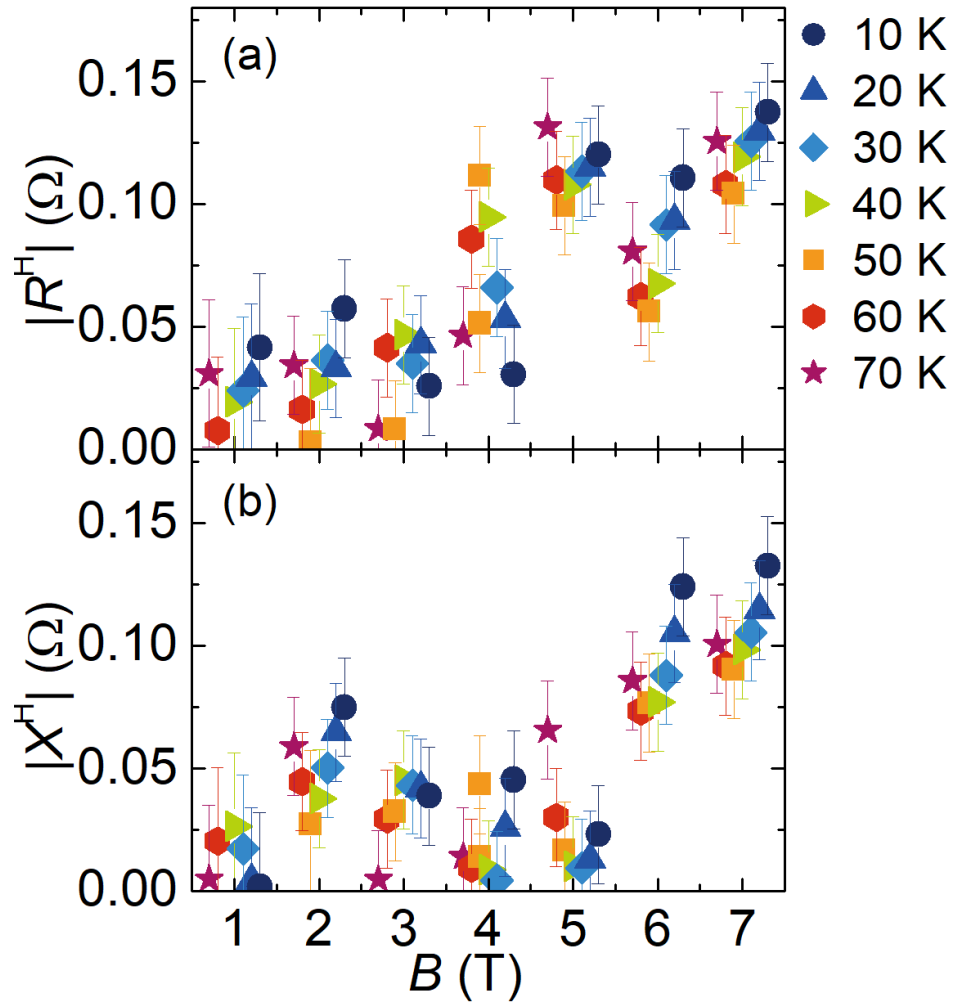


図 3.34: (a) YBCO の表面抵抗テンソルの非対角成分の大きさの磁場依存性. (b) YBCO の表面リアクタンステンソルの非対角成分の大きさの磁場依存性.

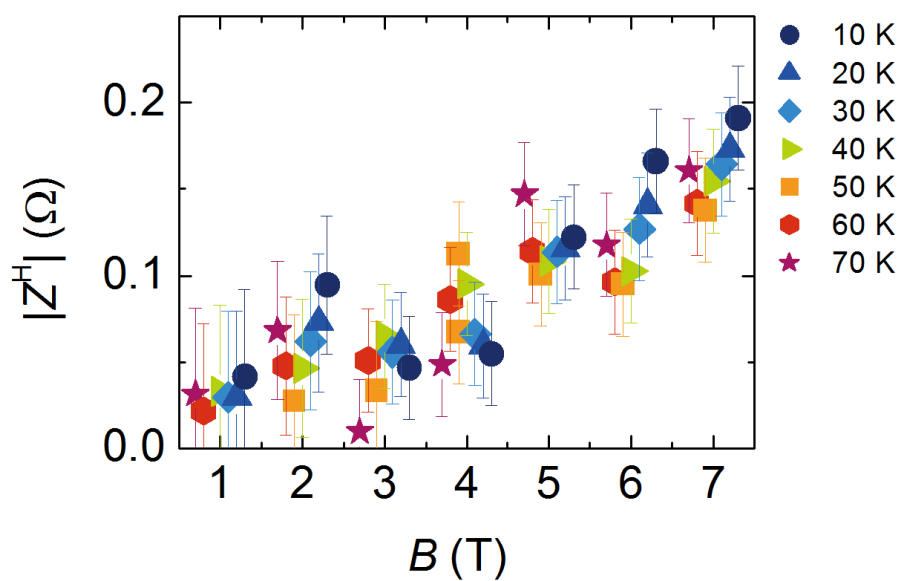


図 3.35: YBCO の表面インピーダンステンソルの非対角成分の大きさの磁場依存性.

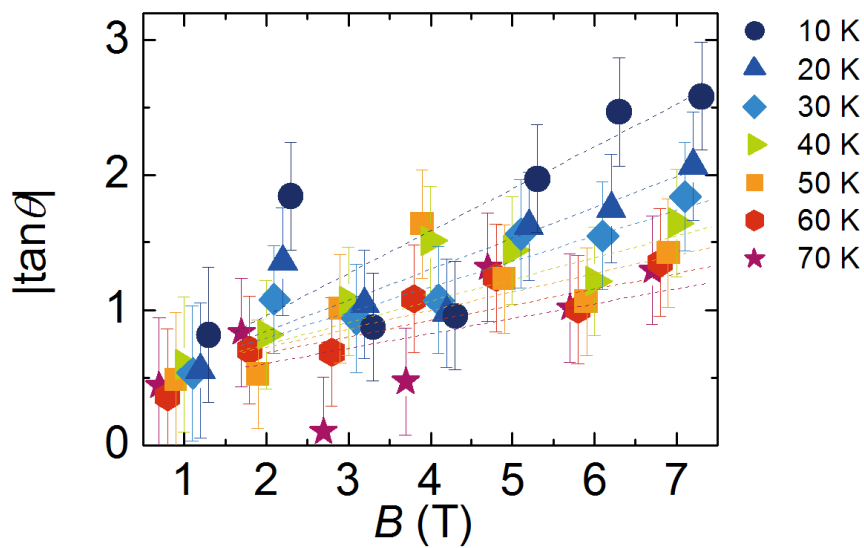


図 3.36: YBCO のフラックスフロー Hall 角の大きさの磁場依存性. YBCO のフラックスフロー Hall 角の大きさは、磁場に伴い大きくなる傾向を示した. また、フラックスフロー Hall 角の大きさは温度の低下とともに増加し、10 K で 1 から 3 程度であった.

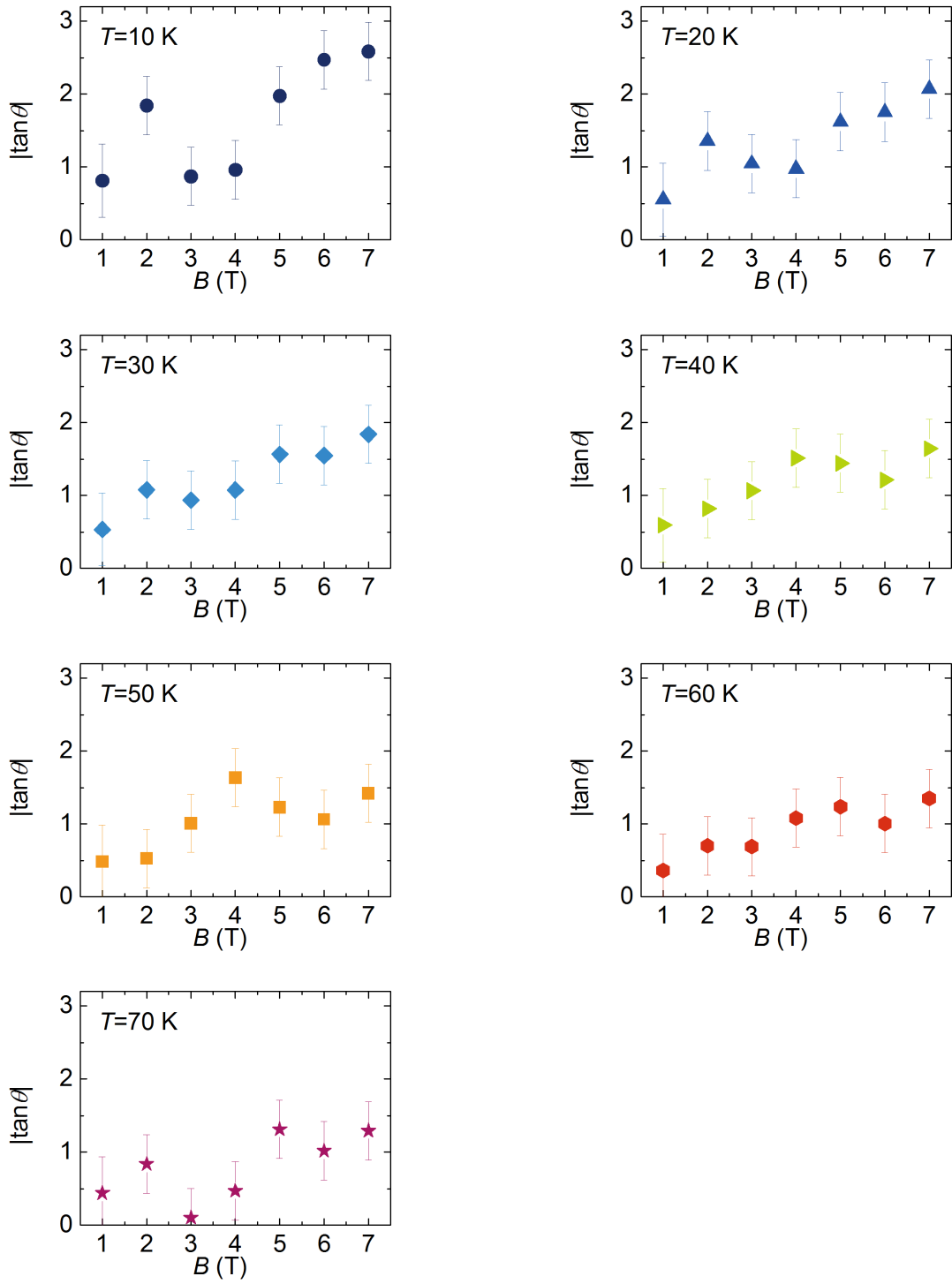


図 3.37: 温度別にプロットした YBCO のフラックスフロー Hall 角の大きさの磁場依存性.

## 第4章 考察

ここでは、Bi2212 と YBCO を対象としたフラックスフロー Hall 効果測定の結果について考察する．今回の測定で得られたフラックスフロー Hall 角には2つの点で注目すべき特徴が見られた．1つ目は、Bi2212 と YBCO の両方の物質でフラックスフロー Hall 角  $\tan \theta$  の大きさ、すなわち  $\omega_0 \tau$  が低温において1のオーダーで、これまでの実効粘性抵抗係数  $\eta_{eff}$  からの評価より1桁程度大きいことである．2つ目は、フラックスフロー Hall 角の磁場依存性の振る舞いである．Bi2212(試料#1)では顕著な磁場依存性を示さなかった．一方、Bi2212(試料#2)では低温低磁場側で磁場依存性が観測された．また、YBCO では磁場の増加に伴いフラックスフロー Hall 角が大きくなる傾向を示した． $B_{c2} \sim 100$  T と仮定することで、10 K におけるこれらの測定結果は図 4.1 のようにまとめられる．

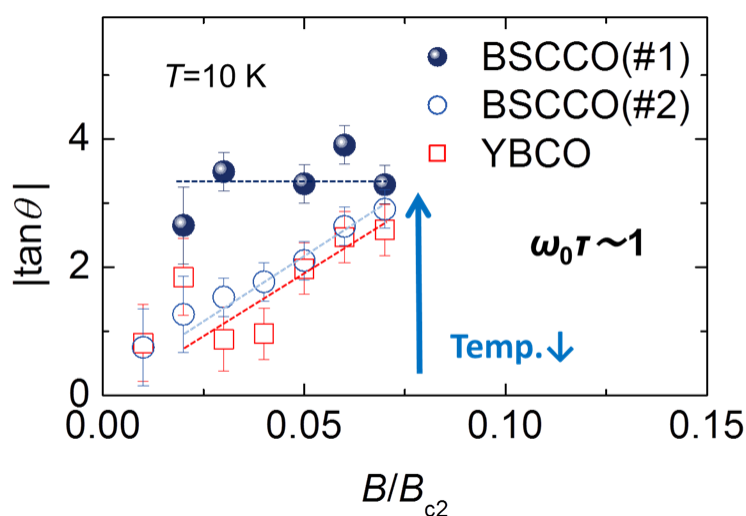


図 4.1: 10 K におけるそれぞれの試料の  $|\tan \theta|$  の磁場依存性． $B_{c2} \sim 100$  T と仮定している．

まず、フラックスフロー Hall 角の磁場依存性について議論する．Bi2212(試料#1) と YBCO でのフラックスフロー Hall 角の磁場依存性の違いは、2つの物質における磁場温度相図の違いが現れているものだと考えることができる．Bi2212 は異方性が強く、今回の測定範囲の磁場・温度では渦糸は液体相にある [114]．一方、YBCO では渦糸はほとんど固体相 (Bragg グラス相) である [115]．したがって、観測された磁場依存性の違いはピン止めの影響の違いによるものと思われる．実際、ピン止めの影響が残っている場合、 $\mathbf{u}$  を渦糸の位置ベクトルとして、渦糸の運動方程式は

$$\Phi_0 \hat{z} \times \mathbf{J} = \eta \dot{\mathbf{u}} + \alpha_H \hat{z} \times \dot{\mathbf{u}} + \kappa_p \mathbf{u} \quad (4.1)$$

である．したがって、この方程式を解くことで

$$|\tan \theta'| = \left| \frac{v_x}{v_y} \right| = \left| \frac{\alpha_H}{\eta} \cdot \frac{1}{1 + i(\frac{\kappa_p}{\eta\omega})} \right| = |\tan \theta| \cdot \left| \frac{1}{1 + i(\frac{\kappa_p}{\eta\omega})} \right| \quad (4.2)$$

が得られる．ここで、 $\tan \theta'$  は観測されるフラックスフロー Hall 角である．したがって、一般的に磁場の増加につれてピン止めが弱くなることを考慮すると、観測されるフラックスフロー Hall 角の大きさ  $|\tan \theta'|$  は磁場の増加に伴い大きくなることが分かる (図 4.2)．同様に、ピン止めの影響による解釈が Bi2212(試料#1) と Bi2212(試料#2) でのフラックスフロー Hall 角の磁場依存性の違いに対しても可能である．試料#1 と試料#2 では磁場の印加方法の違いから、試料#2 においてピン止めの影響が強く現れる．そのため、低温低磁場側において、試料#1 と試料#2 の測定結果で違いが生じ、試料#2 のフラックスフロー Hall 角が試料#1 のものより小さくなっていると考えられる．その一方で、高温高磁場側ではピン止めが弱くなっているため、試料#1 と試料#2 で同様の測定結果が得られている．したがって、銅酸化物超伝導体のフラックスフロー Hall 角は、clean あるいは moderately clean な渦糸コアに対する理論から期待されるように [30, 56, 116]、本質的には磁場依存性をほとんど示さないものだと考えられる．

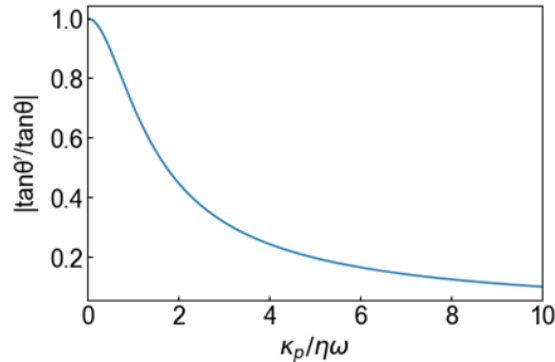


図 4.2:  $\tan \theta'$  とピン止めの関係．

次に、Bi2212 と YBCO のフラックスフロー Hall 角の大きさについて議論する。まず、温度依存性に関して述べておくと、温度が低下するとフラックスフロー Hall 角の大きさが増加するという振る舞いは、実効粘性抵抗係数から評価された  $\omega_0\tau$  の振る舞いと同じである。このことは、 $\tan \theta = \omega_0\tau = \Delta^2\tau/\hbar E_F$  であるので、低温で超伝導ギャップが増大することから理解できる。一方、フラックスフロー Hall 角の低温での値からは銅酸化物超伝導体の渦糸コアでは  $\omega_0\tau \sim 1$  であり、銅酸化物超伝導体の渦糸コアはこれまでの実効粘性抵抗係数からの評価よりもクリーンであることが示唆される。本研究の実験結果であるフラックスフロー Hall 角からの評価の方が、超伝導ギャップの大きさやフェルミエネルギーによる  $\omega_0\tau$  の初期の予想とは整合的である。したがって、何故、今回のフラックスフロー Hall 角の測定結果とこれまでの実効粘性抵抗係数の違うのかということが問題となる。

前節と同様にピン止めの影響が残っている場合の運動方程式を解くと、実効粘性抵抗係数  $\eta_{eff}$  に関して

$$\left| \frac{\eta'_{eff}}{\eta_{eff}} \right| = \left| \left( 1 + i \frac{\kappa_p/\eta}{\omega} \right) \frac{1 + (1 + i \frac{\kappa_p/\eta}{\omega})^{-2} (\frac{\alpha_H}{\eta})^2}{1 + (\frac{\alpha_H}{\eta})^2} \right| \quad (4.3)$$

が成り立っていることが分かる。ここで  $\eta'_{eff}$  は観測される実効粘性抵抗係数である。フラックスフロー Hall 角の測定結果から高磁場側では  $\frac{\omega}{\kappa_p/\eta} \geq 1$  と考えられるので、例えば  $\tan \theta \sim 2$  のときには  $\frac{\eta'_{eff}}{\eta_{eff}} \sim 0.9$  である (図 4.3)。したがって、 $\omega_0\tau \sim 1.6$  となるべきである。つまり、ピン止めの影響からのみでは、 $\tan \theta = \omega_0\tau$  の値が  $\eta_{eff}$  から評価した  $\omega_0\tau$  より 1 桁大きいという実験結果を説明することはできない。

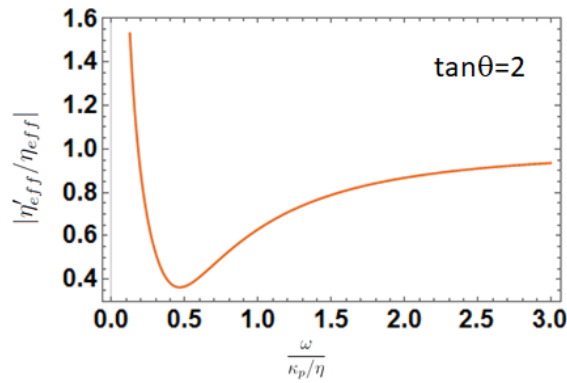


図 4.3:  $\eta'_{eff}$  とピン止めの関係。

実験結果を説明する一つの可能性として、渦糸の運動状態において何らかの理由で運動方程式における粘性抵抗係数  $\eta$  と Hall 定数  $\alpha$  が同程度に小さくなっていることが考えられる。このとき、 $c$  を 1 より小さい因子、 $\eta_0$  をこれまで考慮してきた  $\omega_0\tau$  と直

接的に結びつく粘性抵抗係数,  $\alpha_{H0}$  をこれまでの考慮してきた  $\omega_0\tau$  と直接的に結びつく Hall 定数とすると

$$\eta = c\eta_0 \quad (4.4)$$

$$\alpha_H = c\alpha_{H0} \quad (4.5)$$

$$\eta_0 = \pi\hbar n \frac{\omega_0\tau}{1 + (\omega_0\tau)^2} \quad (4.6)$$

$$\alpha_{H0} = \pi\hbar n \frac{(\omega_0\tau)^2}{1 + (\omega_0\tau)^2} \quad (4.7)$$

である。このとき、測定されるフラックスフロー Hall 角  $\tan\theta^*$  は

$$\tan\theta^* = \frac{\alpha_H}{\eta} = \frac{\alpha_{H0}}{\eta_0} = \tan\theta \quad (4.8)$$

である。一方、測定される実効粘性抵抗係数  $\eta_{eff}^*$  は

$$\eta_{eff}^* = \eta(1 + \frac{\alpha_H^2}{\eta^2}) = c\eta(1 + \frac{\alpha_{H0}^2}{\eta_0^2}) = c\eta_{eff} \quad (4.9)$$

であるので、 $\tan\theta^*$  からの渦糸コアの評価は  $\omega_0\tau$  であるが、 $\eta_{eff}^*$  からの評価は  $c\omega_0\tau$  であり、先行研究を含めた実験結果を説明可能である。この因子  $c$  についてはさらなる考察が必要であるが、粘性力における非線形項の影響や粘性抵抗係数の速度依存性、あるいは運動方程式に現れない隠れた散逸などの可能性が考えられる。測定結果についてより詳しく議論するためには、異なる周波数での測定やコア内のクリーンさを系統的に変化させた試料に対する測定など、今後もさらなるフラックスフロー Hall 効果の測定が必要である。

## 第5章 結論

磁束量子のコア内部には、低エネルギー束縛状態があることが知られている。コア内の準粒子状態は、エネルギー準位間隔と準位幅の比  $\Delta E/\delta E = \omega_0\tau$  で分類され、その準粒子状態が量子的なときは clean, 連続的なときは dirty, その中間は moderately clean と呼ばれる。一方、その準粒子状態はフラックスフローとも深く関係している。そのため、これまでの研究では、フラックスフローにおける実行粘性抵抗係数の測定から準粒子状態が調べられてきた。そこから明らかになったのは、STS での測定や理論からの予想に反して、銅酸化物超伝導体や鉄系超伝導体などの異なるコア内の清浄さが期待される物質で、コア内は一様に moderately clean であるということである。しかしながら、この測定結果が意味するものについて、既存の理論では十分な理解が得られていない。フラックスフローの性質は粘性抵抗係数によって表現される。すなわち、その性質はフラックスフロー抵抗測定から分かる。そして、磁束量子の運動は外部電流による駆動力に対してある角度方向に動く。つまり、粘性抵抗係数はテンソル量であり、それを調べるには、縦フロー抵抗とフラックスフロー Hall 効果の両方の測定が必要となる。その一方で、縦抵抗とフラックスフロー Hall 効果の両方の寄与を合わせた物理量である実効粘性抵抗係数は準粒子状態と簡単な関係で結ばれている。そのため、これまでの研究では、縦フロー抵抗、フラックスフロー Hall 効果の両方を別々に測定するのではなく、電流が環状に流れる円筒形空洞共振器を用いた測定から、フラックスフローでの実行粘性抵抗係数が調べられ、そこから準粒子状態が評価されてきた。ところが、既述のようにその結果は予想と異なり、どの超伝導体でもコアの状態が moderately clean であるという結論が得られていた。したがって、そのメカニズム解明のためには、実効粘性抵抗係数だけではなく、本来の縦方向と横方向の測定、特に、これまで測定に成功しておらず、磁束量子コア内の準粒子状態と一対一に対応しているフラックスフロー Hall 角の測定を行うことが必要である。

フラックスフローの測定では、磁束量子が不純物や欠陥によってトラップされる現象、即ち、ピン止めの影響を取り除く必要がある。そのため、マイクロ波以上の周波数を用いた測定で、その影響を排除することが必要不可欠である。よって本研究では、半導体などに対するマイクロ波 Hall 効果測定で以前から使用されてきた 2 重縮退モード空洞共振器を用いることで、フラックスフロー Hall 効果測定を行う。しかしながら、従来の手法では、表皮厚さ領域の物質に対するマイクロ波 Hall 効果の解析手法は見当たらず、さらに測定精度を高めるために縮退モードのカップリング調節機構が必要で

あるなど極低温での測定が容易ではなかった。

そこで本研究では、共振器内電磁場の解析的計算・電磁場の数値的シミュレーション・測定装置作製等を行うことによって、十字型2重縮退モード空洞共振器による、複雑な機構を必要とせず比較的簡単に極低温で測定可能な、電気伝導度の高い物質に対するマイクロ波 Hall 効果の測定・解析の新たな方法を開発した。

本研究では、新たに開発したマイクロ波 Hall 効果測定方法がフラックスフロー Hall 効果測定に使用可能なことを、Bi を対象としたテスト測定を行うことで確認した。そして、銅酸化物超伝導体  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$  と  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$  というという対照的な磁場相図をもつ2つの物質を対象としてフラックスフロー Hall 効果の測定を行った。

測定の結果、フラックスフロー Hall 角の大きさは温度の低下とともに増加し、その磁場依存性は磁束液体状態と磁束固体状態で対称的な振る舞いを示すという理論と一致する結果が得られた。一方、 $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_y$  と  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_y$  のどちらの物質においても、フラックスフロー Hall 角の大きさは1から3程度であることが分かった。つまり、 $\omega_0\tau$  の値は実効粘性抵抗係数から推定された値より1桁大きいものであった。渦糸の運動方程式における粘性抵抗係数を  $\eta$ 、Hall 定数を  $\alpha$  で表すと、実行粘性抵抗係数は  $\eta_{eff} = \eta(1 + (\alpha/\eta)^2)$ 、Hall 角は  $\tan \theta = \alpha/\eta$  で表わされることから、これらの測定結果は  $\eta$  と  $\alpha$  が同程度に小さくなっている可能性を意味している。つまり、運動方程式における粘性力の非線形項や粘性抵抗係数の速度依存性、あるいは、既存の理論では考慮されていない運動方程式に現れない隠れた散逸を新たに考える必要がある可能性を示唆している。得られた測定結果についてより詳しく議論するためには、異なる周波数での測定やコア内のクリーンさを系統的に変化させた試料に対する測定など、今後さらなるフラックスフロー Hall 効果の測定が必要である。

# 付 録 A 十字型 2 重縮退モード空洞共振器内電磁場の解析的計算

付録 A では、本研究で使用した十字型 2 重縮退モード空洞共振器の共振特性の変化と試料の表面インピーダンステンソルの関係式 (2.6)(2.7) の導出について説明する。この付録では、十字型 2 重縮退モード空洞共振器内の電磁場を固有モードで展開することで、解析的な計算を行った。さらに、Hall 効果を含む表面インピーダンステンソルを考えることで、Hall 効果を示す試料が生じさせる共振特性の変化を計算した。

## A.1 複素伝導度テンソル

本研究で測定する物理量は Hall 角  $\theta$  であり、それは次のように表される。

$$\tan \theta = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $\sigma_{xx}$  と  $\sigma_{xy}$  は、それぞれ伝導度テンソル  $\tilde{\sigma}$  の  $xx$  成分と  $xy$  成分である。ただし、伝導度テンソル  $\tilde{\sigma}$  は電流密度  $\mathbf{j} \equiv (j_x, j_y)$  と電場  $\mathbf{E} \equiv (E_x, E_y)$  に対して

$$\mathbf{j} = \tilde{\sigma} \mathbf{E} \quad (\text{A.2})$$

で定義される。次節に示すように、磁場  $\mathbf{B}$  が  $z$  軸方向を向いているとき、 $xy$  平面に対する伝導度テンソル  $\tilde{\sigma}$  は Hall 角を用いて以下のように書き換えることができる。

$$\tilde{\sigma} = \sigma_{xx} \begin{pmatrix} 1 & -\tan \theta \\ \tan \theta & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

## A.2 表面インピーダンステンソル

本研究では、マイクロ波 Hall 効果の測定・解析を行うにあたり、Hall 効果を含む表面インピーダンスを考える。 $\mathbf{B} = B\hat{z}$ ,  $B > 0$  とすると、電子の運動方程式は次のようになる。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} \quad (\text{A.4})$$

したがって、運動の時間依存性が  $e^{-i\omega t}$  であるとして運動方程式を解くと、 $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}$  より

$$\begin{aligned}\mathbf{j} &= \frac{\sigma_0}{(1 - i\omega\tau)^2 + (\omega_c\tau)^2} \begin{pmatrix} 1 - i\omega\tau & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 - i\omega\tau \end{pmatrix} \mathbf{E} \\ &= \frac{\sigma(\omega)}{1 + \tan^2\theta} \begin{pmatrix} 1 & -\tan\theta \\ \tan\theta & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E}\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

であるので、伝導度テンソル  $\tilde{\sigma}$  はより

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & -\sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} = \sigma_{xx} \begin{pmatrix} 1 & -\tan\theta \\ \tan\theta & 1 \end{pmatrix}\quad (\text{A.6})$$

であることがわかる。ただし、直流伝導度を  $\sigma_0 \equiv \frac{ne^2\tau}{m}$ 、伝導度を  $\sigma(\omega) \equiv \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$ 、サイクロトロン周波数を  $\omega_c = \frac{eB}{m}$  とする。また、 $\tan\theta = \frac{\omega_c\tau}{1 - i\omega\tau}$  である。

ここで、導体面に垂直で導体内部を向く大きさ  $n$  のベクトル  $\mathbf{n}$  を用いて、

$$\nabla \approx \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n}\quad (\text{A.7})$$

という近似を考える。このとき、表皮厚さを  $1/\gamma$  とすると電磁場の rotation は

$$\nabla \times \mathbf{E} \approx \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} = -\gamma \mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\gamma \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\parallel}\quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} \approx \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n} = -\gamma \mathbf{n} \times \mathbf{H} = -\gamma \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\parallel}\quad (\text{A.9})$$

で表される。ここで、 $\parallel$  は導体面に平行であることを意味する。これらの式を Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega\mu_0\mathbf{H}\quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \approx \tilde{\sigma}\mathbf{E}\quad (\text{A.11})$$

に代入することで、

$$-\gamma \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{n=0}^{\parallel} \approx \tilde{\sigma} \mathbf{E}_{n=0}^{\parallel}\quad (\text{A.12})$$

$$-\gamma \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{n=0}^{\parallel} \approx i\omega\mu_0 \mathbf{H}_{n=0}^{\parallel}\quad (\text{A.13})$$

が得られる.

一方, 表面インピーダンスの定義から,  $\tilde{Z}$  を表面インピーダンステンソルとして

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{n=0}^{\parallel} &= \tilde{Z} \int_0^{\infty} \mathbf{j}(n) dn \\ &= \tilde{Z} \int_0^{\infty} \tilde{\sigma} \mathbf{E}_{n=0}^{\parallel} e^{-\gamma n} dn \\ &= \frac{1}{\gamma} \tilde{Z} \tilde{\sigma} \mathbf{E}_{n=0}^{\parallel}\end{aligned}\tag{A.14}$$

であるので,

$$\tilde{Z} = \gamma \tilde{\sigma}^{-1}\tag{A.15}$$

という関係が成立する. したがって,  $xy$  平面における表面インピーダンステンソル  $\tilde{Z}$  ととして

$$\tilde{Z} = \frac{\gamma}{\det \tilde{\sigma}} \begin{pmatrix} 1 & \tan \theta \\ -\tan \theta & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} Z & Z^H \\ -Z^H & Z \end{pmatrix},\tag{A.16}$$

が得られ, Hall 角は表面インピーダンステンソルの成分を用いて,

$$\tan \theta = \frac{Z^H}{Z}\tag{A.17}$$

と表すことができる.

さらに, (A.12)(A.13)(A.14) より

$$\gamma^2 \mathbf{E}_{n=0}^{\parallel} = -i\omega\mu_0 \tilde{\sigma} \mathbf{E}_{n=0}^{\parallel}\tag{A.18}$$

であるので, その永年方程式として

$$0 = \begin{vmatrix} i\omega\mu_0\sigma_{xx} + \gamma^2 & -i\omega\mu_0\sigma_{xy} \\ i\omega\mu_0\sigma_{xy} & i\omega\mu_0\sigma_{xx} + \gamma^2 \end{vmatrix}\tag{A.19}$$

が得られる. この方程式を解くと

$$\gamma = \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_{xx}(1 \pm i\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}})} = \sqrt{\frac{-i\omega\mu_0\sigma(\omega)}{1 \mp i \tan \theta}}\tag{A.20}$$

であるので, (A.15) から,  $xy$  平面における Hall 成分を含む表面インピーダンスとして以下の式が得られる.

$$\tilde{Z} = \sqrt{\frac{-i\omega\mu_0}{\sigma(\omega)}} \frac{1}{\sqrt{1 \mp i \tan \theta}} \begin{pmatrix} 1 & \tan \theta \\ -\tan \theta & 1 \end{pmatrix}\tag{A.21}$$

$$Z = \sqrt{\frac{-i\omega\mu_0}{\sigma(\omega)}} \frac{1}{\sqrt{1 \mp i \tan \theta}} \quad (\text{A.22})$$

$$Z^H = \sqrt{\frac{-i\omega\mu_0}{\sigma(\omega)}} \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 \mp i \tan \theta}} \quad (\text{A.23})$$

### A.3 電磁場の固有モード展開

以降では、電磁場の固有モード展開の手法 [117] を適用することで、Hall 効果を示す試料がその内部に存在する場合の、十字型 2 重縮退モード空洞共振器の共振特性を解析的に計算する。そのために、以下ではまず、通常の円筒形空洞共振器に立ち戻り、その共振特性と試料の表面インピーダンスの関係式を考える。

任意の 3 次元ベクトルは divergence がゼロのベクトルと rotation がゼロのベクトルに分解することができる。このことから、電磁場ベクトルを固有モード  $\mathbf{E}_a$ ,  $\mathbf{H}_a$ ,  $\mathbf{F}_a$ ,  $\mathbf{G}_a$  を用いて次のように展開できる [117]。

$$\mathbf{E} = \sum_a \mathbf{E}_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + \sum_a \mathbf{F}_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_a dv \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{H} = \sum_a \mathbf{H}_a \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv + \sum_a \mathbf{G}_a \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_a dv \quad (\text{A.25})$$

ここで、 $a$  はモードを表す指標で、 $\mathbf{E}_a$ ,  $\mathbf{H}_a$ ,  $\mathbf{F}_a$ ,  $\mathbf{G}_a$  はそれぞれ以下に示す性質をもつ。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_a = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_a = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\nabla \times \mathbf{F}_a = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$\nabla \times \mathbf{G}_a = 0 \quad (\text{A.29})$$

$\mathbf{E}_a$ ,  $\mathbf{H}_a$  の divergence がゼロであることから、 $\mathbf{E}_a$ ,  $\mathbf{H}_a$  はあるベクトルの rotation を用いて表すことができる。したがって、以下の関係式が成り立つ場合を考える。

$$k_a \mathbf{H}_a = \nabla \times \mathbf{E}_a \quad (\text{A.30})$$

$$k_a \mathbf{E}_a = \nabla \times \mathbf{H}_a \quad (\text{A.31})$$

このとき，ベクトル解析の公式から

$$\nabla^2 \mathbf{E}_a + k_a^2 \mathbf{E}_a = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_a + k_a^2 \mathbf{H}_a = 0 \quad (\text{A.33})$$

である．また， $\mathbf{n}$  をある面に垂直なベクトルとすると，境界条件として  $\mathbf{E}_a$  と  $\mathbf{H}_a$  は導体面  $S_0$  上で

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a = 0 \quad (\text{A.34})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_a = 0 \quad (\text{A.35})$$

であり，絶縁面  $S_1$  上で

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a = 0 \quad (\text{A.36})$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a = 0 \quad (\text{A.37})$$

である．さらに， $\mathbf{F}_a$  の rotation がゼロであることから， $\mathbf{F}_a$  をあるスカラー関数  $\psi$  の gradient を用いて次のように表すことができる．

$$k_a \mathbf{F}_a = \nabla \psi_a \quad (\text{A.38})$$

このときベクトル解析の公式から

$$\nabla^2 \phi_a + k_a^2 \psi_a = 0 \quad (\text{A.39})$$

である． $\mathbf{F}_a$  は境界条件として， $S_0$  および  $S_1$  上で以下に示す条件を満たす．

$$\psi_a = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{F}_a = 0 \quad (\text{A.41})$$

$\mathbf{G}_a$  に対しても同様に考えることができ，

$$k_a \mathbf{F}_a = \nabla \phi_a \quad (\text{A.42})$$

$$\nabla^2 \phi_a + k_a^2 \phi_a = 0 \quad (\text{A.43})$$

であり,  $\mathbf{G}_a$  の境界条件として,  $S_0$  および  $S_1$  上で

$$\phi_a = 0 \quad (\text{A.44})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{G}_a = 0 \quad (\text{A.45})$$

である. また, 簡単な計算から  $\mathbf{E}_a, \mathbf{H}_a, \mathbf{F}_a, \mathbf{G}_a$  の直交性を示すことができるので, 以降は,  $\mathbf{E}_a, \mathbf{H}_a, \mathbf{F}_a, \mathbf{G}_a$  が正規化されているときを考え,

$$\int_V \mathbf{X}_a \mathbf{Y}_b dv = \delta_{XY} \delta_{ab} \quad (\text{A.46})$$

とする. ここで,  $\mathbf{X}$  または  $\mathbf{Y}$  は,  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$  のいずれかのベクトルである.

## A.4 固有モード展開による共振器内電磁場の計算

ここでは, 電束密度を  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ , 磁束密度を  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , 電流密度を  $\mathbf{j} = 0$ , 電荷密度を  $\rho = 0$ , 電磁場の時間変化を  $e^{-i\omega t}$  として, 内部が真空中で完全導体面からなる理想的な共振器を考える. このとき Maxwell 方程式は以下に表せる.

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.47})$$

$$\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (\text{A.48})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mu_0 \mathbf{H} = 0 \quad (\text{A.49})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + i\omega \epsilon_0 \mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.50})$$

一方, 前述の固有モード展開とベクトル解析の公式  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  を使用して電磁場の rotation

を書き換えると， $S$  を共振器表面として，

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= \sum_a \mathbf{H}_a \int_V (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a + \sum_a \mathbf{G}_a \int_V (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{G}_a \\
&= \sum_a \mathbf{H}_a \int_V [(\nabla \times \mathbf{H}_a) \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_a)] dv \\
&\quad + \sum_a \mathbf{G}_a \int_V [(\nabla \times \mathbf{G}_a) \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{G}_a)] dv \\
&= \sum_a \mathbf{H}_a (k_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_a) ds) + \sum_a \mathbf{G}_a \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{G}_a) ds \\
&= \sum_a \mathbf{H}_a (k_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a ds) + \sum_a \mathbf{G}_a \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{G}_a ds
\end{aligned} \tag{A.51}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H} &= \sum_a \mathbf{E}_a \int_V (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a + \sum_a \mathbf{F}_a \int_V (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{F}_a \\
&= \sum_a \mathbf{E}_a \int_V [(\nabla \times \mathbf{E}_a) \cdot \mathbf{H} + \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}_a)] dv \\
&\quad + \sum_a \mathbf{F}_a \int_V [(\nabla \times \mathbf{F}_a) \cdot \mathbf{H} + \nabla \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{F}_a)] dv \\
&= \sum_a \mathbf{E}_a (k_a \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv + \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{E}_a) ds) + \sum_a \mathbf{F}_a \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{F}_a) ds \\
&= \sum_a \mathbf{E}_a (k_a \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a ds) + \sum_a \mathbf{F}_a \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{F}_a ds
\end{aligned} \tag{A.52}$$

が得られる．したがって，Maxwell 方程式に (A.51)(A.52) を代入することで

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu_0 \mathbf{H} \\
&= \sum_a \mathbf{H}_a (k_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a ds) \\
&\quad + \sum_a \mathbf{G}_a \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{G}_a ds - i\omega\mu_0 (\sum_a \mathbf{H}_a \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv + \sum_a \mathbf{G}_a \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_a dv)
\end{aligned} \tag{A.53}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla \times \mathbf{H} + i\omega\mu_0\mathbf{E} \\
&= \sum_a \mathbf{E}_a (k_a \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a ds) \\
&\quad + \sum_a \mathbf{F}_a \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{F}_a ds + i\omega\mu_0 (\sum_a \mathbf{E}_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + \sum_a \mathbf{F}_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_a dv)
\end{aligned} \tag{A.54}$$

であることがわかる．(A.53)(A.54)において， $\mathbf{E}_a$  あるいは  $\mathbf{H}_a$  との内積をとり，体積積分  $\int_V dv$  を考えると

$$0 = k_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a ds - i\omega\mu_0 \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv \tag{A.55}$$

$$0 = k_a \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a ds + i\omega\epsilon_0 \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv \tag{A.56}$$

$$0 = \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{G}_a ds - i\omega\mu_0 \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}_a dv \tag{A.57}$$

$$0 = \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{F}_a ds + i\omega\mu_0 \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_a dv \tag{A.58}$$

が得られる．(A.55)(A.56)を連立して整理すると，

$$\begin{aligned}
i \left( \frac{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{k_a} - \frac{k_a}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \right) \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv &= \frac{i}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a ds \\
&\quad - \frac{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{k_a\epsilon_0} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a ds
\end{aligned} \tag{A.59}$$

$$\begin{aligned}
i \left( \frac{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{k_a} - \frac{k_a}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \right) \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv &= \frac{1}{k_a} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a ds \\
&\quad + \frac{i}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a ds
\end{aligned} \tag{A.60}$$

であるので，完全導体面  $S_0$  で囲まれた理想的な空洞共振器では，境界条件より，以下の方程式を満たす．

$$\begin{aligned}
i \left( \frac{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{k_a} - \frac{k_a}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \right) \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv &= \frac{i}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \int_{S_0} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a ds \\
&\quad + \frac{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}{k_a\mu_0} \int_{S_0} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a) \cdot \mathbf{H} ds \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.61}$$

この方程式の非自明な解は

$$\omega = \frac{k_a}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \equiv \omega_a \quad (\text{A.62})$$

である．以上の結果から (A.59)(A.60) を書き換えると，共振器内の電磁場は以下の式を満たす．

$$i \left( \frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv = \frac{i}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a ds - \frac{1}{\omega_a \epsilon_0} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a ds \quad (\text{A.63})$$

$$i \left( \frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv = \frac{1}{\omega_a \mu_0} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a ds + \frac{i}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a ds \quad (\text{A.64})$$

$$\frac{\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv}{\int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv} = i \frac{\omega_a}{\omega} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (\text{A.65})$$

次に，ある1つの導波管が共振器と結合している状況を考える．モード  $p$  における導波管の特性インピーダンスを  $Z_p$ ，電磁場の進行方向を  $-\mathbf{n}$ ，導波管を伝播する電磁場を  $\mathbf{E}'$ ， $\mathbf{H}'$  とすると，インピーダンスの定義より

$$Z_p \mathbf{H}'_p = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_p \quad (\text{A.66})$$

が成り立つ．結合面上での電磁場を，導波管での伝播モードで展開することを考えると

$$\mathbf{E} = \sum_p V_p \mathbf{E}'_p \quad (\text{A.67})$$

$$\mathbf{H} = \sum_p I_p Z_p \mathbf{H}'_p = - \sum_p I_p (\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_p) \quad (\text{A.68})$$

という2式が成立する．さらに，共振器の固有モードを導波管の伝播モードで展開を考えると

$$\mathbf{E}_a = \sum_p v_{a,p} \mathbf{E}'_p \quad (\text{A.69})$$

$$\mathbf{H}_a = \sum_p i_{a,p} Z_p \mathbf{H}'_p = - \sum_p i_{a,p} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_p) \quad (\text{A.70})$$

が成り立つ．導波管と共振器の結合面  $S_c$  は絶縁面  $S_1$  とみなせるので，境界条件から

$$\begin{aligned} \int_{S_c} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a ds &= \int_{S_1} \left[ \mathbf{n} \times \left[ - \sum_p I_p (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_p) \right] \right] \cdot \left( \sum_{p'} v_{a,p'} \mathbf{E}_{p'} \right) ds \\ &= \sum_p \sum_{p'} I_p v_{a,p'} \int_{S_1} \mathbf{E}'_p \mathbf{E}'_{p'} ds \\ &= \sum_p I_p v_{a,p} \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

$$\int_{S_c} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a ds = 0 \quad (\text{A.72})$$

であることがわかる．境界条件より

$$\int_{S-S_c} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a ds = 0 \quad (\text{A.73})$$

であるので，これらの結果を (A.63)(A.64) に代入することで，共振器内の電磁場が満たす式を

$$i \left( \frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv = \frac{i}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \int_{S-S_c} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a ds - \frac{1}{\omega_a \epsilon_0} \sum_p I_p v_{a,p} \quad (\text{A.74})$$

$$i \left( \frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv = \frac{1}{\omega_a \mu_0} \int_{S-S_c} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a ds + \frac{i}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sum_p I_p v_{a,p} \quad (\text{A.75})$$

と書き換えることができる．

さらに，2つの導波管  $\alpha$ ,  $\beta$  とカップリングしている場合も同様に考えることができ，このとき，空洞共振器内の電磁場は以下の式を満たす．

$$\begin{aligned} i \left( \frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv &= \frac{i}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \int_{S-S_c} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a ds \\ &\quad - \frac{1}{\omega_a \epsilon_0} \sum_p I_p^{(\alpha)} v_{a,p}^{(\alpha)} - \frac{1}{\omega_a \epsilon_0} \sum_p I_p^{(\beta)} v_{a,p}^{(\beta)} \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

$$\begin{aligned} i \left( \frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv &= \frac{1}{\omega_a \mu_0} \int_{S-S_c} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a ds \\ &\quad + \frac{i}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sum_p I_p^{(\alpha)} v_{a,p}^{(\alpha)} + \frac{i}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sum_p I_p^{(\beta)} v_{a,p}^{(\beta)} \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

ただし， $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  は導波管  $\alpha$  または  $\beta$  に関する値であることを意味する．

## A.5 共振特性と試料の表面インピーダンスの関係

次に，2つの導波管と結合した共振器内部に，有限の電気伝導度をもつ試料が存在する状況を考える．通常の円筒形共振器では，試料の表面抵抗を  $R$ ，表面リアクタンスを  $X$ ，表面インピーダンスを  $Z = R - iX$  とすると，試料表面  $S_{sample}$  において

$$\int_{S_{sample}} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a \approx Z \int_{S_{sample}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a ds = Z \int_{S_{sample}} \mathbf{H}_a^2 ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv \quad (\text{A.78})$$

であるので，試料の形状に依存する定数である幾何学因子  $G$  を

$$G \equiv \int_{S_{sample}} \mathbf{H}_a^2 ds \quad (\text{A.79})$$

と定義すると，(A.76) より

$$\left[ i \left( \frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) - 2GZ \right] \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv = - \frac{1}{\omega_a \epsilon_0} \sum_p I_p^{(\alpha)} v_{a,p}^{(\alpha)} - \frac{1}{\omega_a \epsilon_0} \sum_p I_p^{(\beta)} v_{a,p}^{(\beta)} \quad (\text{A.80})$$

となる．ただし，ここでは境界条件

$$\int_{S_0} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a ds = 0 \quad (\text{A.81})$$

を使用している．実際の共振器では，共振器壁においても有限の電気伝導度をもつので，それらを考慮すると (A.80) は共振器壁面を  $S_{cavity}$ ，共振器壁の表面インピーダンスを  $Z_{cavity}$ ，共振器に関する幾何学因子を

$$G_{cavity} \equiv \int_{S_{cavity}} \mathbf{H}_a^2 ds \quad (\text{A.82})$$

として，

$$\left[ i \left( \frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) - 2 \sum_i G_i Z_i \right] \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv = - \frac{1}{\omega_a \epsilon_0} \sum_p I_p^{(\alpha)} v_{a,p}^{(\alpha)} - \frac{1}{\omega_a \epsilon_0} \sum_p I_p^{(\beta)} v_{a,p}^{(\beta)} \quad (\text{A.83})$$

となる．ただし， $i$  は試料または共振器からの寄与を表す．

一方，電場  $\mathbf{E}$  の導波管の伝播モード，あるいは固有モードでの展開を考えると

$$\sum_p V_p \mathbf{E}'_p = \sum_a \mathbf{E}_a \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv \quad (\text{A.84})$$

である．この式において  $\mathbf{E}'_q$  との内積をとり，表面積分を考えると，

$$\sum_p \int_S V_p \mathbf{E}'_p \cdot \mathbf{E}'_q ds = \sum_a \int_S \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}'_q ds \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv \quad (\text{A.85})$$

であり，左辺が  $V_p$  であることから (A.69) より

$$\begin{aligned} V_p &= \sum_a \int_S \sum_p v_{a,p} \mathbf{E}'_p \cdot \mathbf{E}'_q ds \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv \\ &= \sum_a v_{a,p} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

であることがわかる．したがって，

$$V_p^{(\alpha)} = \sum_a v_{a,p}^{(\alpha)} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv \quad (\text{A.87})$$

あるいは

$$V_p^{(\beta)} = \sum_a v_{a,p}^{(\beta)} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv \quad (\text{A.88})$$

であるので，主要な伝播モードのみを考えると (A.83)(A.87)(A.88) より導波管からみた共振器の入力インピーダンステンソル  $Z_p$  の各成分が以下のように表わされる．

$$\begin{pmatrix} V^{(\alpha)} \\ V^{(\beta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^{(\alpha\alpha)} & Z^{(\alpha\beta)} \\ Z^{(\beta\alpha)} & Z^{(\beta\beta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^{(\alpha)} \\ I^{(\beta)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.89})$$

$$Z_p^{(ij)} = - \sum_a \frac{v_{a,p}^{(i)} v_{a,p}^{(j)}}{\omega_a \epsilon_0 \left[ i \left( \frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) - 2 \sum_i G_i Z_i \right]} \quad (\text{A.90})$$

ただし， $i, j$  は  $\alpha$  または  $\beta$  である．

共鳴ピークでは共振器の入力インピーダンスが発散することを考えると

$$i \left( \frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) - 2 \sum_i G_i Z_i = 0 \quad (\text{A.91})$$

であり，この式を解くことで

$$\omega \approx \omega_a(1 - i \sum_i G_i Z_i) = \omega_a(1 - \sum_i G_i X_i - i \sum_i G_i R_i) \quad (\text{A.92})$$

が得られる．

ここで，RLC 直列共振回路を考える． $R$  を抵抗， $L$  をリアクタンス， $C$  をキャパシタンスとすると，回路方程式は

$$R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = 0 \quad (\text{A.93})$$

と表される．このとき，共振周波数  $\omega_a$  と  $Q$  値を

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{A.94})$$

$$Q = \frac{\omega_a L}{R} \quad (\text{A.95})$$

と表すことができ，

$$\omega = \omega_a \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} - i\omega_a \frac{1}{2Q} \quad (\text{A.96})$$

が成り立つ．したがって，(A.92)(A.96) から

$$\frac{1}{2Q} = \sum_i G_i R_i \quad (\text{A.97})$$

$$\frac{\omega_a - \omega}{\omega_a} = \sum_i G_i X_i \quad (\text{A.98})$$

が得られる．これらの式において，共振器内に試料が存在しないブランク測定と試料が存在するときの差分を考え，共振器の体積の違いなどから生じる，実験的に消去することが難しい影響を定数  $C$  として残すことで

$$\frac{1}{2Q_{\text{sample}}} - \frac{1}{2Q_{\text{blank}}} = GR \quad (\text{A.99})$$

$$\left(\frac{\omega_a - \omega}{\omega_a}\right)_{\text{sample}} - \left(\frac{\omega_a - \omega}{\omega_a}\right)_{\text{blank}} = GX + C \quad (\text{A.100})$$

という空洞共振器摂動法でよく用いられている式と同様の式が得られる．

## A.6 十字型 2 重縮退モード空洞共振器内の電磁場

以下では，上記の計算結果を用いることで，十字型 2 重縮退モード空洞共振器内の電磁場を計算していく．なお，Hall 効果を示す試料が十字型共振器中央底面に配置され，外部磁場は  $z$  軸方向を向いているものとする．また，これ以降は簡単のため，後述する  $TE_{011}$  モードと  $TE_{101}$  モード以外の固有モードの影響を無視し， $\omega_{011} = \omega_{101} \equiv \omega_0$  であるとする．

十字型共振器における  $TE_{011}$  モードとは，矩形共振器における  $TE_{011}$  モードと同様に，電場が  $x$  軸方向を向き，磁場が  $yz$  平面で回転しているモードである (図 A.1)．一方， $TE_{101}$  モードとは，電場が  $y$  軸方向を向き，磁場が  $xz$  平面で回転しているモードである．つまり，十字型共振器においては  $TE_{011}$  モードと  $TE_{101}$  モードの磁場は以下の様を書くことができる．

$$\mathbf{H}_{011} = H_{011}^y \mathbf{y} + H_{011}^z \mathbf{z} \quad (\text{A.101})$$

$$\mathbf{H}_{101} = H_{101}^x \mathbf{x} + H_{101}^z \mathbf{z} \quad (\text{A.102})$$

共振器内電磁場の解析的計算は，共振器を図 A.2 に示す 3 つの領域に分割することで進めていく．つまり，(1) 十字型共振器中央の  $TE_{011}$  と  $TE_{101}$  が存在し，試料が配置され Hall 効果が出現する領域 1 ( $D_1$ )，(2)  $y$  軸方向に突き出た部分で  $TE_{011}$  のみが存在し，Hall 効果を考えない領域 2 ( $D_2$ )，(3)  $x$  軸方向に突き出た部分で  $TE_{101}$  のみが存在し，Hall 効果を考えない領域 3 ( $D_3$ ) の 3 つ領域に分けて計算を行う．

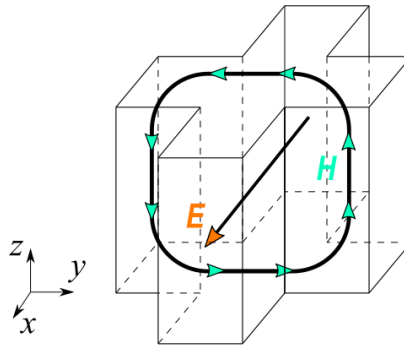


図 A.1: 十字型共振器における  $TE_{011}$  モード．

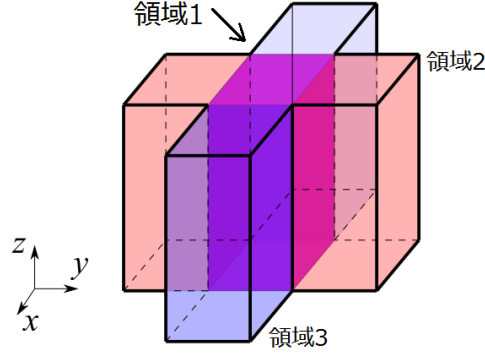


図 A.2: 十字型共振器における 3 つの領域.

### A.6.1 領域 1

この領域でのみ Hall 効果を考えるものとする．領域 1 における磁場は以下のように表される．

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &\approx \mathbf{H}_{011} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv + \mathbf{H}_{101} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv \\
 &= \begin{pmatrix} H_{101}^x \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv \\ H_{011}^y \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \\ H_{101}^z \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv + H_{011}^z \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \end{pmatrix} \quad (\text{A.103})
 \end{aligned}$$

共振器の上下面では磁場の  $z$  成分を無視できて，(A.103) より

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= \tilde{Z} \mathbf{H} \\
 &= \begin{pmatrix} Z & Z^H \\ -Z^H & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{101}^x \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv \\ H_{011}^y \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} Z H_{101}^x \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv + Z^H H_{011}^y \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \\ -Z^H H_{101}^x \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv + Z H_{011}^y \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \end{pmatrix} \quad (\text{A.104})
 \end{aligned}$$

である．この式から，

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_{011} &\approx \left( -Z^H H_{101}^x \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv + Z H_{011}^y \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \right) H_{011}^y \\
 &= Z (H_{011}^y)^2 \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv - Z^H H_{101}^x H_{011}^y \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv \quad (\text{A.105})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_{101} &\approx \left( Z H_{101}^x \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv + Z^H H_{011}^y \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \right) H_{101}^x \\
&= Z (H_{101}^x)^2 \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv + Z^H H_{101}^x H_{011}^y \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv
\end{aligned} \tag{A.106}$$

と計算できるので、(A.105)(A.106) に対して領域 1 の共振器表面  $\delta D_1$  での積分を考えると

$$\begin{aligned}
\int_{\delta D_1} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_{011} ds &= Z \int_{\delta D_1} (H_{011}^y)^2 ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \\
&\quad - Z^H \int_{\delta D_1} H_{101}^x H_{011}^y ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv \\
&\approx Z \int_{\delta D_1} (\mathbf{H}_{011})^2 ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \\
&\quad - Z^H \int_{\delta D_1} H_{101}^x H_{011}^y ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv
\end{aligned} \tag{A.107}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\delta D_1} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_{101} ds &= Z \int_{\delta D_1} (H_{101}^x)^2 ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} ds \\
&\quad + Z^H \int_{\delta D_1} H_{101}^x H_{011}^y ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \\
&\approx Z \int_{\delta D_1} (\mathbf{H}_{101})^2 ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv \\
&\quad + Z^H \int_{\delta D_1} H_{101}^x H_{011}^y ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv
\end{aligned} \tag{A.108}$$

が成立する．

### A.6.2 領域 2

この領域では  $\text{TE}_{011}$  モードのみを考慮する．この領域では Hall 効果を考えないので、領域 2 での電磁場とその共振器上下面での積分は以下の通りである．

$$\mathbf{H} \approx \mathbf{H}_{011} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \tag{A.109}$$

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_{011} = \tilde{Z} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} = Z H_{011}^2 \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \tag{A.110}$$

$$\int_{\delta D_2} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_{011} ds = Z \int_{\delta D_2} (\mathbf{H}_{011})^2 ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \quad (\text{A.111})$$

$$\int_{\delta D_2} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_{101} ds = Z \int_{\delta D_2} (\mathbf{H}_{101})^2 ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv = 0 \quad (\text{A.112})$$

また，共振器側面である  $z$  軸に平行な平面においても同様の計算ができる．

### A.6.3 領域 3

この領域では  $\text{TE}_{101}$  モードのみを考慮する．この領域では Hall 効果を考えないので，領域 3 での電磁場とその共振器上下面での積分は以下の通りである．

$$\mathbf{H} \approx \mathbf{H}_{101} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv \quad (\text{A.113})$$

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_{101} = \tilde{Z} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} = Z \mathbf{H}_{101}^2 \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv \quad (\text{A.114})$$

$$\int_{\delta D_3} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_{101} ds = Z \int_{\delta D_3} (\mathbf{H}_{101})^2 ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv \quad (\text{A.115})$$

$$\int_{\delta D_3} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_{011} ds = Z \int_{\delta D_3} (\mathbf{H}_{011})^2 ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv = 0 \quad (\text{A.116})$$

また，共振器側面においても同様の計算ができる．

### A.6.4 全領域

以上の結果から，3つの領域を足し合わせることで次の式が得られる．ただし， $i$  は試料または共振器からの寄与を表す．

$$\begin{aligned} & \sum_i \int_{S_i} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_{011} ds \\ &= \sum_i \left( Z_i \int_{\delta(D_1+D_2+D_3)_i} \mathbf{H}_{011}^2 ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \right. \\ & \quad \left. - Z_i^H \int_{\delta(D_1)_i} H_{101}^x H_{011}^y ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv \right) \\ &= 2\mu_0\omega_0 \sum_i \left( G_i^L Z_i \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv - G_i^H Z_i^H \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv \right) \\ &= -2i\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \sum_i \left( G_i^L Z_i \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv - G_i^H Z_i^H \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv \right) \quad (\text{A.117}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_i \int_{S_i} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_{101} ds \\
&= \sum_i \left( Z_i \int_{\delta(D_1+D_2+D_3)_i} \mathbf{H}_{101}^2 ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv \right. \\
&\quad \left. + Z_i^H \int_{\delta(D_1)_i} H_{101}^x H_{011}^y ds \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \right) \\
&= 2\mu_0\omega_0 \sum_i \left( G_i^L Z_i \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv + G_i^H Z_i^H \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv \right) \\
&= -2i\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \sum_i \left( G_i^L Z_i \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv + G_i^H Z_i^H \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv \right) \quad (\text{A.118})
\end{aligned}$$

ここで新たに導入された、 $G_i^L$  と  $G_i^H$  は幾何学因子で、次の (A.119)(A.120) で定義される共振器や試料の形状に依存する定数である。

$$G_i^L \equiv \frac{1}{2\mu_0\omega_0} \int_{\delta(D_1+D_2+D_3)_i} \mathbf{H}_{101}^2 ds = \frac{1}{2\mu_0\omega_0} \int_{\delta(D_1+D_2+D_3)_i} \mathbf{H}_{011}^2 ds \quad (\text{A.119})$$

$$G_i^H \equiv \frac{1}{2\mu_0\omega_0} \int_{\delta(D_1)_i} H_{101}^x H_{011}^y ds \quad (\text{A.120})$$

したがって、導波管との接続面も併せて考えると、(A.76)(A.77) より、十字型共振器内の電磁場は以下の方程式を満たすことがわかる。

$$\begin{aligned}
i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv &= 2 \sum_i \left( G_i^L Z_i \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv - G_i^H Z_i^H \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv \right) \\
&\quad - \frac{1}{\omega_0\epsilon_0} \sum_p I_p^{(\alpha)} v_{011,p}^{(\alpha)} - \frac{1}{\omega_0\epsilon_0} \sum_p I_p^{(\beta)} v_{011,p}^{(\beta)} \quad (\text{A.121})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv &= 2 \sum_i \left( G_i^L Z_i \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv + G_i^H Z_i^H \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv \right) \\
&\quad - \frac{1}{\omega_0\epsilon_0} \sum_p I_p^{(\alpha)} v_{101,p}^{(\alpha)} - \frac{1}{\omega_0\epsilon_0} \sum_p I_p^{(\beta)} v_{101,p}^{(\beta)} \quad (\text{A.122})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{011} dv &= -2i \sum_i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left( G_i^L Z_i \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv - G_i^H Z_i^H \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv \right) \\
&\quad + \frac{i}{\omega_a \sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \sum_p I_p^{(\alpha)} v_{a,p}^{(\alpha)} + \frac{i}{\omega_a \sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \sum_p I_p^{(\beta)} v_{a,p}^{(\beta)}
\end{aligned}$$

(A.123)

$$\begin{aligned}
i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_{101} dv &= -2i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sum_i \left( G_i^L Z_i \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv + G_i^H Z_i^H \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv \right) \\
&+ \frac{i}{\omega_a \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sum_p I_p^{(\alpha)} v_{a,p}^{(\alpha)} + \frac{i}{\omega_a \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sum_p I_p^{(\beta)} v_{a,p}^{(\beta)}
\end{aligned}$$

(A.124)

### A.6.5 Hall 方向の入出力

これまでの状況に加え，導波管  $\alpha$  は  $\text{TE}_{011}$  モード，導波管  $\beta$  は  $\text{TE}_{101}$  モードのみとカップリングしている場合，つまり Hall 方向にマイクロ波の入出力がある状況を考える．また，導波管の伝播モードとして  $\text{TE}_{011}$  モードと  $\text{TE}_{101}$  モードのみを考慮する近似を行うと (A.86) より，

$$V^{(\alpha)} = v_{011}^{(\alpha)} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv \quad (\text{A.125})$$

$$V^{(\beta)} = v_{101}^{(\beta)} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv \quad (\text{A.126})$$

である．したがって，(A.121)(A.122) に  $v_{101}^{(\alpha)} = v_{011}^{(\beta)} = 0$  を代入することで

$$\left[ i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - 2 \sum_i G_i^L Z_i \right] \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv + 2 \sum_i G_i^H Z_i^H \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv = -\frac{I^{(\alpha)} v_{011}^{(\alpha)}}{\omega_0 \epsilon_0}$$

(A.127)

$$\left[ i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - 2 \sum_i G_i^L Z_i \right] \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv - 2 \sum_i G_i^H Z_i^H \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv = -\frac{I^{(\beta)} v_{101}^{(\beta)}}{\omega_0 \epsilon_0}$$

(A.128)

が得られるので，(A.125)(A.126) より

$$-\frac{\omega_0 \epsilon_0}{(v_{011}^{(\alpha)})^2} \left[ i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - 2 \sum_i G_i^L Z_i \right] V^{(\alpha)} - \frac{2\omega_0 \epsilon_0}{v_{011}^{(\alpha)} v_{101}^{(\beta)}} \sum_i G_i^H Z_i^H V^{(\beta)} = I^{(\alpha)} \quad (\text{A.129})$$

$$-\frac{\omega_0\epsilon_0}{(v_{101}^{(\beta)})^2} \left[ i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - 2 \sum_i G_i^L Z_i \right] V^{(\beta)} + \frac{2\omega_0\epsilon_0}{v_{011}^{(\alpha)} v_{101}^{(\beta)}} \sum_i G_i^H Z_i^H V^{(\alpha)} = I^{(\beta)} \quad (\text{A.130})$$

であることがわかる。したがって、共振器に対するアドミッタンス行列  $\tilde{Y}$  ( $\mathbf{I} = \tilde{Y}\mathbf{V}$ ) が計算できて、以下の関係が成立する。

$$\begin{pmatrix} I^{(\alpha)} \\ I^{(\beta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^{(\alpha\alpha)} & Y^{(\alpha\beta)} \\ Y^{(\beta\alpha)} & Y^{(\beta\beta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^{(\alpha)} \\ V^{(\beta)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.131})$$

$$Y^{(\alpha\alpha)} = -\frac{\omega_0\epsilon_0}{(v_{011}^{(\alpha)})^2} \left[ i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - 2 \sum_i G_i^L Z_i \right] \quad (\text{A.132})$$

$$Y^{(\alpha\beta)} = -\frac{2\omega_0\epsilon_0}{v_{011}^{(\alpha)} v_{101}^{(\beta)}} \sum_i G_i^H Z_i^H \quad (\text{A.133})$$

$$Y^{(\beta\alpha)} = \frac{2\omega_0\epsilon_0}{v_{011}^{(\alpha)} v_{101}^{(\beta)}} \sum_i G_i^H Z_i^H \quad (\text{A.134})$$

$$Y^{(\beta\beta)} = -\frac{\omega_0\epsilon_0}{(v_{101}^{(\beta)})^2} \left[ i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - 2 \sum_i G_i^L Z_i \right] \quad (\text{A.135})$$

簡単のため、2つの導波管とのカップリングが等しい ( $v_{011}^{(\alpha)} = v_{101}^{(\beta)} = 1$ ) と仮定すると、アドミッタンス行列の各成分は以下のように計算できる。

$$Y^{(\alpha\alpha)} = Y^{(\beta\beta)} = K_1 \quad (\text{A.136})$$

$$Y^{(\beta\alpha)} = -Y^{(\alpha\beta)} = K_2 \quad (\text{A.137})$$

ただし、定数  $K_1$  及び  $K_2$  を以下のように定義する。

$$K_1 \equiv -\omega_0\epsilon_0 \left[ i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - 2 \sum_i G_i^L Z_i \right] \quad (\text{A.138})$$

$$K_2 \equiv 2\omega_0\epsilon_0 \sum_i G_i^H Z_i^H \quad (\text{A.139})$$

さらに、このアドミッタンス行列  $\tilde{Y}$  は S 行列に変換できるので [118], S 行列の各成分として、以下の関係式が得られる。

$$S_{11} = \frac{1 - (K_1^2 + K_2^2)}{(1 + K_1)^2 + K_2^2} \quad (\text{A.140})$$

$$S_{12} = \frac{-2K_2}{(1 + K_1)^2 + K_2^2} \quad (\text{A.141})$$

$$S_{21} = \frac{2K_2}{(1 + K_1)^2 + K_2^2} \quad (\text{A.142})$$

$$S_{22} = \frac{1 - (K_1^2 + K_2^2)}{(1 + K_1)^2 + K_2^2} \quad (\text{A.143})$$

### A.6.6 縦方向の入出力

ここでは、導波管  $\alpha$  と導波管  $\beta$  は  $\text{TE}_{011}$  モードとカップリングする状況を考える。導波管の伝播モードとして  $\text{TE}_{011}$  モードと  $\text{TE}_{101}$  モードのみを考慮する近似を行うと

$$V^{(\alpha)} = v_{011}^{(\alpha)} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv \quad (\text{A.144})$$

$$V^{(\beta)} = v_{011}^{(\beta)} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv \quad (\text{A.145})$$

である。  $v_{101}^{(\alpha)} = v_{101}^{(\beta)} = 0$  なので、(A.121)(A.122) より

$$\begin{aligned} & \left[ i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - 2 \sum_i G_i^L Z_i \right] \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv + 2 \sum_i G_i^H Z_i^H \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv \\ &= -\frac{I^{(\alpha)} v_{011}^{(\alpha)}}{\omega_0 \epsilon_0} - \frac{I^{(\beta)} v_{011}^{(\beta)}}{\omega_0 \epsilon_0} \end{aligned} \quad (\text{A.146})$$

$$\begin{aligned} & \left[ i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - 2 \sum_i G_i^L Z_i \right] \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv - 2 \sum_i G_i^H Z_i^H \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.147})$$

が得られ、(A.138)(A.139) を用いてこの式を書き換えると

$$K_1 \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv - K_2 \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv = I^{(\alpha)} v_{011}^{(\alpha)} + I^{(\beta)} v_{011}^{(\beta)} \quad (\text{A.148})$$

$$K_1 \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{101} dv + K_2 \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_{011} dv = 0 \quad (\text{A.149})$$

となる．この2式を連立して整理すると，インピーダンス行列  $\tilde{Z}$  ( $\mathbf{V} = \tilde{Z}\mathbf{I}$ ) 計算できて，以下の関係が成分する．

$$\begin{pmatrix} V^{(\alpha)} \\ V^{(\beta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^{(\alpha\alpha)} & Z^{(\alpha\beta)} \\ Z^{(\beta\alpha)} & Z^{(\beta\beta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^{(\alpha)} \\ I^{(\beta)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.150})$$

$$Z^{(\alpha\alpha)} = \frac{K_1}{(K_1^2 + K_2^2)} (v_{011}^{(\alpha)})^2 \quad (\text{A.151})$$

$$Z^{(\alpha\beta)} = \frac{K_1}{(K_1^2 + K_2^2)} v_{011}^{(\beta)} v_{011}^{(\alpha)} \quad (\text{A.152})$$

$$Z^{(\beta\alpha)} = \frac{K_1}{(K_1^2 + K_2^2)} v_{011}^{(\alpha)} v_{011}^{(\beta)} \quad (\text{A.153})$$

$$Z^{(\beta\beta)} = \frac{K_1}{(K_1^2 + K_2^2)} (v_{011}^{(\beta)})^2 \quad (\text{A.154})$$

ここで，先程と同様に

$$v_{011}^{(\alpha)} = v_{011}^{(\beta)} = 1 \quad (\text{A.155})$$

とすると，インピーダンス行列の各成分はそれぞれ

$$Z = \frac{K_1}{(K_1^2 + K_2^2)} \quad (\text{A.156})$$

で表される．このインピーダンス行列をSパラメーターに変換することで，S行列の成分として，以下の式が得られる．

$$S_{11} = \frac{-(K_1^2 + K_2^2)}{2K_1 + (K_1^2 + K_2^2)} \quad (\text{A.157})$$

$$S_{12} = \frac{2K_1}{2K_1 + (K_1^2 + K_2^2)} \quad (\text{A.158})$$

$$S_{21} = \frac{2K_1}{2K_1 + (K_1^2 + K_2^2)} \quad (\text{A.159})$$

$$S_{22} = \frac{-(K_1^2 + K_2^2)}{2K_1 + (K_1^2 + K_2^2)} \quad (\text{A.160})$$

## A.7 十字型 2 重縮退モード空洞共振器の共振特性

共鳴ピークでは共振器の入力インピーダンスが発散するので,

$$\det \tilde{Y} = 0 \quad (\text{A.161})$$

が成り立つ. したがって, (A.136)(A.137) より

$$K_1^2 + K_2^2 = 0 \quad (\text{A.162})$$

であることが分かる.  $K_1, K_2$  の定義式 (A.138)(A.139) から

$$- \left[ i \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) - 2 \sum_i G_i^L Z_i \right] = \pm 2i \sum_i G_i^H Z_i^H \quad (\text{A.163})$$

と (A.161) を書き換えることができるので, この式を解くと, 共振周波数について以下の式が成り立つことがわかる.

$$\omega \approx \omega_0 \left( 1 - \sum_i G_i^L X_i \pm \sum_i G_i^H |R_i^H| \right) - i\omega_0 \left( \sum_i G_i^L R_i \pm \sum_i G_i^H |X_i^H| \right) \quad (\text{A.164})$$

RLC 共振回路との対応を考えることで, 共振周波数と Q 値について以下の関係式が得られる.

$$\frac{1}{2Q_H} = \sum_i G_i^L R_i \mp \sum_i G_i^H |X_i^H| \quad (\text{A.165})$$

$$\frac{\omega_{H0} - \omega_H}{\omega_{H0}} = \sum_i G_i^L X_i \pm \sum_i G_i^H |R_i^H|, \quad (\text{A.166})$$

したがって, 幾何学因子を新たに

$$G^L \equiv G_{sample}^L = \frac{1}{2\mu_0\omega_0} \int_{\delta(D_1)_{sample}} (H_{011}^y)^2 ds = \frac{1}{2\mu_0\omega_0} \int_{\delta(D_1)_{sample}} (H_{101}^x)^2 ds \quad (\text{A.167})$$

$$G^H \equiv G_{sample}^H = \frac{1}{2\mu_0\omega_0} \int_{\delta(D_1)_{sample}} H_{011}^y H_{101}^x ds \quad (\text{A.168})$$

で定義し,  $D_0$  及び  $D$  で試料以外からの Q 値と共振周波数への寄与を表すことにすると,

$$\frac{1}{2Q_H} = G^L R \mp G^H |X^H| + D_0 \quad (\text{A.169})$$

$$\frac{f_{H0} - f_H}{f_{H0}} = G^L X \pm G^H |R^H| + D, \quad (\text{A.170})$$

が得られる．さらに，完全導体から成る理想的な共振器内に抵抗が負ではない一般的な試料が存在するときを考えると，(A.169) 現れる符号をマイナスにした場合， $D_0 = 0$  なので，ある  $Z$  と  $Z^H$  に対して  $1/2Q_H$  がゼロになる．このことは，試料によるエネルギーのロスがあるにもかかわらず  $Q$  値が発散することを意味している．したがって，符号をプラスとすることができて，

$$\frac{1}{2Q_H} = G^L R + G^H |X^H| + D_0 \quad (\text{A.171})$$

$$\frac{f_{H0} - f_H}{f_{H0}} = G^L X - G^H |R^H| + D, \quad (\text{A.172})$$

であることがわかる．これらの式は，表面インピーダンステンソルの実部と虚部が混ざった形式を持つが，このことは複素周波数のシフトは共振器の複素エネルギーの変化に等しいという断熱定理の観点から解釈できる．複素エネルギーの実部は共振器に蓄積されたエネルギーに対応していて，虚部はエネルギーのロスに対応している．したがって，(A.171)(A.172) は，試料の Hall 効果による直交するモード間でエネルギーのやり取りを表していると考えることができる．

(A.171)(A.172) で，共振器内に試料が存在しないブランク測定と試料が存在するときの差分を考えた場合には

$$\Delta \left( \frac{1}{2Q_H} \right) = G^L R + G^H |X^H| \quad (\text{A.173})$$

$$\Delta \left( \frac{f_H}{f_{H0}} \right) = G^L X - G^H |R^H| + D \quad (\text{A.174})$$

という関係式が得られる．また，異なる温度での差分を考えた場合には

$$\Delta \left( \frac{1}{2Q_H} \right) = G^L \Delta R + G^H \Delta |X^H| \quad (\text{A.175})$$

$$\Delta \left( \frac{f_H}{f_{H0}} \right) = G^L \Delta X - G^H \Delta |R^H| \quad (\text{A.176})$$

という関係式が得られる．

# 付 録 B     $\text{FeSe}_{1-x}\text{Te}_x$ 薄膜の超伝導転 移温度近傍における直流 Hall 効果測定

## B.1    背景と目的

1 章で述べたように，混合状態での Hall 効果に関する興味深い現象の一つに，超伝導転移温度近傍において高温超伝導体あるいは一部の従来型超伝導体で直流 Hall 抵抗率の符号が，常伝導状態の符号から反転する現象がある [64, 65, 66, 67, 68]．この Hall 抵抗率の符号反転という振る舞いは，Bardeen-Stephen モデル [20] や Nozieres らによる流体力学的なモデル [27] といった基本的な渦糸の運動モデルでは説明することができない．これまで，その原因として，不純物や格子欠陥などによるピン止めや超伝導ゆらぎの影響など様々なものが挙げられているが，はっきりした結論は未だに得られていない [72, 73, 74, 76, 77, 78]．この付録では，混合状態の Hall 効果の振る舞いの起源を明らかにするために，鉄カルコゲナイド超伝導体  $\text{FeSe}_{1-x}\text{Te}_x$  薄膜 ( $0 \leq x \leq 0.7$ ) の超伝導転移温度近傍における直流 Hall 抵抗率を測定し，組成とピン止めの強さが，混合状態における Hall 効果の振る舞いにどのように影響するのか調べた結果を述べる．

## B.2    実験方法

ここでは，組成を  $x = 0$  から  $x = 0.7$  まで 0.1 ごとに变化させた  $\text{FeSe}_{1-x}\text{Te}_x$  薄膜を対象として抵抗率測定を行った．測定対象となった薄膜試料は KrF レーザーによる Pulsed Laser Deposition (PLD) 法により作製された [119]．ターゲットとして  $\text{FeSe}_{1-x}\text{Te}_x$  多結晶のペレットが使用され，市販されている  $\text{CaF}_2$  (100) が基板として用いられている．直流抵抗率は Quantum Design 社の PPMS を使用した通常の 6 端子法で測られている．磁場は鉄カルコゲナイド平面に垂直方向に最大 9 T まで印可されている．また，特に断りがない限り電流密度を  $100 \text{ A/cm}^2$  として測定している．

## B.3 測定結果

測定の結果，図 B.1 に示す縦抵抗率  $\rho_{xx}$  と Hall 抵抗率  $\rho_{xy}$  の温度依存性が得られた． $x = 0.5$  の薄膜では，磁場が  $B = 0.5$  T において，超伝導転移温度近傍で温度が低下するにつれて，Hall 抵抗率が正から負に変化している．また， $x = 0.3$  の薄膜で符号反転がみられるが，これは常伝導成分の寄与によるもので，今関心の対象としている混合状態における符号反転とは無関係であると思われる．一方，その他の組成の試料では超伝導転移温度近傍における Hall 抵抗率の符号反転は観測されなかった．

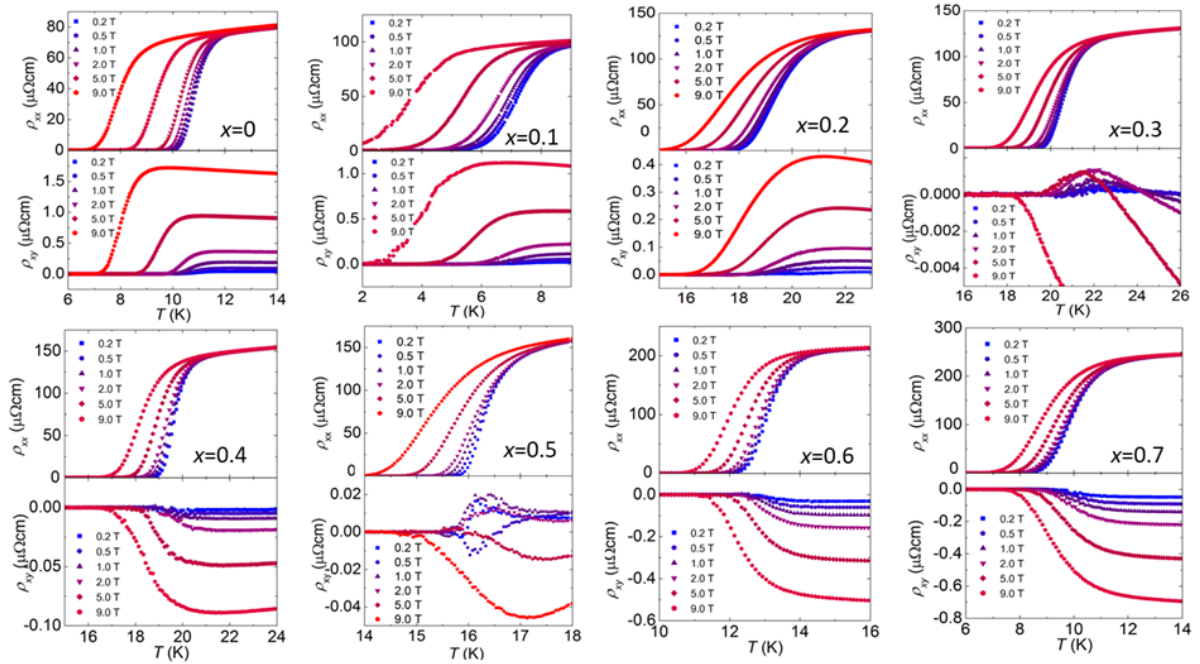


図 B.1: FeSe<sub>1-x</sub>Te<sub>x</sub> 薄膜 ( $0 \leq x \leq 0.7$ ) の  $T_c$  近傍における抵抗率の温度依存性.  $x = 0.5$  の試料では，磁場が  $B = 0.5$  T のとき Hall 抵抗率の符号が温度変化とともに変化している．それ以外の組成では， $x = 0.3$  の常伝導成分の寄与によるものである符号反転を除き，Hall 抵抗率の符号変化は観測されなかった．

図 B.2 は符号反転が観測された  $x = 0.5$  の試料に対する I-V 特性を示している．符号反転が観測された領域では I-V 曲線の傾きは約 1 である．このことは，縦抵抗率はオーミックであり，符号反転は Thermally Assisted Flux Flow (TAFF) 領域で観測されていることを意味している．

混合状態における Hall 抵抗の符号反転に対するピン止めの影響を詳しく調べるために行ったレニウスプロットを図 B.3 に示す．TAFF 領域における縦抵抗率は  $U$  をアクティベーションエネルギーとして， $\rho_{xx} \propto \exp(-U/k_B T)$  と表される．したがって，アレニウスプロットの傾きからアクティベーションエネルギーが求められて，その値と

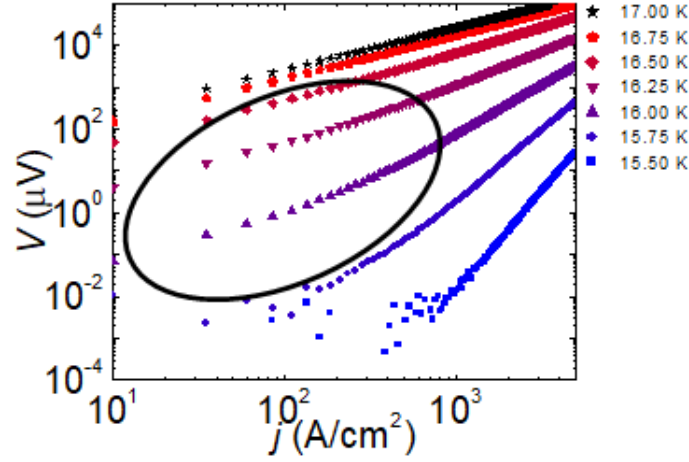


図 B.2: FeSe<sub>0.5</sub>Te<sub>0.5</sub> 薄膜における I-V 特性. 黒線で囲まれた領域が符号反転が観測された領域に対応している.

して図 B.4, 図 B.5 に示す結果が得られた. この結果, 今回測定した試料の中で, 符号反転を示した  $x = 0.5$  の薄膜が最も大きいアクティベーションエネルギーを持っていることが分かった. これまでの報告されている鉄系超伝導体に対する推定されたアクティベーションエネルギーと Hall 抵抗の符号反転の存在のまとめると表 B.1 のようになる. これらの結果と今回の測定結果を合わせて考えると, アクティベーションエネルギーが比較的高い場合, つまりピン止めの影響が比較強い場合において符号反転が起こるという可能性が示唆される.

表 B.1: これまでの鉄系超伝導体に対する混合状態での Hall 効果測定.

物質		$U_{B=1T}$ (K)	Sign reversal	引用
Fe <sub>1+y</sub> (Te <sub>1+x</sub> S <sub>x</sub> ) <sub>z</sub>	single crystal	200	No	[69]
Ba(Fe <sub>1-x</sub> Co <sub>x</sub> ) <sub>2</sub> As <sub>2</sub> ( $x = 0.08$ )	single crystal	4700	No	[68]
Ba(Fe <sub>1-x</sub> Co <sub>x</sub> ) <sub>2</sub> As <sub>2</sub> ( $x = 0.10$ )	single crystal	6000	Yes	[68]
BaFe <sub>2</sub> As <sub>2</sub>	film	2300	No	[70]
NaFe <sub>1-x</sub> Co <sub>x</sub> As <sub>2</sub> ( $x = 0.0220$ )	single crystal	1000	No	[71]
NaFe <sub>1-x</sub> Co <sub>x</sub> As <sub>2</sub> ( $x = 0.0205$ )	single crystal	2000	No	[71]

ピン止めの影響をさらに調べるために, 符号反転が観測された  $x = 0.5$  の薄膜試料に対して, 電流密度を変化させた測定を行った. 図 B.6 は,  $B = 0.5$  T における縦抵抗率と Hall 抵抗率の温度依存性測定を, 10 A/cm<sup>2</sup> から 5000 A/cm<sup>2</sup> までの電流密度で行った結果を示している. その結果, 電流密度が 5000 A/cm<sup>2</sup> まで大きくなると符号反転の

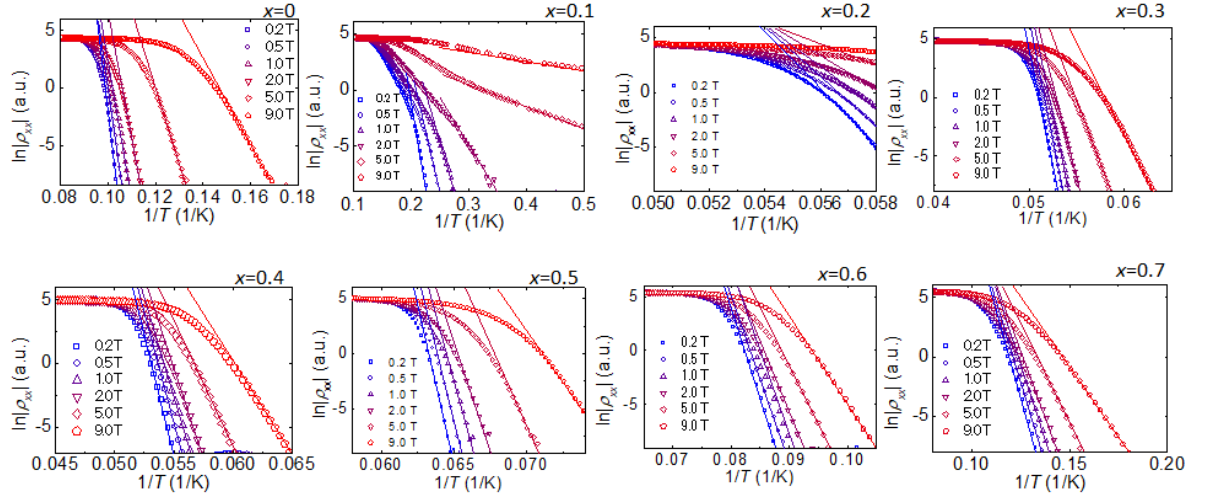


図 B.3:  $\text{FeSe}_{1-x}\text{Te}_x$  薄膜 ( $0 \leq x \leq 0.7$ ) の各組成におけるアレニウスプロット. 図中に示した直線の傾きから, 各組成, 各磁場におけるアクティベーションエネルギーを求めた.

消失が観測された. このことは, 大きな電流密度によるピン止めポテンシャルの減少が符号反転の消失につながっている可能性を示唆している.

ピン止めの強さを別の指標からも評価するために, 縦抵抗率と Hall 抵抗率のスケーリング則を考える. スケーリング則  $|\rho_{xy}| \propto \rho_{xx}^\beta$  は混合状態における YBCO 薄膜で初め観測され, その後, 他の超伝導体においても観測されている [120, 121]. スケーリング指数はピン止めの影響を取り入れた現象論的なモデルでは TAFF 領域で  $\beta = 2$  となる [122]. さらに, Wang らによるピン止めの効果と熱揺らぎを取り入れた理論ではピン止めが大きくなるとスケーリング指数が小さくなることが示されている [75]. 今回の測定で得られた  $\text{FeSe}_{1-x}\text{Te}_x$  薄膜での縦抵抗率と Hall 抵抗率の関係を図 B.7 に示す. し

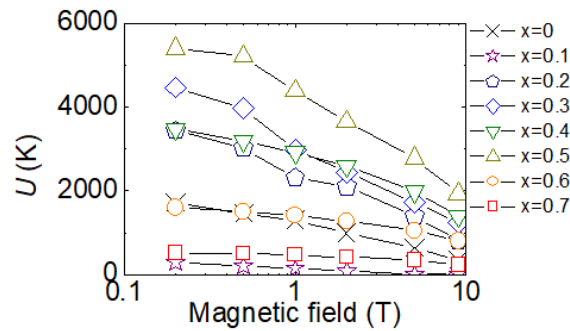


図 B.4: 各組成におけるアクティベーションエネルギーの磁場依存性.

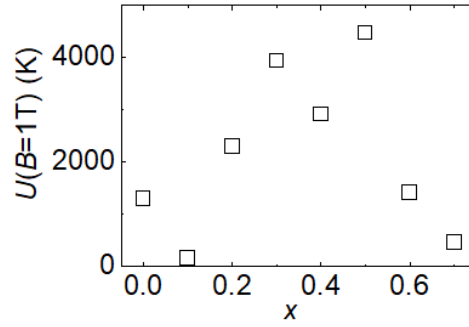


図 B.5: 各組成における  $B = 1$  T でのアクティベーションエネルギーの値.

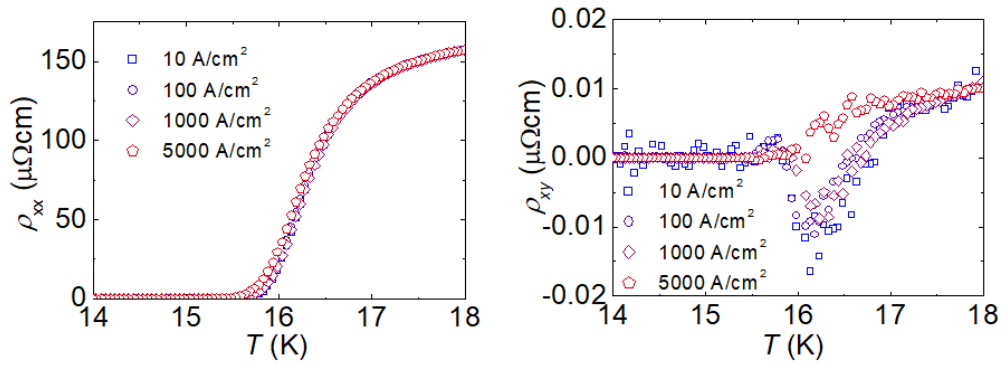


図 B.6:  $10 \text{ A/cm}^2$  から  $5000 \text{ A/cm}^2$  までの電流密度に対する  $\text{FeSe}_{0.5}\text{Te}_{0.5}$  薄膜の縦抵抗率(左)と Hall 抵抗率(右)の温度依存性 ( $B = 0.5$  T).

たがって, その傾きから得られる各組成におけるスケーリング指数として表 B.2 に示す結果が得られた. スケーリング指数から評価したピン止めの強さは  $x = 0.5$  のときが最大で, この結果はアクティベーションエネルギーによる分析と一致している.

表 B.2: 各組成  $x$  におけるスケーリング指数  $\beta$  ( $B = 1.0$  T).

$x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\beta$	$1.5 \pm 0.1$	$1.8 \pm 0.1$	$1.8 \pm 0.1$	$2.2 \pm 0.2$	$1.1 \pm 0.3$	$0.8 \pm 0.2$	$1.1 \pm 0.1$	$1.5 \pm 0.1$

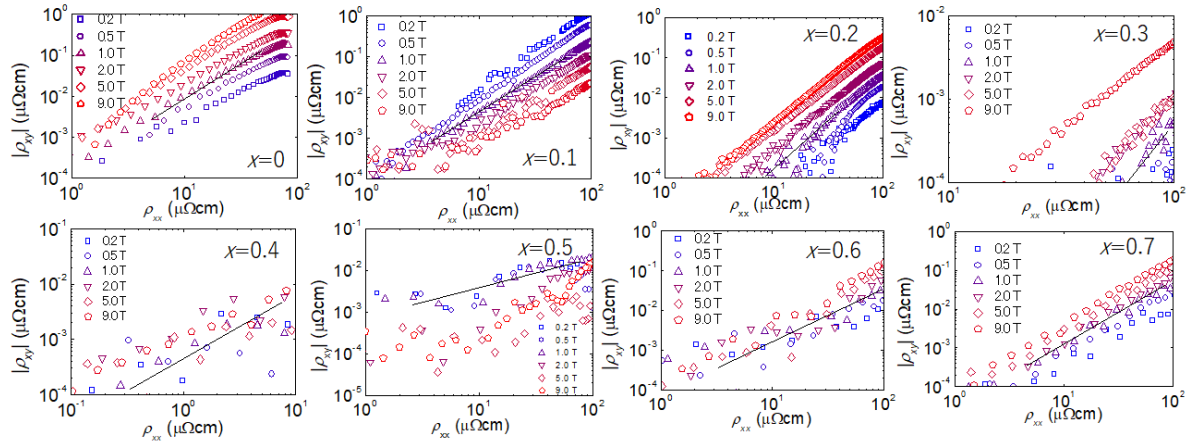


図 B.7: FeSe<sub>1-x</sub>Te<sub>x</sub> 薄膜 ( $0 \leq x \leq 0.7$ ) における縦抵抗率と Hall 抵抗率の関係．図中の直線は表 B.2 に示すスケーリング指数に対応している．

## B.4 結論

混合状態における Hall 効果の振る舞いを明らかにするために、鉄系超伝導体 FeSe<sub>1-x</sub>Te<sub>x</sub> 薄膜 ( $0 \leq x \leq 0.7$ ) の超伝導転移温度近傍における直流 Hall 抵抗率の測定を行った．その結果、 $x = 0.5$  の試料において Hall 抵抗率の符号反転が観測された．その一方、他の組成の試料では、Hall 抵抗率の符号反転は見られなかった．電流密度の増加により符号反転が消失したことや、アクティベーションエネルギーやスケーリング指数からの評価から、鉄カルコゲナイド超伝導体における Hall 抵抗率の符号反転は渦糸の運動とピン止めに深く関連していることが示唆される．

## 参考文献

- [1] H. Kamerlingh Onnes, Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden **122**, 122 (1911).
- [2] W. Meissner and R. Ochsenfeld, Naturwissenschaften **21**, 787 (1933).
- [3] F. London and H. London, Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences **149**, 71 (1935).
- [4] V.L. Ginzburg and L. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 1064 (1950).
- [5] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Physical Review **108**, 1175 (1957).
- [6] B. T. Matthias, T. H. Geballe, S. Geller, and E. Corenzwit, Physical Review **95**, 1435 (1954).
- [7] J. G. Bednorz and K. A. Muller, Zeitschrift fur Physik B Condensed Matter **64**, 189 (1986).
- [8] A. Schilling, M. Cantoni, J. D. Guo, and H. R. Ott, Nature **363**, 56 (1993).
- [9] Y. Kamihara, T. Watanabe, M. Hirano, and H. Hosono, Journal of the American Chemical Society **130**, 3296 (2008).
- [10] A. P. Drozdov, M. I. Erements, I. A. Troyan, V. Ksenofontov, and S. I. Shylin, Nature **525**, 73 (2015).
- [11] M. Somayazulu, M. Ahart, A. K. Mishra, Z. M. Geballe, M. Baldini, Y. Meng, V. V. Struzhkin, and R. J. Hemley, Physical Review Letters **122**, 027001 (2019).
- [12] A. Abrikosov, Journal of Physics and Chemistry of Solids **2**, 199 (1957).
- [13] W. H. Kleiner, L. M. Roth, and S. H. Autler, Physical Review **133**, A1226 (1964).
- [14] U. Essmann and H. Träuble, Physics Letters A **24**, 526 (1967).
- [15] H. F. Hess, R. B. Robinson, R. C. Dynes, J. M. Valles, and J. V. Waszczak, Physical Review Letters **62**, 214 (1989).

- [16] E. H. Brandt, Reports on Progress in Physics **58**, 1465 (1995).
- [17] G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, Reviews of Modern Physics **66**, 1125 (1994).
- [18] T. Nattermann and S. Scheidl, Advances in Physics **49**, 607 (2000).
- [19] C. Caroli, P. De Gennes, and J. Matricon, Physics Letters **9**, 307 (1964).
- [20] J. Bardeen and M. J. Stephen, Physical Review **140**, A1197 (1965).
- [21] L. Kramer and W. Pesch, Zeitschrift für Physik **269**, 59 (1974).
- [22] M. Stone, Physical Review B **54**, 13222 (1996).
- [23] C. Renner, A. D. Kent, P. Niedermann, Ø. Fischer, and F. Lévy, Physical Review Letters **67**, 1650 (1991).
- [24] I. Maggio-Aprile, C. Renner, A. Erb, E. Walker, and Ø. Fischer, Physical Review Letters **75**, 2754 (1995).
- [25] S. H. Pan, E. W. Hudson, A. K. Gupta, K.-W. Ng, H. Eisaki, S. Uchida, and J. C. Davis, Physical Review Letters **85**, 1536 (2000).
- [26] C. Berthod, I. Maggio-Aprile, J. Bruér, A. Erb, and C. Renner, Physical Review Letters **119**, 1 (2017).
- [27] P. Nozières and W. F. Vinen, The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics **14**, 667 (1966).
- [28] N. B. Kopnin, Reports on Progress in Physics **65**, 1633 (2002).
- [29] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, JETP Lett. **23**, 187 (1976).
- [30] N. B. Kopnin and V. Kravtsov, Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics **44**, 861 (1976).
- [31] M. Golosovsky, M. Tsindlekht, and D. Davidov, Superconductor Science and Technology **9**, 1 (1996).
- [32] L. Civale, A. D. Marwick, T. K. Worthington, M. A. Kirk, J. R. Thompson, L. Krusin-Elbaum, Y. Sun, J. R. Clem, and F. Holtzberg, Physical Review Letters **67**, 648 (1991).

- [33] M. Konczykowski, F. Rullier-Albenque, E. R. Yacoby, A. Shaulov, Y. Yeshurun, and P. Lejay, *Physical Review B* **44**, 7167 (1991).
- [34] P. W. Anderson, *Physical Review Letters* **9**, 309 (1962).
- [35] P. W. Anderson and Y. B. Kim, *Reviews of Modern Physics* **36**, 39 (1964).
- [36] J. I. Gittleman and B. Rosenblum, *Journal of Applied Physics* **39**, 2617 (1968).
- [37] O. Klein, S. Donovan, M. Dressel, and G. Grüner, *International Journal of Infrared and Millimeter Waves* **14**, 2423 (1993).
- [38] S. Donovan, O. Klein, M. Dressel, K. Holczer, and G. Grüner, *International Journal of Infrared and Millimeter Waves* **14**, 2459 (1993).
- [39] M. Dressel, O. Klein, S. Donovan, and G. Grüner, *International Journal of Infrared and Millimeter Waves* **14**, 2489 (1993).
- [40] Y. Tsuchiya, K. Iwaya, K. Kinoshita, T. Hanaguri, H. Kitano, A. Maeda, K. Shibata, T. Nishizaki, and N. Kobayashi, *Physical Review B* **63**, 184517 (2001).
- [41] A. Maeda, H. Kitano, K. Kinoshita, T. Nishizaki, K. Shibata, and N. Kobayashi, *Journal of the Physical Society of Japan* **76**, 094708 (2007).
- [42] D. A. Bonn, S. Kamal, A. Bonakdarpour, R. Liang, W. N. Hardy, C. C. Homes, D. N. Basov, and T. Timusk, *Czechoslovak Journal of Physics* **46**, 3195 (1996).
- [43] T. Hanaguri, T. Tsuboi, Y. Tsuchiya, K. Sasaki, and A. Maeda, *Physical Review Letters* **82**, 1273 (1999).
- [44] A. Maeda, T. Umetsu, and H. Kitano, *Physica C: Superconductivity* **460-462**, 1202 (2007).
- [45] S. Akutagawa, T. Ohashi, H. Kitano, A. Maeda, J. Goryo, H. Matsukawa, and J. Akimitsu, *Journal of the Physical Society of Japan* **77**, 064701 (2008).
- [46] Y. Lubashevsky, E. Lahoud, K. Chashka, D. Podolsky, and A. Kanigel, *Nature Physics* **8**, 309 (2012).
- [47] A. E. Böhmer, F. Hardy, F. Eilers, D. Ernst, P. Adelman, P. Schweiss, T. Wolf, and C. Meingast, *Physical Review B* **87**, 180505 (2013).
- [48] T. Okada, H. Takahashi, Y. Imai, K. Kitagawa, K. Matsubayashi, Y. Uwatoko, and A. Maeda, *Physical Review B* **86**, 064516 (2012).

- [49] T. Okada, F. Nabeshima, H. Takahashi, Y. Imai, and A. Maeda, *Physical Review B* **91**, 054510 (2015).
- [50] S. Hofmann and R. K  mmel, *Physical Review B* **57**, 7904 (1998).
- [51] G. E. Volovik, *JETP* **77**, 435 (1993).
- [52] M. Hayashi, *Journal of the Physical Society of Japan* **67**, 3372 (1998).
- [53] P. De Gennes and J. Matricon, *Reviews of Modern Physics* **36**, 45 (1964).
- [54] W. A. Reed, E. Fawcett, and Y. B. Kim, *Physical Review Letters* **14**, 790 (1965).
- [55] W. F. Vinen and A. C. Warren, *Proceedings of the Physical Society* **91**, 399 (1967).
- [56] N. B. Kopnin and A. V. Lopatin, *Physical Review B* **51**, 15291 (1995).
- [57] N. B. Kopnin and G. E. Volovik, *Physical Review Letters* **79**, 1377 (1997).
- [58] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, *Physical Review B* **51**, 5965 (1995).
- [59] N. B. Kopnin and A. V. Lopatin, *Physical Review B* **51**, 15291 (1995).
- [60] E. Arahata and Y. Kato, *Journal of Low Temperature Physics* **175**, 346 (2014).
- [61] W. Kohno, H. Ueki, and T. Kita, *Journal of the Physical Society of Japan* **85**, 083705 (2016).
- [62] A. T. Dorsey, *Physical Review B* **46**, 8376 (1992).
- [63] N. B. Kopnin, B. I. Ivlev, and V. A. Kalatsky, *Journal of Low Temperature Physics* **90**, 1 (1993).
- [64] K. Noto, S. Shinzawa, and Y. Muto, *Solid State Communications* **18**, 1081 (1976).
- [65] A. Freimuth, C. Hohn, and M. Galfky, *Physical Review B* **44**, 10396 (1991).
- [66] S. J. Hagen, C. J. Lobb, R. L. Greene, and M. Eddy, *Physical Review B* **43**, 6246 (1991).
- [67] S. J. Hagen, A. W. Smith, M. Rajeswari, J. L. Peng, Z. Y. Li, R. L. Greene, S. N. Mao, X. X. Xi, S. Bhattacharya, Q. Li, et al., *Physical Review B* **47**, 1064 (1993).

- [68] L. M. Wang, U.-C. Sou, H. C. Yang, L. J. Chang, C.-M. Cheng, K.-D. Tsuei, Y. Su, T. Wolf, and P. Adelmann, *Physical Review B* **83**, 134506 (2011).
- [69] H. Lei, R. Hu, E. S. Choi, and C. Petrovic, *Physical Review B* **82**, 134525 (2010).
- [70] H. Sato, T. Katase, W. N. Kang, H. Hiramatsu, T. Kamiya, and H. Hosono, *Physical Review B* **87**, 064504 (2013).
- [71] L. M. Wang, C.-Y. Wang, U.-C. Sou, H. C. Yang, L. J. Chang, C. Redding, Y. Song, P. Dai, and C. Zhang, *Journal of Physics: Condensed Matter* **25**, 395702 (2013).
- [72] H. Fukuyama, H. Ebisawa, and T. Tsuzuki, *Progress of Theoretical Physics* **46**, 1028 (1971).
- [73] A. G. Aronov, S. Hikami, and A. I. Larkin, *Physical Review B* **51**, 3880 (1995).
- [74] T. Nagaoka, Y. Matsuda, H. Obara, A. Sawa, T. Terashima, I. Chong, M. Takano, and M. Suzuki, *Physical Review Letters* **80**, 3594 (1998).
- [75] Z. D. Wang, J. Dong, and C. S. Ting, *Physical Review Letters* **72**, 3875 (1994).
- [76] N. B. Kopnin and V. M. Vinokur, *Physical Review Letters* **83**, 4864 (1999).
- [77] D. I. Khomskii and A. Freimuth, *Physical Review Letters* **75**, 1384 (1995).
- [78] P. Ao, *Journal of Physics Condensed Matter* **10** (1998).
- [79] S. P. Cooke, *Physical Review* **74**, 701 (1948).
- [80] J. Musil and F. Zacek, *NASA STI/Recon Technical Report A* **87** (1986).
- [81] E. M. Trukhan, *Fiz. Tverd. Tela* **4**, 3496 (1965).
- [82] A. M. Portis and D. Teaney, *Journal of Applied Physics* **29**, 1692 (1958).
- [83] Y. Nishina and G. C. Danielson, *Review of Scientific Instruments* **32**, 790 (1961).
- [84] M. M. Sayed and C. R. Westgate, *Review of Scientific Instruments* **46**, 1074 (1975).
- [85] N. P. Ong, W. Bauhofer, Ce- junWei, *Review of Scientific Instruments* **52**, 1367 (1981).

- [86] G. Hambleton and W. Gärtner, *Journal of Physics and Chemistry of Solids* **8**, 329 (1959).
- [87] N. Watanabe, *Journal of the Physical Society of Japan* **16**, 1979 (1961).
- [88] Y. Nishina and G. C. Danielson, *Review of Scientific Instruments* **32**, 790 (1961).
- [89] S. H. Liu, Y. Nishina, and R. H. Good, *Review of Scientific Instruments* **32**, 784 (1961).
- [90] M. M. Sayed and C. R. Westgate, *Review of Scientific Instruments* **46**, 1080 (1975).
- [91] J. R. Fletcher, *Journal of Physics E: Scientific Instruments* **9**, 481 (1976).
- [92] N. P. Ong and A. M. Portis, *Physical Review B* **15**, 1782 (1977).
- [93] T. E. Cross and R. Pethig, *International Journal of Quantum Chemistry* **18**, 385 (1980).
- [94] D. D. Eley and N. C. Lockhart, *Journal of Physics E: Scientific Instruments* **16**, 47 (1983).
- [95] F. Kuchar, R. Meisels, G. Weimann, and W. Schlapp, *Physical Review B* **33**, 2965 (1986).
- [96] M. Dressel, H. Helberg, and D. Schweitzer, *Synthetic Metals* **42**, 2043 (1991).
- [97] B. K. Na, M. A. Vannice, and A. B. Walters, *Physical Review B* **46**, 12266 (1992).
- [98] L. Chen, C. Ong, and B. Tan, *IEEE Transactions on Magnetics* **34**, 272 (1998).
- [99] E. Prati, S. Faralli, M. Martinelli, G. Annino, G. Biasiol, and L. Sorba, *Review of Scientific Instruments* **74**, 154 (2003).
- [100] A. Y. Al-Zoubi and O. M. Hasan, *Journal of Physics: Conference Series* **13**, 430 (2005).
- [101] D. V. B. Murthy, V. Subramanian, and V. R. K. Murthy, *Review of Scientific Instruments* **77**, 066108 (2006).
- [102] D. V. B. Murthy, V. Subramanian, B. Sundaray, and T. S. Natarajan, *Applied Physics Letters* **92**, 222111 (2008).

- [103] S. Sridhar and W. L. Kennedy, Review of Scientific Instruments **59**, 531 (1988).
- [104] B. Lax, K. J. Button, H. J. Zeiger, and L. M. Roth, Physical Review **102**, 715 (1956).
- [105] A. L. Jain and S. H. Koenig, Physical Review **127**, 442 (1962).
- [106] Y. Liu and R. E. Allen, Physical Review B **52**, 1566 (1995).
- [107] M. Yamamoto and J. Watanabe, Sci. Rep. Res. Insts. Tohoku Univ. **3A**, 165 (1951).
- [108] N. Motohira, N. Kuwahara, T. Hasegawa, K. Kishio, and K. Kitazawa, J. Ceram. Soc. Jpn. Int. Ed. **97**, 994 (1989).
- [109] T. Nishizaki, K. Shibata, T. Naito, M. Maki, and N. Kobayashi, Journal of Low Temperature Physics **117**, 1375 (1999).
- [110] K. Behnia, L. Balicas, and Y. Kopelevich, Science **317**, 1729 (2007).
- [111] P. B. Alers and R. T. Webber, Physical Review **91**, 1060 (1953).
- [112] B. Abeles and S. Meiboom, Physical Review **101**, 544 (1956).
- [113] M. Suzuki, H. Bando, and K. Oshima, Physica B+C **108**, 819 (1981).
- [114] E. Zeldov, D. Majer, M. Konczykowski, V. B. Geshkenbein, V. M. Vinokur, and H. Shtrikman, Nature **375**, 373 (1995).
- [115] K. Shibata, T. Nishizaki, T. Sasaki, and N. Kobayashi, Physical Review B **66**, 214518 (2002).
- [116] N. B. Kopnin and G. E. Volovik, JETP Letters **64**, 690 (1996).
- [117] J. C. Slater, Reviews of Modern Physics **18**, 441 (1946).
- [118] S. Tomonaga, T. Miyazima, and K. Shimoda, Theory of Microwaves (1950).
- [119] Y. Imai, R. Tanaka, T. Akiike, M. Hanawa, I. Tsukada, and A. Maeda, Japanese Journal of Applied Physics **49**, 023101 (2010).
- [120] J. Luo, T. P. Orlando, J. M. Graybeal, X. D. Wu, and R. Muenchausen, Physical Review Letters **68**, 690 (1992).
- [121] A. V. Samoilov, Physical Review Letters **71**, 617 (1993).

- [122] V. M. Vinokur, V. B. Geshkenbein, M. V. Feigel'man, and G. Blatter, Physical Review Letters **71**, 1242 (1993).

# 謝辞

指導教官である東京大学総合文化研究科の前田京剛教授には、本研究を行うにあたり、終始適切な助言を賜り、また丁寧に指導して下さいたことに心より感謝申し上げます。前田研究室の現助教の鍋島冬樹博士には、実験や発表などにおいて、多くのことを助言をしていただき、深く感謝申し上げます。前田研究室の前助教である今井良宗博士(現東北大学講師)には、研究をするに対する初歩的な心構えを初めとして、実験器具や測定機器の取扱いなど様々なことを教えて頂き、深く感謝申し上げます。九州産業大学の西嶋照和教授には、本研究における試料を提供して頂きました。ここに感謝の意を表します。研究室の先輩である高橋英幸博士(現神戸大助教)や、岡田達典博士(現東北大学助教)には、本研究における理論と実験の双方で多くの適切なアドバイスを頂き、感謝申し上げます。低温センターの松葉健博士には、本研究を進めるうえで欠かせない寒剤の供給でお世話になり、感謝致します。工作室の中島技官には実験装置作製においてお世話になりました。感謝致します。前田研究室秘書の鈴木智子さんには、様々な事務手続きをしていただくなど、お世話になりました。感謝致します。現前田研究室のメンバーや、同時期に前田研究室で研究生活を送り、すでに前田研を卒業した皆様にも様々なアドバイスを頂き、セミナーなどを通して多くの刺激と示唆を得ることができました。ありがとうございました。

その他、研究を行うにあたってお世話になった多数の方々にこの場を借りて深く御礼申し上げます。

